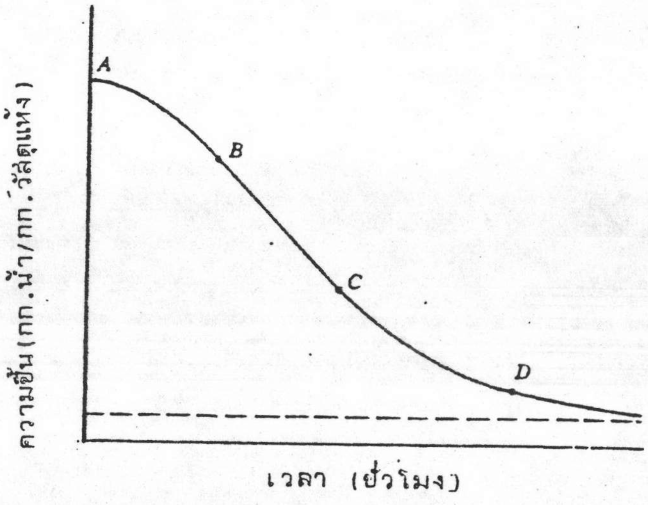
บทที่ 3

ทฤษฎีการอบแห้งแบบไหลผ่าน

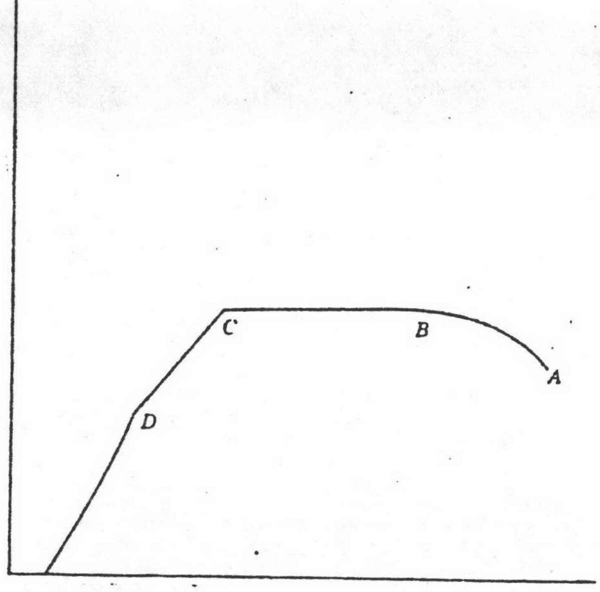
3.1 ความรู้พื้นฐานของการอบแห้ง

ในการอบแห้งวัสดุชื้นด้วยลมร้อนที่มีเงื่อนไขของอุณหภูมิและความชื้นคงที่ ในทันทีที่ลมร้อนสัมผัสกับวัสดุชื้น อุณหภูมิของวัสดุชื้นจะค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงจนกระทั่งเข้าสู่ค่า ๆ หนึ่งที่สภาวะคงที่ (Steady state) อุณหภูมิของวัสดุชื้นและอัตราการอบแห้งอาจเพิ่มขึ้นหรือลดลงก่อนที่จะเข้าสู่สภาวะคงที่ ที่สภาวะคงที่นี้อุณหภูมิของวัสดุชื้นจะมีค่าเท่ากับอุณหภูมิกระเปาะเปียกของลมร้อนและในช่วงนี้อัตราการอบแห้งของวัสดุชื้นจะมีค่าคงที่ซึ่งเราเรียกช่วงนี้ว่า ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ ช่วงเวลานี้จะสิ้นสุดลงเมื่อความชื้นของวัสดุมีค่าเท่ากับความชื้นวิกฤต หลังจากนี้อุณหภูมิที่ผิวหน้าวัสดุจะเพิ่มขึ้นและอัตราการอบแห้งจะช้าลงเรื่อย ๆ ช่วงเวลานี้เรียกว่า ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง อัตราการอบแห้งจะมีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อวัสดุมีความชื้นเท่ากับความชื้นสมดุลย์ ซึ่งเป็นความชื้นต่ำสุดของวัสดุภายใต้เงื่อนไขการอบแห้งนั้น รูปที่ 3.1 และ 3.2 แสดงเส้นกราฟของการอบแห้ง รูปที่ 3.1 เป็นกราฟของความชื้นกับเวลา และรูปที่ 3.2 เป็นกราฟของอัตราการอบแห้งกับความชื้น



รูปที่ 3.1 แสดงตัวอย่างทั่วไปของการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเมื่ออบแห้งวัสดุภายในกระแสลมร้อน ปริมาณมากที่มีอุณหภูมิ ความชื้น และความเร็วลมคงที่

อัตราการอบแห้ง (กก.น้ำ/กก.วัสดุแห้ง.ชั่วโมง)



ความชื้น (กก.น้ำ/กก.วัสดุแห้ง)

