บทที่ 2

การประมาณ WKB

วิธีนี้เป็นการประมาณสมการดิฟเฟอเรนเชียลแบบธรรมดาในรูป

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + Q(x)\Psi = 0$$

ผู้ที่แก้ปัญหาของสมการนี้ในทางควอนตัมเมคเคนิคคนแรกๆคือ เวนท์เซล แครมเมอร์ส และบริลโลอิน โดยอาศัยการกระจายเวฟฟังก์ชันในรูปกำลังของ $\hbar$ เมื่อพิจารณา $\hbar$ มีค่าน้อยๆ นั่นคือการคำนึงถึงการประมาณแบบกึ่งแบบฉบับ (semi-classical approximation) ซึ่งสัมพันธ์กับ $\hbar \longrightarrow 0$ และความยาวคลื่นมีค่าขึ้นกับตำแหน่งด้วย

2.1) <u>ปัญหาการแก้อะซิมป์โตติค</u> (The Asymptotic solution)

ครั้งแรกเราลองมาพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้พลังงานศักย์ V(x) จากสมการโชรดิ้นเยอร์

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi = 0 \qquad (2.1.1)$$

ถ้า V มีค่าคงที่จะได้เวฟฟังก์ชันอย่างประมาณคือ $\Psi = A\exp\left[i\left\{2m(E-V)\right\}^{1/2} x/\hbar \right]$ แต่โดยทั่วไปพลังงานศักย์มีค่าขึ้นกับระยะทาง x ดังนั้นเวฟฟังก์ชันทั่วๆไปจึงสามารถเขียนเป็น

$$\Psi(x) = A(x)\, e^{iS(x)/\hbar}. \qquad (2.1.2)$$

ในที่นี้ A(x) และ S(x) เป็นฟังก์ชันแท้จริง (real functions) เมื่อดิฟเฟอเรนชิเอทสมการ (2.1.2) สองครั้งจะได้

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = A''(x)\, e^{iS(x)/\hbar} + 2A'(x)\,\frac{i}{\hbar}\, e^{iS(x)/\hbar} S'(x) - \frac{A(x)}{\hbar^2}\left(S'(x)\right)^2 e^{iS(x)/\hbar} + A(x)\,\frac{i}{\hbar}\, e^{iS(x)/\hbar}\, S''(x) \qquad (2.1.3)$$

แทนค่าในสมการ (2.1.1) จะเป็น

$$A''(x) + 2A'(x)\,\frac{i}{\hbar}\, S'(x) - \frac{A(x)}{\hbar^2}\, S'^2(x) + A(x)\frac{i}{\hbar}S''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)A(x) = 0 \qquad (2.1.4)$$

เมื่อแยกส่วนที่เป็นค่าแท้จริงและส่วนที่เป็นค่าจินตภาพจะได้

$$\hbar^2 A'' + \left[2m(E - V) - S'^2\right] A = 0 \qquad (2.1.5)$$

และ $$2 A'S' + A S'' = 0 \qquad (2.1.6)$$

สมการ (2.1.6) ให้รากของสมการเป็น $A =$ ค่าคงที่ $(S')^{-\frac{1}{2}}$

ส่วนสมการ (2.1.5) ไม่ให้รากของสมการที่แท้จริง ดังนั้นเราต้องกระจายเป็นอนุกรมของ $\hbar^2$ คือ

$$A = A_0 + \hbar^2 A_2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$S = S_0 + \hbar^2 S_2 + \ldots\ldots\ldots \qquad (2.1.8)$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2.1.5) และจัดเฉพาะเทอมที่ไม่มี $\hbar$ ให้เท่ากับศูนย์จะได้

$$A_0 \left[2m(E-V) - S_0'^2\right] = 0 \qquad (2.1.9)$$

$$S_0' = \pm\sqrt{2m(E-V)}$$

$$S_0 = \pm\int\sqrt{2m(E-V)}\, dx$$

และ $$A_0 = \text{ค่าคงที่ } (S_0')^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.1.10)$$

เมื่อเราประมาณให้ $\hbar \longrightarrow 0$ ดังนั้น $\hbar^2$ จึงมีค่าน้อยสามารถละทิ้งได้ ดังนั้น $A \approx A_0$ และ $S \approx S_0$ เวฟฟังก์ชันจะเป็น

$$\Psi(x) = A_0 e^{iS_0/\hbar} = C_{\pm} K^{-\frac{1}{2}} \exp(\pm i \int K\, dx) \qquad (2.1.11)$$

