บทที่ 3

การแก้ปัญหา

การแก้สมการหาค่าดีเฟล็คชัน ทำได้โดยใช้วิธีของกาเลอกิน เป็นวิธีการหาค่าโดยประมาณ ซึ่งมีวิธีการดังนี้

1. สมมติฟังก์ชั่นของดีเฟลคชันที่สอดคล้องกับสภาพของขอบทั้งหมด ถ้าฟังก์ชันที่เราสมมติขึ้นเป็นคำตอบที่แน่นอนแล้ว จากสมการ (24) ในบทที่ 2 เราจะได้

$$\nabla^8 w + \alpha\, w_{,xxyy} - \frac{\nabla^4 q_n}{D} = 0 \qquad (1)$$

แต่โดยทั่วไป ฟังก์ชั่นที่สมมติอาจจะไม่สอดคล้องกับสมการดิฟเฟอร์เรนเชียล ในที่นี้จะสมมติให้

$$w = \sum_m^\infty \sum_n^\infty W_{mn} \quad \phi_{mn}(x,y) \qquad (2)$$

ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมการดิฟเฟอร์เรนเชียล ดังนั้นจะมีค่าผิดพลาดขึ้นคือ $\delta_{mn}(x,y)$ นั่นก็คือ

$$\nabla^8 w + \alpha\, w_{,xxyy} - \frac{\nabla^4 q_n}{D} = \delta_{mn}(x,y) \qquad (3)$$

2. ทำให้ค่าผิดพลาด $\delta_{mn}(x,y)$ น้อยที่สุดโดยใช้วิธีการออร์โธโกนอล (orthogonalization) เทียบกับชุดของฟังก์ชั่นเดิมที่ตั้งขึ้นคือ

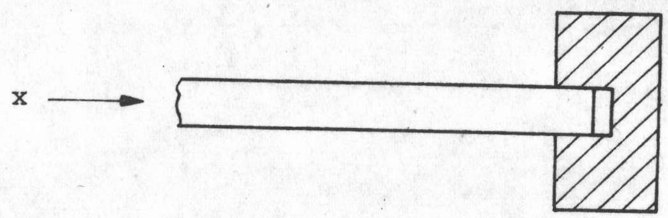
$$\iint \delta_{mn}(x,y)\ \phi_{ij}(x,y)\ dx\ dy = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1,..m \\ j = 1,..n \end{array} \qquad (4)$$

ซึ่งก็คือ

$$\iint \{\nabla^8 w + \alpha\, w_{,xxyy} + \frac{\nabla^4 q_n}{D}\}\ \phi_{ij}(x,y)\ dx\ dy = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1,..m \\ j = 1,..n \end{array} \qquad (5)$$

เมื่ออินทิเกรตสมการ (5) จะได้สมการทางพีชคณิต mxn สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า W_{mn}=mxn ตัว แล้วแก้สมการหาค่าของ W_{mn} ออกมา และเมื่อแทนค่าลงในสมการ (2) ก็จะได้ฟังก์ชั่นของดีเฟลคชันตามต้องการ

ในการแก้ปัญหาจะใช้สภาพของขอบเป็นแบบยึดแน่นแต่มีการเคลื่อนตัวได้ในแนวระนาบดังในรูป 5 ซึ่งมีสภาพของขอบดังนี้คือ



รูป 5 ขอบของเปลือกบาง

ที่ขอบของเปลือกบาง

$$v = 0$$

$$w = 0$$

$$w_{,x} = 0$$

$$N_{xx} = 0$$

จากสภาพของขอบที่กล่าวแล้ว จะสมมติฟังก์ชั่นของดีเฟล็คชั่นได้เป็น

$$w = \sum_m^\infty \sum_n^\infty W_{mn} (1 - \cos \bar{m}x)(1 - \cos \bar{n}y) \quad (6)$$

โดยที่ $\bar{m} = \frac{2m\pi}{a}$

$$\bar{n} = \frac{2n\pi}{b}$$

สมมติฟังก์ชั่นของแรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉายเป็น

$$q_n = \sum_m^\infty \sum_n^\infty q_{mn} \sin \frac{\bar{m}x}{2} \sin \frac{\bar{n}y}{2} \quad (7)$$

แทนค่า w จากสมการ (6) และ q_n จากสมการ (7) ลงในสมการ (5) แล้วอินทิเกรต โดยอาศัยคุณสมบัติออร์โธโกนัล

$$\int_0^b \int_0^a \cos \bar{m}x \, dx \, dy = 0$$

$$\int_0^b \int_0^a \cos \bar{m}x \cos \bar{i}x \, dx \, dy = 0 \qquad m \neq i$$

$$= ab/2 \qquad m = i$$

$$\int_0^b\int_0^a \cos \bar{m}x \cos \bar{i}x \cos \bar{n}y \cos \bar{j}y \, dx\, dy = 0 \qquad m \neq i,\ n \neq j$$