รูปที่ 3.2 แสดงเส้นลักษณะเฉพาะของการอบแห้งที่ได้มาจากรูปที่ 3.1

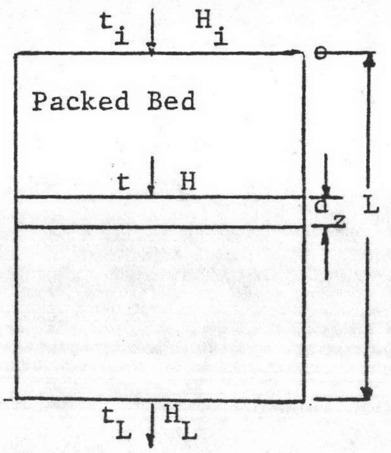
จากรูปที่ 3.1 และ 3.2 ช่วง AB เป็นช่วงที่วัสดุชื้นอยู่ในสภาวะที่ไม่คงที่ (Unsteady state) และกำลังปรับตัวเพื่อเข้าสู่สภาวะคงที่ที่จุด B ช่วง BC เป็นช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ ในช่วงนี้ผิวหน้าทั้งหมดของวัสดุชื้นจะอิ่มตัวด้วยน้ำ ที่ผิวหน้าของวัสดุจะมีน้ำห่อหุ้มเป็นฟิล์มอยู่โดยรอบและมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิกระเปาะเปียกของลมร้อน น้ำที่ระเหยออกจากผิวหน้าของวัสดุชื้นจะถูกแทนที่ตลอดเวลาด้วยน้ำที่อยู่ภายในวัสดุ กลไกของการถ่ายเทน้ำจากภายในเนื้อวัสดุออกมาที่ผิวหน้าของวัสดุนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะโครงสร้างของวัสดุ วัสดุที่มีลักษณะโครงสร้างเป็นเส้นใย (fibrous) หรืออสัณฐาน (amorphous) การถ่ายเทน้ำจะเป็นไปในลักษณะการแพร่จากภายในวัสดุออกมาที่ผิวหน้า วัสดุที่มีอัตราส่วนว่างเปิดที่ผิว (Open void space)กว้าง การถ่ายเทน้ำจะถูกควบคุมโดยแรงตึงผิวและแรงโน้มถ่วงภายในวัสดุ เนื่องจากการถ่ายเทน้ำด้วยการแพร่มีอัตราการถ่ายเทช้ามาก วัสดุที่มีการถ่ายเทน้ำโดยวิธีนี้จะมีช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่สั้นมาก หรืออาจจะไม่มีเลยที่จุด C ผิวหน้าของวัสดุเริ่มจะมีน้ำห่อหุ้มไม่สม่ำเสมอทั่วผิวหน้า ช่วง CD ในรูปที่ 3.2 เรียกว่า ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงช่วงแรก ในช่วงนี้ผิวหน้าของวัสดุเริ่มมีน้ำมาห่อหุ้มน้อยลง ๆ ทุกที เนื่องจากอัตราการถ่ายเทน้ำจากภายในเนื้อวัสดุช้ากว่าอัตราการระเหยของน้ำออกจากผิวหน้าของวัสดุ จนกระทั่งถึงจุด D ทั่วทั้งผิวหน้า

ของวัสดุจะไม่มีฟิมล์ของน้ำเหลืออยู่เลย น้ำที่อยู่ภายในวัสดุจะแพร่ออกมาที่ผิวหน้าซึ่งไม่อิ่มตัวด้วยน้ำแล้วก็จะแพร่ออกไปสู่กระแสลมร้อน กลไกการแพร่ของน้ำที่ผิวหน้าออกไปสู่กระแสลมร้อนจะมีอัตราการระเหยน้ำช้ากว่ากรณีที่ผิวหน้าของวัสดุอิ่มตัวด้วยน้ำ ซึ่งในกรณีนั้นการระเหยของน้ำที่ผิวหน้าของวัสดุจะเป็นไปในลักษณะการพา (convective transfer) ออกไปสู่กระแสลมร้อน

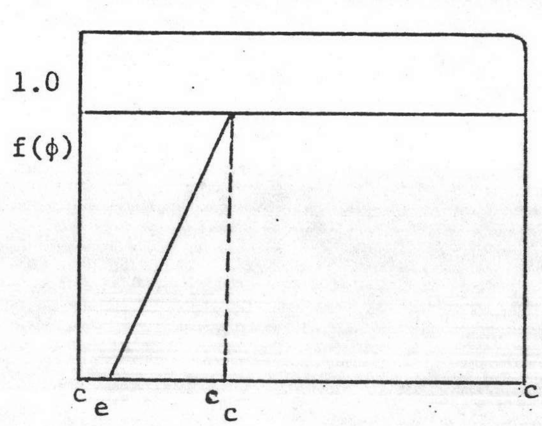
เมื่อวัสดุมีความชื้นต่ำกว่าจุด D ในรูปที่ 3.2 การระเหยทั้งหมดจะเกิดขึ้นภายในเนื้อวัสดุ ในขณะที่ความชื้นของวัสดุมีค่าลดลงระยะทางสำหรับการนำความร้อนและการแพร่ของมวลก็จะมากขึ้นจนกระทั่งวัสดุมีความชื้นเท่ากับความชื้นสมดุลย์ ซึ่งเป็นจุดซึ่งจะไม่เกิดการอบแห้งอีกต่อไป ช่วงการอบแห้งช่วงนี้เรียก ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงช่วงที่สอง

