TRIGONOMETRIC FUNCTIONAL EQUATIONS

Miss Chaufah Kriangsiri

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1974

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements of the Degree of Master of Science.

B. Tamthai

....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee ....Surawit Kongsasna.... Chairman.

....Sidney S. Mitchell....

....Virool Boonyasombat....

Thesis Supervisor Dr. Virool Boonyasombat

หัวข้อวิทยานิพนธ์ : สมการฟังก์ชั่นนัลจากตรีโกณมิติ

ชื่อ : นางสาว ช่อฟ้า เกรียงศิริ

แผนกวิชา : คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา : 2516

บทคัดย่อ

เราพิจารณาสมการฟังก์ชั่น

(S) $$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y\theta)$$

และ

(T) $$(1 - f(x)f(y))f(xy) = f(x) + f(y)$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชั่นจากกรุป G ไปยังบางส่วนของเซทของเลขจำนวนเชิงซ้อน ในกรณีของสมการ (S) เราพิจารณาเฉพาะ f ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไข

(A) $$f(xyz) = f(xzy)$$

สำหรับทุกค่า x,y,z ใน G ถ้า G เป็นคอมมิวเทตีฟกรุป เงื่อนไขนี้ย่อมเป็นจริงโดยอัตโนมัติ ผลลัพธ์ที่สำคัญของเราคือทฤษฎีบทต่อไปนี้ :

<u>ทฤษฎีบท A</u> ให้ f เป็นฟังก์ชั่นจาก G ไปยังเซทของเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีบางค่าของ f ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า f คล้องตาม (S) และ (A) ก็ต่อเมื่อมีโฮโมมอร์ฟิสม์ h จาก G ไปยังมัลติปลิเคตีฟกรุป $\mathbb{C}^*$ ของเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง

$$f(x) = \frac{h(\theta^{-1}x) + h(x^{-1}\theta)}{2},$$

สำหรับทุกค่า x ใน G เท่านั้น

<u>ทฤษฎีบท B</u> ให้ G เป็นโทโปโลจิคอลกรุ๊ป และ f เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่องจาก G ไปยังเซทของเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีบางค่าของ f ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า f คล้องตาม (S) และ (A) ก็ต่อเมื่อมีโฮโมมอร์ฟิสม์แบบต่อเนื่อง h จาก G ไปยังมัลติปลิเคทีฟกรุ๊ป $\mathbb{C}^*$ ของเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง

$$f(x) = \frac{h(\theta^{-1}x) + h(x^{-1}\theta)}{2}$$

สำหรับทุกค่า x ใน G เท่านั้น

<u>ทฤษฎีบท C</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปยังเซทของเลขจำนวนจริง จะได้ว่า f คล้องตาม (T) ก็ต่อเมื่อมีโฮโมมอร์ฟิสม์ h จาก G ไปยังยูนิทเซอร์เคิล Δ ซึ่ง

$$f(x) = \frac{h(x) - 1}{i(h(x) + 1)}$$

สำหรับทุกค่า x ใน G เท่านั้น

<u>ทฤษฎีบท D</u> ให้ G เป็นโทโปโลจิคอลกรุ๊ป และ f เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่องจาก G ไปยังเซทของเลขจำนวนจริง จะได้ว่า f คล้องตาม (T) ก็ต่อเมื่อมีโฮโมมอร์ฟิสม์แบบต่อเนื่อง h จาก G ไปยังยูนิทเซอร์เคิล Δ ซึ่ง

$$f(x) = \frac{h(x) - 1}{i(h(x) + 1)}$$

สำหรับทุกค่า x ใน G เท่านั้น

ผลที่ได้รับต่อมาจากทฤษฎีบท B และทฤษฎีบท D เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบท E</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}^n$ ไปยังเซทของเลขจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีบางค่าของ f ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า f คล้องตามสมการ

$$(S_1) \qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y+\theta)$$

ก็ต่อเมื่อ มีเลขจำนวนเชิงซ้อน $r_1, \ldots, r_n$ ซึ่ง

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{e^{r_1(x_1-\theta_1)+\ldots+r_n(x_n-\theta_n)}+e^{r_1(\theta_1-x_1)+\ldots+r_n(\theta_n-x_n)}}{2}$$

สำหรับทุก $(x_1,\ldots,x_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ เท่านั้น

<u>ทฤษฎีบท F</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}^n$ ไปยังเซทของเลขจำนวนจริง จะได้ว่า f คล้องตามสมการ

(T_1) $$(1 - f(x)f(y))\, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ก็ต่อเมื่อ มีเลขจำนวนจริง $k_1,\ldots,k_n$ ซึ่ง

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{e^{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)}-1}{i(e^{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)}+1)}$$

สำหรับทุกค่า $(x_1,\ldots,x_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$ เท่านั้น

Thesis Title : Trigonometric Functional Equations

Name : Miss Chaufah Kriangsiri

Department : Mathematics

Academic Year : 1973

Abstract

We consider the functional equations :

(S) $$f(xy) + f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y\theta) ,$$

and

(T) $$(1 - f(x)f(y))f(xy) = f(x) + f(y) ,$$

where f is defined on a group G into certain subsets of the set of complex numbers. In the case of equation (S) we require f to satisfy an additional condition

(A) $$f(xyz) = f(xzy) ,$$

for all x,y,z in G. This condition is automatically satisfied if G is commutative. Our main results are the following theorems :

Theorem A Any complex-valued function f not identically zero on G satisfies (S) and (A) iff there exists a homomorphism h from G into $\mathbb{C}^*$, the multiplicative group of complex numbers, such that

$$f(x) = \frac{h(\theta^{-1}x) + h(x^{-1}\theta)}{2} ,$$

for all x in G.

Theorem B Let G be a topological group. Any continuous function f not identically zero on G satisfies (S) and (A) iff there exists a continuous homomorphism h from G into $\mathbb{C}^*$ such that

$$f(x) = \frac{h(\theta^{-1}x) + h(x^{-1}\theta)}{2},$$

for all x in G.

Theorem C Any function $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies (T) iff there exists a homomorphism $h : G \longrightarrow \Delta$, the unit circle, such that

$$f(x) = \frac{h(x) - 1}{i(h(x) + 1)},$$

for all x in G.

Theorem D Let G be a topological group. Any continuous function $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies (T) iff there exists a continuous homomorphism h from G to Δ such that

$$f(x) = \frac{h(x) - 1}{i(h(x) + 1)},$$

for all x in G.

As consequences of Theorem B and Theorem D, we have the following

Theorem E Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ be continuous and not identically zero on $\mathbb{R}^n$. f satisfies

(S_1) $\qquad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y+\theta)$

iff there exist $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ such that ix

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{e^{r_1(x_1-\theta_1)+\ldots+r_n(x_n-\theta_n)} + e^{r_1(\theta_1-x_1)+\ldots+r_n(\theta_n-x_n)}}{2},$$

for all $(x_1,\ldots,x_n)$ in $\mathbb{R}^n$.

<u>Theorem F</u> Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be continuous. f satisfies

(T_1) $\qquad (1-f(x)f(y))f(x+y) = f(x)+f(y)$

iff there exist $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{R}$ such that

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{e^{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)} - 1}{i(e^{i(k_1x_1+\ldots+k_nx_n)} + 1)} .$$

ACKNOWLEDGEMENT

The author feels extremely grateful to Dr. Virool Boonyasombat, her thesis supervisor, for introducing her to this subject and for his valuable assistance in preparing this thesis.

TABLE OF CONTENTS