บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบัน การออกแบบผลิตภัณฑ์ต่างๆเพื่อใช้ในชีวิตประจำวันหรือในภาคอุตสาหกรรม ผู้ออกแบบต้องคำนึงถึงประสิทธิภาพของการใช้งานรวมทั้งลักษณะรูปร่างของผลิตภัณฑ์นั้นๆ ยกตัวอย่างเช่น การออกแบบรูปทรงของรถยนต์ ผู้ออกแบบต้องตระหนักถึงความแข็งแรงของโครงสร้าง ความปลอดภัยหากเกิดการชน การประหยัดน้ำมัน รวมไปถึงความสวยงาม การออกแบบเพื่อให้เกิดการประหยัดน้ำมันอาจทำได้หากออกแบบรูปทรงของรถยนต์นั้นให้มีลักษณะที่เพรียวลม เช่น รูปทรงตอนส่วนหน้าของรถ นับตั้งแต่กระโปรงรถ กระจกหน้า และกันชนต้องมีรูปร่างที่โค้งมน ในขณะที่ด้านท้ายของรถยนต์ต้องมีลักษณะเพรียวลมเพื่อป้องกันการเกิดลักษณะการหมุนวนของอากาศ (Recirculation) ที่จะหน่วงการขับเคลื่อนของตัวรถทำให้ใช้น้ำมันมากขึ้น เนื่องจากโครงสร้างของรถยนต์โดยปรกติจะมีลักษณะที่ซับซ้อน การคำนวณความแข็งแรงของโครงสร้างจึงเป็นสิ่งที่จำเป็น ในขณะที่ลักษณะการไหลของอากาศผ่านตัวรถนั้นเป็นสิ่งจำเป็นไม่น้อยไปกว่ากัน หากปรากฏการณ์ต่างๆเหล่านี้สามารถทราบได้ก่อนการนำแบบที่ออกมาแล้วนั้นไปสร้างเป็นของจริง จะช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายไปได้มาก ยิ่งไปกว่านั้น ผู้ออกแบบจะเกิดความมั่นใจในรูปทรงของผลิตภัณฑ์นั้นว่าจะก่อให้เกิดประสิทธิภาพได้สูงสุด หลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูก (Trial and Error) ดังที่อาจเคยใช้กันมาในอดีต

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ชนิดหนึ่งที่ได้รับการพัฒนาและเป็นที่นิยมใช้กันมากในปัจจุบัน เพราะสามารถประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่างๆที่มีรูปร่างที่ซับซ้อนโดยทั่วไป (Zienkiewicz, 1991) ปัญหาในงานวิศวกรรมส่วนใหญ่ที่ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ได้ถูกนำไปใช้กันมากคือปัญหาที่เกี่ยวกับความแข็งแรงในของแข็ง (Hughes, 1987 และ Cook, 1989) เช่น การคำนวณความแข็งแรงของโครงสร้างสะพาน รถยนต์ เฟืองเกียร์ ฯลฯ เนื่องจากระเบียบวิธีดังกล่าว ตั้งอยู่บนรากฐานของคณิตศาสตร์และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ทำให้ระเบียบวิธีนี้ได้เริ่มถูกนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาสำหรับงานวิศวกรรมในสาขาอื่นๆ อาทิ เช่น ปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Jin, 1993) ปัญหาการถ่ายเทความร้อน (Heat transfer) รวมทั้งปัญหาการไหลของของเหลว (Fluid flow)