3.2 <u>แบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณการกระจายความชื้นในเครื่องอบแห้งแบบไหลผ่าน</u> Yoshida(1972) (สมมุติฐานของแบบจำลองนี้แสดงไว้ในหัวข้อ 5.5)

การอบแห้งวัสดุในที่นี้กระทำโดยการเป่าลมร้อนทะลุผ่านชั้นวัสดุในเครื่องอบแห้ง จากรูปที่ 3.3 (ก) กำหนดให้อุณหภูมิและความชื้นของลมร้อนก่อนเข้าชั้นวัสดุเท่ากับ t_i, H_i ส่วนอุณหภูมิและความชื้นที่ออกจากชั้นวัสดุเท่ากับ t_L , H_L โดยที่ความสูงของชั้นวัสดุเท่ากับ L ในรูปที่ 3.3 (ข) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $f(\phi)$ กับ C



รูปที่ 3.3 ก. แสดงการไหลของอากาศร้อนที่อุณหภูมิ t_i, ความชื้น H_i และออกจากชั้นวัสดุที่อุณหภูมิ t_L, ความชื้น H_L โดยที่ชั้นวัสดุมีความสูง L



รูปที่ 3.3 ข. แสดงเส้นลักษณะเฉพาะของการอบแห้งเม็ดวัสดุเดี่ยวภายในเงื่อนไขการอบแห้งคงที่

จากรูปที่ 3.3 (ข) จะได้ว่า

$$f(\phi) = 1 \quad \text{เมื่อ} \quad \phi \geqslant 1$$

$$f(\phi) = \phi \quad \text{เมื่อ} \quad \phi < 1 \qquad (3.1)$$

จากรูปที่ 3.3 (ก) โดยการทำสมดุลย์ของมวลในช่วงความสูงเล็ก dz จะได้

$$-(1-\varepsilon)\,\rho_s\,(\partial c/\partial\theta)\,dz = ka(Hw-H)\,f(\phi)\,dz \qquad (3.2)$$

$$-(1-\varepsilon)\,\rho_s\,(\partial c/\partial\theta)\,dz = G_o\,(\partial H/\partial z)\,dz \qquad (3.3)$$

จากสมการ (3.2) และ (3.3) เราสามารถกำหนดตัวแปรแต่ละตัวให้อยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติดังนี้คือ

เวลา $\tau = ka\theta/\{(1-\varepsilon)\,\rho_s\,(c_c - c_e)\}$

ความยาว $\xi = ka\,Z/G_o$

ความชื้นของวัสดุ $\phi = (c - c_e)/(c_c - c_e)$

ศักย์ความชื้นของอากาศ $\pi = H_w - H$

สมการ (3.2) และ (3.3) สามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{-\partial\phi}{\partial\tau} = \pi\,f(\phi) \qquad (3.4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\pi}{\partial\xi} \qquad (3.5)$$

ดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (3.4) ด้วย ξ จะได้

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\tau\partial\xi} = -\left[\pi\frac{\partial f(\phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial\pi}{\partial\xi}\,f(\phi)\right]$$

$$= -\pi\,\frac{\partial f(\phi)}{\partial\xi} - f(\phi)\frac{\partial\pi}{\partial\xi}$$

แทนค่า $$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \pi}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \xi} = -\pi \frac{\partial f(\phi)}{\partial \xi} - f(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \qquad (3.6)$$

จากสมการ (3.4) $$\pi = -\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{f(\phi)}$$

และ $$\frac{\partial f(\phi)}{\partial \xi} = \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi}$$

ดังนั้น (3.6) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \xi} - \frac{f'(\phi)}{f(\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + f(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0 \qquad (3.7)$$

อินทิเกรท ทั้งสองข้างจะได้

$$\phi + \frac{1}{f(\phi)} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = P(\xi) \qquad (3.8)$$

