บทที่ 3

การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยไม่รวมความเฉื่อย

ในบทนี้ จะทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยไม่รวมความเฉื่อย การไหลประเภทนี้เกิดขึ้นเมื่อเรย์โนลด์นัมเบอร์ (Reynold number) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของแรงเฉื่อยกับแรงหนืดนั้นมีค่าต่ำ การไหลดังกล่าวโดยทั่วไปแล้ว ของไหลจะมีการเคลื่อนตัวที่ค่อนข้างเชื่องช้า เมื่อค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์มีค่าน้อยมากๆ เช่นนี้ ค่าของความเฉื่อยจะแทบไม่มีความสำคัญเมื่อเปรียบเทียบกับค่าของความหนืด ดังนั้นจึงสามารถละพจน์ที่สอดคล้องกับค่าของความเฉื่อยนี้ออกจากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมได้ ดังที่ได้แสดงในสมการ (2.18a-b)

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่ไม่รวมความเฉื่อย ดังแสดงในสมการที่ (2.17-2.18) จะนำมาแสดงในบทนี้อีกครั้งเพื่อให้เกิดความชัดเจนและต่อเนื่อง ซึ่งระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ใน 2 มิติ ประกอบด้วยสมการการอนุรักษ์มวล และสมการการอนุรักษ์โมเมนตัมอีก 2 สมการ ดังนี้

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \tag{3.1}$$

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \tag{3.2a}$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \tag{3.2b}$$

โดย ค่าของความเค้นในทิศทางต่างๆกัน คือ

$$\sigma_x = -p + 2\mu u_{,x} \tag{3.3a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu v_{,y} \tag{3.3b}$$

$$\tau_{xy} = \mu (u_{,y} + v_{,x}) \tag{3.3c}$$

ประกอบกับเงื่อนไขขอบเขตของการกำหนดค่าความเร็วตลอดขอบ S_1 (ดังแสดงในรูป 2.3)

$$u = u_1 (x, y) \tag{3.4a}$$

$$v = v_1 (x, y) \tag{3.4b}$$

และแรงที่กระทำตลอดขอบ S_2 ซึ่งคือ

$$T_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m \tag{3.5a}$$

$$T_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \tag{3.5b}$$

3.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ตัวแปรที่ไม่รู้ค่าสำหรับปัญหาการไหลจากสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (3.1) และสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมอีก 2 สมการ (3.2a-b) คือความเร็ว u, v ในทิศแกน x, y และความดัน p สำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์ใดๆ การกระจายของความเร็วและความดันภายในเอลิเมนต์นั้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ได้ดังนี้

$$u(x, y) = \sum N_i(x, y)\, u_i = \lfloor N \rfloor \{u\} \tag{3.6a}$$

$$v(x, y) = \sum N_i(x, y)\, v_i = \lfloor N \rfloor \{v\} \tag{3.6b}$$

$$p(x, y) = \sum H_i(x, y)\, p_i = \lfloor H \rfloor \{p\} \tag{3.6c}$$

โดย N_i และ H_i คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับความเร็วและความดันตามลำดับ ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น สามารถทำได้โดยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (เดชะอำไพ, 2537) ขั้นตอนของระเบียบวิธีดังกล่าวเริ่มจากการคูณสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดขอบเขตของเอลิเมนต์นั้น แล้วจึงกำหนดให้ค่าที่ได้เท่ากับศูนย์ ระเบียบวิธีดังกล่าวนี้จะถูกเรียกว่าระเบียบวิธีของบับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Gakerkin) โดยหากเลือกฟังก์ชันน้ำหนักให้เหมือนกับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ เมื่อทำการประยุกต์ขั้นตอนดังกล่าวนี้เข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์การอนุรักษ์โมเมนตัม (3.2a-b) และสมการเชิงอนุพันธ์การอนุรักษ์มวล (3.1) จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\int_A N_i\,(\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y})\, dA = 0 \tag{3.7a}$$

$$\int_A N_i\,(\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y})\, dA = 0 \tag{3.7b}$$

