SOME ASPECTS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Miss Kannika Poomsanoh

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1973

รูปการบางอย่างเกี่ยวกับสมการของฟังก์ชั่น

นางสาว กรรณิกา พุ่มเสนาะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต

แผนกวิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2516

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements of the Degree of Master of Science.

B. Tamthai
....
Dean of the Graduate School

Thesis Committee Surawit Kongsasna .... Chairman

Calvin F.K. Jung ....

Virool Boonyarombat ....

Fuanglada Jung ....

Thesis Supervisors Dr. Calvin F.K. Jung and Dr. Fuanglada R. Jung.

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : รูปการบางอย่างเกี่ยวกับสมการของฟังก์ชั่น

ชื่อ : นางสาว กรรณิกา พุ่มเสนาะ

แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : 2515

บทคัดย่อ

สมมุติให้ $\mathbb{K}$ เป็นเซท และ "$\circ$" , "$*$" เป็นไบนารี่โอเปอร์เรชั่นบนเซท $\mathbb{K}$ พร้อมกับสภาวะความเกี่ยวข้องกันที่แน่นอนระหว่าง "$\circ$" กับ "$*$" ตัวอย่างเช่น ($\mathbb{K}$,$*$,$+$) (โดยที่ $\circ$ แทนด้วย $+$) อาจจะประกอบกันเป็นฟิลด์ หรือ ($\mathbb{K}$, $*$) (โดยที่ $\circ$ แทนด้วย $*$) อาจจะประกอบกันเป็นกรุ๊ป เราพิจารณาสมการของฟังก์ชั่นแบบโคชี่

(1) $f(x \circ f(y)) = f(x) * f(y)$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชั่นจาก $\mathbb{K}$ ไปใน $\mathbb{K}$ ประเด็นสำคัญที่เราจะพิจารณา คือ การคำนวณหาคำตอบทางพีชคณิตของสมการ (1) ผลพลอยได้จากการนี้ทำให้เราหาคำตอบ f ของสมการ (1) ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชั่นต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ได้ด้วย เมื่อ $\mathbb{R}$ เป็นเซทของจำนวนจริง

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชั่น f จะเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นศูนย์จาก $\mathbb{K}$ ไปใน $\mathbb{K}$ เมื่อ $\mathbb{K}$ เป็นฟิลด์ที่มีคาเรกเทอริสติกศูนย์และสอดคล้องกับสมการ

(2) $f(x + f(y)) = f(x) \cdot f(y)$

เมื่อและต่อเมื่อ มีกรุ๊ปย่อย G ของ $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

(*) $\sum a_i g_i = 0$ จะทำให้ได้ว่า $\prod g_i^{a_i} = 1$

เมื่อ a_i เป็นเลขจำนวนเต็ม g_i เป็นสมาชิกของเซท G โดยที่จำนวนครั้งของการบวกหรือการคูณเป็นจำนวนอันตะ และมีฟังก์ชั่น ϕ จาก Λ ไปใน $\mathbb{K}$ เมื่อ Λ เป็นกรุ๊ปย่อยบวก (additive subgroup) ของ $\mathbb{K}$ ซึ่งเย็นเนอเรตโดย G ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$f(x + \lambda) = f(x)\, \phi(\lambda)$$

ทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกของ $\mathbb{K}$ และ λ ที่เป็นสมาชิกของ Λ

เราได้แสดงอีกด้วยว่า ฟังก์ชั่น f จะเป็นฟังก์ชั่น จาก G_o(หมายถึงกรุ๊ป G ซึ่งรวม o ด้วย) ไปยังตัวเอง และสอดคล้องกับสมการ