โดยที่ $P(\xi)$ เป็นการกระจายความชื้นที่ขึ้นกับความสูง (ξ) และ

$$0 < \xi < \xi_L \quad ; \quad \xi_L = \frac{ka_L}{G_o}$$

3.3 <u>การคำนวณการกระจายความชื้นในชั้นวัสดุอบแห้งแบบไหลผ่าน</u>

เราสามารถแบ่งลักษณะการคำนวณออกได้เป็น 2 ประเภทคือ

ก. กรณีที่วัสดุที่นำมาอบแห้งมีความชื้นแรกเริ่มอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่

ข. กรณีที่วัสดุที่นำมาอบแห้งมีความชื้นแรกเริ่มอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง

3.3.1 กรณีที่วัสดุมีความชื้นแรกเริ่มอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่

ในกรณีนี้เมื่อเราทำการอบแห้งวัสดุไปเรื่อย ๆ จะพบว่าสามารถแบ่งสภาวะของวัสดุออกได้เป็น 3 สภาวะคือ

3.3.1.1 กรณีที่ชื้นวัสดุทั้งหมดอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่

3.3.1.2 กรณีที่ชื้นวัสดุบางส่วนอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงและบางส่วนอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่

3.3.1.3 กรณีที่ชื้นวัสดุทั้งหมดอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง

เราสามารถแสดงขั้นตอนการอนุพันธ์สมการ เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณการกระจายความชื้นของวัสดุในแต่ละกรณีได้ดังนี้คือ

3.3.1.1 กรณีที่วัสดุทั้งหมดอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่

ในกรณีนี้ $f(\phi) = 1$ ดังนั้นจากสมการ (3.4) และ (3.5) จะได้

$$\frac{\partial\pi}{\partial\xi} = -\pi$$

$$\frac{\partial\pi}{\pi} = -\partial\xi$$

อินทิเกรททั้งสองข้างจะได้

$$\ln\pi = -(\xi + c)$$

$$\pi = \ell^{-(\xi + c)}$$

$$= \ell^{-\xi} . \ell^{-c}$$

$$= C_1 \ell^{-\xi}$$

ที่ $\xi = 0, \quad \pi = \pi_o$

ดังนั้น $C_1 = \pi_o$

$$\pi(\xi, \tau) = \pi_o \ell^{-\xi}$$

โดยที่ $\pi_o = \pi(o, \tau) = H_W - H_i$

แทนค่า π ลงในสมการ (3.4)จะได้

$$-\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \pi_o \ell^{-\xi}$$

$$\int\partial\phi = -\pi_o \ell^{-\xi}\int\partial\tau$$

$$\phi = -\pi_o \ell^{-\xi} \tau + c_2$$

กรณีที่ $\tau = o$, $\phi = p(\xi)$

$$C_2 = P(\xi)$$

$$\phi = P(\xi)-\pi_o \ell^{-\xi}\tau \qquad (3.9)$$

กรณีที่ความยืนแรกเริ่มมีค่าสม่ำเสมอ = ϕo

แทนค่า $P(\xi) = \phi o$ จะได้

$$\phi = \phi o - \pi_o \ell^{-\xi}\tau \qquad (3.10)$$

ที่ $\tau = \tau_c$, $\phi(o,\tau) = 1$

$$\phi(o,\tau) = 1$$

ดังนั้นจาก (3.10)

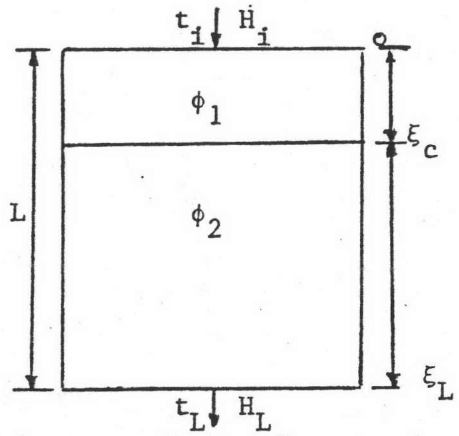
$$1 = \phi o - \pi_o \tau_c$$

$$\tau_c = \frac{\phi o-1}{\pi o} \qquad (3.11)$$

$$\omega = (W-ce)/\xi_L(c_c-c_e) \qquad (3.12)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\xi_L}\int_0^{\xi_L}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\, d\xi = (\pi o/\xi_L)(\ell^{-\xi_L}-1) \qquad (3.13)$$

3.3.1.2 กรณีที่วัสดุบางส่วนอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง และบางส่วนอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่



รูปที่ 3.4 แสดงการแบ่งช่วงการอบแห้งภายในชั้นวัสดุโดยที่ระยะ 0 ถึง ξ_c และ ξ_c ถึง ξ_L คือช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงและช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ตามลำดับ