เมื่อ C_+, C_- เป็นค่าคงที่และ A_0, S_0 เขียนอยู่ในเทอมของ $K(x)$ โดยกำหนดให้

$$K(x) = +\sqrt{2m(E-V)}\ /\hbar \qquad (2.1.12)$$

ในที่นี้ถ้า $E-V < 0$ $K(x) \longrightarrow i\chi(x)$, $\chi(x) = +\sqrt{2m(V-E)}\ /\hbar$ (2.1.13)

สำหรับ $E-V > 0$ $\hbar K(x)$ สามารถคิดได้ว่าเป็นโมเมนตัมของอนุภาคที่จุด x และถ้าหากว่ามันไม่เปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วกับระยะทางแล้ว ความยาวคลื่นของอนุภาคก็คือ $\lambda = 2\pi/K(x)$ นั่นเอง ดังนั้น $S_0' = \hbar K = h/\lambda$

เมื่อพิจารณาที่จุดซึ่ง $E-V(x) = 0$ เรียกจุดนี้ว่าจุดหัวเลี้ยวแบบฉบับ (classical turning point) ความยาวคลื่น λ เป็นสัดส่วนกับ $\left[E-V(x)\right]^{-\frac{1}{2}}$ จะมีค่าเป็นอนันต์ ทำให้เวฟฟังก์ชันในสมการ (2.1.11) ล้มเหลวที่จุดนี้แต่จะใช้ได้ดีที่ห่างออกไป

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณมหาวิทยาลัย

และบอกให้เรารู้ว่าเวฟฟังก์ชันถูกแบ่งออกเป็นส่วนๆ (regions) ด้วยจุดหัวเลี้ยวนี้

2.2) <u>ปัญหาการแก้ที่ใกล้จุดหัวเลี้ยว</u> (Solution Near a Turning Point)

เรามาพิจารณาปัญหาสำคัญที่เกิดจากจุดหัวเลี้ยวสำหรับพลังงาน E เราอาจให้จุดศูนย์กลางของพิกัด (x coordinate) อยู่ที่จุดนี้ ดังนั้น (E - V) = 0 ที่ x = 0 โดยการกระจายเทย์เลอร์ (Taylor expansion) ของ (E - V) หรือของ $K^2(x)$ ซึ่งสมมูลกันรอบจุดนี้จะได้

$$K^2(x) = \rho x^n(1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots) \quad \text{เมื่อ } \rho > 0 \qquad (2.2.1)$$

ในที่นี้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ ρ, α, β เป็นค่าคงที่ และกำหนดให้ (E - V) เป็นบวกทางขวามือของจุดศูนย์กลางซึ่งตรงกับเครื่องหมายของ ρ ในสมการ (2.2.1)

ถ้าเราคิดเฉพาะเทอมแรกของการกระจาย K^2 สมการคลื่นสำหรับ $x>0$ จะเป็น

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \rho x^n \Psi = 0 \qquad (2.2.2)$$

สมการนี้มีผลปัญหาการแก้ที่ถูกต้องคือ

$$\Psi(x) = C_{\pm} Y^{1/2} K^{-1/2} J_{\pm m}(Y) \quad ; \quad m = \frac{1}{n+2} \qquad (2.2.3)$$

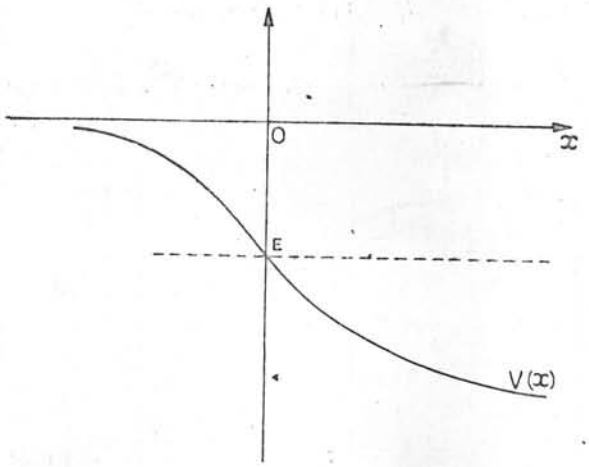
เมื่อ

$$Y = \int_0^x K\,dx \qquad (2.2.4)$$

และ $J_m(x)$ คือเบสเซลฟังก์ชัน (Bessel function) ของอันดับ m สมการ (2.2.3) ให้ผลปัญหาการแก้ 2 ฟังก์ชันที่เป็นอิสระต่อกัน จากการสังเกตจะได้ความจริงที่ว่าแต่ละรูปอะซิมปโตติคของปัญหาการแก้ทั้งสองมาจากการรวมกันโดยตรงของสมการ (2.1.11) นั่นเอง จากความจริงนี้ทำให้ปัญหาของการต่อเนื่อง (matching) ลดลงได้มากมาย