(3) $$f(x * f(y)) = f(x) * f(y)$$

เมื่อและต่อเมื่อมีกรุ๊ปย่อย M ของ G และฟังก์ชั่น $\tilde{f}$ จากเซท $S \cup \{0\}$ ไปเต็มเซท $M \cup \{0\}$ เมื่อ S เป็นเซทรีเพรสเซนเททีฟ ของ โคเซทหางซ้าย (left coset) ของ G/M โดยที่ $\tilde{f}(0) = 0$ เมื่อไรก็ตามที่ f ไม่คงที่และ $f(x) = \tilde{f}(s_x) * m_x$ เมื่อแต่ละ x ที่เป็นสมาชิกของ G เขียนได้ในแบบ $x = s_x * m_x$ โดยที่ s_x เป็นสมาชิกของ S และ m_x เป็นสมาชิกของ M เท่านั้น

เรานำผลที่ได้นี้มาประยุกต์หาฟังก์ชั่นต่อเนื่อง f จาก $\mathbb{R}$ ไปใน $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

(4) $$f(x * f(y)) = f(y * f(x))$$

และสมการ

(5) $$f(x * f(y)) = f(f(x) * f(y))$$

ได้โดยที่ * เป็นการบวกหรือคูณในระบบจำนวนจริง ทั้งนี้ เราจะทำโดยการเปลี่ยนสมการ (4) และ (5) เป็นสมการ (3)

ยิ่งกว่านี้ เราสามารถหาฟังก์ชั่นทั่ว ๆ ไป ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ได้

Thesis Title : Some Aspects of Functional Equations.

Name : Miss Kannika Poomsanoh.

Department : Mathematics.

Academic Year : 1972.

ABSTRACT

Suppose $\mathbb{K}$ is a set and "o" , "$*$" are binary operations on $\mathbb{K}$ with certain compatibility condition between "o" and "$*$". For example, ($\mathbb{K}$, $*$, +) (with + = o) might be a field or ($\mathbb{K}$, $*$) (with o = $*$) might be a group. We consider the Cauchy type functional equation

(1) $$f(x \circ f(y)) = f(x) * f(y)$$

where $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Our main concern is to find the algebraic solutions of Eq (1). As consequences, we also find continuous solutions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ of Eq (1).

In particular, we show that a non-zero function f mapping a field $\mathbb{K}$ of characteristic 0 into itself satisfies the equation

(2) $$f(x + f(y)) = f(x) \cdot f(y)$$

if and only if there exists a subgroup G of $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ satisfying the condition

($*$) $$\sum a_i g_i = 0 \text{ implies } \prod g_i^{a_i} = 1,$$

where a_i are integers and $g_i \in G$ and where the sum and product are finite, and there exists a function $\emptyset$ mapping the additive

subgroup Λ of $\mathbb{K}$ generated by G into $\mathbb{K}$ such that

$f(x + \lambda) = f(x)\,\phi(\lambda)$ for all $x \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \Lambda$.

We also show that a function f mapping G_0, a group G with 0, into itself satisfies equation

$$(3) \qquad f(x * f(y)) = f(x) * f(y)$$

if and only if there is a subgroup M of G and a function $\tilde{f}$ from a set consisting of elements from a set of representatives S of left cosets of $G/_M$ and the element 0, onto $M \cup \{0\}$ such that $\tilde{f}(0) = 0$ whenever $f \not\equiv$ constant and $f(x) = \tilde{f}(s_x) * m_x$, where each $x \in G$ has a unique representation $x = s_x * m_x$ ($s_x \in S$ and $m_x \in M$).

As applications of this fact, we find the continuous solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of the equations

$$(4) \qquad f(x * f(y)) = f(y * f(x))$$

and equation

$$(5) \qquad f(x * f(y)) = f(f(x) * f(y)),$$

where $*$ could be multiplication or addition in $\mathbb{R}$. These are done by reducing the equations (4) and (5) to (3). Moreover, very general solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (for example, unbounded or non-measurable) of Eq (1) and Eq (2) are obtained.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to express here my sincere gratitude to Dr.Calvin F.K. Jung and Dr. Fuanglada R. Jung, my thesis supervisors, for introducing me to this subject and for their valuable assistance in preparing this thesis. Also, I thank them for preparing me to understand and possibly solve problems in related areas.

TABLE OF CONTENTS