เมื่อเราทำการอบแห้งไปเรื่อย ๆ ความชื้นของวัสดุที่ด้านทางเข้าของลมร้อนจะลดลงเร็วกว่าความชื้นของวัสดุที่ด้านทางออกของลมร้อน ดังนั้นความชื้นของวัสดุที่ด้านทางเข้าของลมร้อนจะเข้าสู่ช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลงในขณะที่ความชื้นของวัสดุในส่วนถัดไปยังอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ ดังแสดงในรูปที่ 3.4 วัสดุในช่วง $0-\xi_c$ มีความชื้นอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง ส่วนวัสดุในช่วง $\xi_c-\xi_L$ มีความชื้นอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วคงที่ ในขณะที่ทำการอบแห้ง ระยะ ξ_c จะมีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ จนกระทั่งเมื่อ $\xi_c = \xi_L$ วัสดุทั้งชั้นจะมีความชื้นอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง

ที่ตำแหน่ง $\xi<\xi_c$ จะได้ $\phi < 1$

$\xi = \xi_c$ จะได้ $\phi = 1$

$\xi > \xi_c$ จะได้ $\phi \geqslant 1$

การคำนวณการกระจายความชื้นของวัสดุที่อยู่ในช่วง $0-\xi_c$ และ $\xi_c - \xi_L$ ต้องแยกต่างหากกัน สมการที่จะนำมาใช้ในการคำนวณหาการกระจายความชื้นก็จะต่างกัน

ก. กรณี $\xi > \xi_c$, $\phi \geqslant 1$, $f(\phi) = 1$

จากสมการ (3.8)

$$\phi + \frac{1}{f(\phi)} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = P(\xi)$$

$$\phi = C(\tau)\, \ell^{-\int_0^\xi d\beta} + \ell^{-\int_0^\xi d\beta} \int_0^\xi \ell^{\int_0^\eta d\beta}\, p(\xi) d\eta$$

$$\phi = C(\tau)\, \ell^{-\xi} + \ell^{-\xi} \int_0^\xi \ell^{\eta} p(\eta) d\eta$$

$$\xi = \xi c \qquad \phi = 1$$

$$1 = C(\tau)\, \ell^{-\xi c} + \ell^{-\xi c} \int_0^{\xi c} \ell^{\eta}\, p(\eta) d\eta$$

$$C(\tau) = \frac{1 - \ell^{-\xi_c} \int_0^{\xi_c} \ell^{\eta} p(\eta) d\eta}{\ell^{-\xi_c}} = \ell^{\xi_c} - \int_0^{\xi_c} \ell^{\eta}\, p(\eta) d\eta$$

$$= \ell^{\xi c} - \int_0^{\xi c} \ell^{\eta}\, p(\eta)\, d\eta$$

$$\phi = \phi_1 = \ell^{\xi c} \ell^{-\xi} - \ell^{-\xi} \int_0^{\xi c} \ell^{\eta} p(\eta) d\eta + \ell^{-\xi} \int_0^{\xi} \ell^{\eta} p(\eta) d\eta \qquad (3.14)$$

ในกรณีที่วัสดุมีความชื้นแรกเริ่มสม่ำเสมอ $= \phi o$

แทนค่า $p(\eta) = \phi o$ จะได้

$$\phi_1 = \ell^{(\xi_c - \xi)} - \ell^{-\xi} \phi o\, (\ell^{\xi c} - 1) + \ell^{-\xi} \phi o\, (\ell^{\xi} - 1)$$

$$\phi_1 = \ell^{(\xi c - \xi)} - \ell^{-\xi} \phi o\, \ell^{\xi c} + \ell^{-\xi} \phi o + \phi o - \ell^{-\xi} \phi o$$

$$\phi_1 = \phi o - (\phi o - 1)\ell^{(\xi c - \xi)} \qquad (3.15)$$

ข. กรณี $\xi < \xi c, \ \phi < 1, \ f(\phi) = \phi$

จากสมการ (3.8)

$$\phi + \frac{1}{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = p(\xi)$$

$$\frac{1}{\phi} = C(\tau)\, \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta)d\beta} + \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta)d\beta} \int_0^{\xi} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta)d\beta}\, d\eta \qquad (3.16)$$

ที่ $\xi = \xi c \qquad \phi = 1$

$$1 = C(\tau)\, \ell^{-\int_0^{\xi_c} p(\beta)d\beta} + \ell^{-\int_0^{\xi_c} p(\beta)d\beta} \int_0^{\xi_c} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta)d\beta}\, d\eta$$

$$C(\tau) = \frac{1 - \ell^{-\int_0^{\xi_c} p(\beta)d\beta} \int_0^{\xi_c} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta)d\beta} d\eta}{\ell^{-\int_0^{\xi_c} p(\beta)d\beta}}$$

$$C(\tau) = \ell^{\int_0^{\xi_c} p(\beta)\, d\beta} - \int_0^{\xi_c} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta)d\beta} d\eta$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi_2} = \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta)d\beta}\, \ell^{\int_0^{\xi c} p(\beta)d\beta} - \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta)d\beta} \int_0^{\xi c} \ell^{\int_0^{\eta} p(\eta)d\beta} d\eta$$

$$+ \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta)d\beta} \int_0^{\xi} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta)d\beta} d\eta \qquad (3.17)$$