2.3) <u>การต่อเนื่องที่จุดหัวเลี้ยวเชิงเส้น</u> (Matching at a Linear Turning Point)

จุดหัวเลี้ยวเชิงเส้น คือจุดหัวเลี้ยวที่ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของ (E - V) หรือ K^2 เทียบกับ x เป็นเส้นตรง (รูป 2.1) นั่นคือเราให้ n = 1 ในสมการ (2.2.1) การพิจารณาสมการ (2.2.3) เราจะพบความจริงที่ว่า การข้ามผ่านจุดหัวเลี้ยวจากบวกไปทางลบ x นั้น (E - V) เปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบด้วย เหตุนี้ K และ Y จะเปลี่ยนจากค่าแท้จริงกลายเป็นค่าจินตภาพ ดังนั้นเรากำหนดให้



รูปที่ 2.1 แสดงจุดหัวเลี้ยวเชิงเส้น

สำหรับ $x>0$ $(E>V)$ $\quad Y_> = Y = \int_0^x K\,dx$ (2.3.1a)

$x<0$ $(E<V)$ $\quad K = i\chi$ และ $Y_< = iY = \int_0^x \chi dx$ (2.3.1b)

ทั้ง $Y_>$ และ $Y_<$ เป็นค่าแท้จริงและเป็นบวกและมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อห่างออกจากจุดหัวเลี้ยว จากค่าเหล่านี้สมการ (2.2.3) เมื่อ $n = 1$ เขียนได้เป็น

$$\Psi_>(\pm) = C_>(\pm)\, Y_>^{1/2} K^{-1/2} J_{\pm 1/3}(Y_>) \quad (x>0) \tag{2.3.2a}$$

$$\Psi_<(\pm) = C_<(\pm)\, Y_<^{1/2} \chi^{-1/2} J_{\pm 1/3}(Y_<) \quad (x<0) \tag{2.3.2b}$$

I_m คือสัญญะกรณ์มาตรฐานสำหรับเบสเซลฟังก์ชันที่เป็นค่าจินตภาพ การที่จะทำให้ $Y_>$ และ $Y_<$ ที่ $x = 0$ ต่อเนื่องกันได้เราจำเป็นต้องรู้พฤติกรรมของมันที่ใกล้ๆจุดนี้สำหรับค่า x น้อยๆ เทอม K^2 จะประมาณได้เป็น ρx ดังนั้นจะได้

$$K \approx \rho^{1/2} x^{1/2} \qquad Y_> \approx \frac{2}{3}\rho^{1/2} x^{3/2}$$
$$\chi \approx \rho^{1/2} |x|^{1/2} \qquad Y_< \approx \frac{2}{3}\rho^{1/2} |x|^{3/2} \tag{2.3.3}$$

ส่วนเบสเซลฟังก์ชันสำหรับค่า ξ เล็กๆ

$$J_m(\xi) \approx I_m(\xi) \approx \frac{(\frac{1}{2}\xi)^m}{\Gamma(1+m)} \tag{2.3.4}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2.3.2) เราพบว่าที่ใกล้ $x = 0$

$$\Psi_>(+) = \frac{C_>(+)(2/3)^{1/2}(1/3\rho^{1/2})^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\, x \;,\; \Psi_>(-) = \frac{C_>(-)(2/3)^{1/2}(1/3\rho^{1/2})^{-1/3}}{\Gamma(2/3)}$$

$$\Psi_<(+) = \frac{C_<(+)(2/3)^{1/2}(1/3\rho^{1/2})^{1/3}}{\Gamma(4/3)}\, x \;,\; \Psi_<(-) = \frac{C_<(-)(2/3)^{1/2}(1/3\rho^{1/2})^{-1/3}}{\Gamma(2/3)} \tag{2.3.5}$$

จะเห็นชัดเจนได้ว่า $\Psi_>(+)$ และ $\Psi_<(+)$ เชื่อมต่อกันได้อย่างสนิทต่อเมื่อ

$$C_>(+) = -C_<(+) \equiv C_+ \tag{2.3.6}$$

ดังนั้นจึงเห็นสมควรกำหนดให้ Ψ_+ เป็นปัญหาการแก้ต่อเนื่องกันของสมการโดยที่

$$\Psi_+ = \Psi_>(+) \quad (x>0) \quad \text{และ} \quad \Psi_+ = \Psi_<(+) \quad (x<0) \tag{2.3.7}$$

