บทที่ 2

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

บทนี้เป็นการแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) ที่อธิบายลักษณะของการไหลผ่านรูปทรงต่าง ๆภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ใดๆ สำหรับการไหลโดยทั่วไปนั้น ระบบสมการเชิงอนุพันธ์จะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่สอดคล้องกับ (1) การอนุรักษ์มวล (Conservation of mass) (2) การอนุรักษ์โมเมนตัม (Conservation of momentum) และ (3) การอนุรักษ์พลังงาน (Conservation of energy) สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) อันประกอบไปด้วยตัวแปรตาม (Dependent variables) ที่ไม่ทราบค่าหลายตัวแปร อันได้แก่ ตัวแปรของความเร็วในทิศต่าง ๆกัน ตัวแปรของความดัน และตัวแปรของอุณหภูมิ

หากปัญหาที่ทำการศึกษาอยู่นั้น มีการกระจายของอุณหภูมิที่สม่ำเสมอทั่วทั้งขอบเขตของการไหล สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์พลังงานจะไม่สัมพันธ์ (Uncoupled) กับสมการเชิงอนุพันธ์อื่น ๆ ดังนั้น สำหรับการไหลที่ไม่มีการพิจารณาผลของอุณหภูมิเข้ามาเกี่ยวข้อง จึงจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมเท่านั้น ซึ่งจะนำเสนอโดยละเอียดในวิทยานิพนธ์นี้

2.1 สมการการอนุรักษ์มวล

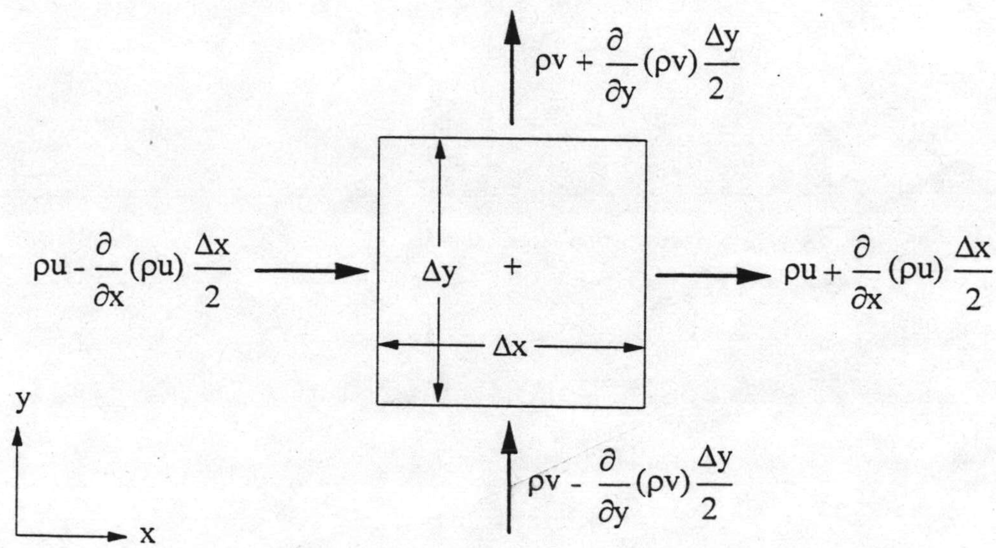
เพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจ สมการการอนุรักษ์มวลและโมเมนตัม จะทำการประดิษฐ์ขึ้นใน 2 มิติ สำหรับการไหลผ่านเอลิเมนต์เล็กที่มีขนาด Δx และ Δy ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ผลที่เหลือจากการไหลผ่านเอลิเมนต์นี้ จำเป็นต้องเท่ากับอัตราการเปลี่ยนของมวลภายใน หากกำหนดให้ u แทนความเร็วของการไหลในแนวแกน x และ v แทนความเร็วของการไหลในแนวแกน y และหากกำหนดการไหลผ่านออกจากเอลิเมนต์ให้มีค่าเป็นบวก จากการใช้อนุกรมเทย์เลอร์เพื่อหาค่าการไหลผ่านขอบเอลิเมนต์ดังแสดงในรูป 2.1 นี้ ผลที่เหลือจากการไหลผ่านเอลิเมนต์ของมวลต่อหนึ่งหน่วยเวลา คือ

