เอกสารอ้างอิง

1. International Telephone and Telegraph Corporation, Reference Data for Radio Engineers. New York : Howard W. Sams & Co., Inc., pp 1-2
2. Wait, J.R., 1974 IEEE Transactions on Communications. (Special Issue on ELF Communications) Now York : The IEEE Communications Society. pp 353-587
3. Dejnakarintara, M., 1974 A Theoretical Study of Electrical coupling between the Troposphere, Ionosphere, and Magnetosphere. California : Technical Report No. 3453-3, Radioscience Laboratory, Stanford Electronics Laboratories, Stanford University.
4. มงคล เดชนครินทร์ , 2521 การคำนวณค่าโดยประมาณของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่ ULF-ELF ในตัวกลางแอนไอโซโทรปิก กรุงเทพฯ : บทความใน " ไฟฟ้าสื่อสาร " หนังสือประกอบการประชุมทางวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้า 8 สถาบันอุดมศึกษา ครั้งที่ 1 ณ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าวิทยาเขตเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง หน้า 2-1-1 ถึง 2-1-26
5. ________ 2523 การคำนวณค่าโดยวิธีที่ถูกต้องแน่นอนสำหรับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่ ULF-ELF ในตัวกลางเอกพันธุ์ชนิดแอนไอโซโทรปิก กรุงเทพฯ : บทความใน "ไฟฟ้าสื่อสาร" หนังสือประกอบทางวิชาการวิศวกรรมไฟฟ้า 8 สถาบันอุดมศึกษา ครั้งที่ 3 ณ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ บางเขน หน้า 45-59
6. Dejnakarintara, M., 1978 ULF-ELF Electromagnetic Fields in An Anisotropic Meduim. Bangkok : Research report No. 20-EE-2520, Engineering Research Center, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University.

7. Garabedian, P.R., 1963 Partial Differential Equation. New York : John Wiley & Sons,Inc.,pp 57-94

8. Hinchey, F.A., 1980 Introduction to Applicable Mathematics, part 1 Elementary Analysis. New Delhi : Wiley Eastern Limited

9. Spiegel, M.R., 1959 Vector Analysis and Introduction to Tensor Analysis. Singapore : Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company. pp 166-217

10. Wylie, C.R., 1961 Advanced Engineering Mathematics. Tokyo : McGraw-Hill International Book Company. pp 321-381, 388-440, 696-728

11. Ramo, Whinnery, and, Duzer, 1965 Fields and Waves in Communication Electronics. New York : McGraw-Hill Internation Book Company. pp 150-268, 322-366, 486-529

12. มงคล เดชนครินทร์ , 2522 เทคนิคการประมาณค่าทางวิศวกรรม กรุงเทพ ฯ : เอกสารประกอบการสอนวิชา 162-501. Approximation Techniques in Engineering. ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

13. Einuaudi, F. and Wait, J.R., 1971 Analysis of the Excitation of the Earth Ionosphere wave guide by a Satellite-Borne Antenna. Can.J.Phys., 49, 477

14. Fano, R.M.; Chu, L.J., and Adder, R.B., 1960 Electromagnetic Fields, Energy, and Forces. New York : John Wiley & Sons, Inc., pp 234

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

การประมาณค่าสนามแม่เหล็กไฟฟ้าขนาดความถี่ ULF-ELF

ถ้าสมมุติว่า สนามแม่เหล็กไฟฟ้าไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา $e^{i\omega t}$ เราจะได้สมการของแมกซ์เวลล์สำหรับสนามดังกล่าวนี้เป็น

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\vec{B} = -i\omega\mu\vec{H} \quad .....(1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + i\omega\vec{D} = \sigma\vec{E} + i\omega\varepsilon\vec{E} \quad .....(2)$$

เมื่อ $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ เป็นเวกเตอร์เฟสเซอร์ซึ่งแทนสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ และเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์สมการ เราจะสมมุติว่าตัวกลางที่เกี่ยวข้องเป็นแบบเชิงเส้น (linear) เอกพันธุ์ (homogeneous) และเป็นแบบไอโซโทรปิก (isotropic)

ที่ $\omega = 0$ (กรณีสนามไฟฟ้าสถิตและสนามแม่เหล็กสถิต หรือ DC) เราจะให้ $\vec{E} = \vec{E}_0$ และ $\vec{H} = \vec{H}_0$ ดังนั้นจากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\nabla \times \vec{E}_0 = 0 \quad .....(3)$$

$$\nabla \times \vec{H}_0 = \sigma\vec{E}_0 \quad .....(4)$$

สมการ (3) และ (4) นี้ เมื่อเราใช้รวมกับสมการของแมกซ์เวลล์อีก 2 สมการ คือ

$$\nabla.\vec{E}_0 = \rho/\varepsilon \quad \text{หรือ} \quad \nabla.\vec{D} = \rho \quad .....(5)$$

$$\text{และ} \quad \nabla.\vec{H}_0 = 0 \quad \text{หรือ} \quad \nabla.\vec{B}_0 = 0 \quad .....(6)$$

จะทำให้เราเอาค่าของ $\vec{E}_0$ และ $\vec{H}_0$ ออกมาได้

ที่ $\omega \simeq 0$ (กรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำ หรือ ULF-ELF) เราสามารถใช้พจน์ $-i\omega\mu\vec{H}_0$ ทางขวามือของสมการ (1) และพจน์ $i\omega\varepsilon\vec{E}_0$ ทางขวามือของสมการ (2) เป็นพจน์รบกวนในการ

สมการทั้งสอง และหาค่า $\vec{E}$ กับ $\vec{H}$ ตัวใหม่ออกมาได้โดยที่ $\vec{E}$ และ $\vec{H}$ ตัวใหม่มีค่าต่างจาก $\vec{E}_0$ และ $\vec{H}_0$ ที่หาได้จากสมการ (3) และ (4) ไม่มากนัก โดยสมมุติให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัวใหญ่เป็น

$$\vec{E}_{(1)} = \vec{E}_o + \vec{E}_1 \qquad .....(7)$$

$$\vec{H}_{(1)} = \vec{H}_o + \vec{H}_1 \qquad .....(8)$$

เมื่อใช้นิพจน์ของ $\vec{E}_{(1)}$ และ $\vec{H}_{(1)}$ ในสมการ (7) และ (8) สำหรับพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (1) และ (2) และพจน์อื่นที่ไม่มี ω เป็นตัวคูณ เราจะได้

$$\{\nabla \times \vec{E}_{(1)} = (\nabla \times \vec{E}_o) + (\nabla \times \vec{E}_1)\} = i\omega\mu\vec{H}_0$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = i\omega\mu\vec{H}_0 \qquad .....(9)$$

$$\{\nabla \times \vec{H}_{(1)} = (\nabla \times \vec{H}_0) + (\nabla \times \vec{H}_1)\} = \sigma\vec{E}_0 + \sigma\vec{E}_1 + i\omega\varepsilon\vec{E}_0$$

$$\nabla \times \vec{H}_1 = \sigma\vec{E}_1 + i\omega\varepsilon\vec{E}_0 . \qquad (10)$$

จากนี้ถ้าเราใช้ $\vec{E}_{(1)}$ และ $\vec{H}_{(1)}$ ในพจน์รบกวนในสมการ (1) และ (2) เราจะได้ค่าสนามใหม่เป็น

$$\vec{E}_{(2)} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad .....(11)$$

และ

$$\vec{H}_{(2)} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \qquad .....(12)$$

โดยที่

$$\nabla \times \vec{E}_2 = -i\omega\mu\vec{H}_1 \qquad .....(13)$$

$$\nabla \times \vec{H}_2 = \sigma\vec{E}_2 + i\omega\varepsilon\vec{E}_1 \qquad .....(14)$$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้าเราได้

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ...+ \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \ldots + \vec{H}_{n-1} + \vec{H}_n \qquad \text{.....(16)}$$

เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างสนามอันดับ n และสนามอันดับ n-1 เป็น

$$\nabla \times \vec{E}_n = -i\omega\mu\vec{H}_{n-1} \qquad \text{.....(17)}$$

และ

$$\nabla \times \vec{H}_n = \sigma\vec{E}_n + i\omega\varepsilon\vec{E}_{n-1} \qquad \text{.....(18)}$$

ถ้าตัวกลางเป็นแบบแอนไอโซโทรปิก (anisotropic) โดยที่สภาพนำไฟฟ้าเป็นแบบ เทนเซอร์ $\hat{\sigma}$ เราจะได้ผลเหมือนกับที่ได้ข้างบนนี้ทุกประการ ยกเว้นตัว σ เท่านั้นที่ต้องเปลี่ยนเป็น $\hat{\sigma}$

ภาคผนวก ข

การหานิพจน์ของเทนเซอร์ของสภาพนำไฟฟ้า

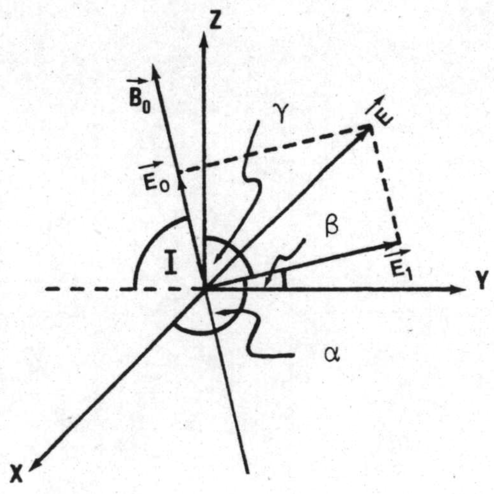
ค่าความหนาแน่นกระแส (current density) ในชั้นบรรยากาศที่มีคุณสมบัติของตัวกลางเป็นแอนไอโซโทรปิกจะมีความสัมพันธ์กับค่าสภาพนำไฟฟ้า σ_1 , σ_2 , และ σ_3 [3] ดังนี้

$$\vec{J} = \sigma_0\vec{E}_0 + \sigma_1\vec{E}_1 + \sigma_2\frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_0}{|\vec{B}_0|} \qquad .....(1)$$

โดยที่ $\vec{J}$ = ความหนาแน่นกระแส

$\vec{E}_0$ = สนามไฟฟ้าที่ขนานกับสนามแม่เหล็กโลก $\vec{B}_0$

$\vec{E}_1$ = สนามไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กโลก $\vec{B}_0$



รูปที่ ข.1 แสดงเส้นแรงสนามแม่เหล็กโลกกับมุมต่าง ๆ ที่จะใช้ในการคำนวณ

สนามแม่เหล็ก $\vec{B}_0$ อยู่ในแนวระนาบ yz เวกเตอร์หน่วยในแนว $\vec{E}_0$ กำหนดได้เป็น $\vec{a}_N$ และเว เตอร์หน่วยในแนว $\vec{E}_1$ กำหนดได้เป็น $\vec{a}_T$ และเวกเตอร์หน่วยในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียนเป็น $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ และ $\vec{a}_z$ ในแกน x , y และ z ตามลำดับ

ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\vec{E}_0 = |\vec{E}| \cos\theta \vec{a}_N \qquad .....(2)$$

$$\vec{E}_1 = |\vec{E}| \sin\theta \vec{a}_T \qquad .....(3)$$

$$\vec{B}_0 = |\vec{B}_0| \ \vec{a}_N \qquad .....(4)$$

$$\vec{a}_N = \frac{\vec{E}_0}{|\vec{E}_0|} = \frac{-|\vec{E}_0|\cos I\vec{a}_y + |\vec{E}_0| \ \sin I\vec{a}_z}{|\vec{E}_0|}$$

$$= -\cos I \ \vec{a}_y + \sin I \ \vec{a}_z \qquad .....(5)$$

$$\vec{a}_T = \frac{\vec{E}_1}{|\vec{E}_1|} = \frac{|\vec{E}_1|\cos\alpha\vec{a}_x + |\vec{E}_1|\cos\beta\vec{a}_y + |\vec{E}_1|\cos\gamma\vec{a}_z}{|\vec{E}_1|}$$

$$= \cos\alpha\vec{a}_x + \cos\beta\vec{a}_y + \cos\gamma\vec{a}_z \quad .....(6)$$

จากสมการ (6) เราจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad .....(7)$$

ดังนั้น $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 \qquad .....(8)$

$$\vec{E} = |\vec{E}_1|\cos\alpha\vec{a}_x + (|\vec{E}_1|\cos\beta - |\vec{E}_0|\cos I)\vec{a}_y$$

$$+ (|\vec{E}_1|\cos\gamma) + (|\vec{E}_0|\sin I) \ \vec{a}_z ..(9)$$

หรือ $|\vec{E}| = |\vec{E}_1|^2\cos^2\alpha + |\vec{E}_1|^2\cos^2\beta + |\vec{E}_0|^2\cos^2 I -$

$$2 \ |\vec{E}_0||\vec{E}_1|\cos I\cos\beta$$

$$+|\vec{E}_1|^2\cos^2\gamma + |\vec{E}_0|^2\sin^2 I + 2|\vec{E}_0||\vec{E}_1|\sin I\cos\gamma$$

$$= |E_1|^2 + |E_0|^2 + 2|\vec{E}_0||\vec{E}_1|$$

$$(\sin I\cos\gamma - \cos I\cos\beta) \qquad .....(10)$$

จากสมการ (9)

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{E}_0|^2 + |E_1|^2 \qquad .....(11)$$

สมการ (10) = สมการ (11) เราจะได้ความสัมพันธ์อีกว่า

$$\sin I\cos\gamma = \cos I\cos\beta \qquad .....(12)$$

$$\frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_0}{|\vec{B}_0|} = \begin{bmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ |\vec{E}_1|_x & |\vec{E}_1|_y & |\vec{E}_1|_z \\ 0 & -|\vec{B}_0|\cos I & |\vec{B}_0|\sin I \end{bmatrix}$$

($|\vec{E}_1|_x$ คือ องค์ประกอบในแนวแกน x ของ$\vec{E}$)

$$= \frac{1}{|\vec{B}_0|} (|\vec{E}_1|\cos\beta|\vec{B}_0|\sin I + |\vec{E}_1|\cos\gamma|\vec{B}_0|\cos I)\vec{a}_x -$$

$$(|\vec{E}_1|\cos\alpha|\vec{B}_0|\sin I)\vec{a}_y - (|\vec{E}_1|\cos\alpha|\vec{B}_0|\cos I)\vec{a}_z$$

$$= (|\vec{E}_1|\cos\beta\sin I + |\vec{E}_1|\cos\gamma\cos I)\vec{a}_x - (|\vec{E}_1|\cos\alpha\sin I)\vec{a}_y$$

$$- (|\vec{E}_1|\cos\alpha\cos I)\vec{a}_z \qquad .....(13)$$

จากสมการ (9) เราจะได้องค์ประกอบในแนว x , y ,และ z ดังนี้

$$E_x = |\vec{E}_1|\cos\alpha \qquad .....(14)$$

$$E_y = |\vec{E}_1|\cos\beta - |\vec{E}_0|\cos I \quad .....(15)$$

$$E_z = |\vec{E}_1|\cos\beta + |\vec{E}_0|\sin I \quad .....(16)$$

จากสมการ (1) เราจะสามารถเขียนนิพจน์ของ $\vec{J}$ ในเทอมต่าง ๆ ของ $\vec{E}$ และ องค์ประกอบของ $\vec{E}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= -\sigma_0|\vec{E}_0|\cos I\vec{a}_y + \sigma_0|\vec{E}_0|\sin I\vec{a}_z + \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\alpha\vec{a}_x + \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\beta\vec{a}_y \\
&\quad + \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\gamma\vec{a}_z + \sigma_2\ \{(|\vec{E}_1|\cos\beta\sin I + |\vec{E}_1|\cos\gamma\cos I)\vec{a}_x - \\
&\quad (|\vec{E}_1|\cos\alpha\sin I)\vec{a}_y - (|\vec{E}_1|\cos\alpha\cos I)\vec{a}_z\} \\
&= (\sigma_1|\vec{E}_1|\cos\alpha + \sigma_2|\vec{E}_1|\cos\beta\sin I + \sigma_2|\vec{E}_1|\cos\gamma\cos I)\vec{a}_x \\
&\quad + (-\sigma_0|\vec{E}_0|\cos I + \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\beta - \sigma_2|\vec{E}_1|\cos\alpha\sin I)\vec{a}_y \\
&\quad + (\sigma_0|\vec{E}_0|\sin I + \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\gamma - \sigma_2|\vec{E}_1|\cos\alpha\cos I)\vec{a}_z \quad ..(17)
\end{aligned}$$