$$\int_A H_i\,(u_{,x} + v_{,y})\, dA = 0 \tag{3.8}$$

โดย A คือพื้นที่ของเอลิเมนต์นั้นๆ สมการนี้อยู่ในรูปการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์ จากนั้น จึงทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) เข้ากับพจน์ต่างๆ ยกตัวอย่างเช่น หากประยุกต์เข้ากับพจน์แรกทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.7a) จะได้

$$\int_A N_i \sigma_{x,x}\, dA = \int_A (N_i \sigma_x)_{,x}\, dA - \int_A (N_{i,x} \sigma_x)\, dA$$

$$= \int_S (N_i \sigma_x l)\, dS - \int_A (N_{i,x} \sigma_x)\, dA \qquad (3.9)$$

ในที่นี้ l คือทิศทางโคซายน์ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ในทำนองเดียวกัน ทำการประยุกต์เข้ากับพจน์ที่สองทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.7a) จะได้

$$\int_A N_i \tau_{xy,y}\, dA = \int_A (N_i \tau_{xy})_{,y}\, dA - \int_A (N_{i,y} \tau_{xy})\, dA$$

$$= \int_S (N_i \tau_{xy} m)\, dS - \int_A (N_{i,y} \tau_{xy})\, dA \qquad (3.10)$$

ในทำนองเดียวกัน หากทำการประยุกต์ทฤษฎีของเกาส์เข้ากับพจน์แรกและพจน์ที่สองของทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.7b) จะได้

$$\int_A N_i \tau_{xy,x}\, dA = \int_A (N_i \tau_{xy})_{,x}\, dA - \int_A (N_{i,x} \tau_{xy})\, dA$$

$$= \int_S (N_i \tau_{xy} l)\, dS - \int_A (N_{i,x} \tau_{xy})\, dA \qquad (3.11)$$

$$\int_A N_i \sigma_{y,y}\, dA = \int_A (N_i \sigma_y)_{,y}\, dA - \int_A (N_{i,y} \sigma_y)\, dA$$

$$= \int_S (N_i \sigma_y m)\, dS - \int_A (N_{i,y} \sigma_y)\, dA \qquad (3.12)$$

แทนสมการ (3.9-3.12) ลงในสมการ (3.7a-b) จะได้

$$\int_A (N_{i,x} \sigma_x + N_{i,y} \tau_{xy})\, dA = \int_S N_i (\sigma_x l + \tau_{xy} m)\, dS \qquad (3.13a)$$

$$\int_A (N_{i,x} \tau_{xy} + N_{i,y} \sigma_y)\, dA = \int_S N_i (\tau_{xy} l + \sigma_y m)\, dS \qquad (3.13b)$$

พจน์ต่าง ๆทางด้านขวามือของทั้งสองสมการข้างบนนี้ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของแรงดึงที่ผิว โดยใช้สมการ (3.5a-b) ได้ดังนี้

$$\int_A (N_{i,x}\,\sigma_x + N_{i,y}\,\tau_{xy})\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (3.14a)$$

$$\int_A (N_{i,x}\,\tau_{xy} + N_{i,y}\,\sigma_y)\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (3.14b)$$

เนื่องจากความเค้นย่อยต่าง ๆสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความดันและอัตราเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ดังนั้นเมื่อแทนสมการ (3.3a-c) ลงในสมการ (3.14a-b) จะได้

$$2\mu \int_A (N_{i,x}\,u_{,x})\,dA + \mu \int_A N_{i,y}\,(u_{,y} + v_{,x})\,dA$$

$$- \int_A (N_{i,x}\,p)\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS \qquad (3.15a)$$

$$\mu \int_A N_{i,x}\,(u_{,y} + v_{,x})\,dA + 2\mu \int_A (N_{i,y}\,v_{,y})\,dA$$

$$- \int_A (N_{i,y}\,p)\,dA = \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS \qquad (3.15b)$$

ทั้งสองสมการนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าอนุพันธ์ได้ ดังนี้

$$\int_A \left[\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p\right)\frac{\partial N_i}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial N_i}{\partial y}\right] dA = \int_{S_2} N_i\,T_x\,dS$$

