



บทที่ 3

ทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษา

การศึกษาการแพร่ของน้ำเค็มเข้าแม่น้ำเจ้าพระยานี้ ประกอบด้วยการศึกษาในส่วนของพฤติกรรมของการแพร่ของน้ำเค็มเข้าแม่น้ำ ลักษณะน้ำขึ้นน้ำลงบริเวณปากแม่น้ำ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซึ่งประกอบด้วยหลักการ แนวความคิด และทฤษฎีที่จะได้กล่าวถึงต่อไปนี้

### 3.1 พฤติกรรมของการแพร่ของน้ำเค็มเข้าแม่น้ำ

ในการศึกษาพฤติกรรมของการแพร่ของน้ำเค็มเข้าแม่น้ำ ต้องพิจารณาถึงลักษณะการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำ ลักษณะการผสมบริเวณปากแม่น้ำ และสมการการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำ ดังมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

#### 3.1.1 ลักษณะการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำ

การที่สารต่าง ๆ ที่ละลายหรือแขวนลอยอยู่ในน้ำบริเวณปากแม่น้ำ จะเกิดการแพร่ (dispersion) ไตนั้น จะต้องประกอบด้วยขบวนการ 2 อย่าง ที่มีอิทธิพลหลักดังรูปที่ 3-1 คือ

- 1) การพา (convection) เป็นขบวนการที่สารละลายมีการไหลหรือการโยกย้ายจากที่หนึ่งไปอีกที่หนึ่ง อันเนื่องมาจากอิทธิพลของกระแสน้ำพาไป
- 2) การฟุ้งกระจาย (diffusion) เป็นขบวนการเคลื่อนไหวของโมเลกุลของสารละลายที่มีความเข้มข้นมากกว่าไปสู่สารละลายที่มีความเข้มข้นน้อยกว่า โดยขบวนการที่เกิดขึ้น ไม่ต้องอาศัยขบวนการพา

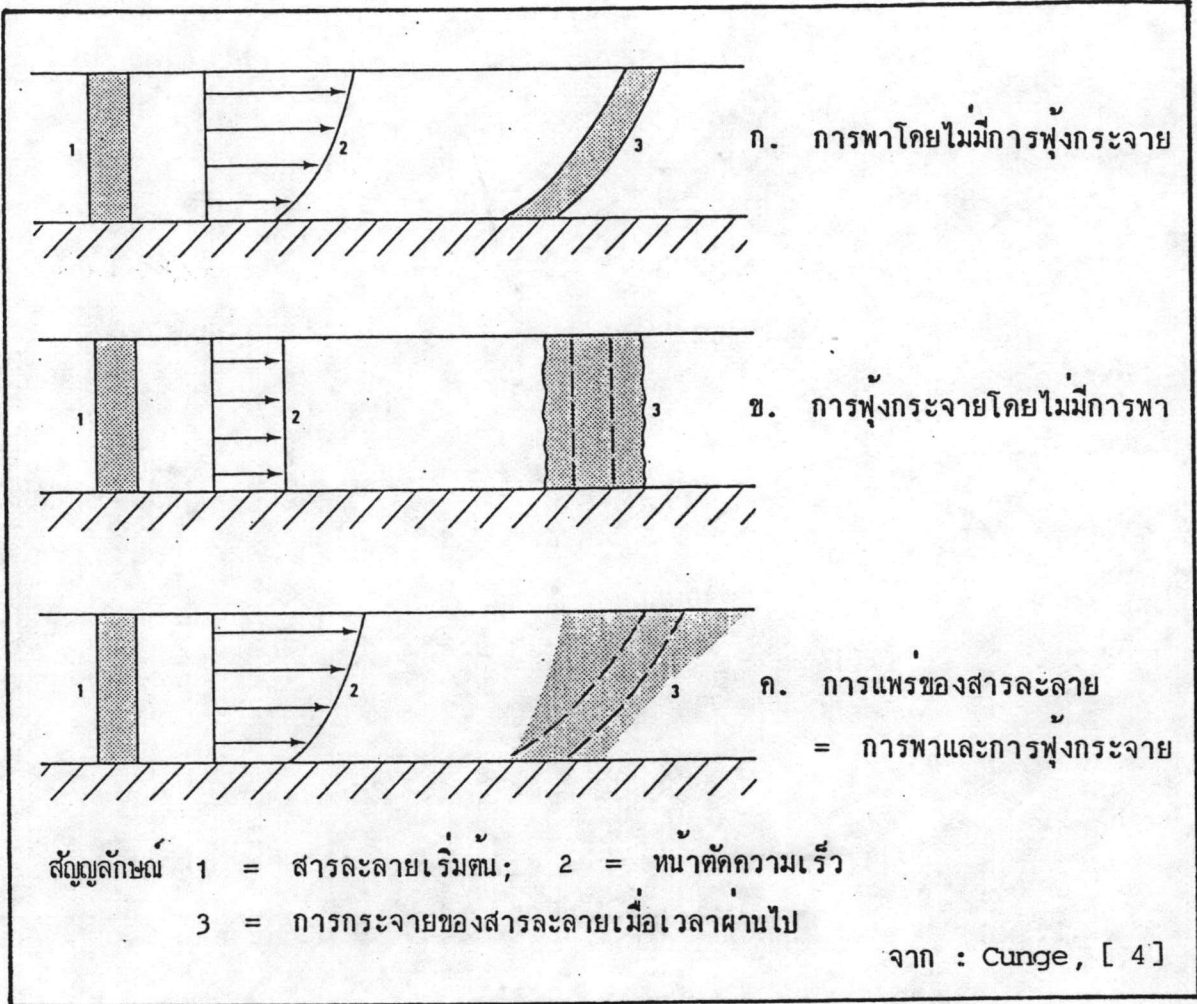
การแพร่ของน้ำเค็มในบริเวณปากแม่น้ำจึงเป็นขบวนการของการพา และการฟุ้งกระจายรวมกัน

### 3.1.2 ลักษณะการผสมบริเวณปากแม่น้ำ

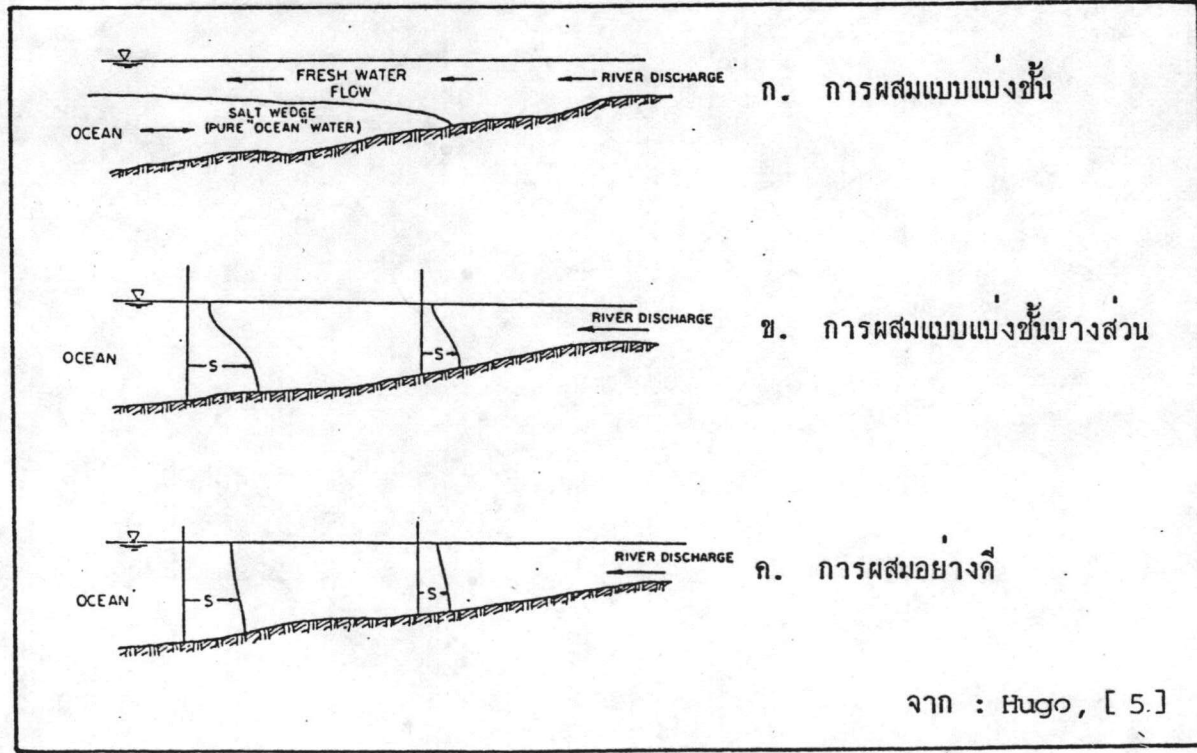
การผสมระหว่างน้ำจืดจากแม่น้ำ และน้ำเค็มจากทะเลบริเวณปากแม่น้ำ จะเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด ก็ขึ้นอยู่กับขนาดและทิศทางของอิทธิพลของระดับน้ำขึ้นน้ำลงที่ปากแม่น้ำที่ก่อให้เกิดกระแสน้ำขึ้นน้ำลง (tidal current) ปริมาณน้ำที่ไหลมาจากแผ่นดิน และผลของความแตกต่างของความหนาแน่นของน้ำจืดและน้ำเค็ม ซึ่งลักษณะการผสมบริเวณปากแม่น้ำนี้ ในปี 1966 Simmon [ 3 ] ได้แบ่งประเภทของปากแม่น้ำตามลักษณะผสม 3 ประเภท ดังรูปที่ 3-2 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

- 1) ปากแม่น้ำแบบแบ่งชั้น (Stratified Estuary) จะเกิดขึ้นในกรณีที่มีอัตราการไหลจากแผ่นดินมาก โดยเฉพาะช่วงฤดูฝน น้ำจืดและน้ำเค็มจะมีการแบ่งชั้นอย่างชัดเจน เนื่องจากความหนาแน่นของน้ำเค็มมีค่ามากกว่าความหนาแน่นของน้ำจืด ดังนั้นน้ำจืดจึงมีแนวการไหลอยู่บนลึมน้ำเค็ม (salt wedge) และเกิดการฟุ้งกระจายของน้ำเค็มและน้ำจืดที่ผิวสัมผัสร่วม (interface) ระหว่างน้ำเค็มกับน้ำจืด ซึ่งจะเกิดการเคลื่อนไหวของโมเลกุลของน้ำเค็มกับโมเลกุลของน้ำจืด แลกเปลี่ยนกันบ้าง แต่ไม่ปนเปื้อนมากนัก
- 2) ปากแม่น้ำแบบผสมบางส่วน (Partially Mixed Estuary) เกิดจากอิทธิพลของกระแสน้ำขึ้นน้ำลงมีมากพอที่จะทำให้เกิดการปนเปื้อนของการผสมของน้ำจืดและน้ำเค็มทั้งแนวราบและแนวตั้งมากกว่าปากแม่น้ำแบบแบ่งชั้นชัดเจน ผิวสัมผัสร่วมพอมีอยู่บ้างแต่ไม่ชัดเจน
- 3) ปากแม่น้ำแบบผสมอย่างดี (Well Mixed Estuary) เกิดจากการที่ปริมาณน้ำจืดจากแผ่นดินมีน้อย โดยเฉพาะช่วงฤดูแล้ง ความแตกต่าง (gradient) ของปริมาณความเค็มมีน้อยมากในแนวตั้ง กระแสน้ำขึ้นน้ำลงมีส่วนที่ทำให้เกิดการผสมอย่างดีเกิดขึ้น

ที่กล่าวมานี้ เป็นลักษณะทางด้านกายภาพของการผสมบริเวณปากแม่น้ำ อย่างไรก็ตาม Simmon (Ippen [3]) ยังได้อธิบายในทางคณิตศาสตร์ว่า ประเภทของปากแม่น้ำขึ้นกับอัตราส่วนของปริมาตรน้ำจืดจากแผ่นดิน ไหลออกทะเลในคาบของน้ำขึ้นน้ำลง (QT) กับปริมาตรน้ำขึ้นน้ำลง (Tidal Prism, P) ดังนี้



รูปที่ 3-1 ลักษณะของการแพร่



รูปที่ 3-2 ลักษณะการผสมของน้ำเค็มกับน้ำจืดบริเวณปากแม่น้ำ

ถ้า  $\frac{QT}{P} \geq 1$  ปากแม่น้ำแบบแบ่งชั้น  
 $0.2 < \frac{QT}{P} \leq 0.5$  ปากแม่น้ำแบบผสมบางส่วน  
 $\frac{QT}{P} \leq 0.1$  ปากแม่น้ำแบบผสม

เมื่อ  $Q$  = อัตราการไหลจากแผ่นดิน,  $\text{ม}^3/\text{ว}$ .  
 $T$  = คาบของน้ำขึ้นน้ำลง, ชั่วโมง  
 $P$  = ปริมาณน้ำขึ้นน้ำลง (ปริมาตรของน้ำที่ไหลเข้าและออกจากปากอ่าวในช่วง 1 คาบเวลา),  $\text{ม}^3$

ลักษณะการผสมในบริเวณปากแม่น้ำในกรณีสถานะคงที่ ทฤษฎีที่ผ่านมามีนิยมนิยมใช้สมการ exponential เพื่ออธิบายการแพร่ โดยใช้ข้อมูลในสนามมาวิเคราะห์หาค่าคงที่เป็นสูตรสำเร็จสำหรับลักษณะการผสมบริเวณปากแม่น้ำเจ้าพระยานั้น ในปี 1965 NEDECO ได้ศึกษาการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำเจ้าพระยา โดยใช้ข้อมูลสำรวจในช่วงปี 1961-1964 มาวิเคราะห์ทางสถิติพบว่า เมื่ออัตราการไหลในแม่น้ำเจ้าพระยาอยู่ต่ำกว่า  $100 \text{ ม}^3/\text{ว}$ . สภาพความเค็มจะเป็นแบบผสมอย่างดี ถ้าอัตราการไหลมากกว่า  $1,000 \text{ ม}^3/\text{ว}$ . สภาพความเค็มจะเป็นแบบแบ่งชั้นและสภาพความเค็มจะเป็นแบบผสมกันบางส่วน เมื่ออัตราการไหลประมาณ  $250 \text{ ม}^3/\text{ว}$ . นอกจากนี้ ยังได้หาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณความเค็ม อัตราการไหลจากแม่น้ำ และระยะทางจากปากแม่น้ำในสถานะคงที่ (steady state) เป็นสมการ empirical ของการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำเจ้าพระยา ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{S_x}{S_0} = e^{-18 \cdot 10^{-6} Q_F x^2 - 0.045 Q_F^{1/2}} \quad [3-1]$$

เมื่อ  $10 \leq Q_F \leq 500 \text{ ม}^3/\text{ว}$ . และ  $x \leq 110$  กิโลเมตร

โดยที่  $S_x$  = ปริมาณความเค็มที่ระยะทาง  $x$ , ppt

$S_0$  = ปริมาณความเค็มสูงสุดที่ปากแม่น้ำ เท่ากับ 33 ppt

$Q_F$  = อัตราการไหลจากแม่น้ำ,  $\text{ม}^3/\text{ว}$ .