จากสมการ (17) เราสามารถหาความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\sigma_1|\vec{E}_1|\cos\alpha = \sigma_1 E_x \quad .....(18)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_2|\vec{E}_1|\cos\beta\sin I + \sigma_2|\vec{E}_1|\cos\gamma\cos I &= \sigma_2\sin I|\vec{E}_1|\cos\beta - \sigma_2\sin I|\vec{E}_0|\cos I + \\
&\quad \sigma_2\sin I|\vec{E}_0|\cos I + \sigma_2\cos I|\vec{E}_1|\cos\gamma \\
&= \sigma_2\sin I(|\vec{E}_1|\cos\beta - |\vec{E}_0|\cos I) + \sigma_2\cos I \\
&\quad (|\vec{E}_1|\cos\gamma + |\vec{E}_0|\sin I) \\
&= \sigma_2\sin I\ E_y + \sigma_2\cos IE_z \quad .....(19)
\end{aligned}$$

$$-\sigma_2\sin I|\vec{E}_1|\cos\alpha = -\sigma_2\sin IE_x \quad .....(20)$$

$$-\sigma_o|\vec{E}_o|\cos I = -\sigma_0|\vec{E}_0|\cos I\ (\sin^2 I + \cos^2 I)$$

$$= -\sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}_0|\cos I - \sigma_0\cos I\sin I|\vec{E}_0|\sin I$$

$$= -\sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}_0|\cos I + \sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}|$$

$$\cos\beta - \sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}|\cos\beta - \sigma_0\cos I\sin I$$

$$|\vec{E}|\sin I$$

$$= -\sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}_0|\cos I + \sigma_0\cos I\cos I|\vec{E}_1|\cos\beta$$

$$\sigma_0\cos I\sin I|\vec{E}_1|\cos\gamma - \sigma_0\cos I\sin I|\vec{E}_0|\sin I$$

(จากสมการ (12))

$$= \sigma_0\cos I\cos I\ E_y - \sigma_0\cos I\sin I E_z \quad \text{.....(21)}$$

$$\sigma_1|\vec{E}_1|\cos\beta = \sigma_1|\vec{E}_1|\cos\beta\ (\sin^2 I + \cos^2 I)$$

$$= \sigma_1\sin I\sin I|\vec{E}_1|\cos\beta + \sigma_1\cos I\cos I|\vec{E}_1|\cos\beta$$

$$= \sigma_1\sin I\sin I|\vec{E}_1|\cos\beta - \sigma_1\sin I\sin I|\vec{E}_0|\cos I +$$

$$\sigma_1\sin I\sin I|\vec{E}_0|\cos I + \sigma_1\cos I\cos I|\vec{E}_1|$$

$$= \sigma_1\sin I\sin I|\vec{E}_1|\cos\beta - \sigma_0\sin I\sin I|\vec{E}_0|\cos I +$$

$$\sigma_1\sin I\cos I|\vec{E}_0|\sin I + \sigma_1\cos I\sin I|\vec{E}_1|\cos\gamma$$

(จากสมการ (12))

$$= \quad \sigma_1 \sin I \sin I \; E_y + \sigma_1 \cos I \sin I \; E_z \qquad .....(22)$$

$$-\sigma_2 |\vec{E}_1| \cos\alpha \cos I \quad = \quad -\sigma_2 \cos I \; E_x \qquad .....(23)$$

$$\sigma_0 |\vec{E}_0| \sin I \quad = \quad \sigma_0 |\vec{E}_0| \sin I \; (\sin^2 I + \cos^2 I)$$

$$= \quad \sigma_0 \sin I \sin I |\vec{E}_0| \sin I + \sigma_0 \cos I \cos I |\vec{E}_0| \sin I$$

$$= \quad \sigma_0 \sin I \sin I |\vec{E}_0| \sin I + \sigma_0 \sin I \sin I |\vec{E}_1| \cos\gamma \; -$$

$$\sigma_0 \sin I \sin I \; |\vec{E}_1| \cos\gamma + \sigma_0 \cos I \cos I |\vec{E}_0| \sin I$$

$$= \quad \sigma_0 \sin I \sin I |\vec{E}_0| \sin I + \sigma_0 \sin I \sin I |\vec{E}_1| \cos\gamma \; -$$

$$\sigma_0 \sin I \cos I |\vec{E}_1| \cos\beta + \sigma_0 \sin I \cos I |\vec{E}_0| \cos I$$

(จากสมการ (12))

$$= \quad -\sigma_0 \cos I \sin I \; E_y + \sigma_0 \; \sin I \sin I \; E_z \qquad .....(24)$$

$$\sigma_1 |\vec{E}_1| \cos\gamma \quad = \quad \sigma_1 |\vec{E}_1| \cos\gamma \; (\sin^2 I + \cos^2 I)$$

$$= \quad \sigma_1 \sin I \sin I |\vec{E}_1| \cos\gamma + \sigma_1 \cos I \cos I |\vec{E}_1| \cos\gamma$$

$$= \quad \sigma_1 \cos I \cos I |\vec{E}_1| \cos\gamma + \sigma_1 \cos I \cos I \; |\vec{E}_0| \sin I \; -$$

$$\sigma_1 \cos I \cos I |\vec{E}_0| \sin I + \sigma_1 \sin I \sin I |\vec{E}_1| \cos\gamma$$

$$= \quad \sigma_1 \cos I \cos I |\vec{E}_1| \cos\gamma + \sigma_1 \cos I \cos I |\vec{E}_0| \sin I \; -$$

$$\sigma_1 \sin I \cos I |\vec{E}_0| \cos I + \sigma_1 \sin I \cos I |\vec{E}_1| \cos\beta$$

(จากสมการ (12))

$$= \quad \sigma_1 \cos I \sin I \; E_y + \sigma_1 \cos I \cos I \; E_z \qquad .....(25)$$

จากสมการ (12) ถึงสมการ (25) และให้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$S = \sin I \text{ และ } C = \cos I \qquad .....(26)$$

แทนลงในสมการ (17) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\vec{J} = {} & \left\{\sigma_1 E_x + \sigma_2 S\, E_y + \sigma_2 C\, E_z\right\}\vec{a}_x + \left\{-\sigma_2 S E_x + (\sigma_1 S^2 + \sigma_0 C^2) E_y + \right. \\ & \left.(\sigma_1 - \sigma_0) CS\, E_z\right\}\vec{a}_y + \left\{-\sigma_2 C\, E_x + (\sigma_1 - \sigma_0) CS\, E_y + \right. \\ & \left.(\sigma_1 C^2 + \sigma_0 S^2)\, E_z\right\}\vec{a}_z \qquad .....(27)\end{aligned}$$

และถ้าให้ $\overleftrightarrow{\sigma}$ เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าแบบเทนเซอร์ โดยที่

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 S & \sigma_2 C \\ -\sigma_2 S & \sigma_1 S^2 + \sigma_0 C^2 & (\sigma_1 - \sigma_0) CS \\ -\sigma_2 C & (\sigma_1 - \sigma_0) CS & \sigma_1 C^2 + \sigma_0 S^2 \end{bmatrix} \qquad .....(28)$$