$$= ab/4 \qquad m = i,\ n = j$$

$$\int_0^b\int_0^a \sin \frac{\bar{m}}{2}x \sin \frac{\bar{n}}{2}y \, dx\, dy = \frac{16}{\bar{m}\,\bar{n}}$$

$$\int_0^b\int_0^a \sin \frac{\bar{m}}{2}x \sin \frac{\bar{n}}{2}y \cos \bar{i}x \, dx\, dy = 0 \qquad m = 2i$$

$$= \frac{4abm}{n\pi^2(m^2-4i^2)} \qquad m \pm 2i \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$\int_0^b\int_0^a \sin \frac{\bar{m}}{2}x \sin \frac{\bar{n}}{2}y \cos \bar{i}x \cos \bar{j}y \, dx\, dy = 0 \qquad m = 2i,\ n = 2j$$

$$= \frac{4abmn}{\pi^2(m^2-4i^2)(n^2-4j^2)}$$

$m \pm 2i$
$n \pm 2j$
เป็นเลขคี่

แก้สมการหาค่า W_{ij} ได้

$$W_{ij} = \frac{a^4 j^2 \sum_m^\infty \sum_n^\infty q_{mn}\left\{\frac{(m^2+n^2a^2/b^2)^2}{mn(m^2-4i^2)(n^2-4j^2)}\right\}}{\pi^6 D i^6 \left\{ 2(1+\beta^8) + (1+\beta^2)^4 + \frac{\alpha \beta^6 b^4}{16 \pi^4 j^4} \right\}}$$

โดยที่ $\beta = aj/bi$

หาค่าของ q_{mn} จากสมการ (7) ได้

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b\int_0^a q_n \sin \frac{\bar{m}}{2}x \sin \frac{\bar{n}}{2}y \, dx\, dy \qquad (9)$$

เมื่อเปลือกบางแบบตื้นอยู่ภายใต้แรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอต่อพื้นที่ภาพฉาย q_o ดังนั้น $q_n = q_o$ แทนค่าลงในสมการ (9) แล้วอินทิเกรต ได้

$$q_{mn} = -16q_o/mn\pi^2 \qquad m,n, \text{ เป็นเลขคี่}$$

แทนค่า q_{mn} ลงในสมการ (8) แล้วเขียนสมการได้ใหม่เป็น

$$W_{mn} = \frac{-16q_o a^4 n^2 \sum_k^\infty \sum_i^\infty \left\{\frac{(k^2+i^2\theta^2)^2}{k^2 i^2(k^2-4m^2)(i^2-4n^2)}\right\}}{\pi^8 D m^6 \left\{ 2(1+\lambda^8) + (1+\lambda^2)^4 + \frac{\alpha \lambda^6 b^4}{16 \pi^4 n^4} \right\}} \qquad (10)$$

โดยที่ $\theta = a/b$

$\lambda = an/bm$

การหาค่าสเตรสรีซีลแต้นท์และสเตรสศัปเปิลทำได้โดยการแก้สมการ (21ก - ค) และสมการ (11ง - ฉ) ในบทที่ 2 ซึ่งจะได้

$$N_x = \sum_m^\infty \sum_n^\infty - \frac{2Ehk\, W_{mn}\, \lambda^3}{(1+\lambda^2)^2} \sin \overline{mx} \sin \overline{ny}$$

$$N_y = \sum_m^\infty \sum_n^\infty - \frac{2Ehk\, W_{mn}\, \lambda}{(1+\lambda^2)^2} \sin \overline{mx} \sin \overline{ny}$$

$$N_{xy} = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \frac{2Ehk\, W_{mn}\, \lambda^2}{(1+\lambda^2)^2} \cos \overline{mx} \cos \overline{ny} \qquad (\text{ 11ก - ฉ })$$

$$M_x = -\frac{4\pi^2 D}{a^2}\left[\sum_m^\infty \sum_n^\infty W_{mn} \left\{ \cos \overline{mx}(1-\cos \overline{ny}) + \nu\lambda^2(1-\cos \overline{mx})\cos \overline{ny} \right\} \right]$$

$$M_y = -\frac{4\pi^2 D}{a^2}\left[\sum_m^\infty \sum_n^\infty W_{mn} \left\{ \lambda^2(1-\cos \overline{mx})\cos \overline{ny} + \nu\cos \overline{mx}(1-\cos \overline{ny}) \right\} \right]$$

$$M_{xy} = -4\pi^2 D\,(1-\nu) \sum_m^\infty \sum_n^\infty W_{mn} \frac{mn}{ab} \sin \overline{mx} \sin \overline{ny}$$

ค่าความเค้นที่เกิดขึ้นหาได้โดยการแทนค่าสเตรสรีซีลแต้นท์และสเตรสศัปเปิลจากสมการ (11ก - ฉ) ลงในสมการข้างล่างนี้

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{h} \pm \frac{6M_x}{h^2}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{N_y}{h} \pm \frac{6M_y}{h^2} \qquad (\text{ 12ก - ค })$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}$$