$x$  = ระยะทางจากปากแม่น้ำ, กิโลเมตร

จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ตามสมการ 3-1 ไม่ได้พิจารณาผลของการขึ้นลงของระดับน้ำที่ปากแม่น้ำ

### 3.1.3 สมการการแพร่ของน้ำเค็มในแม่น้ำ

ในแม่น้ำตามธรรมชาติและบริเวณปากแม่น้ำ จะมีการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งเป็นแบบ unsteady state และความเร็วของกระแสน้ำเปลี่ยนแปลงอยู่ตลอดเวลา ซึ่งในการศึกษาเพื่อหาปริมาณความเค็ม ในปี 1965 Holley และ Harleman [3] ได้ใช้คุณสมบัติการอนุรักษ์ (conservative property) หาสมการการแพร่ของน้ำเค็มในการไหลแบบปั่นป่วน 1 มิติ ในกรณีปากแม่น้ำแบบผสมอย่างค้ำงนี้

$$A \frac{\partial S}{\partial t} + Q \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ A D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right] \quad [3-2]$$

- โดยที่
- $A$  = พื้นที่หน้าตัดของแม่น้ำ,  $m^2$
  - $Q$  = อัตราการไหล,  $m^3 / \text{วินาที}$
  - $D_x$  = สัมประสิทธิ์ของการแพร่,  $m^2 / \text{วินาที}$
  - $S$  = ปริมาณความเค็ม, ppt
  - $x$  = ระยะทาง,  $m$ .
  - $t$  = เวลา, วินาที

- เมื่อเทอม  $A \frac{\partial S}{\partial t}$  หมายถึง การเปลี่ยนแปลงปริมาณความเค็มในช่วงเวลา  $\Delta t$
- $Q \frac{\partial S}{\partial x}$  หมายถึง การเปลี่ยนแปลงปริมาณความเค็มในแกนระยะทาง เนื่องจากกระแสน้ำ
- $\frac{\partial}{\partial x} \left[ A D_x \frac{\partial S}{\partial x} \right]$  หมายถึง การเปลี่ยนแปลงปริมาณความเค็มในแกนระยะทาง เนื่องจากขบวนการแพร่



### 3.2 ทฤษฎีน้ำขึ้นน้ำลง

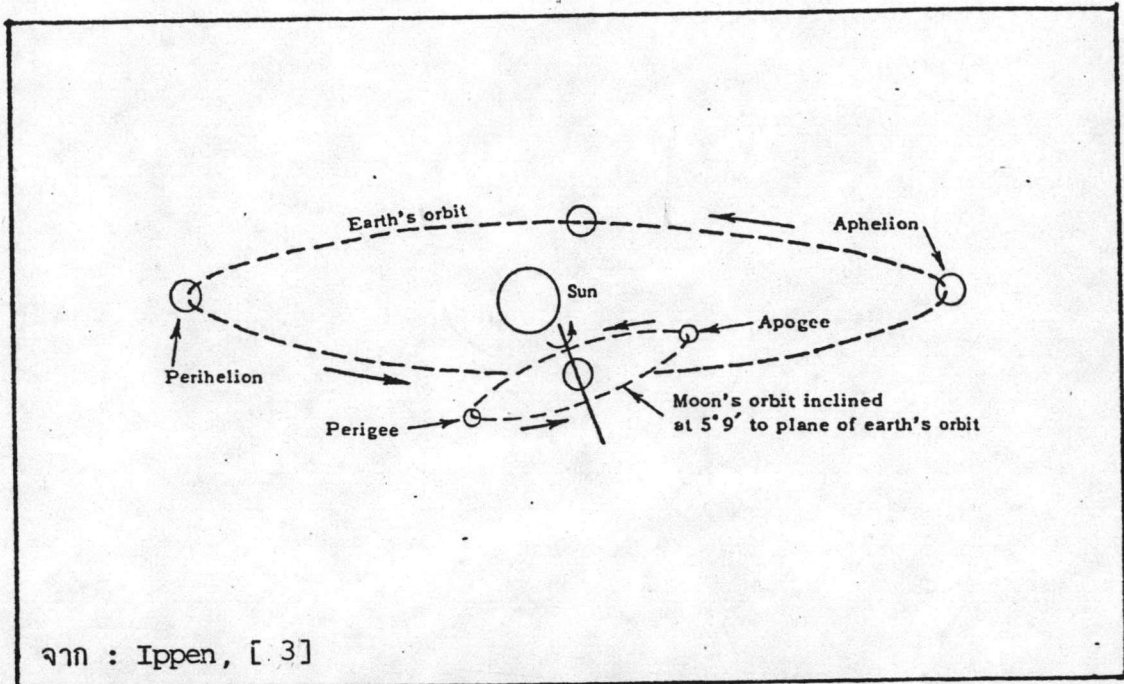
ลักษณะน้ำขึ้นน้ำลง เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการแพร่ของน้ำเค็มเข้าแม่น้ำในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง องค์ประกอบหลักที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง ได้แก่ คุณลักษณะของระบบโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง ทฤษฎีการวิเคราะห์น้ำขึ้นน้ำลงโดยวิธีฮาร์โมนิก (Harmonic) และการแบ่งชนิดของน้ำขึ้นน้ำลง ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

#### 3.2.1 องค์ประกอบหลักที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง

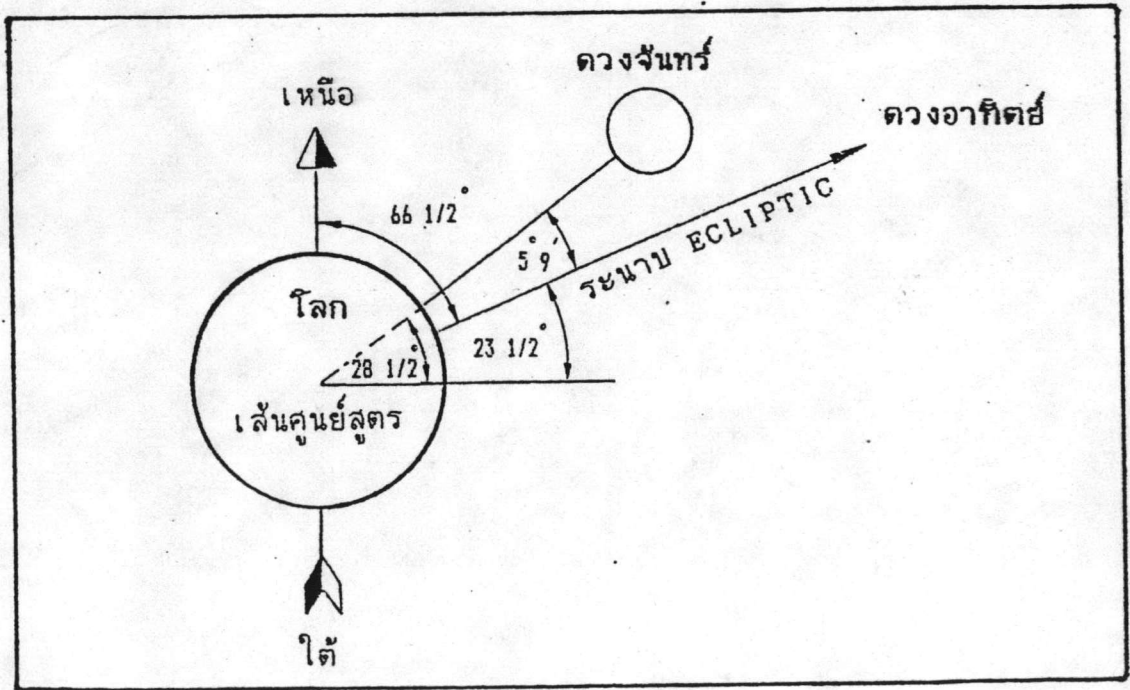
น้ำขึ้นน้ำลงเป็นคลื่นยาว (long wave) ที่ก่อให้เกิดการสูงขึ้นและลดต่ำลงของระดับน้ำทะเล และส่งผลต่อเนื่องเข้าไปในบริเวณปากแม่น้ำด้วย ความยาวคลื่นและคาบของน้ำขึ้นน้ำลงใหญ่กว่าคลื่นลมธรรมดา การใช้ประโยชน์จากการศึกษาและสังเกตลักษณะน้ำขึ้นน้ำลงมีมาตั้งแต่สมัยโบราณ ซึ่งมนุษย์ที่อาศัยอยู่ตามแนวชายฝั่งทะเลจะออกหาปลาในขณะน้ำขึ้น นอกจากนั้นน้ำขึ้นน้ำลงยังมีความสำคัญต่อการเดินเรือ โดยการอาศัยกระแสน้ำขึ้นน้ำลง (tidal current) ในการเดินเรือเข้าหรือออกจากท่าเรือต่าง ๆ ในปากแม่น้ำ กล่าวคือ ในเวลาที่กระแสน้ำขึ้น (flood current) จะเดินเรือขึ้นไปทางเหนือน้ำ และจะเดินเรือออกทะเลในเวลาที่กระแสน้ำลด (ebb current)

คลื่นน้ำขึ้นน้ำลงไม่เป็นอิสระ เนื่องจากไม่สามารถหนีออกไปจากแรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลงได้ ซึ่งเกิดจากปัจจัยพื้นฐานคือ การหมุนของโลกรอบตัวเอง การโคจรของดวงจันทร์รอบโลก และการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ นอกจากนี้ ก็ยังมีอิทธิพลเนื่องจากดวงดาวต่าง ๆ อีก แต่ก็น้อยมากเมื่อเทียบกับอิทธิพลเนื่องจากดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ จึงมักไม่นำมาพิจารณา

ระบบของโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ ดังรูปที่ 3-3 ประกอบด้วยการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ และการโคจรของดวงจันทร์รอบโลก ซึ่งมีลักษณะวงโคจรเป็นรูปวงรี (elliptic) ดวงจันทร์และโลกต่างก็หมุนรอบแกนตัวเองไปด้วย ระนาบที่โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์เรียกว่าระนาบ ecliptic และแกนของโลกจะทำมุม  $66\frac{1}{2}^{\circ}$  กับระนาบ ecliptic วงโคจรของดวงจันทร์รอบโลกจะทำมุม  $5^{\circ} 9'$  กับระนาบ ecliptic หรือประมาณ  $28\frac{1}{2}^{\circ}$  กับเส้นศูนย์สูตรของโลก (equator) ดังรูปที่ 3-4 ตำแหน่งที่ดวงจันทร์โคจรมาอยู่ใกล้โลกมากที่สุด เรียกว่า perigee และห่างจากโลกมากที่สุด เรียกว่า apogee ดังนั้นเมื่อดวงจันทร์อยู่ที่



รูปที่ 3-3 ระบบการโคจรของโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์



รูปที่ 3-4 มุมที่โลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์กระทำตอกัน

perigee จะเกิดน้ำขึ้นเนื่องจากอิทธิพลของดวงจันทร์มากที่สุด ส่วนตำแหน่งที่โลกโคจรอยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด เรียกว่า perihelion และห่างจากดวงอาทิตย์มากที่สุด เรียกว่า aphelion

### 3.2.2 แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง

ในการแจกแจงแรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง สามารถแยกพิจารณาได้เป็น 2 ระบบ คือ ระบบโลก-ดวงจันทร์ และ ระบบโลก ดวงจันทร์ ดวงอาทิตย์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