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y + \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right]\Delta x$$

$$- \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y - \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right]\Delta x$$

ซึ่งจำเป็นต้องเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของมวลที่ลดลงในเอลิเมนต์นั้น ซึ่งคือ

$$- \frac{\partial \rho}{\partial t}\Delta x\, \Delta y$$



รูป 2.1 ความสมดุลของการไหลของมวลผ่านเอลิเมนต์ในสองมิติ

เนื่องจากสมการทั้งสองดังแสดงมานี้จำเป็นต้องมีค่าที่เท่ากัน ดังนั้นเมื่อจับให้เท่ากันและหารตลอดด้วย $\Delta x\, \Delta y$ ต่อจากนั้นกำหนดให้ค่าทั้ง Δx และ Δy ลู่เข้าหาศูนย์ จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \tag{2.1}$$

ในรูปแบบของเวกเตอร์ สมการข้างบนนี้สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \tag{2.2}$$

โดย

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{2.3}$$

$$\bar{V} = u\hat{i} + v\hat{j} \tag{2.4}$$

หากการไหลมีความเร็วต่ำกว่าเสียง ค่าความหนาแน่นของของไหลอาจกำหนดให้มีค่าคงที่ การไหลดังกล่าวจะเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว สมการอนุรักษ์มวล (2.1) จึงลดรูปลงมาเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.5}$$

หรือ ในรูปแบบของสมการเวกเตอร์

$$(\nabla \cdot \vec{V}) = 0 \tag{2.6}$$

2.2 สมการการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการของการอนุรักษ์โมเมนตัมสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้จากการประยุกต์กฎของนิวตันที่ว่า แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้น ดังนี้

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} \tag{2.7}$$

โดยทั่วไปแล้ว ความเร็วของอนุภาคการไหล $\vec{V}$ จะเป็นฟังก์ชันของเวลา t อีกทั้งตำแหน่ง x, y ของอนุภาคของการไหลยังขึ้นอยู่กับเวลาด้วย ดังนั้นค่าอนุพันธ์ของเวลาในสมการ (2.7) จะขึ้นอยู่กับการเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้น ค่าอนุพันธ์นี้จึงสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \tag{2.8}$$

และเนื่องจาก

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v$$

ดังนั้น ค่าอนุพันธ์ของความเร็วของอนุภาคของไหล คือ

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \tag{2.9}$$

หรือ

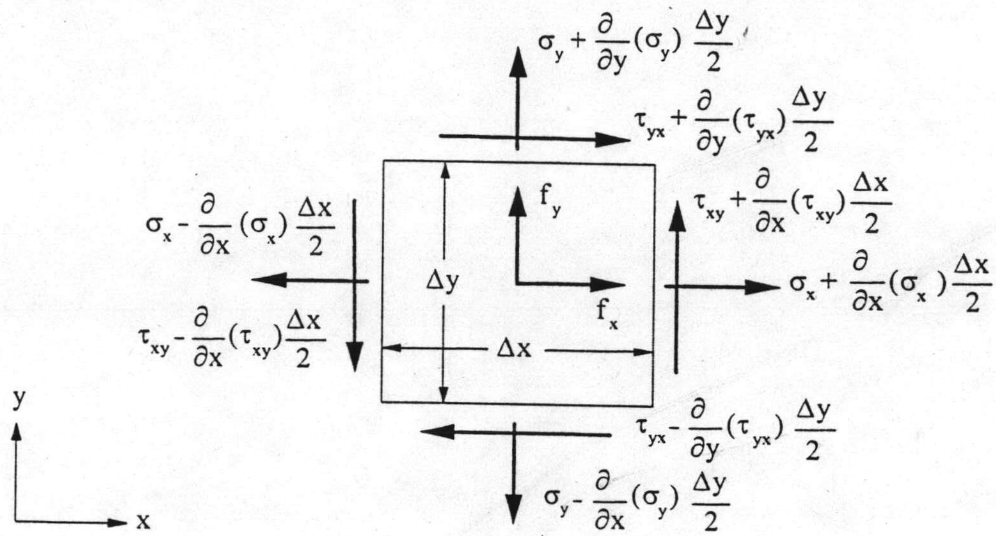
$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} \tag{2.10}$$