ดังนั้น เราจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ของ $\vec{J}$ กับ $\vec{E}$ ได้ใหม่เป็น

$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E} \qquad .....(29)$$

ในกรณีที่ตัวกลางที่จะพิจารณาถึงนี้เป็นตัวกลางเป็นแอนไอโซโทรปิก

ภาคผนวก ค

การแก้สมการของศักย์ไฟฟ้าสถิต

เราสามารถหาคำตอบของสมการ (9) โดยวิธี Classification of partial differential equation ได้จากสมการ (9)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (S + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} C)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1})SC\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + (\frac{\sigma_0}{\sigma_1} S^2 + C^2)\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad ..(1)$$

ถ้าให้ $a^2 = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ $,b^2 = S^2 + a^2C^2$, $c = (1 - a^2)SC/(S^2 + a^2C^2)$ .....(2)

เราจะใช้สัญลักษณ์เพื่อความสะดวกในการหาคำตอบของสมการ (1) ดังนี้

$$V_{xx} + LV_{yy} + MV_{yz} + NV_{zz} = 0 \quad .....(3)$$

โดยที่ $L = S^2 + \frac{\sigma_0}{\sigma_1}C^2 = S^2 + a^2C^2$ .....(4)

$$M = 2(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_1})SC = 2(1 - a^2)SC \quad .....(5)$$

$$N = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}S^2 + C^2 = a^2S^2 + C^2 \quad .....(6)$$

เราจะทดสอบสมการ (3) ดังนี้

$$M^2 - 4LN = [2(1 - a^2)SC]^2 - 4(S^2 + a^2C^2)(a^2S^2 + C^2)$$

$$= 4(1 - a^2)^2 S^2C^2 - 4(a^2S^2 + a^2C^4 + a^2S^2C^2 + S^2C^2)$$

$$= 4(1 - a^2)^2 S^2C^2 - 4[a^2(S^2 + C^2)^2 - 2a^2S^2C^2 + (1+a^4)S^2C^2]$$

$$= 4(1 - a^2)^2 S^2C^2 - 4[a^2 - 2a^2S^2C^2 + (1 + a^4)S^2C^2]$$

$$= 4(1 - a^2)^2S^2C^2 - 4[(1 - 2a^2 + a^4)S^2C^2 + a^2]$$

$$= 4(1 - a^2)^2S^2C^2 - 4(1 - a^2)^2S^2C^2 - 4a^2$$

$$= -4a^2 \quad .....(7)$$

เราจะพบว่าค่า $M^2 - 4LN$ น้อยกว่าศูนย์เสมอ ดังนั้นสมการ (3) เป็นสมการ elliptic partial differential equation เราจะแปลงตัวแปร y และz[7] ดังนี้

$$\tau = z - \frac{M}{2L} y \quad .....(8)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{4LN - M^2}}{2L} - y \quad .....(9)$$

ดังนั้น

$$\tau = z - \frac{2(1 - a^2)SC}{2(S^2 + a^2C^2)} y$$

$$= z - \frac{(1 - a^2)SC}{(S^2 + a^2C^2)} y$$

$$= z - cy \quad .....(10)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{a^2}}{2(S^2 + a^2C^2)} y$$

$$= \frac{a}{S^2 + a^2C^2} y$$

$$= \frac{a}{b^2} y \quad .....(11)$$

เมื่อเราหาค่าอนุพันธ์บางส่วน เราจะได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$\tau_y = -c \;,\; \tau_z = 1 \;;\; \tau_{yy} = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0 \quad ..(12)$$

$$\tau_y = \frac{a}{b^2} \;,\; \tau_z = 0 \;;\; \mu_{yy} = \mu_{yz} = \mu_{zz} = 0 \quad ..(13)$$

เราจะพบว่า

$$V_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \zeta}\frac{\partial \tau^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu^2}{\partial y^2}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \mu}\frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \mu}\frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2 \; \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}$$

$$V_{yy} = V_{\tau\tau}(\tau_y)^2 + 2V_{\tau\mu}(\tau_y \mu_y) + V_{\mu\mu}(\mu_y)^2 + V_{\tau}\,\tau_{yy} + V_{\mu}\,\mu_{yy} \quad \ldots\ldots(14)$$

$$V_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \tau}{\partial z}\right\}\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right) + \left\{\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \tau}{\partial z}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \mu}{\partial z}\right\}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial^2 \tau}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial \mu}\frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}\frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial z}$$

$$V_{yz} = V_{\tau\tau}\,\tau_y\tau_z + V_{\tau\mu}\,(\tau_y\mu_z + \tau_z\mu_y) + V_{\mu\mu}\,\mu_y\mu_z + V_\tau\,\mu_{yz} + V_\mu V_{yz} . \quad (15)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$V_{zz} = V_{\tau\tau}(\tau_z)^2 + 2V_{\tau\mu}(\tau_z\mu_z) + V_{\mu\mu}(\mu_z)^2 + V_\tau\tau_{zz} + V_\mu\mu_{yy} \quad \ldots.(16)$$

พิจารณา

$$(S^2 + a^2C^2)V_{yy} = (S^2 + a^2C^2)\left[-\frac{(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2}\right]^2 V_{\tau\tau} + 2(S^2 + a^2C^2)\left[-\frac{(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2}\right]$$

$$\left[\frac{a}{S^2 + a^2C^2}\right]V_{\tau\mu} + (S^2 + a^2C^2)\left[\frac{a}{S^2 + a^2C^2}\right]V_{\mu\mu} \quad \ldots.(17)$$

$$2(1 - a^2)SC\,V_{yz} = 2(1 - a^2)SC\left|-\frac{(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2}\right|V_{\tau\tau} + 2a(1 - a^2)SC\left[0 + \right.$$

$$\left.\frac{a}{S^2 + a^2C^2}\right]V_{\tau\mu} \quad \ldots.(18)$$

$$= -\frac{2(1 - a^2)S^2C^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} + \frac{2a(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\mu}$$

$$(a^2S^2 + C^2)V_{zz} = (a^2S^2 + C^2)\,V_{\tau\tau} \quad \ldots.(19)$$

จากสมการ (3) , (17) , (18) , และ (19) เราจะได้ชุดของสมการดังนี้

$$V_{xx} + LV_{yy} + M_{yz} + NV_{zz} = 0$$

$$V_{xx} + (S^2 + a^2C^2)\,V_{yy} + 2(1 - a^2)SC\,V_{yz} + (a^2S^2 + C^2)V_{zz} = 0$$

$$V_{xx} + \frac{(1 - a^2)^2S^2C^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} - \frac{2a(1 - a^2)S^2C^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\mu} + \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu}$$

$$- \frac{2a(1 - a^2)^2S^2C^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} + \frac{2a(1 - a^2)SC}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\mu} + (a^2S^2+C^2)V_{\tau\tau} = 0$$

$$V_{xx} + \left[\frac{(1 - a^2)^2S^2C^2}{S^2 + a^2C^2} - \frac{2(1 - a^2)S^2C^2}{S^2 + a^2C^2} + a^2S^2 + C^2\right]V_{\tau\tau} +$$

$$\frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} = 0$$

$$V_{xx} + \frac{1}{S^2 + a^2C^2}\left[- (1 - a^2)^2S^2C^2 + (a^2S^2 + C^2)\right]V_{\tau\tau} +$$

$$\frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} = 0$$

$$V_{xx} + \frac{1}{S^2 + a^2C^2}\Big[a^2S^4 + a^2C^4 + a^4S^2C^2 + S^2C^2 - S^2C^2 +$$

$$2a^2S^2C^2 - a^4S^2C^2\Big]V_{\tau\tau} + \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} = 0$$

$$V_{xx} + \frac{a^2(S^2 + 2S^2C^2 + C^4)}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} + \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} = 0$$

$$V_{xx} + \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} + \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} = 0 \quad .....(20)$$