- 1) ระบบโลก ดวงจันทร์ (earth-moon system) ในขณะที่โลกหมุนรอบแกนตัวเอง จะเกิดแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force) ของน้ำขนาด 1 หน่วยมวลมีทิศทางออกจากแกนหมุนของโลก ดังรูปที่ 3-5 ดังสมการ

$$f_c = \omega^2 r_e \cos\phi \quad [3-3]$$

เมื่อ  $f_c$  = แรงหนีศูนย์กลางของน้ำขนาด 1 หน่วยมวล

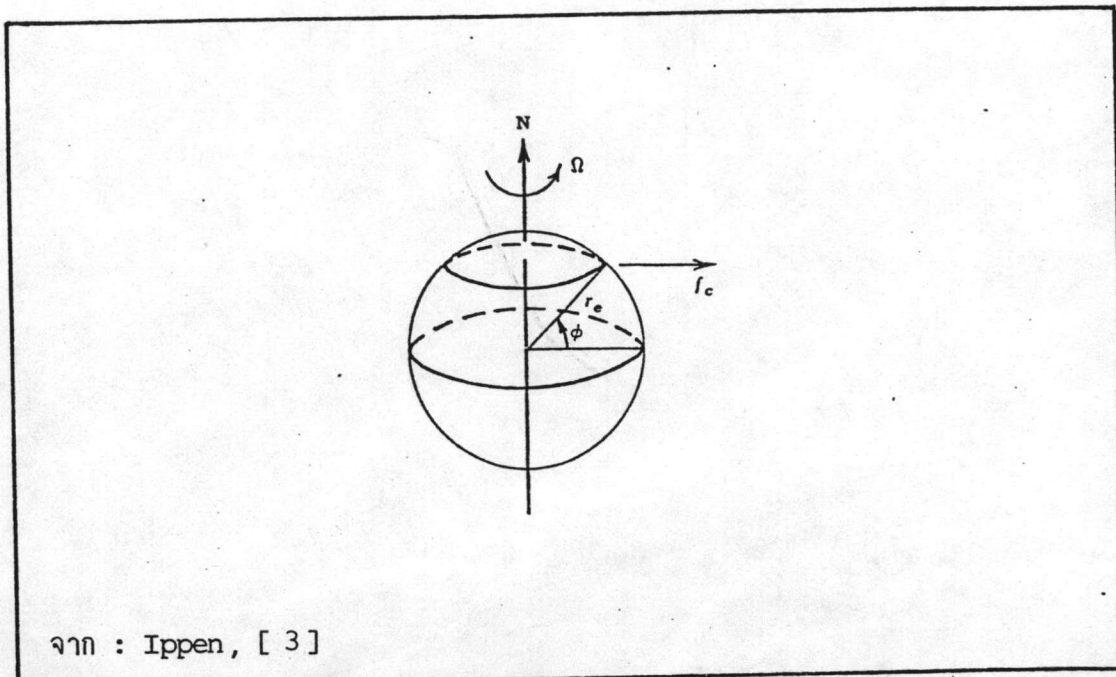
$\omega$  = อัตราเร็วเชิงมุม

$r_e$  = รัศมีของโลก

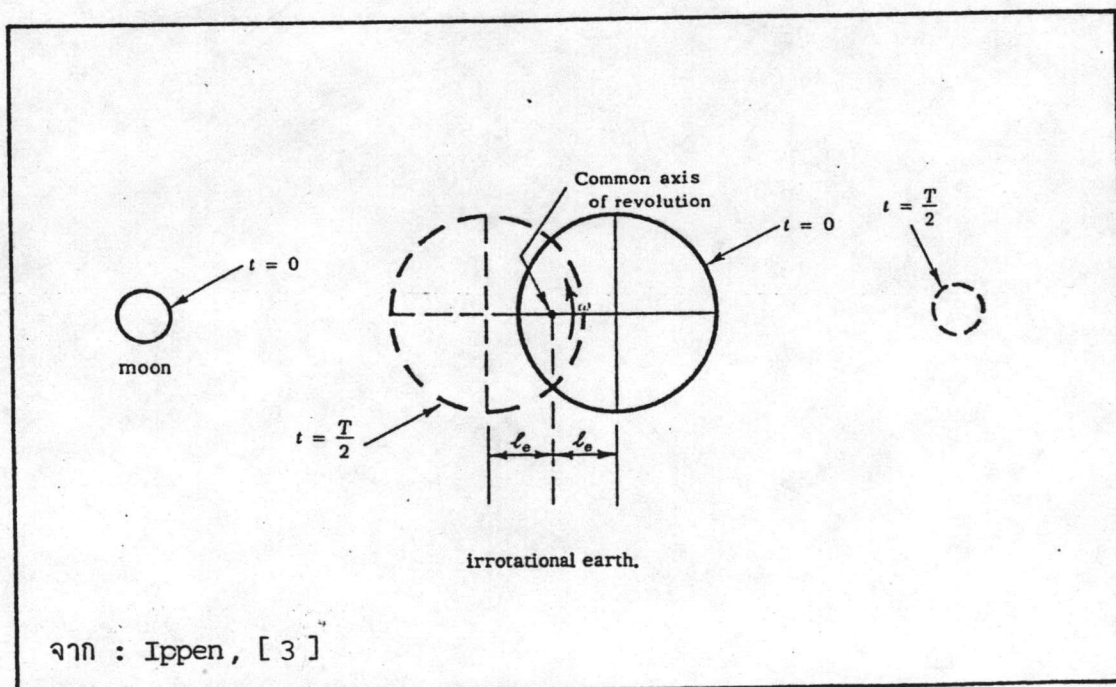
$\phi$  = มุมของเส้นรุ้ง

จากสมการที่ 3-3 จะเห็นได้ว่า ขนาดของแรงหนีศูนย์กลางเนื่องจากการหมุนรอบตัวเองของโลก จะมีค่าคงที่ในแต่ละเส้นรุ้งที่พิจารณา นอกจากนี้ยังมีแรงดึงดูด (attractive force) เนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก การที่จะเกิดน้ำขึ้นน้ำลงบนผิวโลก ในขั้นต้นนี้ จะพิจารณาระบบโลก-ดวงจันทร์ ซึ่งโลกและดวงจันทร์จะหมุนรอบแกนอ้างอิง (common axis) ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม  $\omega$  ดังรูปที่ 3-6 โดยสมมติว่าโลกไม่ได้หมุนรอบตัวเอง และจุดศูนย์กลางของโลกห่างจากแกนอ้างอิง  $e$  โลกและดวงจันทร์จะหมุนรอบแกนอ้างอิงนี้ ด้วยคาบการหมุน T (period of revolution) ลักษณะเช่นนี้ จะทำให้เกิดแรงดึงดูด (attractive force) ระหว่างโลกและดวงจันทร์ และแรงหนีศูนย์กลาง (centrifugal force) ซึ่งถ้าพิจารณาสมดุลของทั้งสองแรงนี้ ก็จะทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง ดังรูปที่ 3-7 แต่เมื่อพิจารณาแรงโน้มถ่วงของโลกด้วย ก็จะได้ผิวน้ำสมดุล (equilibrium surface) ดังรูปที่ 3-8 จะเห็นได้ว่าในกรณีที่มุม  $\theta$  เท่ากับ 0 องศาจะเกิดน้ำขึ้นมากที่สุด และเมื่อมุม  $\theta$  เท่ากับ 90 องศา จะเกิดน้ำลงต่ำสุด

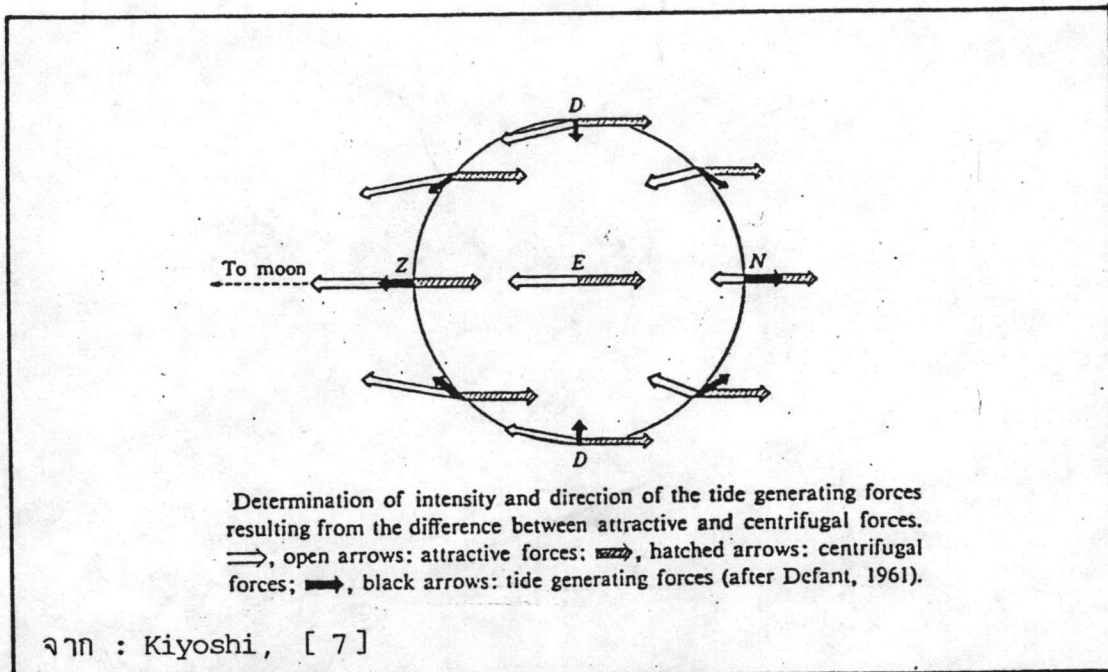




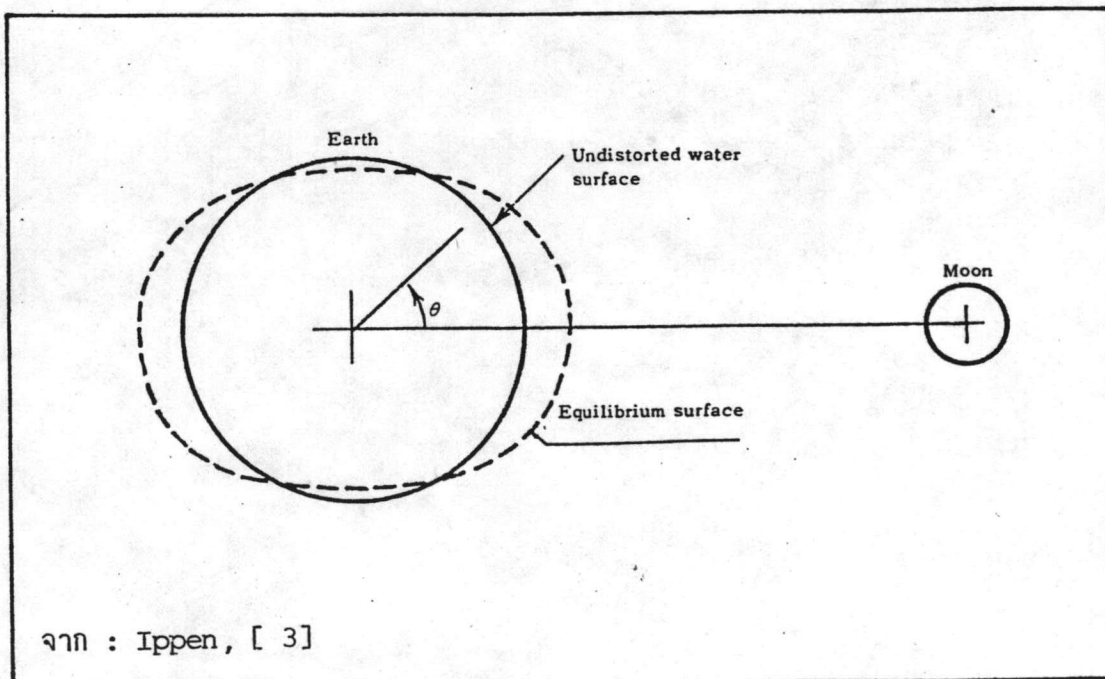
รูปที่ 3-5 แรงหนีศูนย์กลางเนื่องจากโลกหมุนรอบตัวเอง



รูปที่ 3-6 การโคลรของโลกและดวงจันทร์รอบแกนอ้างอิง



รูปที่ 3-7 แรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง



รูปที่ 3-8 ผิวน้ำสมดุลย์ในระบบโลกและดวงจันทร์

ในปี 1966 Dean [ 3 ] ได้เสนอรูปลักษณะสมมูลของน้ำขึ้นน้ำลงบนสมมติฐานที่ว่า โลกกลมและมีผิวหน้าอยู่ที่ผิวโลกพอดี ได้ตั้งสมการที่ 3-4 ดังนี้

$$\eta = \frac{r_e}{2} \left( \frac{M_m}{M_e} \right) \left( \frac{r_e}{\ell} \right)^3 \left[ (3 \sin^2 \phi \sin^2 \delta - 1) + \frac{3}{2} \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \lambda + 3 \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos^2 \lambda \right] \quad [3-4]$$

เมื่อ  $\eta$  = ระดับน้ำเนื่องจากอิทธิพลของดวงจันทร์

$r_e$  = รัศมีของโลก

$M_m$  = มวลของดวงจันทร์

$M_e$  = มวลของโลก

$\ell$  = ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของโลกถึงจุดศูนย์กลางของดวงจันทร์

$\phi$  = เส้นรุ้ง (latitude)

$\lambda$  = มุมขจัดที่โลกหมุน (earth's angular displacement)