และสำหรับการไหลภายใต้สภาวะอยู่ตัว (Steady-state flow)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \tag{2.11}$$

แรงหลักที่กระทำต่อเอลิเมนต์เล็กใดๆประกอบด้วย แรงเนื่องจากน้ำหนักในตัวของของไหลเอง แรงเนื่องจากความดันซึ่งในที่นี้คือแรงเนื่องจากความเค้นในแนวตั้งฉากนั่นเอง และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือน

โดยทั่วไปแล้ว ความเค้นจะเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ดังนั้นจึงก่อให้เกิดแรงบนอนุภาคของการไหลซึ่งจะก่อให้เกิดความเร่ง แรงเหล่านี้คำนวณได้จากแรงจากความเค้นต่างๆกัน รูป 2.2 แสดงการสมดุลของแรงบนเอลิเมนต์ของของไหล



รูป 2.2 ความสมดุลของแรงบนเอลิเมนต์การไหลในสองมิติ

ผลลัพธ์ของแรงในแนวทิศแกน x (สำหรับความลึกหนึ่งหน่วยในแนวทิศแกน z) คือ

$$F_x = \rho f_x \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x)\Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})\Delta y \Delta x$$

และเนื่องจากพจน์ทางด้านขวาของสมการที่ (2.7) คือ

$$ma_x = \rho \Delta x \Delta y \frac{du}{dt} = \rho \Delta x \Delta y \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla)u\right]$$

ทั้งสองสมการนี้ข้างบนนี้จำเป็นต้องมีค่าที่เท่ากัน และหากหารตลอดด้วยปริมาตรของอนุภาคการไหล $\Delta x \Delta y$ จะได้ว่า

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} \tag{2.12a}$$

ในทำนองเดียวกัน สมการของการเคลื่อนที่ในแนวทิศของแกน y คือ

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho f_y + \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_y \qquad (2.12b)$$

สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน (Newtonian fluid) ความเค้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของความเร็วได้โดยใช้กฎของสโตกส์ (Stokes'Law) นั่นคือ

$$\sigma_x = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (2.13a)$$

$$\sigma_y = -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.13b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad (2.13c)$$

โดย μ แทนค่าความหนืดของของไหล หากแทนสมการ (2.13a-c) ลงในสมการ (2.12a-b) จะก่อให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับการอนุรักษ์โมเมนตัม หรือที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(\bar{V} \cdot \nabla)u = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{V}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \qquad (2.14a)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\bar{V} \cdot \nabla)v = \rho f_y + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \bar{V}\right) \qquad (2.14b)$$

สำหรับการไหลภายใต้สภาวะอยู่ตัว และหากละทิ้งแรงเนื่องจากน้ำหนักของของไหล สมการนาเวียร์-สโตกส์ จะลดรูปลงมาเป็น

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2.15a)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad (2.15b)$$

ยิ่งไปกว่านั้น หากพจน์ที่เกี่ยวข้องกับแรงเฉื่อยทางด้านขวาของสมการ (2.15a-b) นั้นมีค่าน้อย รูปแบบของสมการนาเวียร์-สโตกส์ จะลดรูปไปเป็นสมการของสโตกส์ (Stokes equation) ซึ่งคือ

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.16a}$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{2.16b}$$

เพื่อให้ง่ายแก่การประดิษฐ์และแสดงขั้นตอนการนำเสนอสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทต่อๆไป ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ จะเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ (Tensor notation) ดังเช่น สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล (2.5) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$u_{,x} + v_{,y} = 0 \tag{2.17}$$