ในกรณีที่วัสดุมีความยืนแรกเริ่มสม่ำเสมอ $= \phi o$

แทนค่า $p(\eta) = \phi o$ จะได้

$$\frac{1}{\phi_2} = \ell^{-\phi o \xi}\, \ell^{\phi o \xi_c} - \frac{\ell^{-\phi o \xi}\, (\ell^{\phi o \xi} - 1)}{\phi_o} + \frac{\ell^{-\phi o \xi}\, (\ell^{\phi o \xi} - 1)}{\phi_o}$$

$$\frac{\phi o}{\phi_2} = \phi o\, \ell^{-\phi o \xi}\, \ell^{\phi o \xi_c} - \ell^{-\phi o \xi}\, (\ell^{\phi o \xi_c} - 1) + \ell^{-\phi o \xi}\, (\ell^{\phi o \xi} - 1)$$

$$\frac{\phi o}{\phi_2} = \phi o\, \ell^{\phi o\, (\xi c - \xi)} - \ell^{\phi o (\xi c - \xi)} + \ell^{-\phi o \xi} + 1 - \ell^{-\phi o \xi}$$

$$\frac{\phi o}{\phi_2} = \ell^{\phi o\, (\xi c - \xi)} (\phi o - 1) + 1$$

$$\phi_2 = \frac{\phi o}{(\phi o - 1)\, \ell^{\phi o\, (\xi c - \xi)} + 1} \qquad (3.18)$$

จากสมการ (3.15) และ (3.18)

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} = -(\P o/\phi o)\,(\phi o - 1 + \ell^{-\phi o \xi c})\,\ell^{(\xi_c - \xi)}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} = \frac{-\P o \phi o \ell^{\phi o(\xi c - \xi)}(\phi o - 1 + \ell^{-\phi o \xi c})}{\left\{(\phi o - 1)\,\ell^{\phi o(\xi c - \xi)} + 1\right\}^2}$$

$$\omega = \frac{1}{\xi_L}\left\{\int_0^{\xi c} \phi_2\, d\xi + \int_{\xi_c}^{\xi_L} \phi_1\, d\xi\right\}$$

$$\omega = \frac{1}{\xi_L}\left\{\ln \frac{\phi o}{1 + (\phi o - 1)\,\ell^{\phi o \xi c}} + \phi o\, \xi_L - (\phi o - 1)\,(1 - \ell^{(\xi c - \xi_L)})\right\} \qquad (3.19)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\xi_L}\left\{\int_0^{\xi c} \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau}\, d\xi + \int_{\xi c}^{\xi} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau}\, d\xi\right\}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{\P o}{\xi_L \phi o}\,(\phi o - 1 + \ell^{-\phi o \xi c})\left\{\ell^{(\xi c - \xi_L)} - 1 + \frac{1 - \ell^{\phi o \xi c}}{(\phi o - 1)\,\ell^{\phi o \xi} + 1}\right\} \qquad (3.20)$$

ค $\xi c \geqslant \xi_L$, $\phi < 1$, $f(\phi) = \phi$

ในกรณีนี้สมการที่ใช้ในการคำนวณการกระจายความชื้นคือ (3.18)

$$\omega = \frac{1}{\xi_L} \cdot \int_0^{\xi_L} \phi_2\, d\xi$$

$$\omega = \frac{1}{\xi_L}\left\{\phi o \xi_L + \ln \frac{1 + (\phi o - 1)\,\ell^{\phi o(\xi c - \xi_L)}}{1 + (\phi o - 1)\,\ell^{\phi o(\xi c)}}\right\} \qquad (3.21)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{\xi_L}\int_0^{\xi_L} \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau}\, d\xi = \frac{1}{\xi_L}\;\frac{\P o\;(\ell^{-\phi o \xi_L} - 1)}{1 + (\phi o - 1)\,\ell^{\phi o(\xi c - \xi_L)}} \qquad (3.22)$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ξ_c กับ τ