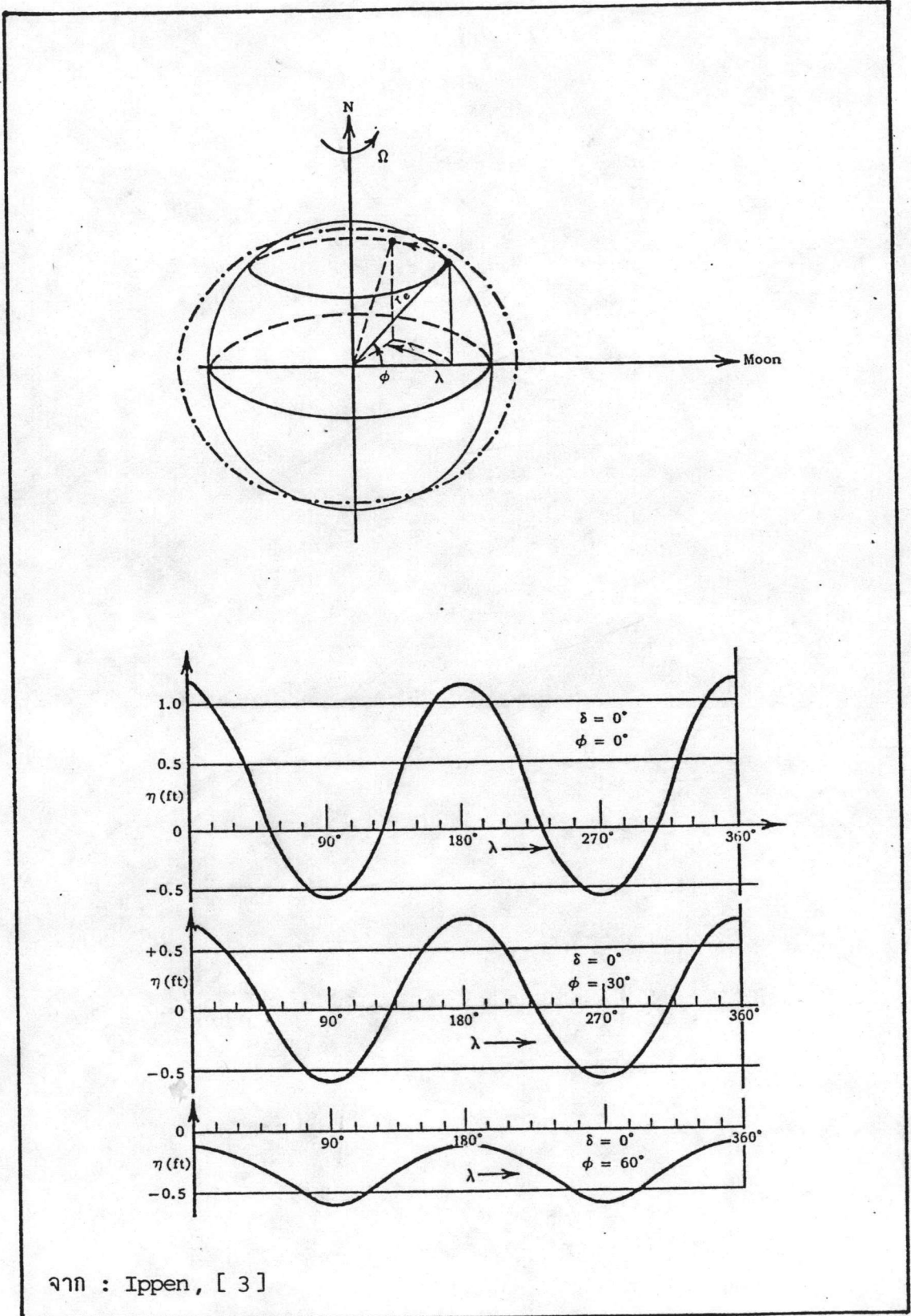
$\delta$  = มุมเบี่ยงเบน (declination) ของดวงจันทร์จากเส้นศูนย์สูตรของโลก

ในกรณีที่มุมเบี่ยงเบนของดวงจันทร์  $\delta = 0$  องศา จากสมการที่ 3-4 จะได้

$$\eta = \frac{r_e}{2} \left( \frac{M_m}{M_e} \right) \left( \frac{r_e}{\ell} \right)^3 (3 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda - 1) \quad [3-5]$$

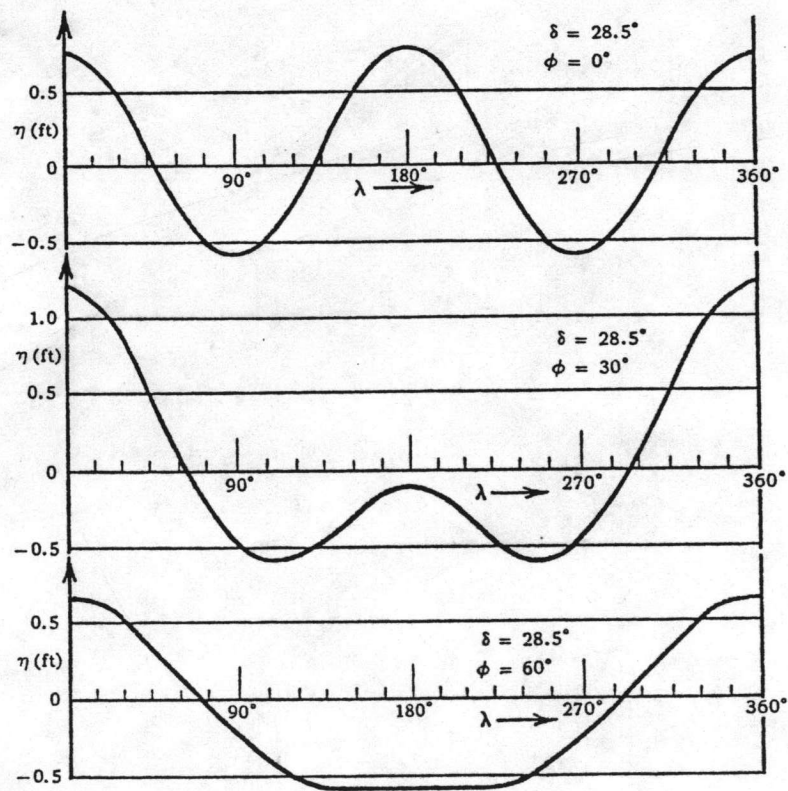
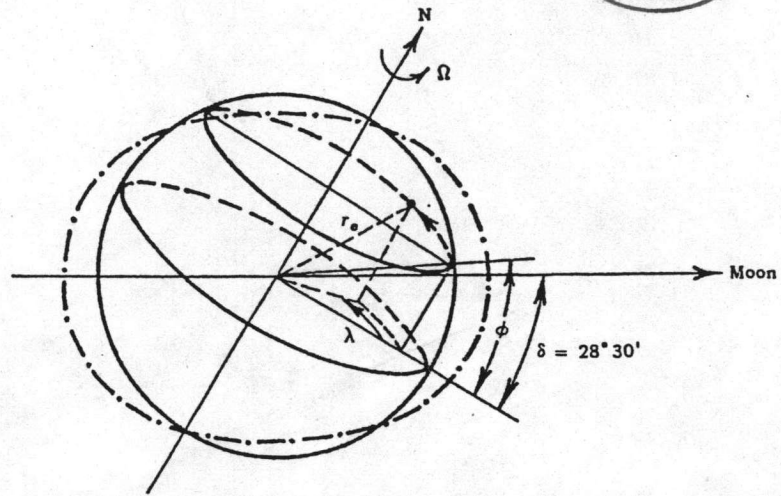
สมการที่ 3-5 จะแสดงรูปร่างสมมูลของผิวน้ำในกรณีที่มุมเบี่ยงเบนของดวงจันทร์  $\delta = 0$  องศา ดังรูปที่ 3-9 ซึ่งเมื่อโลกหมุนรอบตัวเอง 1 รอบ นั่นคือ มุมขจัดที่โลกหมุน  $\lambda$  ตั้งแต่ 0 ถึง 360 องศา ที่เส้นรุ้ง  $\phi$  เท่ากับ 0 30 และ 60 องศา จะเกิดน้ำขึ้นสูงสุด 2 ครั้ง และน้ำลงต่ำสุด 2 ครั้ง เรียกชนิดของน้ำขึ้นน้ำลงดังกล่าวนี้ว่า น้ำขึ้นน้ำลงครึ่งวัน (semidiurnal tide) ซึ่งที่เส้นรุ้ง 0 องศา จะเกิดน้ำขึ้นน้ำลงมากที่สุด และจะลดลงเมื่อพิจารณามุมของเส้นรุ้งมากขึ้น

เมื่อดวงจันทร์โคจรมาอยู่ที่ตำแหน่งมุมเบี่ยงเบนมากที่สุด คือ  $\delta = 28^\circ 30'$  รูปร่างสมมูลของน้ำขึ้นน้ำลงจากสมการที่ 3-4 แสดงดังรูปที่ 3-10 จะเห็นได้ว่าที่เส้นรุ้ง  $\phi$  เท่ากับ 0 องศา ลักษณะน้ำขึ้นน้ำลงจะเป็นชนิดน้ำขึ้นน้ำลงครึ่งวัน และเมื่อเส้นรุ้งมากขึ้น ลักษณะน้ำขึ้นน้ำลงจะเปลี่ยนเป็นชนิดน้ำขึ้นน้ำลงประจำวัน (diurnal tide) ซึ่งหมายความว่า ใน 1 วัน จะเกิดน้ำขึ้นสูงสุด 1 ครั้ง และน้ำลงต่ำสุด 1 ครั้ง



จาก : Ippen, [ 3 ]

รูปที่ 3-9 ระดับน้ำเมื่อมุมเบี่ยงเบนของดวงจันทร์  $\delta = 0$  องศา



จาก : Ippen, [ 3 ]

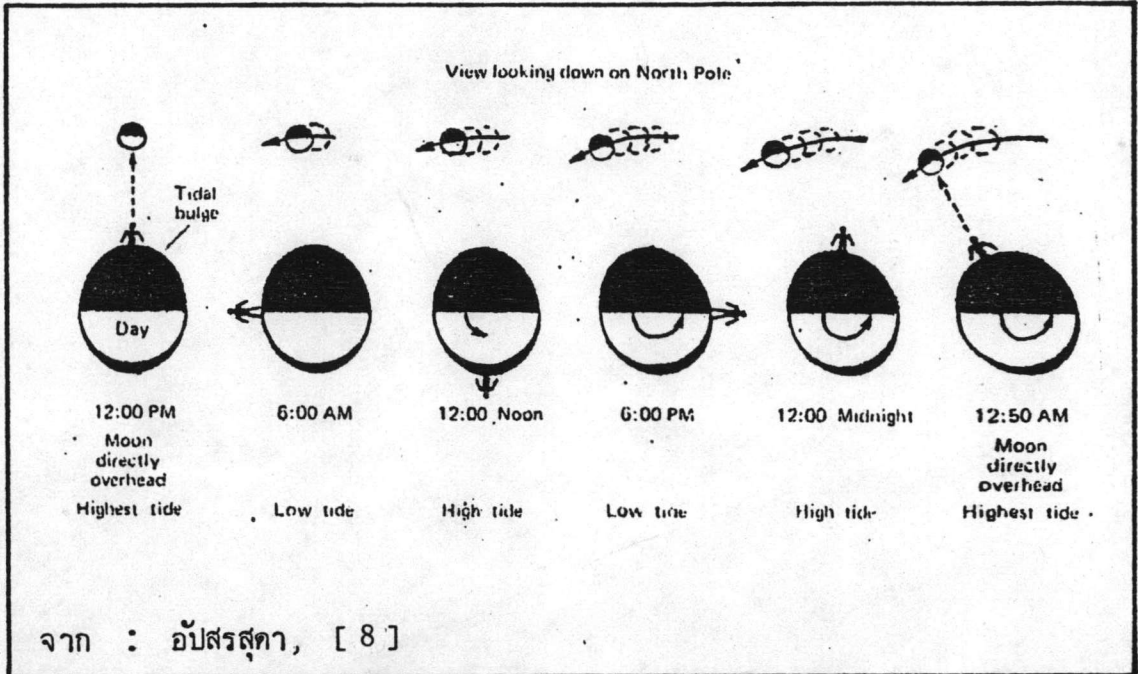
รูปที่ 3-10 ระดับน้ำเมื่อมุมเบี่ยงเบนของดวงจันทร์  $\delta = 28^{\circ} 31'$

ในทางดาราศาสตร์นั้น พบว่า ดวงจันทร์โคจรรอบโลก 1 รอบ ใช้เวลา 29.53 วัน ถ้าเทียบกับการหมุนรอบตัวเองของโลกที่ตำแหน่งคนยืน คัมรูปที่ 3-11 จะพบว่า ตำแหน่งของดวงจันทร์จะตรงที่ระยะคนยืนอีกครั้ง ดวงจันทร์จะเคลื่อนที่ไป  $1/29.53$  ของวงโคจรของดวงจันทร์รอบโลก ลักษณะเช่นนี้ จะทำให้น้ำขึ้นสูงสุดหรือลงต่ำสุดที่ตำแหน่งใด ๆ บนผิวโลก จะเกิดขึ้นกว่าวันก่อน 50 นาที