เมื่อ $\Psi_>(+)$ และ $\Psi_<(+)$ เป็นไปตามสมการ (2.3.2) ในทำนองเดียวกันเรากำหนด Ψ_- เป็นปัญหาการแก้อื่นๆดังนี้

หอสมุดกลาง จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

$$\Psi_- = \Psi_>(-) \quad (x>0) \quad \text{และ} \quad \Psi_- = \Psi_<(-) \quad (x<0) \tag{2.3.8}$$

เมื่อ $\Psi_>(-)$ และ $\Psi_<(-)$ เป็นไปตามสมการ (2.3.2) ด้วย และให้

$$C_>(-) = C_<(-) \equiv C_- \tag{2.3.9}$$

2.4) <u>สูตรการต่อเนื่องอะซิมปโตติค</u> (Asymptotic Connection Formulae)

พฤติกรรมของเวฟฟังก์ชัน Ψ_+ และ Ψ_- ที่ห่างไกลจากจุดหัวเลี้ยวสามารถรู้ได้โดยใช้รูปอะซิมปโตติคของเบสเซลฟังก์ชันดังนี้

$$J_m(\xi)_{Y\longrightarrow\infty} = (\tfrac{1}{2}\pi\xi)^{-\frac{1}{2}} \cos(\xi - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \tag{2.4.1}$$

$$I_m(\xi)_{Y\longrightarrow\infty} = (2\pi\xi)^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\xi} + e^{-\xi} \cdot e^{-(\frac{1}{2}+m)\pi i} \right] \tag{2.4.2}$$

เมื่อ $Y_> \longrightarrow \infty$ ขณะที่ $x \longrightarrow +\infty$ และ $Y_< \longrightarrow \infty$ ขณะที่ $x \longrightarrow -\infty$

จากสมการ (2.3.2) จะได้

$$\Psi_{+\ x\longrightarrow+\infty} = (\tfrac{1}{2}\pi K)^{-\frac{1}{2}} \cos(Y_> - \frac{5\pi}{12}) \tag{2.4.3}$$

$$\Psi_{+\ x\longrightarrow-\infty} = -(2\pi\chi)^{-\frac{1}{2}} \left[\exp(Y_<) + \exp(-Y_< - \frac{5\pi i}{6}) \right] \tag{2.4.4}$$

$$\Psi_{-\ x\longrightarrow+\infty} = (\tfrac{1}{2}\pi K)^{-\frac{1}{2}} \cos(Y_> - \frac{\pi}{12}) \tag{2.4.5}$$

$$\Psi_{-\ x\longrightarrow-\infty} = -(2\pi\chi)^{-\frac{1}{2}} \left[\exp(Y_<) + \exp(-Y_< - \frac{\pi i}{6}) \right] \tag{2.4.6}$$

โดยจัดให้เวฟฟังก์ชันที่ไม่ขึ้นต่อกัน Ψ_+ และ Ψ_- รวมกันอย่างเหมาะสมจะได้เวฟฟังก์ชันรายเฉพาะที่สอดคล้องกันของช่วงต่างๆ ($x>0$ หรือ $x<0$) ตัวอย่างเช่นจากสมการ (2.4.4) และสมการ (2.4.6) ผลรวมของ ($\Psi_+ + \Psi_-$) ลดลงอย่างเอกซ์โปเนนต์ (decreases exponentially) เมื่อผ่านเข้าไปในบริเวณของช่วง $x \longrightarrow -\infty$ ส่วนสมการ (2.4.3) และสมการ (2.4.5) จากการสังเกตรูปอะซิมปโตติคของมันขณะที่ $x \longrightarrow +\infty$ จะเห็นว่า มีพฤติกรรมคล้ายกับ $K^{-\frac{1}{2}} \cos(Y_> - 1/4\,\pi)$

ดังนั้นเราจะได้สูตรการต่อจากช่วง $x \longrightarrow -\infty$ ไปสู่ช่วง $x \longrightarrow +\infty$ ดังนี้

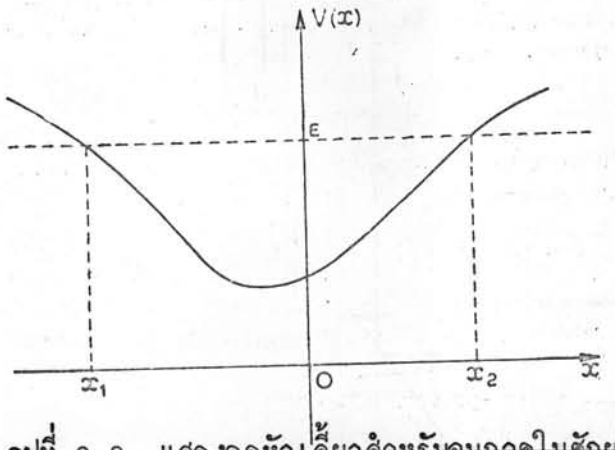
$$\tfrac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}} \exp(-Y_<) \longrightarrow K^{-\frac{1}{2}} \cos(Y_< - \frac{1}{4}\pi) \tag{2.4.7}$$