(3.16a)

$$\int_A \left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial N_i}{\partial x} + \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p\right)\frac{\partial N_i}{\partial y}\right] dA = \int_{S_2} N_i\,T_y\,dS$$

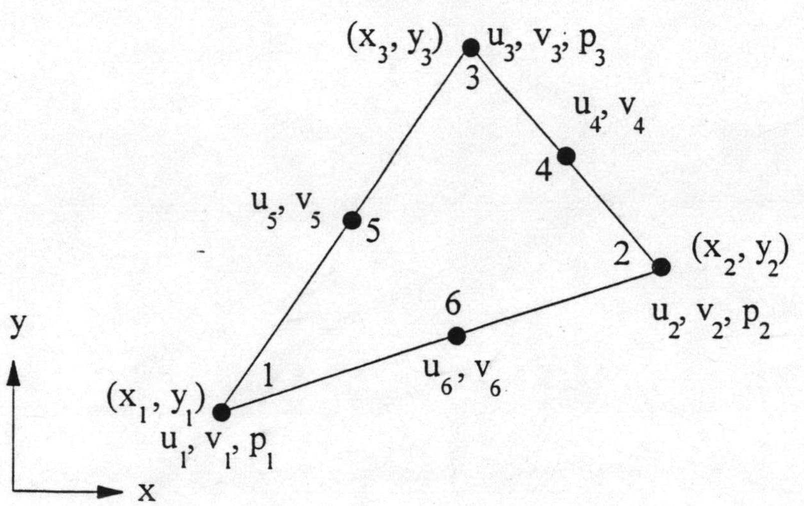
(3.16b)

พร้อมกับสมการที่สอดคล้องกับสมการการอนุรักษ์มวล (3.8) ซึ่งคือ

$$\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) H_i\,dA = 0 \qquad (3.16c)$$

3.2 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมจะนำมาใช้ในการศึกษานี้เพื่อการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่างๆ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่นำมาศึกษาประกอบด้วย 6 จุดต่อ ซึ่งมีการสมมุติลักษณะการกระจายของความเร็วที่เป็นโพลิโนเมียลหนึ่งอันดับสูงกว่าลักษณะการกระจายของความดัน เอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 3.1 นี้ ประกอบด้วยความเร็ว u และความเร็ว v ที่ทั้ง 6 จุดต่อ และความดันที่ 3 จุดต่อที่มุมของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น.



รูป 3.1 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมสำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว

เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมแสดงในรูปที่ 3.1 นี้ ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าทั้งหมด 15 ตัว ซึ่งหมายถึงจำเป็นต้องมีจำนวนสมการทั้งสิ้น 15 สมการต่อหนึ่งเอลิเมนต์ การกระจายของความเร็ว u และ v บนเอลิเมนต์นี้ในรูปแบบสมการ (3.6a-b) คือ

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{6} N_i (x, y)\, u_i = \underset{(1x6)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(6x1)}{\{u\}} \tag{3.17a}$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^{6} N_i (x, y)\, v_i = \underset{(1x6)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(6x1)}{\{v\}} \tag{3.17b}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ คือ เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \rfloor \tag{3.18}$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เหล่านี้ ซึ่งคือ N_i, $i = 1, 6$ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ L_1, L_2, L_3 ดังนี้

$$
\begin{aligned}
N &= L_1^2 - L_1 (L_2 + L_3) \\
N_2 &= L_2^2 - L_2 (L_3 + L_1) \\
N_3 &= L_3^2 - L_3 (L_1 + L_2) \\
N_4 &= 4 L_2 L_3 \\
N_5 &= 4 L_3 L_1 \\
N_6 &= 4 L_1 L_2
\end{aligned}
\qquad (3.19)
$$

โดยฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่เหล่านี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของค่าคงที่ต่าง ๆและโคออร์ดิเนตของเอลิเมนต์ที่พิจารณาอยู่นั้น ได้คือ

$$L_i (x, y) = a_i + b_i x + c_i y \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (3.20)$$

โดย a_i, b_i, c_i ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อและพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้น