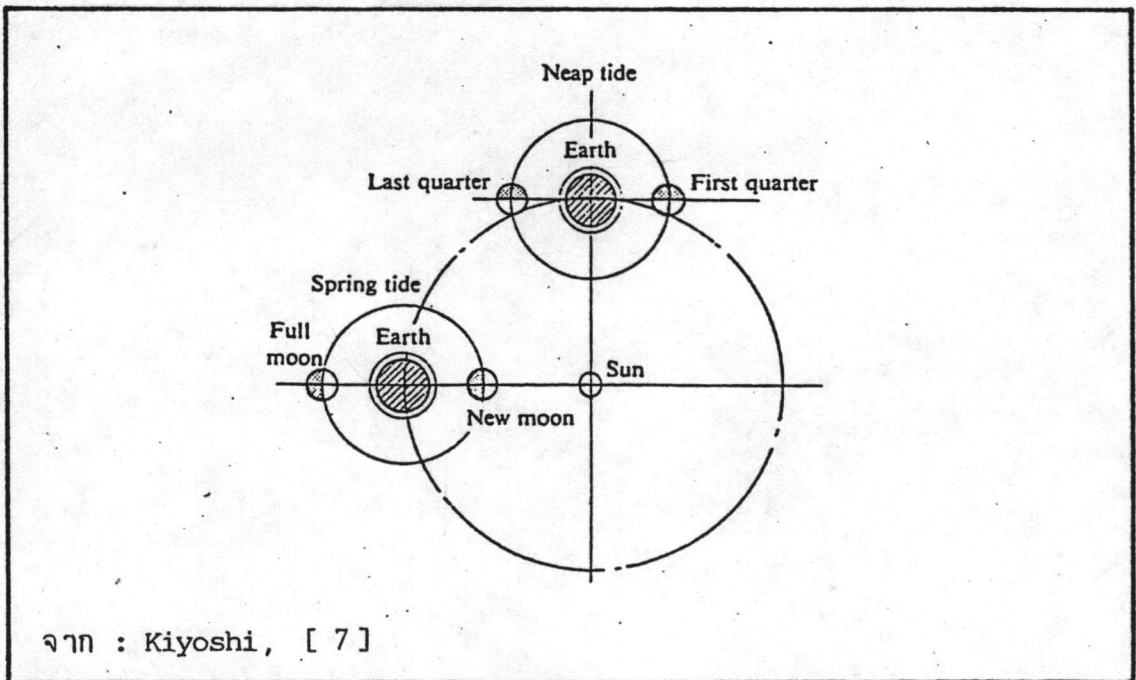
- 2) ระบบโลก - ดวงจันทร์ - ดวงอาทิตย์ (earth-moon-sun system) จากการศึกษาทฤษฎีสมมูลของน้ำขึ้นน้ำลงในกรณีที่โลกกลม (prolate spheroid) พบว่า อัตราส่วนของระดับน้ำเนื่องจากอิทธิพลของดวงอาทิตย์ต่อระดับน้ำเนื่องจากอิทธิพลของดวงจันทร์เท่ากับ 0.457 [ 3 ] แสดงว่าดวงจันทร์มีอิทธิพลต่อระดับน้ำบนโลก 54.3% ในระบบโลก ดวงจันทร์ ดวงอาทิตย์ คัมรูปที่ 3.12 ถ้าตำแหน่งของดวงจันทร์ โลก และดวงอาทิตย์ อยู่ในแนวตั้งฉากกัน ก็คือดวงจันทร์อยู่ที่ตำแหน่งเสี้ยวที่ 1 (first quarter) และเสี้ยวสุดท้าย (last quarter) จะทำให้เกิดพิสัยน้ำขึ้นน้ำลง (tidal range) น้อยที่สุด เรียกว่า น้ำตาย (neap tide) แต่ถาดวงจันทร์ โลก และดวงอาทิตย์ อยู่ในแนวเดียวกัน คือ ดวงจันทร์อยู่ที่ตำแหน่งเริ่มต้นดวงใหม่อีกครั้ง (New moon) และตำแหน่งดวงจันทร์เต็มดวง (Full moon) จะทำให้เกิดพิสัยน้ำขึ้นน้ำลงมากที่สุด เรียกว่า น้ำเกิด (spring tide) การเกิดน้ำเกิดและน้ำตายนี้ ก็เป็นองค์ประกอบหนึ่งที่ควรพิจารณา เรียกว่า องค์ประกอบรายปักษ์ทางจันทร์คติ (lunar fortnightly constituents) ซึ่งมีคาบ (period) 13 วัน 15 ชั่วโมง 52 นาที

### 3.2.3 ทฤษฎีการวิเคราะห์ฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลง (Tidal Harmonic Analysis)

แนวความคิดที่กล่าวในหัวข้อที่ 3.2.2 ขึ้นอยู่กับสมมติฐานว่า โลกกลมและผิวโลกเป็นผิวน้ำ สามารถอธิบายคุณลักษณะพื้นฐานของน้ำขึ้นน้ำลงได้บางอย่าง เช่น สาเหตุการเกิดน้ำขึ้นน้ำลง และน้ำกုပ်บนโลก อย่างไรก็ตามในความจริงนั้นจะต้องพิจารณาอิทธิพลของแผ่นดินและลักษณะทางกายภาพของท้องทะเล มวลของน้ำ (water masses) ไม่สามารถที่จะอยู่ในสภาวะสมมูลย์ได้ เพราะความเร็วของมวลของน้ำที่เคลื่อนที่ผ่านทะเลยังขึ้นกับความลึกของน้ำ ลักษณะ



รูปที่ 3-11 การหมุนของโลกรอบตัวเอง และการโคจรของดวงจันทร์รอบโลก



รูปที่ 3-12 การเกิดน้ำตาย (neap tide) และน้ำเกิด (spring tide)

ภูมิประเทศตลอดแนวชายฝั่งทะเลซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดการสะท้อน (reflect) และการส่งผ่านของคลื่น (transmitted wave) ผลของความเสียหายระหว่างน้ำและพื้นผิวสัมผัส ตลอดจนอิทธิพลของน้ำจืดที่ไหลมาจากแผ่นดิน เป็นต้น ปัจจัยเหล่านี้เป็นส่วนประกอบที่ควรพิจารณาในการวิเคราะห์ และทำนายระดับน้ำขึ้นน้ำลงในแต่ละตำแหน่ง ซึ่งก็ขึ้นอยู่กับข้อมูลการวัดระดับน้ำขึ้นน้ำลงที่ตำแหน่งนั้น ๆ

ความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ของโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์ เป็นสาเหตุของการเกิดแรงที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง คาบ (period) ของแต่ละองค์ประกอบ (constituent) ที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลงได้มีการศึกษาทางด้านดาราศาสตร์มากมาย อย่างไรก็ตาม ก็เป็นการยากที่จะหาค่าของแอมพลิจูด (amplitude) และมุมเฟส (phase) ของน้ำขึ้นน้ำลงในแต่ละองค์ประกอบ เพราะลักษณะของแผ่นดินและลักษณะทางกายภาพของท้องทะเลในแต่ละตำแหน่งแตกต่างกัน ปัญหาการวิเคราะห์หาค่าแอมพลิจูดและมุมเฟสของแต่ละองค์ประกอบนี้ สามารถทำได้โดยใช้แนวความคิดการวิเคราะห์ด้วยวิธีฮาร์โมนิก ซึ่งจะสามารถใช้ทำนายน้ำขึ้นน้ำลงได้ การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลงสามารถอธิบายโดยนัยของสมมติฐาน ดังนี้

- 1) ผลของน้ำขึ้นน้ำลงที่แต่ละตำแหน่ง จะมีองค์ประกอบจำนวนจำกัด ในแต่ละองค์ประกอบจะมีคาบ มุมเฟส และแอมพลิจูดของตัวเอง
- 2) ส่วนประกอบต่าง ๆ เป็นฮาร์โมนิกอย่างง่าย (Simple harmonic) ในแต่ละเวลา และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

สมการฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลงเขียนดังต่อไปนี้

$$\eta = a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} + \delta_i \right) \quad [3-6]$$

เมื่อ  $\eta$  = ระดับน้ำขึ้นน้ำลง

$a_0$  = ระยะขจัด (displacement) จากระดับน้ำเฉลี่ย ถึงระดับน้ำทะเลปานกลาง

$t$  = เวลา

$N$  = จำนวนองค์ประกอบ

$a_i, \delta_i$  = แอมพลิจูด (amplitude), มุมเฟส (phase angle) ขององค์ประกอบที่  $i$  ตามลำดับ

$T_i$  = คาบ (period) ขององค์ประกอบที่  $i$  ซึ่งในการศึกษานี้ได้เลือกองค์ประกอบที่สำคัญที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง ดังตารางที่ 3-1



ตารางที่ 3-1 องค์ประกอบที่สำคัญที่ทำให้เกิดน้ำขึ้นน้ำลง [ 6 ]

ชนิด	ชื่อน้ำขึ้นน้ำลง	สัญลักษณ์	คาบเวลา ชั่วโมง : นาที
Semi-diurnal tides	Principal lunar	$M_2$	12.25
	Principal solar	$S_2$	12.00
Diurnal tides	Luni-solar diurnal	$K_1$	23.36
	Principal lunar diurnal	$O_1$	25.49

การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกน้ำขึ้นน้ำลง แบ่งได้ 2 ส่วน คือ

- ก) จากข้อมูลระดับน้ำที่วัดจริง สามารถวิเคราะห์หามุมเฟส และแอมพลิจูดของแต่ละองค์ประกอบที่ตำแหน่งที่ต้องการหา
- ข) การวิเคราะห์ฮาร์โมนิกนี้ สามารถทำนายระดับน้ำขึ้นน้ำลงในอนาคตได้จากสมการที่ (3-6) กระจายเทอมได้ดังนี้

$$\eta = a_0 + \sum_{i=1}^N \left[ a_i \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) \cos \delta_i + a_i \cos \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) \sin \delta_i \right] \quad [3-7]$$

คูณสมการที่ [3-7] ด้วย  $\sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right)$  แล้วอินทิเกรต (integrate) ในช่วงเวลา 0 ถึง  $\Delta t$  และหารด้วย  $\Delta t$  จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_0^{\Delta t} a_0 \sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right) dt \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \int_0^{\Delta t} \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) \sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right) dt \\ &\left. + \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \int_0^{\Delta t} \cos \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) \sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right) dt \right\} \end{aligned} \quad [3-8]$$

อินทิเกรตสมการที่ 3-8 จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right) dt &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{a_0}{2\pi} T_j (1 - \cos \left( \frac{2\pi \Delta t}{T_j} \right)) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^N a_i \cos \delta_i \left\{ \frac{\sin [2\pi \Delta t \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right)]}{4\pi \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right)} - \frac{\sin [2\pi \Delta t \left( \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j} \right)]}{4\pi \left( \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j} \right)} \right. \\ &\left. \left. + \sum_{i=1}^N a_i \sin \delta_i \left\{ \frac{1 - \cos [2\pi \Delta t \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right)]}{4\pi \left( \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_j} \right)} + \frac{1 - \cos [2\pi \Delta t \left( \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j} \right)]}{4\pi \left( \frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_j} \right)} \right\} \right] \end{aligned} \quad [3-9]$$

เมื่อ  $T_i = T_j$  สมการที่ [3-9] จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt = \frac{a_i}{2} \cos \delta_i \quad [3-10]$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าคูณสมการที่ [3-7] ด้วย  $\cos \left( \frac{2\pi t}{T_j} \right)$  แล้วอินทิเกรตในช่วงเวลา 0 ถึง  $\Delta t$  และหารด้วย  $\Delta t$  พิจารณาเมื่อ  $T_j = T_i$  จะได้

$$\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt = \frac{a_i}{2} \sin \delta_i \quad [3-11]$$

ค่าคงที่  $a_0$  หาได้จาก

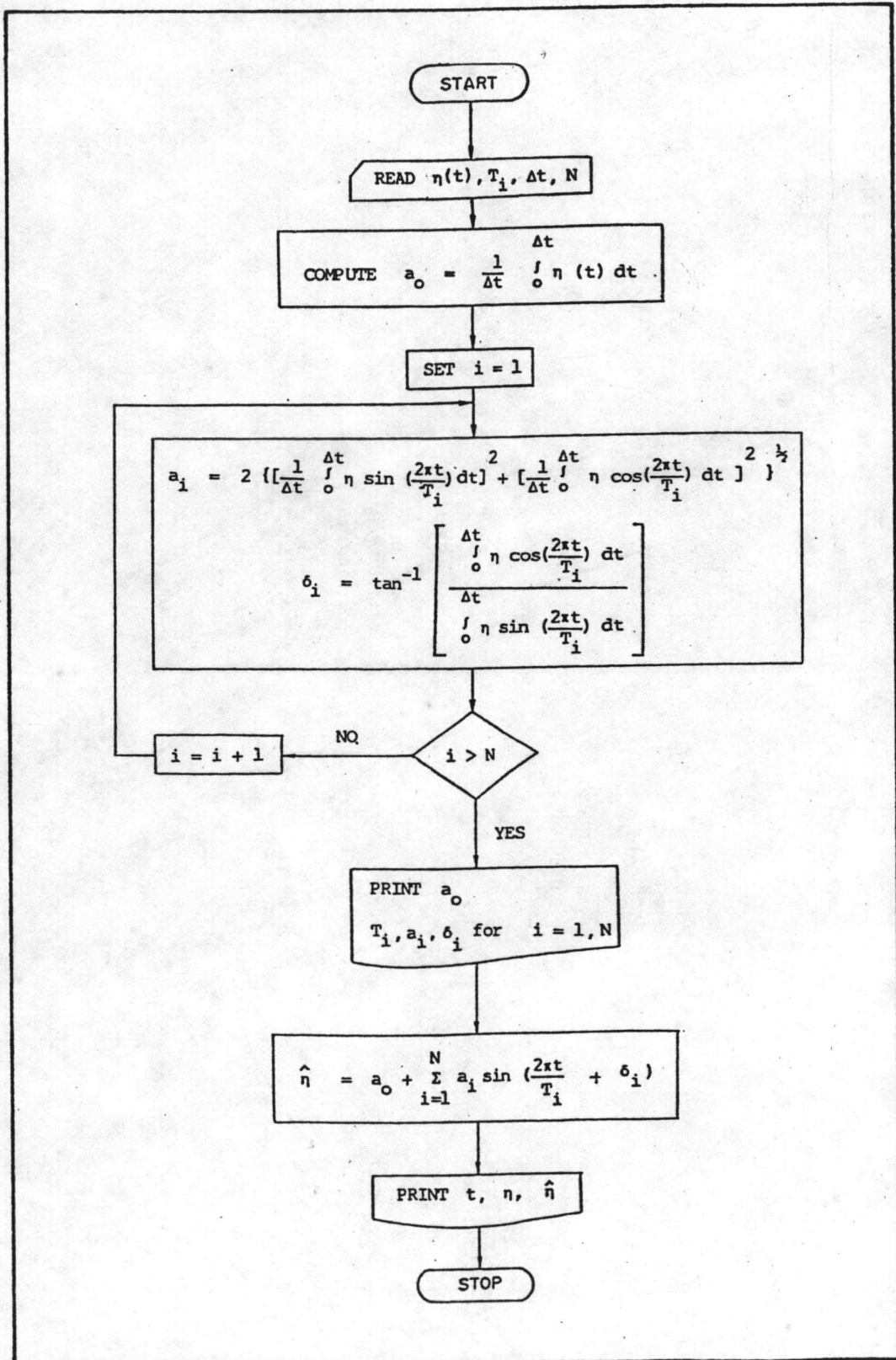
$$a_0 = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta(t) dt \quad [3-12]$$