ถ้าให้ $\zeta = x$ .....(21)

$$\eta = \frac{(S^2 + a^2C^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\mu \qquad .....(22)$$

$$\xi = \frac{(S^2 + a^2C^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\tau \qquad .....(23)$$

เมื่อเราหาอนุพันธุ์บางส่วน เราจะได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

$$\eta_\mu = \frac{(S^2+a^2C^2)^{\frac{1}{2}}}{a}, \eta_\tau = 0 \quad ; \eta_{\mu\mu} = \eta_{\mu\tau} = \eta_{\tau\tau} = 0 \qquad .....(24)$$

$$\xi_\mu = 0 \quad , \xi_\tau = \frac{(S^2+a^2C^2)^{\frac{1}{2}}}{a}; \xi_{\mu\mu} = \xi_{\mu\tau} = \xi_{\tau\tau} = 0 \qquad .....(25)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (14) และ (16) เราจะได้

$$V_{\mu\mu} = V_{\eta\eta}(\eta_\mu)^2 + 2V_{\eta\xi}(\eta_\mu\xi_\mu) + V_{\xi\xi}(\xi_\mu)^2 + V_\eta\eta_{\mu\mu} + V_\xi\xi_{\mu\mu} \qquad .....(26)$$

$$V_{\tau\tau} = V_{\eta\eta}(\eta_\tau)^2 + 2V_{\eta\xi}(\eta_\tau\xi_\tau) + V_{\xi\xi}(\xi_\tau)^2 + V_\eta\eta_{\tau\tau} + V_\xi\xi_{\tau\tau} \qquad .....(27)$$

และเราจะพบว่า

$$\frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\mu\mu} = \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2} \cdot \frac{S^2 + a^2C^2}{a^2}V_{\eta\eta} = V_{\eta\eta} \qquad .....(28)$$

$$\frac{a^2}{S^2 + a^2C^2}V_{\tau\tau} = \frac{a^2}{S^2 + a^2C^2} \cdot \frac{S^2 + a^2C^2}{a^2}V_{\xi\xi} = V_{\xi\xi} \qquad .....(29)$$

จากสมการ (20) , (21) , (22) , (23) , (28), และ (29) เราจะได้ว่า

$$V_{\zeta\zeta} + V_{\eta\eta} + V_{\xi\xi} = 0 \qquad .....(30)$$

สมการ (30) เป็นสมการลาปลาซในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน ζ , η , และ ξ และตัวแปร ζ η, และ ξ มีความสัมพันธ์กับตัวแปร x , y, และ z ดังนี้

$$\zeta = x \qquad .....(31)$$

$$\eta = y \qquad .....(32)$$

$$\xi = -\frac{b}{a}(cy - z) \qquad .....(33)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ(32)มีการเปลี่ยนสเกลจากแกน y ไปในแกน η และสมการ (33) มีการเปลี่ยนสเกลจากแกน z ไปเป็นแกน ξ นั่นก็คือจากสมการ (1) ซึ่งมีรูปแบบสมการเป็นแบบวงรี มีการเปลี่ยนตัวแปรจากแกน x , y , z ไปเป็น ζ , η,และ ξ ตามลำดับ ซึ่งมีผลออกเป็นสมการแบบวงกลม (หรือสมการลาปลาซ)

ภาคผนวก ง

การประยุกต์วิธีวิเคราะห์เทนเซอร์

เราจะหาค่าต่าง ๆ ที่จะใช้ในการวิเคราะห์สมการโดยใช้วิธีวิเคราะห์เทนเซอร์ (Tensor analysis)

ง.1 <u>เวกเตอร์คอนทราวาเรียนต์และโควาเรียนต์ (Contravarient and Covarient Vector)</u>

เราจะแปลงระบบแกนประสาน x , y,และ z เป็น ζ , η , และ ξ และเปลี่ยนองค์ประกอบ $\bar{A}^1$, $\bar{A}^2$,และ $\bar{A}^3$ ในระบบแกนประสาน x , y,และ z เป็น A^1 , A^2 ,และ A^3 ในระบบแกนประสาน ζ , η,และ ξ ได้โดยให้

$$\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\zeta/\partial x & \partial\zeta/\partial y & \partial\zeta/\partial z \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y & \partial\eta/\partial z \\ \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y & \partial\xi/\partial z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^1 \\ \bar{A}^2 \\ \bar{A}^3 \end{bmatrix} \quad .....(1)$$

ซึ่งเราเรียกว่า เทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์ (Contravarient tensor)

นอกจากนี้เราจะแปลงระบบแกนประสาน x , y ,และ z เป็น ζ , η,และ ξ โดยเปลี่ยนองค์ประกอบ $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,และ $\bar{A}_3$ ในระบบแกนประสาน x , y, และ z เป็น A_1 , A_2 , และ A_3 ในระบบแกนประสาน ζ , η ,และ ξ ได้โดย

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\zeta & \partial x/\partial\eta & \partial x/\partial\xi \\ \partial y/\partial\zeta & \partial y/\partial\eta & \partial y/\partial\xi \\ \partial z/\partial\zeta & \partial z/\partial\eta & \partial z/\partial\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix} \quad .....(2)$$

ซึ่งเราเรียกว่า เทนเซอร์โควาเรียนต์ (Covarient tensor)

เราจะสังเกตได้ว่า ในกรณีที่เป็นระบบแกนประสานคาร์ทีเชียนแล้ว เทนเซอร์คอนทรา-วาเรียนต์ก็คือ เทนเซอร์โควาเรียนต์นั่นเอง และมีค่าเท่ากับเทนเซอร์หน่วย (unit tensor)

ง.2 เทนเซอร์เมตริกซ์ (Metric tensor)

เราจะกำหนดให้ส่วนย่อยของเส้นโค้ง (line element) ds ในระบบแกนประสานคาร์ทีเชียนมีค่าเท่ากับ

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} (dx)^i (dx)^j \qquad \ldots\ldots(3)$$

เราจะเรียกว่า g_{ij} ว่า เทนเซอร์เมตริกซ์ ส่วน g^{ij} ก็คือ เทนเซอร์คอนจูเกตของ g_{ij} ทั้งสองมีความสัมพันธ์ต่อกันตามสมการ

$$g^{ij} = \text{cofactor ของ } g_{ij}/g \qquad \ldots\ldots(4)$$

เมื่อ g คือ ค่ามีเทอร์มิแนนต์ของ g^{ij}

ตัวเลขที่อยู่เหนือตัวอักษร A มิใช่แสดงถึงตัวเลขยกกำลัง แต่หมายถึงดรรชนีบน

เราสามารถให้ความสัมพันธ์ระหว่างองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์และองค์ประกอบโควาเรียนต์ดังนี้

$$A_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} A^j \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \ldots\ldots(5a)$$

$$A^i = \sum_{j=1}^{3} g^{ij} A_j \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \ldots\ldots(5b)$$

เราสามารถให้ค่าองค์ประกอบทางกายภาพ (physical component) มีความสัมพันธ์กับองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์และองค์ประกอบโควาเรียนต์ได้ดังนี้

$$a_i = \sqrt{g_{ii}}\, A^i \qquad \ldots\ldots(6a)$$

และ

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} A_i \qquad \ldots\ldots(6b)$$

เมื่อ a_i คือ องค์ประกอบทางกายภาพ

A^i คือ องค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์

A_i คือ องค์ประกอบโควาเรียนต์

ง.3 เกรเดียนต์ , ไดเวอร์เจนซ์ , และเคิร์ล ของเทนเซอร์ (Tensor form of gradient , divergence , and curl)

ง.3.1 เกรเดียนต์ (gradient)

ถ้า V คือ ปริมาณสากาลาร์แล้ว

$$\nabla V = \text{grad } V = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial V}{\partial \eta} \\ \frac{\partial V}{\partial \xi} \end{bmatrix} \qquad \text{.....(7a)}$$