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2A \\
a_2 &= (x_3 y - x y_3) / 2A \\
a_3 &= (x y_2 - x_2 y) / 2A
\end{aligned}
\qquad (3.21)
$$

$$
\begin{aligned}
b &= (y_2 - y_3) / 2A \quad ; \quad & c_1 &= (x_3 - x_2) / 2A \\
b_2 &= (y_3 - y) / 2A \quad ; \quad & c_2 &= (x - x_3) / 2A \\
b_3 &= (y - y_2) / 2A \quad ; \quad & c_3 &= (x_2 - x) / 2A
\end{aligned}
\qquad (3.22)
$$

และ A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์ซึ่งสามารถคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2} \left[x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \right] \qquad (3.23)$$

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ N_i, $i = 1, 6$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ L_i, $i = 1, 3$ ในรูปแบบของเมตริกซ์ ได้คือ

$$\underset{(1x6)}{\lfloor N \rfloor} = \underset{(1x6)}{\lfloor R \rfloor} \underset{(6x6)}{[A]} \qquad (3.24)$$

หรือ

$$\underset{(6x1)}{\{N\}} = (\underset{(1x6)}{\lfloor R \rfloor} \underset{(6x6)}{[A]})^T = \underset{(6x6)}{[A]^T} \underset{(1x6)}{\lfloor R \rfloor^T} \qquad (3.25)$$

โดย

$$\underset{(6x6)}{[A]^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

และ

$$\underset{(6x1)}{\{R\}} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} \tag{3.27}$$

การกระจายของความดันบนเอลิเมนต์นั้นถูกสมมุติให้มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงในเชิงเส้น กล่าวคือ

$$p\,(x, y) = \sum_{i=1}^{3} H_i\,(x, y)\,p_i = \underset{(1x3)}{\lfloor H \rfloor}\;\underset{(3x1)}{\{p\}} \tag{3.28}$$

โดย $\lfloor H \rfloor$ คือ เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันการประมาณภายใน

$$\lfloor H \rfloor = \lfloor L_1 \quad L_2 \quad L_3 \rfloor \tag{3.29}$$

เมื่อใช้ลักษณะของการกระจายของความเร็วบนเอลิเมนต์ในรูปแบบสมการ (3.17a-b) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในทิศทางต่าง ๆกันของเอลิเมนต์นั้น คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{u\} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{u\} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{v\} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor \{v\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

แทนสมการเหล่านี้ลงในสมการ (3.16a-c) จะได้

$$2\mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA\,\{u\} + \mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA\,\{u\}$$

$$+\ \mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA\,\{v\} - \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\lfloor H\rfloor\, dA\,\{p\}$$

$$= \int_{S_2} \{N\}\,T_x\,dS \qquad (3.31a)$$

$$\mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA\,\{u\} + 2\mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA\,\{v\}$$

$$+\ \mu\int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA\,\{v\} - \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\}\lfloor H\rfloor\, dA\,\{p\}$$

$$= \int_{S_2} \{N\}\,T_y\,dS \qquad (3.31b)$$

$$\int_A \{H\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA\,\{u\} + \int_A \{H\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA\,\{v\} = \{0\} \qquad (3.31c)$$

สมการ (3.31a-c) ที่ได้นี้ เป็นสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยไม่รวมความเฉื่อย สมการชุดนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2\mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{xx}\end{bmatrix}} + \mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{yy}\end{bmatrix}} & \mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{xy}\end{bmatrix}} & -\underset{(6x3)}{\begin{bmatrix}H^{x}\end{bmatrix}} \\ \mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{yx}\end{bmatrix}} & \mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{xx}\end{bmatrix}} + 2\mu\underset{(6x6)}{\begin{bmatrix}M^{yy}\end{bmatrix}} & -\underset{(6x3)}{\begin{bmatrix}H^{y}\end{bmatrix}} \\ \underset{(3x6)}{\begin{bmatrix}H^{x}\end{bmatrix}^T} & \underset{(3x6)}{\begin{bmatrix}H^{y}\end{bmatrix}^T} & \underset{(3x3)}{\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{(6x1)}{\{u\}} \\ \underset{(6x1)}{\{v\}} \\ \underset{(3x1)}{\{p\}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{(6x1)}{\{R_u\}} \\ \underset{(6x1)}{\{R_v\}} \\ \underset{(3x1)}{\{0\}} \end{Bmatrix}$$