ตลอดระยะเวลาประมาณ 30 ปีที่ผ่านมา การคำนวณลักษณะการไหลของของเหลวมักจะทำโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องนี้เป็นระเบียบวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจแต่ไม่สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูงหากรูปร่างของปัญหานั้นมีลักษณะที่ซับซ้อน (Lam, 1994) ปัญหาของการไหล อาจจำแนกออกได้เป็น 4 ประเภทใหญ่ๆ กล่าวคือ: (1) การไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัว (Inviscid incompressible flow), (2) การไหลแบบไม่หนืดแต่อัดตัวได้ (Inviscid compressible flow), (3) การไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัว (Viscous incompressible flow), และ (4) การไหลแบบหนืดและอัดตัวได้ (Viscous compressible flow) การไหลประเภทแรกซึ่งคือการไหลแบบไม่หนืดและไม่อัดตัวนั้น ตั้งอยู่บนสมมุติฐานที่สำคัญ กล่าวคือ การไหลนี้มีความเร็วต่ำทำให้ความหนาแน่นของของเหลวนั้นคงที่สม่ำเสมอและของเหลวนั้นไม่มีความหนืด ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาประเภทนี้ในสมัยแรกๆ (Oden, 1974 และ Gallagher, 1975) การไหลประเภทที่ 2 และ 4 ซึ่งเป็นแบบอัดตัวได้ กล่าวคือความหนาแน่นของของเหลวนั้นเปลี่ยนแปลงไปได้ตามตำแหน่งต่างๆ โดยปรกติจะเกิดขึ้นกับปัญหาของการไหลที่มีความเร็วสูง เช่น การไหลผ่านเครื่องบินที่บินเร็วกว่าเสียง (Peraire, 1988 และ Hassan, 1991) เป็นต้น ซึ่งการคำนวณปรากฏการณ์การไหลชนิดนี้กำลังอยู่ในระดับการทำวิจัยและยังต้องการการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นไปอีก

การไหลประเภทที่ 3 ซึ่งเป็นการไหลแบบมีความหนืดและความหนาแน่น (Density) ของของเหลวที่ถูกจัดว่ามีความสม่ำเสมอตลอดขอบเขตของการไหลนั้น จัดได้ว่ามีความสำคัญต่อการออกแบบงานต่างๆในทางวิศวกรรมในปัจจุบันมากเช่นกัน ตัวอย่างของปัญหาที่สอดคล้องกับการไหลประเภทนี้ ได้แก่ การไหลผ่านรถยนต์ การไหลของสายน้ำในลำคลองที่มีความคดเคี้ยวลงสู่บึง การไหลหมุนวนของอากาศภายในห้องทำงาน ฯลฯ ปัญหาเหล่านี้เป็นการไหลแบบมีความหนืดซึ่งหากสามารถคำนวณปรากฏการณ์ของลักษณะการไหลได้ จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการออกแบบได้มากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่น การติดตั้งเครื่องปรับอากาศในห้องทำงาน หากตำแหน่งที่ติดตั้งนั้นก่อให้เกิดจุดอับที่มุมห้องอันเกิดจากการหมุนวนของอากาศในบริเวณนั้นแล้ว จะทำให้การถ่ายเทอากาศเป็นไปได้ไม่ดี หากผู้ออกแบบสามารถทราบปรากฏการณ์ดังกล่าวได้ล่วงหน้าก่อนการติดตั้งจริง ก็จะหลีกเลี่ยงสิ่งที่ไม่พึงประสงค์ดังกล่าวได้ และในขณะเดียวกันผู้ออกแบบสามารถทำการคำนวณหาตำแหน่งการติดตั้งที่เหมาะสมมากที่สุด อันจะก่อให้เกิดการหมุนเวียนของอากาศภายในห้องที่ดีที่สุด เป็นต้น

การแก้ปัญหาของการไหลประเภทที่ 3 ซึ่งเป็นการไหลแบบมีความหนืดนี้ ตัวไม่รู้ค่าประกอบด้วยค่าของความเร็วของการไหลในทิศทางต่างๆกัน (Velocity components) และค่าของความดัน (Pressure) ณ ตำแหน่งใดๆ ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้คำนวณมาได้จากระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equations) ซึ่งประกอบด้วย

สมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear partial differential equations) หลายสมการ ระบบของสมการในรูปแบบไม่เชิงเส้นดังกล่าวก่อให้เกิดความยากลำบากในการแก้สมการ แต่หากการไหลนั้นเป็นไปอย่างเชื่องช้า (Creeping flow) ระบบสมการในรูปแบบไม่เชิงเส้นนี้สามารถลดรูปให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้นได้ (Linear equations) ทำให้สามารถแก้หาผลลัพธ์ได้โดยสะดวกมากขึ้น Yamada และคณะ (1975) ได้เริ่มประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับการไหลแบบเชื่องช้านี้ขึ้น และได้แสดงประสิทธิภาพจากการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการคำนวณสภาวะการไหลผ่านรูปวงกลมใน 2 มิติ