จากสมการที่ 3-10 และ 3-11 สามารถหาค่า  $a_i$  และ  $\delta_i$  ได้ดังนี้

$$a_i = 2 \left\{ \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt \right]^2 + \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad [3-13]$$

$$\delta_i = \tan^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \cos \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt}{\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \eta \sin \left( \frac{2\pi t}{T_i} \right) dt} \right] \quad [3-14]$$

แผนผัง (flow chart) ของการคำนวณหาระบบโมดัลน้ำขึ้นน้ำลงดังรูปที่ 3-13



รูปที่ 3-13 แผนผังการคำนวณวิธีฮาร์โมนิกนำขึ้นนำลง



## 3.2.4 ชนิดของน้ำขึ้นน้ำลง

ชนิดของน้ำขึ้นน้ำลง สามารถแบ่งได้จากการพิจารณาองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของน้ำขึ้นน้ำลง คือ  $M_2$  และ  $S_2$  และองค์ประกอบที่สำคัญที่สุดของน้ำเคี้ยว คือ  $K_1$  และ  $O_1$  ดังนี้

- 1) การศึกษาน้ำขึ้นน้ำลงของฝรั่งเศส [6] พบว่า ชนิดของน้ำขึ้นน้ำลงขึ้นอยู่กับอัตราส่วนแอมพลิจูดขององค์ประกอบ ดังนี้

$$\text{อัตราส่วนแอมพลิจูด} = \frac{K_1 + O_1}{M_2 + S_2} \quad [3-15]$$

ถ้า น้อยกว่า 0.25 เป็นน้ำขึ้นน้ำลง (Semi-diurnal tide)

0.25 ถึง 1.25 เป็นน้ำผสม (Mixed tide)

มากกว่า 1.25 เป็นน้ำเคี้ยว (Diurnal tide)

- 2) Publications of the U.S. Coast and Geodetic Survey [6]

ได้แบ่งชนิดของน้ำขึ้นน้ำลงตามอัตราส่วนแอมพลิจูดขององค์ประกอบ ดังนี้

$$\text{อัตราส่วนแอมพลิจูด} = \frac{K_1 + O_1}{M_2} \quad [3-16]$$

ถ้า น้อยกว่า 0.5 เป็นน้ำขึ้นน้ำลง (Semi-diurnal tide)

0.5 ถึง 2.0 เป็นน้ำผสม (Mixed tide)

มากกว่า 2.0 เป็นน้ำเคี้ยว (Diurnal tide)

## 3.3 สัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ (Cross correlation coefficient)

การศึกษาครั้งนี้ มีตัวแปรที่ต้องการหาความสัมพันธ์หลายตัวแปรได้แก่ ปริมาณความเค็ม อัตราการไหล ระดับน้ำ และพิสัยน้ำขึ้นน้ำลง ในการหาความสัมพันธ์จะต้องอาศัยสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นการจับคู่ความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ละ 2 ตัวแปร โดยใช้สูตรการหาค่าสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\text{สัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์} \quad (r_{xy}) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y} \quad [3-17]$$

โดยที่  $-1 \leq r_{xy} \leq 1$  และ  $r_{xy} = r_{yx}$

เมื่อ  $\bar{x}$  = ค่าเฉลี่ยของตัวแปร  $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

$\bar{y}$  = ค่าเฉลี่ยของตัวแปร  $y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$

$S_x =$  ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปร  $x$

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\bar{x})^2}$$

$S_y =$  ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปร  $y$

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2 - (\bar{y})^2}$$

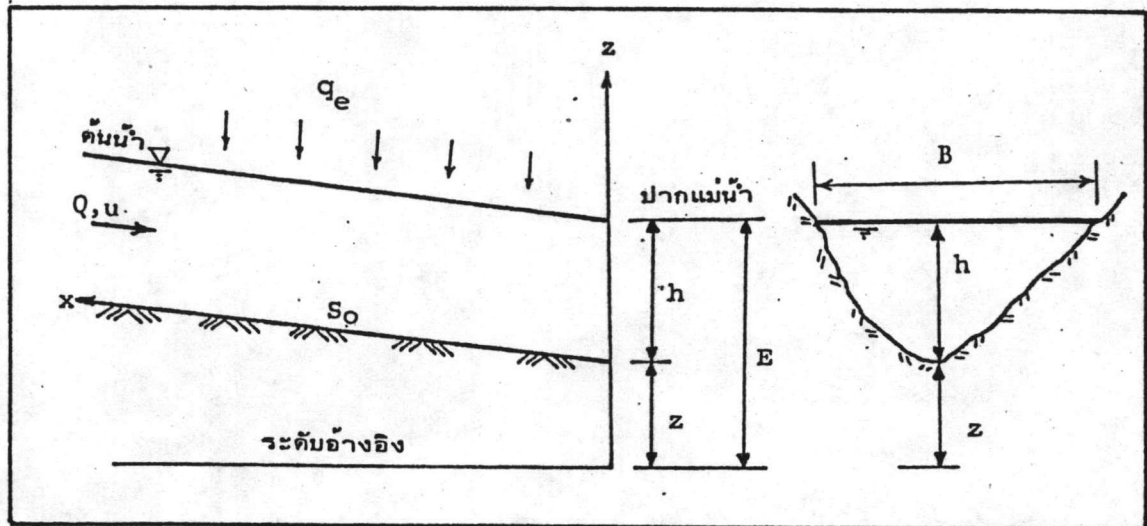
ค่าสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ เป็นค่าที่บอกถึงความสัมพันธ์ของคู่ตัวแปร กล่าวคือ ถ้าคู่ตัวแปรใดมีความสัมพันธ์กันดี ค่าสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์จะเข้าใกล้ 1 หรือ -1 โดยที่ค่าจะเป็นบวก ก็ต่อเมื่อคู่ตัวแปรสัมพันธ์กันแบบแปรตามกัน และค่าจะเป็นลบก็ต่อเมื่อคู่ตัวแปรสัมพันธ์กันแบบแปรผกผันกัน และค่าสัมประสิทธิ์ความสัมพันธ์ของคู่ตัวแปรใดมีค่าเข้าใกล้ 0 แสดงว่าคู่ตัวแปรนั้นมีความสัมพันธ์กันน้อยมากหรือไม่มีความสัมพันธ์กันเลย

### 3.4 แบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ (Finite Element Model)

แบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ เป็นแบบจำลองที่ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis) เพื่อแก้สมการพหุคูณเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial differential) ของสมการพื้นฐาน คือ สมการโมเมนต์ สมการการไหลต่อเนื่อง และสมการการแพร่ความร้อน โดยมีรายละเอียดของสมการพื้นฐาน หลักการของแบบจำลองไฟไนท์เอลิเมนต์ และสัมประสิทธิ์การแพร่ความร้อนค้ำค้ำต่อไปนี้

#### 3.4.1 สมการพื้นฐาน (Fundamental Equations)

สำหรับแม่น้ำเจ้าพระยา จากการศึกษาที่ผ่านมาทำให้ทราบว่า เมื่ออัตราการไหลจากต้นน้ำมีจำนวนน้อย ลักษณะการผสมของน้ำจืดและน้ำเค็มบริเวณปากแม่น้ำ จะเป็นการผสมกันอย่างดี (well mixed) ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการ 1 มิติ อธิบายในรูปแบบการไหลในทางน้ำเปิด ดังรูปที่ 3-14 โดยพิจารณาตัวแปรหลัก ซึ่งประกอบด้วยระดับน้ำ อัตราการไหล และปริมาณความร้อน



รูปที่ 3-14 รูปตัดการไหลในทางน้ำเปิด

การศึกษาที่ประกอบด้วยสมการพื้นฐาน 3 สมการ คือ

1) สมการโมเมนตัม (Momentum equation)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + 2u \frac{\partial Q}{\partial x} + (C_w^2 - u^2) B \frac{\partial E}{\partial x} + g A \frac{h}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ + u^2 \{ B S_0 - \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \right] \} + 2g A \frac{|Q_0|Q}{K^2} - 2g A \frac{|Q_0|Q_0}{K^3} \frac{dK}{dE} E \\ - g A \frac{|Q_0|Q_0}{K^2} + 2g A \frac{|Q_0|Q_0}{K^3} \frac{dK}{dE} E_0 = 0 \end{aligned} \quad [3-18]$$

2) สมการการไหลต่อเนื่อง (Continuity equation)

$$B \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q_e = 0 \quad [3-19]$$

3) สมการการแพร่ความเค็ม (Convective dispersion equation)

$$A \frac{\partial \rho}{\partial t} + Q \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (A D_x \frac{\partial \rho}{\partial x}) = 0 \quad [3-20]$$

โดย  $A$  = พื้นที่หน้าตัดของแม่น้ำ, ม.<sup>2</sup>

$B$  = ความกว้างของแม่น้ำที่ผิวหน้า, ม.

$C_w$  = ความเร็วคลื่น, ม./ว.

$D_x$  = สัมประสิทธิ์การแพร่ (Dispersion Coefficient) ม.<sup>3</sup>/ว.

$E_0$  = ระดับน้ำจากระดับอ้างอิงที่เวลา  $t$ , ม.

$E$  = ระดับน้ำจากระดับอ้างอิงที่เวลา  $t + \Delta t$ , ม.

$K$  = ความสามารถต่อการไหลของหน้าตัด (Conveyance) =  $\frac{1}{n} AR^{2/3}$  ม.

$Q_0$  = อัตราการไหลที่เวลา  $t$ ,  $m^3/v$ .

$Q$  = อัตราการไหลที่เวลา,  $t + \Delta t$ ,  $m^3/v$ .

$R$  = รัศมีชลศาสตร์, ม.

$S_0$  = ความลาดเอียงของท้องน้ำ

$g$  = ความโน้มถ่วงของโลก,  $m./v.^2$

$h$  = ความลึกของน้ำ, ม.

$n$  = สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (Manning's roughness)

$q_e$  = อัตราการไหลเข้าทางด้านข้าง,  $m.^3/v./m$ .

$t$  = เวลา,  $v$ .

$u$  = ความเร็วกระแส น้ำ,  $m./v$ .

$x$  = ระยะทาง, ม.

$\rho$  = ความหนาแน่นของน้ำ,  $กก./m^3$

ค่าปริมาณความเค็ม (Salinity) สามารถแปลงเป็นค่าความหนาแน่นได้ดังนี้

$$\rho = 1000 + 0.75 S \quad [3-21]$$

เมื่อ  $S$  = ปริมาณความเค็ม มีหน่วยเป็นกรัมต่อลิตร หรือส่วนในพันส่วน (part per thousand, ppt)

จากสมการพื้นฐานทั้ง 3 สมการ สามารถเขียนเป็นรูป matrix ได้ดังนี้

$$S_{ij} \dot{X}_j + T_{ij} X_j \dot{x} + V_{ij} X_j + F_i = 0 \quad [3-22]$$

$$\text{เมื่อ} \quad S_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \quad X_j = \begin{bmatrix} Q \\ E \\ P \end{bmatrix}$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2u & (C_w^2 - u^2)B & \frac{gAh}{2\rho} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}$$

$$V_{ij} = \begin{bmatrix} 2g A \frac{|Q_0|}{K^2} & -2g A \frac{|Q_0| Q_0}{K^3} \frac{dK}{dE} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} -g A \frac{|Q_0| Q_0}{K^2} + 2g A \frac{|Q_0| Q_0}{K^3} \frac{dK}{dE} E_0 + u^2 \{B S_0 - [\frac{\partial A}{\partial x}]\} \\ -q_e \\ -\frac{\partial}{\partial x} (A D_x \frac{\partial p}{\partial x}) \end{bmatrix}$$

โดยที่  $i$  = จำนวนสมการ และ  $j$  = จำนวนตัวแปร

ในที่นี้  $i = 1, 2, 3$  และ  $j = 1, 2, 3$

ค่า derivative ตามแกนเวลา ( $t$ ) และตามแกนระยะทาง ( $x$ ) กำหนดให้เขียน  
ในรูปแบบ ดังนี้

$$\dot{x}_j = \frac{\partial x_j}{\partial t} \quad \dot{x}_{j,x} = \frac{\partial x_j}{\partial x} \quad [3-23]$$