(3.32)

โดย

$$[M^{xx}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \tag{3.33a}$$

$$[M^{yy}] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial y} \right\rfloor dA \tag{3.33b}$$

$$[M^{xy}] = [M^{yx}]^T = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \tag{3.33c}$$

$$[H^x] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \lfloor H \rfloor dA \tag{3.33d}$$

$$[H^y] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} \lfloor H \rfloor dA \tag{3.33e}$$

$$\{R_u\} = \int_{S_2} \{N\} T_x \, dS \tag{3.33f}$$

$$\{R_v\} = \int_{S_2} \{N\} T_y \, dS \tag{3.33g}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบของอินทิกรัลดังแสดงในสมการที่ (3.33a-g) สามารถหาค่าได้โดยตรงโดยไม่ต้องใช้การอินทิเกรตแบบเชิงเลข การหาค่าดังกล่าวสามารถทำได้โดยเริ่มจากการใช้สมการ (3.25) ดังนี้

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left([A]^T \{R\}\right) = [A]^T \frac{\partial}{\partial x} \{R\} \tag{3.34}$$

แต่จากสมการ (3.27)

$$\frac{\partial}{\partial x}\{R\} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

$$= [B]^T \{H\} \tag{3.36}$$

ซึ่งในทำนองเดียวกัน

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left([A]^T \{R\}\right) = [A]^T \frac{\partial}{\partial y}\{R\} \qquad (3.37)$$

และจากสมการ (3.27)

$$\frac{\partial}{\partial y}\{R\} = \frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.38)$$

$$= [C]^T \{H\} \qquad (3.39)$$

จากการใช้สมการ (3.34-3.39) ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์สามารถคำนวณหาค่าได้โดยตรง ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์ในสมการ (3.33a) ซึ่งคือ

$$\left[M^{xx}\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\}\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA \qquad (3.33a)$$

แทนสมการ (3.34-3.36) ลงในสมการนี้จะได้

$$\left[M^{xx}\right] = \int_A [A]^T [B]^T \{H\} \lfloor H \rfloor [B][A]\, dA$$

$$= [A]^T [B]^T \int_A \{H\} \lfloor H \rfloor\, dA\, [B][A] \qquad (3.40)$$

$$= [A]^T [B]^T \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA\, [B][A]$$

$$= [A]^T [B]^T \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}[B][A]$$

$$\left[M^{xx}\right] = [A]^T [B]^T [G][B][A] \qquad (3.41)$$

โดย

$$[G] = \frac{A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

ในทำนองเดียวกันไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (3.33b-c) สามารถหาค่าได้โดยตรง ซึ่งก่อให้เกิด

$$\left[M^{yy}\right] = [A]^T [C]^T [G] [C] [A] \tag{3.43}$$

$$\left[M^{xy}\right] = \left[M^{yx}\right]^T = [A]^T [C]^T [G] [B] [A] \tag{3.44}$$

และในทำนองเดียวกัน จากสมการ (3.33d)

$$\left[H^x\right] = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} \lfloor H \rfloor \, dA \tag{3.33d}$$

$$= \int_A [A]^T [B]^T \{H\} \lfloor H \rfloor \, dA$$

$$= [A]^T [B]^T \int_A \{H\} \lfloor H \rfloor \, dA$$

$$\left[H^x\right] = [A]^T [B]^T [G] \tag{3.45}$$

เช่นเดียวกันจะได้

$$\left[H^y\right] = [A]^T [C]^T [G] \tag{3.46}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เวกเตอร์ทั้ง 2 เวกเตอร์ดังแสดงในสมการ (3.33f-g) ต่างอยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรตตลอดขอบของเอลิเมนต์ ยกตัวอย่างเช่น หากแรงที่ขอบ T_x มีค่าเท่ากับความดัน p ตลอดแนวขอบที่มีความยาว L ซึ่งประกอบด้วยจุดต่อหมายเลข 2-3-4 แล้ว เวกเตอร์ในสมการ (3.33f) นี้ สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้ ดังนี้