ในสมการ (7a) grad V จะมีองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์

$$\nabla V = \text{grad } V = \begin{bmatrix} \partial V/\partial \zeta \\ \partial V/\partial \eta \\ \partial V/\partial \xi \end{bmatrix} \qquad \text{.....(7b)}$$

ในสมการ (7b) grad V จะมีองค์ประกอบโควาเรียนต์

ง.3.2 ไดเวอร์เจนซ์ (divergence)

ถ้า $\vec{A}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์แล้ว

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (\sqrt{g} A^1) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{g} A^2) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{g} A^3) \right] \text{...(8a)}$$

สมการ (8a) ใช้กับกรณีที่ $\vec{A}$ มีองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (\sqrt{g}\, g^{1j} a_j) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{g}\, g^{2j} a_j) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{g}\, g^{3j} a_j) \right] \qquad \text{.....(8b)}$$

สมการ (8b) ใช้กับกรณีที่ $\vec{A}$ มีองค์ประกอบโควาเรียนต์

ง.3.3 เคิร์ล (curl)

$$\text{curl}\ \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{bmatrix} \vec{a}_\zeta & \vec{a}_\eta & \vec{a}_\xi \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(9a)}$$

สมการ (9a) จะพิจารณาเมื่อ $\vec{A}$ มีองค์ประกอบโควาเรียนต์และ curl $\vec{A}$ มีองค์ประกอบคอนทรา-วาเรียนต์ สำหรับกรณีเมื่อ $\vec{A}$ มีองค์ประกอบโควาเรียนต์ก็ให้ใช้สมการ (9a) พร้อมกับสมการ (5b) ด้วยกัน

ง.4 ค่าต่าง ๆ ที่นำมาใช้วิเคราะห์

เราจะแปลงตัวแปร x , y,และ z ให้เป็นฟังชั่นของตัวแปรใหม่ ζ , η, และ ξ ได้โดยให้

$$\zeta = x \quad \text{.....(10a)}$$

$$\eta = y/b \quad \text{.....(10b)}$$

$$\xi = -\frac{b}{a}(cy - z) \quad \text{.....(10c)}$$

ง.4.1 เทนเซอร์คอนทราวาเรียนต์

$$\begin{array}{lll} \partial\zeta/\partial x = 1 & \partial\zeta/\partial y = 0 & \partial\zeta/\partial z = 0 \\ \partial\eta/\partial x = 0 & \partial\eta/\partial y = 1/b & \partial\eta/\partial z = 0 \\ \partial\xi/\partial x = 0 & \partial\xi/\partial y = -bc/a & \partial\xi/\partial z = b/a \end{array} \quad \text{.....(11)}$$

ง.4.2 เทนเซอร์โควาเรียนต์

$\partial x/\partial\zeta = 1 \qquad \partial x/\partial\eta = 0 \qquad \partial x/\partial\xi = 0$

$\partial y/\partial\zeta = 0 \qquad \partial y/\partial\eta = b \qquad \partial y/\partial\xi = 0$ .....(12)

$\partial z/\partial\zeta = 0 \qquad \partial z/\partial\eta = bc \qquad \partial z/\partial\xi = a/b$

จากสมการ (10) เราจะได้ว่า

$$dx = d\zeta \qquad .....(13a)$$

$$dy = bd\eta \qquad .....(13b)$$

$$dz = \frac{a}{b}\,d\xi + bcd\eta \qquad .....(13c)$$

ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน x , y, และ z แล้ว เมื่อ ds คือส่วนย่อยของเส้นโค้ง

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad .....(14)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (13) ลงในสมการ (14) แล้ว เราจะได้

$$(ds)^2 = (d\zeta)^2 + \left[b^2\,(1 + c^2)\right](d\eta)^2 + \frac{a^2}{b^2}(d\xi)^2 + 2acd\eta d\xi \qquad ..(15)$$

จากสมการ (3) และสมการ (15) เราจะได้เทนเซอร์เมตริกซ์และเทนเซอร์คอนจูเกตดังนี้

ง.4.2 <u>เทนเซอร์เมตริกซ์</u>

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2(1 + c^2) & ac \\ 0 & ac & a^2/b^2 \end{bmatrix} \qquad .....(16)$$

ง.4.3 <u>เทนเซอร์คอนจูเกต</u>

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & -c/a \\ 0 & -c/a & b^2/a^2(1 + c^2) \end{bmatrix} \quad .....(17)$$

ง.4.4 <u>ดีเทอร์มีแนนต์ของ g</u>

$$g = \det g_{ij} \quad .....(18a)$$

$$g = a^2 \quad .....(18b)$$

ภาคผนวก จ

การหานิพจน์ของ $\vec{H}_0$ จาก $\vec{E}_0$

เราจะหาค่าสนามแม่เหล็ก $\vec{H}_0$ โดยวิธีวิเคราะห์แบบเทนเซอร์ซึ่งเราจะนำสมการ (26a) และ (26b) มาแก้สมการ

$$\nabla \times \vec{H}_0 = \vec{J}_0 = \overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E}_0 \qquad .....(1)$$

$$\nabla . \vec{H}_0 = 0 \qquad .....(2)$$

เมื่อเรากระจายสมการ (1) และ (2) ในระบบแกนประสานการ์ทีเซียน ζ ,η , และ ξ และโดยหลักของการวิเคราะห์แบบเทนเซอร์ (ภาคผนวกง) จากสมการ (1) เราจะได้

$$\frac{\partial (H_0)^3}{\partial \eta} - \frac{\partial (H_0)^2}{\partial \xi} = \sigma_1 a (E_0)^1 + \sigma_2 \frac{as}{b}(E_0)^2 + \sigma_2 \frac{a^2C}{b}(E_0)^3 \qquad .....(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(H_0)^1 - \frac{\partial (H_0)^3}{\partial \zeta} = -\sigma_2 \frac{as}{b}(E_0)^1 + \sigma_1 ab^2(1 + c^2)(E_0)^2 + \sigma_1 a^3 c (E_0)^3 \qquad .....(4)$$

$$\frac{\partial (H_0)^2}{\partial \zeta} - \frac{\partial (H_0)^1}{\partial \eta} = -\sigma_2 \frac{Ca^2}{b}(E_0)^1 + \sigma_1 a^2 c (E_0)^2 + \sigma_1 \frac{a^3}{b^2}(E_0)^3 \qquad .....(5)$$

จากสมการ (2) เราจะได้

$$\frac{\partial (H_0)^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial (H_0)^2}{\partial \eta} + \frac{\partial (H_0)^3}{\partial \xi} = 0 \qquad .....(6)$$

ถ้าเราเปลี่ยนองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์เป็นองค์ประกอบโควาเรียนต์ เราจะได้

$$\frac{\partial(H_0)_1}{\partial\zeta} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial(H_0)_2}{\partial\eta} - \frac{c}{a}\frac{\partial(H_0)_3}{\partial\eta} - \frac{c}{a}\frac{\partial(H_0)_2}{\partial\xi} + \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\frac{\partial(H_0)_3}{\partial\xi} = 0 \quad ..(7)$$

จากสมการ (3) , (4) , (5) ,และ (7) เมื่อเราหาอนุพันธ์บางส่วนที่สอดคล้องกัน เราจะได้ชุดสมการดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชัน$(H_0)_1$, $(H_0)_2$, และ$(H_0)_3$ ล้วน ๆ เช่น