ในการแก้สมการ 3-22 ได้กำหนดให้มีเงื่อนไขที่ขอบเขต (Boundary condition) ที่ปากแม่น้ำ จะกำหนดให้อัตราการไหลหรือระดับน้ำ เป็นฟังก์ชันกับเวลา และเมื่อน้ำไหลเข้าแม่น้ำ ค่าความหนาแน่นของน้ำ เค็มจะเป็นฟังก์ชันกับเวลา หรือผลต่างของความหนาแน่น (density gradient) เท่ากับ 0 เมื่อน้ำไหลออกทะเล ส่วนที่ตมน้ำจะกำหนดให้อัตราการไหลหรือระดับน้ำ เป็นฟังก์ชันกับเวลา และเมื่อน้ำไหลขึ้นไปตมเหนือน้ำ จะให้ค่าผลต่างของความหนาแน่น เท่ากับ 0 หรือค่าความหนาแน่นจะเป็นฟังก์ชันกับเวลาเมื่อน้ำไหลลงมาตมท้ายน้ำ ซึ่งสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังนี้

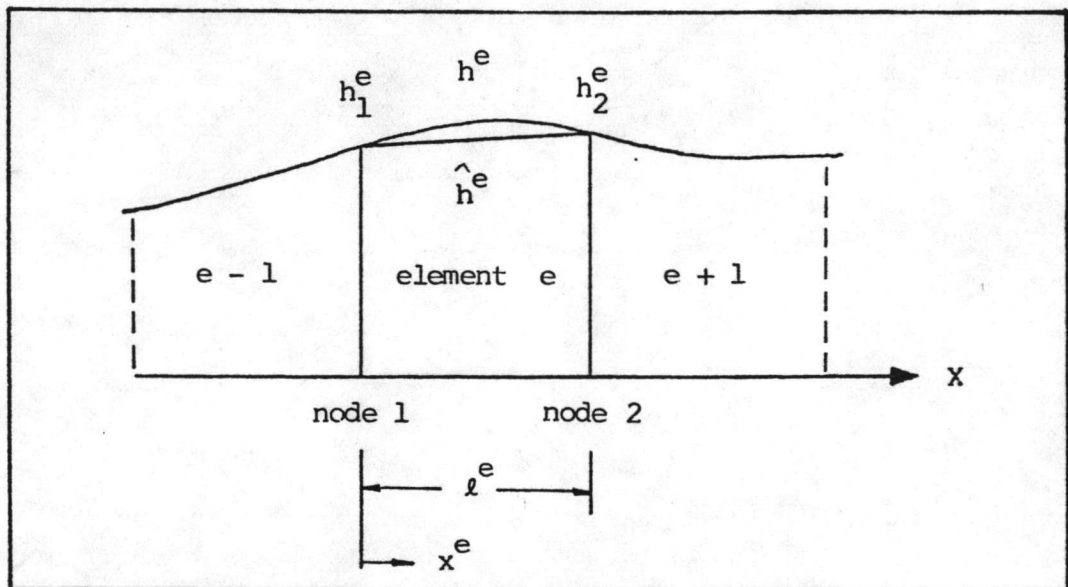
ที่ปากแม่น้ำ	( $x=0$ )	$Q = f(t)$	หรือ	$E = g(t)$
	และ	$p = h(t)$	เมื่อ	$Q \geq 0$
	หรือ	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	เมื่อ	$Q < 0$
ที่ตมน้ำ	( $x=L$ )	$Q = f(t)$	หรือ	$E = g(t)$
	และ	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$	เมื่อ	$Q \geq 0$
	หรือ	$p = h(t)$	เมื่อ	$Q < 0$

ในการคำนวณของการศึกษาครั้งนี้ ได้ให้ระดับน้ำที่ปากแม่น้ำ และอัตราการไหลที่ตมน้ำ เป็นค่ากำหนดให้ตามเวลา



### 3.4.2 หลักการของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

หลักการของแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์จะแบ่งพิจารณาการไหลของแม่น้ำออกเป็นช่วง ๆ แต่ละช่วงเรียกว่า เอลิเมนต์ (element) ภายในแต่ละเอลิเมนต์ที่ยังอธิบายได้จากสมการพื้นฐานในหัวข้อ 3.4.1 ในการศึกษาครั้งนี้ จะกำหนดให้แต่ละเอลิเมนต์มี 2 node ซึ่งแต่ละ node จะมีตัวแปรอยู่ 3 ตัวแปร คือ  $Q$ ,  $E$  และ  $p$  ในสมการพื้นฐานนั้น ตัวแปรทั้ง 3 ตัวแปรจะเป็นค่าตัวแปรต่อเนื่อง (Continuous variable) และเมื่อแบ่งแม่น้ำออกเป็นช่วง ๆ แล้ว ค่าตัวแปรต่อเนื่อง ( $h^e$ ) จะต้องกำหนดความสัมพันธ์กับค่าตัวแปรที่ node ( $h_1^e$  และ  $h_2^e$ ) ดังรูปที่ 3-15



รูปที่ 3-15 แสดงพิกัดของเอลิเมนต์ที่ e

รูปที่ 3-15 แสดงพิกัดของเอลิเมนต์ที่ e ตามแกนระยะทาง ( $x$ ) ณ เวลา  $t$  คงที่ ถ้าให้  $h^e$  คือตัวแปรต่อเนื่อง  $Q$  หรือ  $E$  หรือ  $p$  ของสมการพื้นฐานที่พิจารณา ซึ่งตัวแปร  $h^e$  นี้ สามารถทดแทนหรือประมาณค่าตัวแปรต่อเนื่อง  $\hat{h}^e$  ค่าที่ได้จากฟังก์ชันของ  $\hat{h}^e$  จะทำให้มีค่าใกล้เคียงกับค่าของ  $h^e$  มากที่สุด โดยวิธี weighted residual ซึ่งจะกล่าวต่อไป ในการกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟังก์ชันของ  $\hat{h}^e$  กับค่าตัวแปรที่ node ( $h_1^e$  และ  $h_2^e$ ) สามารถทดแทนได้ด้วยสมการ Interpolation ใด ๆ ในที่นี้จะใช้สมการ Interpolation เป็นสมการเชิงเส้นตรง (linear function) ดังนี้

$$\begin{aligned} \hat{h}^e &= \left(1 - \frac{x^e}{l^e}\right) h_1^e + \left(\frac{x^e}{l^e}\right) h_2^e \\ &= L_1^e h_1^e + L_2^e h_2^e \\ &= [L_1^e \quad L_2^e] \begin{bmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3-24}$$

โดยที่  $\hat{h}^e$  = ตัวแปรต่อเนื่องของสมการเชิงเส้นซึ่งใช้ทดแทนตัวแปร  $h^e$   
 $h_1^e, h_2^e$  = ค่าตัวแปรที่ node 1 และ node 2 ของเอลิเมนต์ e ตามลำดับ

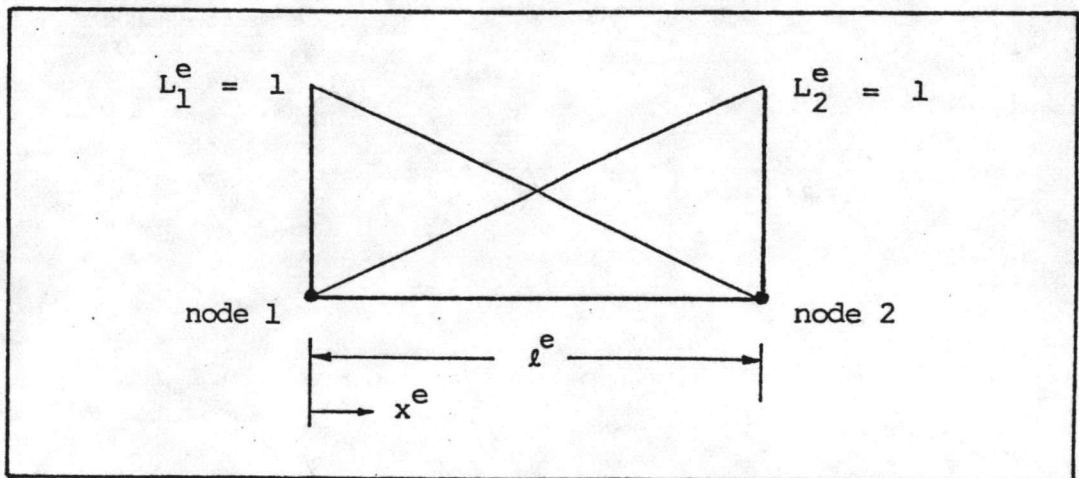
$x^e$  = ระยะทางจาก node 1 ของเอลิเมนต์ e

$l^e$  = ความยาวของเอลิเมนต์ e

$$L_1^e = 1 - \frac{x^e}{l^e}$$

$$L_2^e = \frac{x^e}{l^e}$$

$[L_1^e \quad L_2^e]$  = interpolation function ซึ่งในกรณี linear function สามารถแสดงระบบของ  $[L_1^e, L_2^e]$  ได้ดังรูปที่ 3-16



รูปที่ 3-16 ระบบของ linear interpolation function

สมการ 3-24 สามารถเขียนใหม่ได้ ดังนี้

$$x_j = M_{jk} x_k \tag{3-25}$$

โดยที่  $x_j = \hat{h}^e$

$$M_{jk} = \text{interpolation function} = [L_1^e \quad L_2^e]$$

$x_k$  = ตัวแปรที่ node 1 และ node 2 ของเอลิเมนต์ e =

k = เอลิเมนต์ที่ e

$$\begin{bmatrix} h_1^e \\ h_2^e \end{bmatrix}$$

เมื่อค่า derivative ของ  $X_j$  ตามแกนเวลา  $t$  และ ตามแกนระยะทาง  $x$  คือ

$$\dot{X}_j = \frac{\partial X_j}{\partial t} = M_{jk} \dot{X}_k \quad \text{และ} \quad X_{j,x} = \frac{\partial X_j}{\partial x} = M_{jk,x} X_k \quad [3-26]$$

แทนค่าสมการ 3-26 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ  $\hat{h}^e$  ลงในสมการ 3-22 ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ  $h^e$  จะเกิดความคลาดเคลื่อน  $\epsilon$  ขึ้น ดังสมการ

$$S_{ij} M_{jk} \dot{X}_k + T_{ij} M_{jk,x} X_k + V_{ij} M_{jk} X_k + F_i = \epsilon \quad [3-27]$$

หลักการของ weighted residual method จะทำให้ความคลาดเคลื่อนจากการแทนค่าฟังก์ชัน  $h^e$  ด้วย ฟังก์ชัน  $\hat{h}^e$  ให้มีความคลาดเคลื่อน  $\epsilon$  มีค่าน้อยที่สุด โดยการหา weighting function เข้าไปคูณกับค่า  $\epsilon$  แล้วอินทิเกรตทั้ง domain ให้เท่ากับ 0 จะได้

$$\int_{\ell} (\phi \cdot \epsilon) dx = 0 \quad [3-28]$$

เมื่อ  $\phi = \text{weighting function}$

การที่จะหา weighting function ในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น จะพบว่าวิธีของ Galerkin เป็นวิธีใช้ได้สะดวกที่สุด ซึ่งโดยข้อสรุปว่า weighting function ที่เหมาะสมที่สุด ก็คือ transposed matrix ของสมการ Interpolation function [35]

ดังนั้น เมื่อแทนค่า weighting function และสมการ 3-27 ในสมการ 3-28 จะได้

$$\int_{\ell} M_{jk}^T (S_{ij} M_{jk} \dot{X}_k + T_{ij} M_{jk,x} X_k + V_{ij} M_{jk} X_k + F_i) dx = 0 \quad [3-29]$$

สมการ 3-29 เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$P_{mk} \dot{X}_k + W_{mk} X_k + F_m = 0 \quad [3-30]$$

$$\text{เมื่อ} \quad P_{mk} = \int_{\ell} M_{jk}^T S_{ij} M_{jk} dx$$

$$W_{mk} = \int_{\ell} M_{jk}^T T_{ij} M_{jk,x} dx + \int_{\ell} M_{jk}^T V_{ij} M_{jk} dx$$

$$F_m = \int_{\ell} M_{jk}^T F_i dx$$

เนื่องจากสมการ 3-30 นั้น ยังมีตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาในสภาวะไม่คงที่ (unsteady state) จึงต้องมีรูปแบบความสัมพันธ์ตามเวลาซึ่งเรียกว่า Time Scheme ดังนั้น ในกรณีของสมการเชิงเส้นสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎี Taylor's expansion ได้ดังนี้

$$x_k^{(n)} = x_k^{(n-1)} + \Delta t (\theta x_k^{(n)} + (1 - \theta) x_k^{(n-1)}) \quad [3-31]$$

โดยที่  $n = \text{Time step}$

$\theta = \text{weighting coefficient } (0 \leq \theta \leq 1)$

ค่า weighting coefficient มีรูปแบบต่าง ๆ กัน ดังนี้

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{Explicit method} \\ \frac{1}{2} & \text{Crank-Nicolson scheme} \\ \frac{2}{3} & \text{Gerlerkin method} \\ 1 & \text{Fully Implicit method} \end{cases}$$