$$\{R_u\} = \frac{pL}{6}\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.47}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แสดงในสมการ (3.32-3.47) ซึ่งเขียนในรูปแบบของเมตริกซ์สามารถเขียนให้เป็นรูปแบบของเทนเซอร์ได้เช่นกัน ในการประดิษฐ์สมการในรูปแบบของเทนเซอร์ดังกล่าว จะเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.25) ในรูปแบบของเทนเซอร์ ดังนี้

$$N_{\alpha} = A_{\alpha\xi} R_{\xi} \qquad (3.48)$$

เมื่อ $\alpha, \xi = 1, 2, \ldots\ldots, 6$ สัญญลักษณ์ $A_{\alpha\xi}$ และ R_{ξ} มีความหมายดังแสดงในสมการ (3.26) และ (3.27) ตามลำดับ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในที่สอดคล้องกับ x ดังแสดงในสมการ (3.34-3.35) คือ

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} \qquad (3.49)$$

โดย $\eta = 1, 2, 3$ สัญญลักษณ์ H_{η} นั้นมีความหมายดังแสดงในสมการ (3.29) และในทำนองเดียวกัน ค่าอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับ y ดังแสดงในสมการ (3.38-3.39) คือ

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} \qquad (3.50)$$

ด้วยการใช้ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์นี้ ค่าไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ดังที่แสดงในสมการ (3.33a) ซึ่งได้ประดิษฐ์ในสมการ (3.40-3.42) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ได้เช่นกัน ดังนี้

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \int_A N_{\alpha,x} N_{\alpha,x}\, dA \qquad (3.51)$$

$$= \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} H_{\mu}\, dA$$

$$= A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_{\eta} H_{\mu}\, dA \qquad (3.52)$$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (3.52) นี้ สามารถประดิษฐ์ให้อยู่ในรูปแบบของสมการ (3.40-3.41) ได้ ดังนี้

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \qquad (3.53)$$

โดย $\alpha, \beta, \xi, \lambda = 1, 2, \ldots\ldots, 6$ และ $\eta, \mu = 1, 2, 3$ สัญญลักษณ์ $G_{\eta\mu}$ ขึ้นอยู่กับขนาดของเอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.42) ในทำนองเดียวกัน ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ดังแสดงในสมการ (3.33b-c) สามารถประดิษฐ์ได้ ดังนี้

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{3.54}$$

$$M_{\alpha\beta^{xy}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{3.55}$$

$$M_{\alpha\beta^{yx}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} G_{\eta\mu} \tag{3.56}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่แสดงในสมการ (3.33d-e) ประกอบด้วยอินทิกรัลที่เป็นผลคูณของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเหล่านั้น เอลิเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้สามารถหาค่าและเขียนในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ ตัวอย่างของเอลิเมนต์เมตริกซ์ ดังเช่นแสดงในสมการ (3.33d) คือ

$$H_{\alpha\mu^{x}} = \int_A A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} H_{\mu}\, dA \tag{3.57}$$

$$= A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_{\eta} H_{\mu}\, dA$$

$$H_{\alpha\mu^{x}} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \tag{3.58}$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (3.33e) สามารถเขียนในรูปแบบของเทนเซอร์ ได้ดังนี้

$$H_{\alpha\mu^{y}} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} G_{\eta\mu} \tag{3.59}$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่าง ๆที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้นี้ ซึ่งอาจอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ดังแสดงในสมการ (3.34-3.47) หรืออยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ ดังแสดงในสมการ (3.48-3.59) สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงสำหรับการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวที่ไม่รวมความเฉื่อย ดังนั้นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวจึงได้ทำการประดิษฐ์ขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมและขั้นตอนการคำนวณ ลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมนี้ต้องการ ลักษณะของไฟล์ที่เกิดขึ้นจากการคำนวณ รวมทั้งการใช้โปรแกรมนี้กับปัญหาตัวอย่าง จะนำเสนอในบทที่ 4 ต่อไป