ในกรณีที่วัสดุมีความชื้นแรกเริ่มสม่ำเสมอ ϕ_o

จากสมการ (3.8)

$$\phi + \frac{1}{f(\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = p(\xi) = \phi o$$

$$\int_1^{\phi}\frac{d\phi}{f(\phi)\,(\phi_o-\phi)} = \int_{\xi_c}^{\xi} d\xi$$

$$\int_1^{\phi}\frac{d\phi}{f(\phi)\,(\phi_o-\phi)} = \xi-\xi c$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\int_1^{\phi}\frac{d\,\phi}{f(\phi)\,(\phi o-\phi)}\right\} = \cancelto{0}{\frac{\partial\xi}{\partial\tau}} - \frac{\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\int_1^{\phi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{d\phi}{f(\phi)\,(\phi_o-\phi)}\right\} = \frac{-\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\int_1^{\phi} d\left\{\frac{\partial\phi/\partial\tau}{f(\phi)\,(\phi o-\phi)}\right\} = \frac{-\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\left.\frac{\partial\phi/\partial\tau}{f(\phi)\,(\phi o-\phi)}\right|_1^{\phi} = \frac{-\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\;\frac{1}{f(\phi)\,(\phi o-\phi)} - 0 = \frac{-\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\frac{\P}{\phi o-\phi} = \frac{\partial\xi c}{\partial\tau}$$

$$\P = (\phi o-\phi)\,\frac{\partial\xi c}{\partial\tau} \qquad (3.23)$$

$$\xi = 0 \qquad \P = \P o$$

$$\xi = 0 \qquad \phi = \phi \ (o, \ \tau)$$

$$\frac{d\xi c}{d\tau} = \frac{\P o}{\left\{\phi o - \phi \ (0, \ \tau)\right\}} \tag{3.24}$$

จากสมการ (3.18)

$$\phi_2 = \frac{\phi o}{\left\{(\phi o - 1) \ \ell^{\phi_o(\xi_c - \xi)} + 1\right\}}$$

ที่ $\xi = 0 \qquad \phi_2 = \phi_2 \ (0, \ \tau)$

$$\phi_2 \ (0, \ \tau) = \frac{\phi o}{\left\{(\phi o - 1) \ \ell^{\phi_o \xi_c} + 1\right\}}$$

แทนลงในสมการ (3.24)

$$\frac{d\xi c}{d\tau} = \frac{\P o}{\phi o - \dfrac{\phi o}{(\phi o - 1) \ \ell^{\phi o \xi c} + 1}}$$

$$\frac{d\xi c}{d\tau} = \frac{\P o}{\phi o \ (\phi o - 1)} (\phi o - 1 + \ \ell^{- \phi o \xi c})$$

$$\frac{\phi o \ (\phi o - 1)}{\phi o - 1 + \ell^{-\phi o \xi c}} \ d\xi c = \P o \ d\tau$$

$$\phi o \ (\phi o - 1) \int_o^{\xi_c} \frac{1}{\phi_o - 1 + \ell^{-\phi_o \xi_c}} d\xi_c = \pi_o \int_{\tau_c}^{\tau} d\tau$$

$$- \frac{\phi o \ (\phi o - 1)}{\phi o \ (\phi o - 1)} \left\{ -\phi o \xi c - \ln \ (\phi o - 1 + \ell^{-\phi o \xi c}) \right. \Bigg|_o^{\xi c} = \pi_o (\tau - \tau_c)$$

$$\xi c = \frac{1}{\phi o} \ \ln \left\{ (\phi o \ \ell^{\P o \ (\tau - \tau c)} - 1)/(\phi_o - 1) \right\} \tag{3.25}$$

3.3.2 <u>กรณีที่วัสดุมีความชื้นแรกเริ่มอยู่ในช่วงการอบแห้งที่ความเร็วลดลง</u>

ในกรณีนี้ $f(\phi) = \phi \ , \quad \phi < 1$

จากสมการ (3.9)

$$\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{1}{f(\phi)} = p(\xi)$$

$$\frac{1}{\phi} = C(\tau) \, \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta) d\beta} + \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta) d\beta} \int_0^{\xi} \ell^{\int_0^{\xi} p(\beta) d\beta} d\eta$$

$$\xi = 0 \qquad \phi = \phi(0 \ , \ \tau) = \phi_i$$

$$\frac{1}{\phi(0,\tau)} = \frac{1}{\phi i} = C(\tau) \, \ell^{0} + \ell^{0} \cdot 0 = C(\tau)$$

$$C(\tau) = \frac{1}{\phi i}$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi i} \ell^{-\int_0^{\xi} p(\eta) d\eta} + \ell^{-\int_0^{\xi} p(\beta) d\beta} \int_0^{\xi} \ell^{\int_0^{\eta} p(\beta) d\beta} d\eta \qquad (3.26)$$