ถ้าเราหาอนุพันธ์บางส่วนเทียบกับ ζ , η ,และ,ξ กับสมการ (7) , (5) ,และ(4) ตามลำดับ และหาอนุพันธ์บางส่วนเทียบกับ η และ ξ กับสมการ (4) และ (5) ตามลำดับอีกครั้งหนึ่ง เราจะได้

$$\frac{\partial^2(H_0)_1}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial^2(H_0)_2}{\partial\zeta\partial\eta} - \frac{c}{a}\frac{\partial^2(H_0)_3}{\partial\zeta\partial\eta} - \frac{c}{a}\frac{\partial^2(H_0)_2}{\partial\zeta\partial\xi} +$$

$$\frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\frac{\partial^2(H_0)_3}{\partial\zeta\partial\xi} = 0 \quad ..(8)$$

$$\frac{\partial^2(H_0)_2}{\partial\zeta\partial\eta} - \frac{\partial^2(H_0)_1}{\partial\eta^2} = -\sigma_2\frac{Ca^2}{b}\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^1 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial(E_0)^2}{\partial\eta} + \sigma_1\frac{a^3}{b^2}\frac{\partial(E_0)^3}{\partial\eta} \quad ..(9)$$

$$\frac{\partial^2(H_0)_1}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2(H_0)_3}{\partial\zeta\partial\xi} = \sigma_2\frac{aS}{b}\frac{\partial(E_0)^1}{\partial\xi} + \sigma_1 ab^2(1+c^2)\frac{\partial(E_0)^2}{\partial\xi}$$

$$+ \sigma_1 a^2 c\frac{\partial(E_0)^3}{\partial\xi} \quad .....(10)$$

$$\frac{\partial^2(H_0)_1}{\partial\eta\partial\xi} \quad \frac{\partial^2(H_0)_3}{\partial\zeta\partial\eta} = \sigma_1\frac{aS}{b}\frac{\partial(E_0)^1}{\partial\eta} + \sigma_1 ab^2(1+c^2)\frac{\partial(E_0)^2}{\partial\eta}$$

$$+ \sigma_1 a^2 c\frac{\partial(E_0)^3}{\partial\eta} \quad .....(11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\xi}(H_0)_2 - \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}(H_0)_1 = -\sigma_2\frac{Ca^2}{b}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^1 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^2 + \sigma_1\frac{a^3}{b^2}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^3 \quad .....(12)$$

จากสมการ (8) - (12) เมื่อนำมาคูณด้วยตัวของมันและบวกลบนิพจน์ที่สอดคล้องกัน เราจะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(H_0)_1 + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(H_0)_1 - \frac{2c}{a}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}(H_0)_1 + \frac{b^2(1+c^2)}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(H_0)_1 =$$

$$-\frac{1}{b^2}\left\{-\sigma_2\frac{Ca^2}{b}\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^1 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^2 + \sigma_1\frac{a^3}{b^2}\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^3\right\}$$

$$-\frac{c}{a}\left\{-\sigma_2\frac{aS}{b}\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^1 + \sigma_1 ab^2(1+c^2)\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^2 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial}{\partial\eta}(E_0)^3\right\}$$

$$+\frac{c}{a}\left\{-\sigma_2\frac{Ca^2}{b}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^1 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^2 + \sigma_1\frac{a^3}{b^2}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^3\right\}$$

$$+\frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\left\{-\sigma_2\frac{aS}{b}\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^1 + \sigma_1 ab^2(1+c^2)\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^2 + \sigma_1 a^2 c\frac{\partial}{\partial\xi}(E_0)^3\right\} \quad ...(13)$$

เมื่อแทนค่าต่าง ๆ ลงในสมการ (13) เราจะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(H_0)_1 + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(H_0)_1 - \frac{2c}{a}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}(H_0)_1 + \frac{b^2(1+c^2)}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(H_0)_1 =$$

$$-\sigma_2\frac{Ck}{b}{}_{\zeta}k_{\eta}\,[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} e(-) \\ e(+) \end{bmatrix} + \sigma_2\frac{S}{ab}k_{\zeta}k_{\xi}[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} e(-) \\ -e(+) \end{bmatrix}$$

$$+\sigma_1\left[\frac{a}{b^2} - \frac{b^2(1+c^2)}{a}\right]k_{\eta}k_{\xi}\,[\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} e(-) \\ -e(+) \end{bmatrix} - \sigma_1 c(k_{\eta}^2 + k_{\xi}^2)\,[\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} e(-) \\ e(+) \end{bmatrix} \quad .....(14)$$

จากสมการ (14) ถ้าเราให้คำเฉลยของ $(H_0)_1$ มีค่าดังนี้

$$(H_0)_{1,1} = A_1 [\zeta(-)][\eta(-)]\, e(-) + A_2[\zeta(-)][\eta(+)]\, e(-)$$

$$+ A_3[\zeta(+)][\eta(-)]\, e(-) + A_4[\zeta(+)][\eta(+)]\, e(-) \quad .....(15a)$$

$$(H_0)_{1,2} = B_1 [\zeta(-)][\eta(-)]\, e(+) + B_2 [\zeta(-)][\eta(+)]\, e(+) +$$

$$B_3 [\zeta(+)][\eta(-)]\, e(+) + B_4 [\zeta(+)][\eta(+)]\, e(+) \quad .....(15b)$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ $(H_0)_{1,1}$ และ $(H_0)_{1,2}$ เทียบกับตัวแปรที่สอดคล้องกัน เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(H_0)_{1,1} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(H_0)_{1,1} - \frac{2c}{a}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}(H_0)_{1,1} + \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(H_0)_{1,1} =$$

$$(\alpha_0 A_1 - \beta_0 A_2)[\zeta(-)][\eta(-)]e(-) + (\beta_0 A_1 + \alpha_0 A_2)[\zeta(-)][\eta(+)]e(-)$$

$$+(\alpha_0 A_3 - \beta_0 A_4)[\zeta(+)][\eta(-)]e(-) + (\beta_0 A_3 + \alpha_0 A_4\ [\zeta(+)][\eta(+)]e(-) \quad .....(16a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(H_0)_{1,2} + \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(H_0)_{1,2} - \frac{2c}{a}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}(H_0)_{1,2} + \frac{b^2}{a^2}(1+c^2)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(H_0)_{1,2} =$$

$$(\alpha_0 B_1 + \beta_0 B_2)[\zeta(-)][\eta(-)]e(+) + (-\beta_0 B_1 + \alpha_0 B_2)[\zeta(-)][\eta(+)]e(+)$$

$$+(\alpha_0 B_3 + \beta_0 B_4)[\zeta(+)][\eta(-)]e(+) + (-\beta_0 B_3 + \alpha_0 B_4)[\zeta(+)][\eta(+)]e(+) \quad ...(16b)$$

เมื่อใช้หลักของการเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined cofficient) เราจะได้ค่าของ A_n และ B_n เมื่อ $n = 1$ ถึง 4

สำหรับกรณีของ $(H_0)_2$ และ $(H_0)_3$ เราก็จะใช้วิธีเดียวกันนี้หาคำเฉลยของ $(H_0)_2$ และ $(H_0)_3$ ออกมา

ภาคผนวก ฉ

การหานิพจน์ของ $\vec{E}_1$ จาก $\vec{H}_0$ และ $\vec{E}_0$

เราจะหาค่าสนามไฟฟ้า E_1 โดยวิธีวิเคราะห์แบบเทนเซอร์ ซึ่งเราจะนำสมการ (27a) และ (27b) มาแก้สมการ

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -i\omega\mu_0\vec{H}_0 \qquad .....(1)$$

$$\nabla.(\overleftrightarrow{\sigma}\,\vec{E}_1) = -i\omega\varepsilon_0(\nabla.\vec{E}_0) \qquad .....(2)$$

เมื่อเรากระจายสมการ (1) และ (2) ในระบบแกนประสานคาร์ทีเซียน ζ , η,และ ξ และโดยหลักของการวิเคราะห์แบบเทนเซอร์ จากสมการ (1) เราจะได้

$$\frac{\partial(E_1)_3}{\partial\eta} - \frac{\partial(E_1)_2}{\partial\xi} = -ai\omega\mu_0(H_0)^1 \qquad .....(3)$$

$$\frac{\partial(E_1)_1}{\partial\xi} - \frac{\partial(E_1)_3}{\partial\zeta} = -ai\omega\mu_0(H_0)^2 \qquad .....(4)$$

$$\frac{\partial(E_1)_2}{\partial\zeta} - \frac{\partial(E_1)_1}{\partial\eta} = -ai\omega\mu_0(H_0)^3 \qquad .....(5)$$