หากการไหลนั้นไม่เป็นไปอย่างเชื่องช้าแล้ว การแก้ปัญหาจำเป็นต้องแก้โดยตรงจากสมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ตลอดระยะเวลาที่ผ่านมาได้มีผู้เสนอระเบียบวิธีต่างๆเพื่อใช้แก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นดังกล่าว เช่น Kawahara และคณะ (1979) ได้ใช้วิธีของ Yamada โดยประยุกต์ระเบียบวิธีการเพิ่มทีละช่วง (Incremental method) พร้อมทั้งได้เสนอแนะการใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method) เพื่อแก้ระบบสมการไม่เชิงเส้นนี้ Hughes และคณะ (1979) ได้เสนอระเบียบวิธีพินัลตีฟังก์ชัน (Penalty function) ซึ่งตั้งอยู่บนรากฐานของการสมมุติค่าความดันให้อยู่ในรูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว Rice และคณะ (1985) เสนอวิธีสตรีมไลน์อัพวินด์ (Steamline upwind) ซึ่งเป็นการใช้ความรู้ที่ได้มาจากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) เพื่อจัดการกับพจน์ไม่เชิงเส้น (Nonlinear term) รวมทั้ง Jiang (1992) ได้เสนอระเบียบวิธีกำลังสองต่ำสุด (Least-squares method) โดยประยุกต์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้แก้ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ ที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นนี้เช่นกัน

จากการศึกษาระเบียบวิธีการต่างๆดังที่กล่าวมานี้ พบว่าระเบียบวิธีที่แนะนำโดย Yamada และถูกนำมาศึกษาต่อโดย Kawakara จัดได้ว่าเป็นระเบียบวิธีที่สามารถทำความเข้าใจได้โดยสะดวกกว่าระเบียบวิธีอื่นๆ ซึ่งเป็นการประยุกต์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เข้ากับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์โดยตรงเพื่อประดิษฐ์สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element equations) ที่สอดคล้องกันขึ้น สมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นมานี้อยู่ในรูปแบบของสมการไม่เชิงเส้น จึงจำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันอีกขั้นตอนหนึ่งเพื่อแก้สมการไม่เชิงเส้นเหล่านี้ ดังนั้น จุดประสงค์หลักของวิทยานิพนธ์นี้คือการนำเสนอขั้นตอนการประดิษฐ์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์อย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยละเอียด และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน รวมทั้งการแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ในการแก้ปัญหาที่มีลักษณะรูปแบบต่างๆกัน

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้จะเป็นการศึกษาการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อแก้ปัญหาการไหลแบบหนืดแต่ไม่อัดตัวโดยมีรายละเอียดอย่างเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1.2.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติ เพื่อให้เกิดความเข้าใจในลักษณะการไหลแบบหนืดในสองกรณี คือ (ก) การไหลแบบเชื่องช้าซึ่งพจน์ของความเฉื่อยที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นนั้นละทิ้งได้ และ (ข) การไหลโดยทั่วไปซึ่งพจน์ของความเฉื่อยที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นนี้ต้องรวมอยู่ในกระบวนการแก้ปัญหา

1.2.2 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบหนืดในกรณีที่เป็นการไหลแบบเชื่องช้าสำหรับหัวข้อ 1.2.1 (ก)

1.2.3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยทั่วไปสำหรับหัวข้อ 1.2.1 (ข)

1.2.4 แสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิว-เตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้นี้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนทั่วไป

1.2.5 วิทยานิพนธ์นี้จะแสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันโดยละเอียด สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไป และสามารถสานต่อเพื่อใช้ในการทำวิจัยในระดับสูงขึ้นไปได้

1.3 วิธีดำเนินการและขอบเขตของวิทยานิพนธ์

วิธีดำเนินการและขอบเขตของวิทยานิพนธ์นี้จะสอดคล้องกับวัตถุประสงค์ที่ได้ตั้งไว้ในหัวข้อ 1.2 อันประกอบด้วยรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.3.1 เริ่มจากการศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้นโดยละเอียด การศึกษาดังกล่าวจะกระทำใน 2 มิติ ทั้งนี้เพื่อก่อให้เกิดความเข้าใจโดยชัดเจนก่อนทำการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ต่อไป