กรณีวัสดุมีความชื้นแรกเริ่มสม่ำเสมอ $= \phi_o$

แทนค่า $p(\eta) = \phi o$ จะได้

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\phi i} \ell^{-\phi o \xi} + \ell^{-\phi o \xi} \int_0^{\xi} \ell^{\phi_o \eta} d\eta$$

$$= \frac{1}{\phi i} \ell^{-\phi_o \xi} + \ell^{-\phi o \xi} \frac{1}{\phi o} \ell^{\phi o \eta} \Big|_0^{\xi}$$

$$= \frac{1}{\phi i} \ell^{-\phi o \xi} + \ell^{-\phi o \xi} \frac{1}{\phi o} (\ell^{\phi o \xi} - 1)$$

$$= \frac{1}{\phi i} \ell^{-\phi o \xi} + \frac{1}{\phi o} (1 - \ell^{-\phi_o \xi})$$

$$= \frac{\phi o - \phi i \quad (\ell^{\phi o \xi} - 1)}{\phi o \phi i \;\; \ell^{\phi o \xi}}$$

$$\phi = \frac{\phi o \phi i \, \ell^{\phi o \xi}}{\phi o - \phi i + \phi i \, \ell^{\phi o \xi}} \qquad (3.27)$$

จากสมการ (3.4)

$$\frac{-\partial \phi}{\partial \tau} = \P f(\phi) = \P \phi$$

และ $\P = H_w - H$

$$\phi i(\tau) = \phi(0, \tau)$$

$$\P o(\tau) = \P(0, \tau) = Hw\text{-}Hi = \text{ค่าคงที่}$$

$$\frac{-\partial \phi \;(0,\tau)}{\partial \tau} = \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau} = \P o(\tau)\; \phi i(\tau)$$

$$\frac{d\phi i}{d\tau} = -\P o \phi i$$

$$\phi i(\tau) = C\, \ell^{-\P o \tau}$$

$$\tau = 0\;; \qquad \phi i(\tau) = \phi i(0) = P(0) \equiv \phi io$$

$$\phi_i(0) = C\ell^{-(0)} = C = \phi_{io}$$

$$\phi i(\tau) = \phi io\, \ell^{-\P o \tau} \qquad (3.28)$$

แทนค่า $\phi i(\tau)$ ลงใน (3.26)

$$\phi(\xi,\tau) = \frac{\ell^{\int_0^\xi p(\eta) d\eta}}{\frac{1}{\phi io}\ell^{\P o \tau} + \int_0^\xi \ell^{\int_0^\eta p(\beta) d\beta} d\eta} \qquad (3.29)$$

ถ้าวัสดุมีความชื้นแรกสม่ำเสมอ $= \phi o$

แทนค่า $p(\eta) = \phi o$ จะได้

$$\phi(\xi,\tau) \quad = \quad \frac{\phi o \ell^{\phi o \xi}}{\left\{ \ell^{\P o \tau} + (\ell^{\phi o \xi} - 1) \right\}} \qquad (3.30)$$

เวลาที่ใช้ในการอบแห้งวัสดุจากความชื้นแรกเริ่ม ϕio จนกระทั่งเหลือความชื้น ϕif คำนวณได้จาก (3.28)

$$\phi_{if} \quad = \quad \phi io \; \ell^{-\P o \tau_f}$$

$$\tau_f \quad = \quad \frac{1}{\P o} \ell n \frac{\phi io}{\phi if} \qquad (3.31)$$

$$\omega(\tau) \quad = \quad \frac{1}{\xi_L} \int_0^{\xi_L} \phi \, (\xi,\tau) \, d\xi$$

แทนค่า ϕ จากสมการ (3.27) จะได้

$$\omega(\tau) \quad = \quad \frac{1}{\xi_L} \left\{ \phi o \xi_L + \ell n \; \frac{\phi i + (\phi o - \phi i) \; \ell^{-\phi o \xi_L}}{\phi o} \right\}$$

แทนค่า $\phi i = \phi io \; \ell^{-\P o \tau}$ และ $\phi io = \phi o$

$$\omega(\tau) \quad = \quad \frac{1}{\xi_L} \left\{ \phi o \xi_L + \ln \; \frac{\phi o \ell^{-\P o \tau} + (\phi o - \phi o \; \ell^{-\P o \tau}) \ell^{-\phi o \xi_L}}{\phi o} \right\} \qquad (3.32)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} \quad = \quad \frac{\P o}{\xi_L} \; \frac{\phi o \ell^{-\P o \tau} (1 - \ell^{\phi o \xi_L})}{(\phi o - \phi o \ell^{-\P o \tau} + \phi o \ell^{-\P o \tau} \cdot \ell^{\phi o \xi_L})}$$

$$= \quad \frac{\P o}{\xi_L} \; \frac{\ell^{-\P o \tau} \; (1 - \ell^{\phi o \xi_L})}{(1 - \ell^{-\P o \tau} + \ell^{-\pi_o \tau} \; \ell^{\phi o \xi_L})}$$

$$= \quad \frac{\P o}{\xi_L} \; \frac{\ell^{-\P o \tau} \; (1 - \ell^{\phi o \xi_L})}{1 - \ell^{-\P o \tau} (1 - \ell^{\phi o \xi_L})} \qquad (3.33)$$