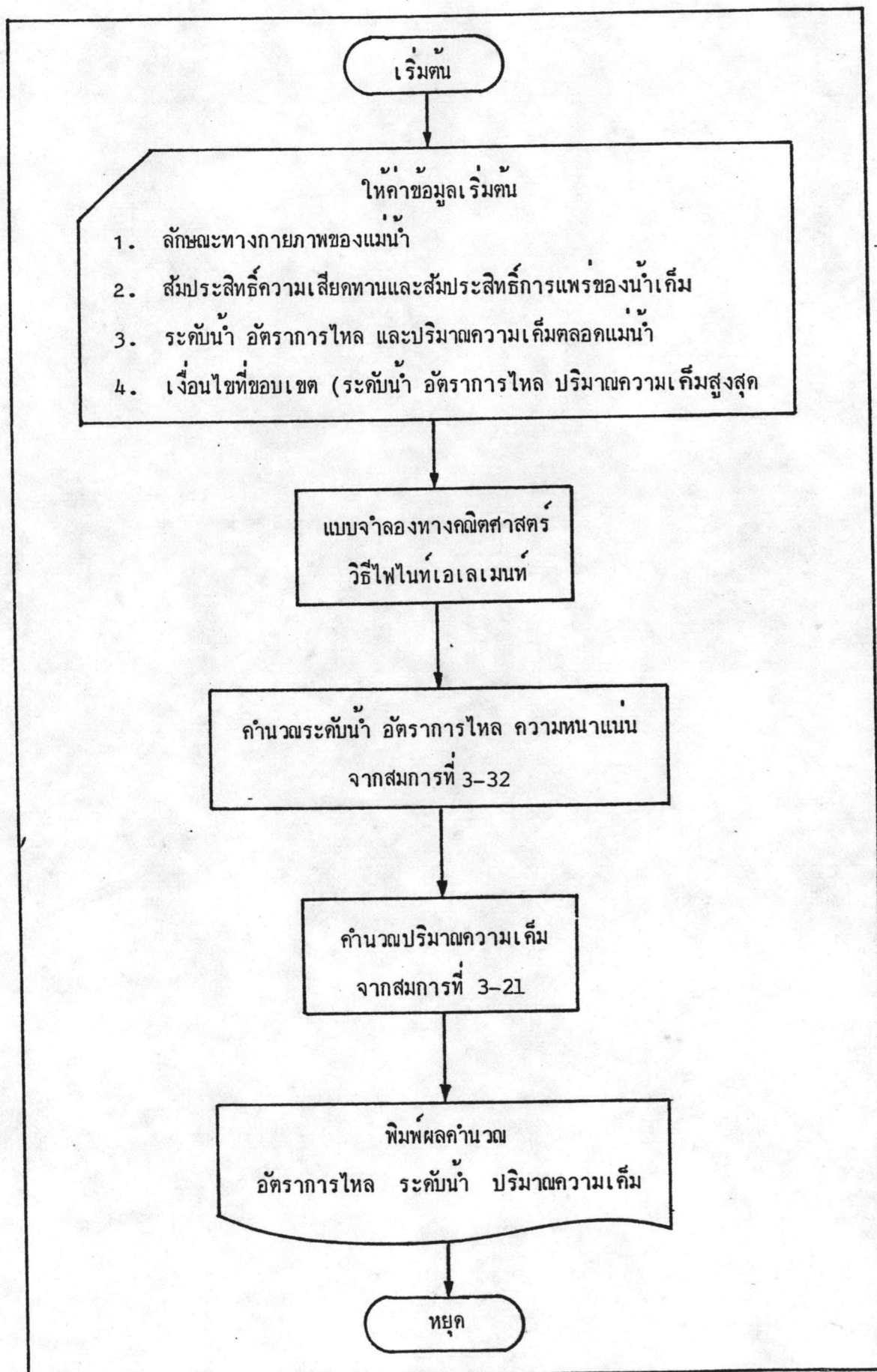
แทนค่าสมการ 3-31 ในสมการ 3-30 จะได้สมการ Finite Element ของแต่ละ element ดังนี้

$$[K_k] [X_k]^{(n)} = [F_k] \quad [3-32]$$

$$\text{เมื่อ} \quad [K_k] = \frac{1}{\Delta t} [P_{mk}] + \theta [W_{mk}]$$

$$[F_k] = \left\{ \frac{1}{\Delta t} [P_{mk}] + (\theta-1) [W_{mk}] \right\} \{X_k\}^{(n-1)} - (\theta-1) [F_m]^{(n-1)} - \theta [F_m]^{(n)}$$

สมการ FINITE ELEMENT ของทั้งลำน้ำจะได้จากการรวมสมการ 3-32 ซึ่งเป็นค่าของแต่ละเอเลเมนต์เข้าด้วยกันเป็นสมการ matrix ของทั้งลำน้ำ การแก้สมการ matrix ใหญ่ สามารถแก้สมการได้ด้วยวิธี Gauss Elimination (ดูรายละเอียดในภาคผนวก จ) ทั้งนี้ ขั้นตอนการคำนวณของแบบจำลองสรุปไว้ดังรูปที่ 3-17



รูปที่ 3-17 ขั้นตอนการคำนวณด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

### 3.4.3 สัมประสิทธิ์การแพร่ของน้ำเค็ม

ในปี 1972 Thatcher และ Harleman [9] ได้ศึกษาพบว่า สัมประสิทธิ์การแพร่ของน้ำเค็ม มีความสัมพันธ์กับปริมาณความเค็ม ระยะทางจากปากแม่น้ำ อิทธิพลของน้ำขึ้นน้ำลง อัตราการไหลจากแม่น้ำ และลักษณะทางกายภาพของแม่น้ำได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$D_x = K \frac{\alpha(s/s_0)}{\alpha(x/L)} + 3 E_T \quad [3-33]$$

โดยที่  
เมื่อ

$$E_T = 63.3 n u R^{5/6}$$

$$D_x = \text{สัมประสิทธิ์การแพร่ของน้ำเค็ม, ม.}^2/\text{ว.}$$

$$K = \text{พารามิเตอร์ของการแพร่, ม.}^2/\text{ว.}$$

$$s = \text{ปริมาณความเค็ม, ppt}$$

$$s_0 = \text{ปริมาณความเค็มสูงสุดที่ปากแม่น้ำ, ppt}$$

$$x = \text{ระยะทางจากปากแม่น้ำ, ม.}$$

$$L = \text{ระยะทางจากปากแม่น้ำถึงเขตอิทธิพลน้ำขึ้นน้ำลง, ม.}$$

$$E_T = \text{สัมประสิทธิ์การแพร่แบบปั่นป่วน (turbulent dispersion coefficient)}$$

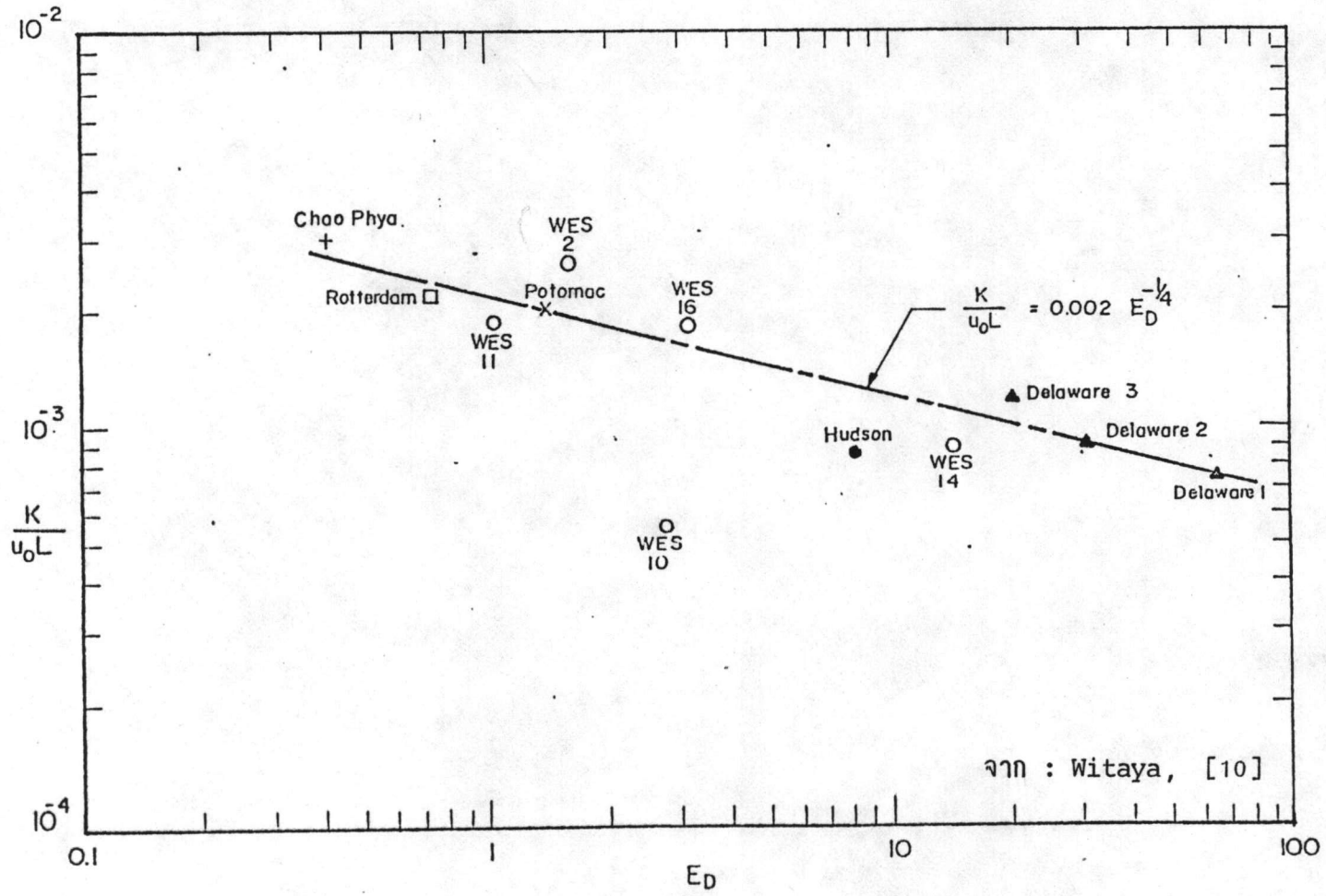
$$n = \text{สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน (Manning's roughness)}$$

$$u = \text{ความเร็วของการไหล, ม./ว.}$$

$$R = \text{รัศมีชลศาสตร์, ม.}$$

เทอมแรกทางขวามือของสมการ 3-33 เป็นสัมประสิทธิ์เนื่องจากความแตกต่างของปริมาณความเค็ม ขณะที่เทอมหลังเป็นสัมประสิทธิ์อันเนื่องมาจากความเสียดทานของการไหล ส่วนค่าของ  $K$  นั้น Thatcher และ Harleman ได้สรุปความสัมพันธ์โดยใช้ข้อมูลจากปากแม่น้ำต่าง ๆ และจากผลการทดลองในห้องปฏิบัติการ ซึ่งต่อมาในปี 1975 Witaya [10] ได้วิเคราะห์ข้อมูลปริมาณความเค็มในแม่น้ำเจ้าพระยา แล้วนำไปลงจุด (plot) กับความสัมพันธ์ที่ Thatcher และ Harleman ใช้ดังรูปที่ 3-18 ได้สูตรความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{K}{u L} = 0.002 E_D^{-0.25} \quad [3-34]$$



รูปที่ 3-18 ความสัมพันธ์ระหว่าง  $K/u_0L$  กับ  $E_D$

$$\text{โดยที่ } E_D = \frac{P_T F_D^2}{Q_f T}$$

เมื่อ  $u_o$  = ความเร็วสูงสุดขณะน้ำขึ้น (maximum flood velocity),  
ม./ว.

$E_D$  = Estuary number

$P_T$  = ปริมาตรน้ำขึ้นน้ำลง, ม.<sup>3</sup>

$Q_f$  = อัตราการไหลจากแม่น้ำ, ม.<sup>3</sup>/ว.

$T$  = คาบเวลาของน้ำขึ้นน้ำลง, ชั่วโมง

$F_D$  = Densimetric Froude number =  $\frac{u_o}{\sqrt{gh \Delta\rho/\rho}}$

ในปี 1976 Amnat [9] พบว่า ค่า  $K$  ทั้งสมการที่ 3-34 นี้ ขึ้นอยู่กับอัตราการไหลของต้นน้ำในแม่น้ำเจ้าพระยา ได้ผลดังตารางที่ 3-2 สำหรับค่าต่าง ๆ ที่วิเคราะห์มาได้ เช่น ที่อัตราการไหลของต้นน้ำ 200 ม.<sup>3</sup>/ว. พิสัยน้ำขึ้นน้ำลง 2 เมตร และคาบน้ำขึ้นน้ำลง 24 ชั่วโมง จะได้ความเร็วสูงสุด ( $u_o$ ) 0.7 ม.<sup>3</sup>/ว. และปริมาตรน้ำขึ้นน้ำลง ( $P_T$ )  $8.9 \times 10^7$  ม.<sup>3</sup>

ตารางที่ 3-2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่า  $K$  กับอัตราการไหลในแม่น้ำเจ้าพระยา

อัตราการไหล $Q_f$ ม. <sup>3</sup> /ว.	พารามิเตอร์ของการแพร่ $K$ ม. <sup>2</sup> /ว.
50	80
100	94
200	102
400	107

ในการศึกษาครั้งนี้ จะให้พารามิเตอร์ของการแพร่ตามตารางที่ 3-2 ซึ่งก็ได้มีการทดสอบแนวโน้มนการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของการแพร่ (Sensitivity Test) ทั้งจะได้กล่าวต่อไปในหัวข้อ 5.1.3



### 3.5 ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error of Estimate)

ในการเปรียบเทียบผลคำนวณของระดับน้ำ และปริมาณความเค็มกับค่าวัดจริงที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ จะใช้ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานเป็นค่าเปรียบเทียบ ซึ่งมีสมการดังนี้

$$STE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad [3-35]$$

เมื่อ

- STE = ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน
- $x_i$  = ค่าที่ไต่จากการวัดจริง
- $\hat{x}_i$  = ค่าที่ไต่จากการคำนวณ
- n = จำนวนข้อมูล