โดยเครื่องหมาย จุลภาค (Comma) แทนการหาค่าอนุพันธ์ของพจน์นั้นๆ ในทำนองเดียวกันสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมสำหรับการไหลแบบคืบคลาน (Stokes flow) ดังแสดงในสมการ (2.16a-b) ในรูปแบบของความเค้นย่อยคือ

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} = 0 \tag{2.18a}$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{y,y} = 0 \tag{2.18b}$$

โดย จากสมการ (2.13a-c)

$$\sigma_x = -p + 2\,\mu\, u_{,x} \tag{2.19a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\,\mu\, v_{,y} \tag{2.19b}$$

$$\tau_{xy} = \mu\,(u_{,y} + v_{,x}) \tag{2.19c}$$

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวภายใต้สภาวะอยู่ตัว สมการเชิงอนุพันธ์นาเวียร์-สโตกส์ (2.15a-b) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ ดังนี้

$$u\, u_{,x} + v\, u_{,y} - \sigma_{x,x} - \tau_{xy,y} = 0 \tag{2.20a}$$

$$u\, v_{,x} + v\, v_{,y} - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} = 0 \tag{2.20b}$$

ซึ่งในกรณีนี้ค่าความเค้น คือ

$$\sigma_x = -p + 2\,\nu\, u_{,x} \tag{2.21a}$$

$$\sigma_y = -p + 2\,\nu\, v_{,y} \tag{2.21b}$$

$$\tau_{xy} = \nu\,(u_{,y} + v_{,x}) \tag{2.21c}$$

โดยค่าจลนศาสตร์ของความหนืด คือ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.22}$$

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้และสมการที่เกี่ยวข้อง จะถูกนำมาแก้ร่วมกันกับเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมสำหรับปัญหานั้นๆ ตัวอย่างเงื่อนไขของเขต ดังเช่นแสดงในรูป 2.3 ประกอบด้วย

1. การกำหนดค่าความเร็วตลอดขอบเขต S_1

$$u = u_1(x, y) \tag{2.23a}$$

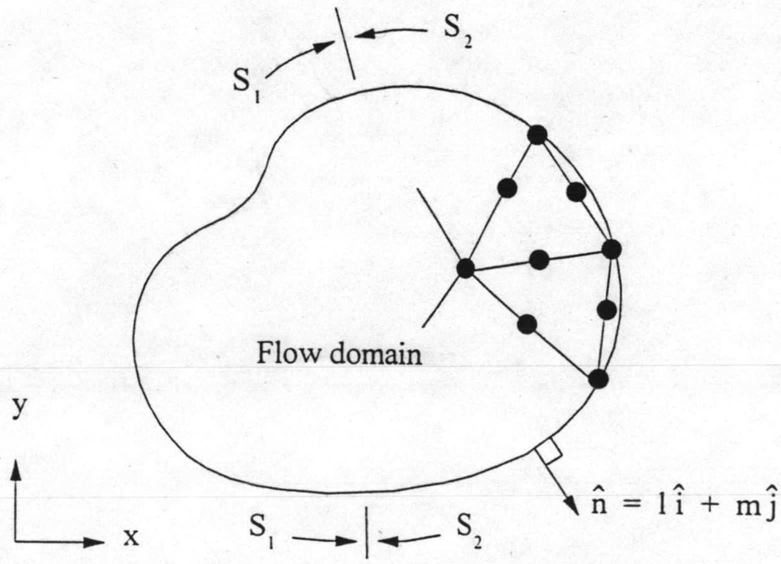
$$v = v_1(x, y) \tag{2.23b}$$

2. การกำหนดแรงที่ผิวตลอดขอบเขต S_2

$$T_x = \sigma_x\, l + \tau_{xy}\, m \tag{2.24a}$$

$$T_y = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m \tag{2.24b}$$

เมื่อ l และ m แทนทิศทางโคซายน์ของเวกเดอร์หนึ่งหน่วย $\hat{n}$ ซึ่งตั้งฉากกับขอบเขตนั้นๆ



รูป 2.3 โดเมนการไหลและเงื่อนไขขอบเขต