จากสมการ (2) เราจะได้

$$\sigma_1\frac{\partial(E_1)^1}{\partial\zeta} + \sigma_2\frac{S}{b}\frac{\partial(E_1)^2}{\partial\zeta} + \sigma_2\frac{Ca}{b}\frac{\partial(E_1)^3}{\partial\zeta} + \sigma_2\frac{S}{b}\frac{\partial(E_1)^1}{\partial\eta} + \sigma_1 b^2(1+c^2)\frac{\partial}{\partial\eta}(E_1)^2$$

$$+\sigma_1\,ac\frac{\partial(E_1)^3}{\partial\eta} - \sigma_2\frac{Ca}{b}\frac{\partial(E_1)^1}{\partial\xi} + \sigma_1 ac\frac{\partial(E_1)^2}{\partial\xi} + \sigma_1\frac{a^2}{b^2}\frac{\partial(E_1)^3}{\partial\xi}$$

$$= -i\omega\varepsilon_0\left[\frac{\partial(E_0)^1}{\partial\zeta} + \frac{\partial(E_0)^2}{\partial\eta} + \frac{\partial(E_0)^3}{\partial\xi}\right] \qquad .....(6)$$

ถ้าเราเปลี่ยนองค์ประกอบคอนทราวาเรียนต์เป็นองค์ประกอบโควาเรียนต์ เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial(E_1)_1}{\partial\zeta} + \frac{\partial(E_1)_2}{\partial\eta} + \frac{\partial(E_1)_3}{\partial\xi} = \frac{1}{\sigma_1}\left\{-i\omega\varepsilon_0\left[\frac{\partial(E_0)^1}{\partial\zeta} + \frac{\partial(E_0)^2}{\partial\eta} + \frac{\partial(E_0)^3}{\partial\xi}\right] + \sigma_2\frac{aS}{b}i\omega\mu_0(H_0)^3 - \sigma_2\frac{a^2C}{b}i\omega\mu_0(H_0)^2\right\} \quad .....(7)$$

ทำนองเดียวกันกับวิธีการในภาคผนวก จ เราจะได้

$$\frac{\partial^2(E_1)_1}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2(E_1)_1}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2(E_1)_1}{\partial\xi^2} = -i\omega\varepsilon_0\frac{k_\zeta}{\sigma_1}\left[-\beta_0[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}e(-)\\e(+)\end{bmatrix} + \alpha_0[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}e(-)\\e(+)\end{bmatrix}\right]$$

$$-i\omega\mu_0\left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{c}{b}k_\zeta\left\{[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}M_2e(-)\\M_2'e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}N_2e(-)\\N_2'e(+)\end{bmatrix} - [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix}K_2e(-)\\K_2'e(+)\end{bmatrix} - [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix}L_2e(-)\\L_2'e(+)\end{bmatrix}\right\}\right.$$

$$+\frac{\sigma_2 S}{\sigma_1 ab}k_\zeta\left\{-[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}M_3e(-)\\M_3'e(+)\end{bmatrix} - [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}N_3e(-)\\N_3'e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix}K_3e(-)\\K_3'e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix}L_3e(-)\\L_3'e(+)\end{bmatrix}\right\}$$

$$+ck_\eta\left\{-[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix}L_2e(-)\\L_2'e(+)\end{bmatrix} + [\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix}K_2e(-)\\K_2'e(+)\end{bmatrix}\right.$$

$$-[\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} N_2 e(-) \\ N_2' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} M_2 e(-) \\ M_2' e(+) \end{bmatrix}\Bigg\}$$

$$+\frac{b^2}{a}(1+c^2)k_\eta\Bigg\{+[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} L_3 e(-) \\ L_3' e(+) \end{bmatrix}$$

$$-[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} K_3 e(-) \\ K_3' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} N_3 e(-) \\ N_3' e(+) \end{bmatrix}$$

$$-[\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} M_3 e(-) \\ M_3' e(+) \end{bmatrix}\Bigg\}$$

$$+\frac{a}{b^2}k_\xi\Bigg\{-[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} K_2 e(-) \\ -K_2' e(+) \end{bmatrix}$$

$$-[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_2 e(-) \\ -L_2' e(+) \end{bmatrix} - [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_2 e(-) \\ -M_2' e(+) \end{bmatrix}$$

$$-[\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_2 e(-) \\ -N_2' e(+) \end{bmatrix}\Bigg\}$$

$$+ck_\xi\Bigg\{+[\zeta(-)][\eta(-)]\begin{bmatrix} K_3 e(-) \\ -K_3' e(+) \end{bmatrix}$$

$$+[\zeta(-)][\eta(+)]\begin{bmatrix} L_3 e(-) \\ -L_3' e(+) \end{bmatrix} + [\zeta(+)][\eta(-)]\begin{bmatrix} M_3 e(-) \\ -M_3' e(+) \end{bmatrix}$$

$$[\zeta(+)][\eta(+)]\begin{bmatrix} N_3 e(-) \\ -N_3' e(+) \end{bmatrix}\Bigg\}\Bigg] \qquad \ldots\ldots(8)$$

จากสมการ (8) ถ้าเราให้คำเฉลยของ $(E_1)_1$ มีค่าดังนี้

$$(E_1)_{1,1} = A_1[\zeta(-)][\eta(-)]\xi e(-) + A_2[\zeta(-)][\eta(+)]\xi e(-)$$

$$+A_3[\zeta(+)][\eta(-)]\xi e(-) + A_4[\zeta(+)][\eta(+)]\xi e(-)$$

$$\ldots\ldots(9a)$$

$$(E_1)_{1,2} = B_1[\zeta(-)][\eta(-)]\xi e(+) + B_2[\zeta(-)][\eta(+)]\xi e(+) + B_3[\zeta(+)][\eta(-)]\xi e(+) + B_4[\zeta(+)][\eta(+)]\xi e(+) \quad .....(9b)$$

เมื่อเราหาอนุพันธ์ของ $(E_1)_{1,1}$ และ $(E_1)_{1,2}$ เทียบกับตัวแปรที่สอดคล้องกัน เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 (E_1)_{1,1}}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 (E_1)_{1,1}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 (E_1)_{1,1}}{\partial\xi^2} = -2A_1 k_\xi[\zeta(-)][\eta(-)]e(-) - 2A_2 k_\xi[\zeta(-)][\eta(+)]e(-) - 2A_3 k_\xi[\zeta(+)][\eta(-)]e(-) - 2A_4 k_\xi[\zeta(+)][\eta(+)]e(-) \quad .....(10a)$$

$$\frac{\partial^2 (E_1)_{1,2}}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 (E_1)_{1,2}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 (E_1)_{1,3}}{\partial\xi^2} = 2B_1 k_\xi[\zeta(-)][\eta(-)]e(+) + 2B_2 k_\xi[\zeta(-)][\eta(+)]e(+) + 2B_3 k_\xi[\zeta(+)][\eta(-)]e(+) + 2B_4 k_\xi[\zeta(+)][\eta(+)]e(+) \quad .....(10b)$$

เมื่อใช้หลักของการเทียบสัมประสิทธิ์ (Undetermined cofficient) เราจะหาค่าของ A_n และ B_n เมื่อ $n = 1$ ถึง 4

สำหรับกรณีของ $(E_1)_2$ และ $(E_1)_3$ เราก็จะใช้วิธีเดียวกันหาคำเฉลยของ $(E_1)_2$ และ $(E_1)_3$ ได้

ประวัติผู้เขียน

นายคมสันต์ สิริวัฒนาพาท เกิดที่กรุงเทพฯ เมื่อวันที่ 23 สิงหาคม พ.ศ. 2499 ได้รับปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ. 2519 ปัจจุบันทำงานอยู่ที่ บริษัท ไฟฟ้าฟิลิปส์แห่งประเทศไทย จำกัด ตำแหน่ง วิศวกรฝ่ายขาย อุปกรณ์ระบบเสียงและภาพ