1.3.2 เริ่มประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดในกรณีแบบเชื่องช้า การประดิษฐ์สมการดังกล่าวจะกระทำอย่างเป็นขั้นเป็นตอนและมีรายละเอียดโดยครบถ้วน

1.3.3 ทำการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ประดิษฐ์ขึ้นในหัวข้อ 1.3.2 ทำการแสดงลักษณะของไฟล์ข้อมูลที่โปรแกรมต้องการ ขั้นตอนการคำนวณในโปรแกรม ลักษณะของไฟล์ผลลัพธ์ที่ได้ รวมทั้งการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยการแก้ปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง (Exact solution)

1.3.4 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบหนืดโดยทั่วไป ซึ่งเป็นการใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในรูปเต็ม รูปแบบดังกล่าวประกอบด้วยพจน์ไม่เชิงเส้นยังผลให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นอยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นไปด้วย ดังนั้นจึงจำเป็นต้องประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันเพื่อแก้สมการแบบไม่เชิงเส้นดังกล่าว

1.3.5 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้หลังจากประยุกต์ระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสันในหัวข้อ 1.3.4 จะนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน โปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้จะทำการตรวจสอบความถูกต้องโดยนำไปแก้ปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรงก่อนนำไปประยุกต์แก้ปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะที่ซับซ้อนต่อไป

1.3.6 แสดงประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาได้นี้กับปัญหาการไหลผ่านรูปทรงที่มีลักษณะซับซ้อนที่ไม่สามารถหาผลลัพธ์แม่นตรงได้ เช่น การคำนวณลักษณะการไหลในท่อที่มีความกว้างเปลี่ยนแปลงไปซึ่งอาจมีปรากฏการณ์ของการไหลหมุนวนเกิดขึ้น การคำนวณลักษณะการไหลในท่อที่มาบรรจบกัน รวมทั้งการไหลผ่านรูปทรงรถยนต์ เป็นต้น

1.3.7 สรุปผลทั้งหมดที่เกิดขึ้นจากวิทยานิพนธ์นี้ พร้อมทั้งข้อเสนอแนะเพื่อการขยายผลจากวิทยานิพนธ์นี้ต่อสู่งานวิจัยระดับสูงขึ้นไป

1.3.8 เขียนและพิมพ์วิทยานิพนธ์

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.4.1 วิทยานิพนธ์นี้แสดงขั้นตอนการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์สำหรับการไหลแบบหนืดและไม่อัดตัวโดยละเอียด

1.4.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นอย่างเป็นขั้นเป็นตอนและมีรายละเอียดในทุกขั้นตอน ได้นำมาประดิษฐ์ต่อขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน ทำให้เกิดความสะดวกต่อการศึกษา ผลงานที่เกิดในหัวข้อ 1.4.1-1.4.2 จึงประกอบด้วยข้อมูลที่สมบูรณ์ทั้งทางทฤษฎีและโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาต่างได้โดยตรง

1.4.3 โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นได้เขียนโดยใช้ภาษา FORTRAN ซึ่งสะดวกแก่การทำความเข้าใจ สามารถใช้งานได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์โดยทั่วไป นับตั้งแต่ เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล ไปจนถึงซูเปอร์คอมพิวเตอร์ โดยผู้ใช้ไม่ต้องดัดแปลงส่วนใดๆในโปรแกรม ยกเว้นปรับขนาดหน่วยความจำในตัวโปรแกรมให้สอดคล้องกับขนาดของปัญหาที่พิจารณาอยู่นั้นเท่านั้น

1.4.4 หากเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้มีปริมาณหน่วยความจำที่พอเพียง โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ สามารถวิเคราะห์ให้ผลลัพธ์ลักษณะของการไหลผ่านรูปทรงซับซ้อนใดๆ ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจะช่วยแนะนำและช่วยปรับปรุงการออกแบบงานนั้นๆได้ดียิ่งขึ้น

1.4.5 เนื่องจากวิทยานิพนธ์นี้ประกอบด้วยสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลแบบหนืดซึ่งได้ประดิษฐ์ขึ้นมาอย่างเป็นขั้นเป็นตอนโดยละเอียด รวมทั้งไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกัน กระบวนการดังกล่าวสามารถนำไปเป็นต้นแบบสำหรับการดัดแปลงเพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลในระดับสูงขึ้นไปได้เป็นอย่างดี