สูตรนี้จะไม่สมบูรณ์เมื่อทิศลูกศรชี้กลับ ทำนองเดียวกันเราจะได้สูตรการต่อเนื่องจากช่วง $x \longrightarrow +\infty$ ไปสู่ช่วง $x \longrightarrow -\infty$ ด้วยการพิจารณาผลรวมของ

$$(\psi_+ + \psi_-)\sin\frac{\pi}{6}\cos\eta + (\psi_+ - \psi_-)\sin\eta\cos\frac{\pi}{6}$$

โดยละทิ้งเทอม $\exp(-Y_<)$ เมื่อเปรียบเทียบกับ $\exp(Y_<)$ สูตรการต่อเนื่องคือ

$$\sin\eta\ \chi^{-\frac{1}{2}}\exp(Y_<) \longleftarrow\!\!\!



รูปที่ 2.2 แสดงจุดหัวเลี้ยวสำหรับอนุภาคในศักย์รูปบ่อ

$$\Psi = C'K^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\int_x^{x_2} K\,dx - \frac{\pi}{4} \right) = C'K^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \int_x^{x_2} K\,dx \right) \qquad (2.5.4)$$

เมื่อ C' เป็นค่าคงที่และอาร์กิวเมนต์ (argument) ของฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ x เพิ่มขึ้นเหมือนกับสมการ (2.5.2) จะเห็นได้ว่าทั้งสองสมการ (2.5.2) และ (2.5.4) หาได้ในช่วงเดียวกัน $x_1 < x < x_2$ ดังนั้นทั้งสองเวฟฟังก์ชันจะต้องพ้องกัน (coincide) และอาร์กิวเมนต์ของฟังก์ชันโคไซน์ในสมการทั้งสองจำเป็นต้องมีค่าต่างกัน $n\pi$ เมื่อ n มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก และ $C' = (-)^n C$ ดังนั้นจะได้

$$\int_{x_1}^{x_2} K\,dx = (n+\tfrac{1}{2})\pi \qquad (2.5.5)$$

ในที่สุดเมื่อแทนค่าสมการ(2.1.12) สำหรับ K เราจะได้

$$2\int_{x_1}^{x_2} \left\{ 2m\left[E - V(x) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} dx = (n+\tfrac{1}{2})h \qquad n = 0,1,2.....(2.5.6)$$

หรือ

$$\oint p\,dx = (n+\tfrac{1}{2})h \qquad n = 0,1,2..... \qquad (2.5.7)$$

ทางซ้ายมือหมายถึงการอินทิเกรทตลอดครบวงของโมเมนตัมของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก x_1 ไป x_2 แล้วกลับมา x_1 อีกซึ่งเป็นกฎควอนตัมบอร์–ซอมเมอร์เฟลด์ที่ถูกต้อง ต่างจากเดิมคือแทนที่จะเป็นจำนวนเต็มเลขควอนตัมปรากฏเป็นจำนวนเต็มครึ่ง ($n+\frac{1}{2}$) แทน จากการสังเกตสมการ (2.5.2) จะเห็นได้ง่ายว่า n ในสมการ (2.5.5) ก็คือจำนวนจุดกลาง (node) ของ $\Psi(x)$ ระหว่าง x_1 และ x_2 ดังนั้นถ้าในช่วงนี้มีความยาวคลื่นจำนวนมากมาย n จะต้องมีค่าใหญ่และคาดว่าเป็นไปตามกฎควอนตัม (2.5.6)ได้อย่างดี

2.6) <u>ปัญหาการแก้ WKB ของสมการคลื่นตามแนวรัศมี</u>

(WKB Solution of the Radial Wave Equation)

จากสมการคลื่นตามแนวรัศมีสำหรับพลังงานศักย์ ที่มีสมมาตรเชิงกลมคือ

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m\,r^2} \right] R = 0 \qquad (2.6.1)$$

กำหนดให้ $\chi(r) = rR(r)$ สมการ (2.6.1) เขียนใหม่เป็น

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi = 0 \qquad (2.6.2)$$

สมการนี้ตัวแปรอิสระ r มีเงื่อนไขขอบเขตอยู่ที่ 0 และ $+\infty$ แทนที่จะอยู่ที่ $-\infty$ และ $+\infty$ ในกรณีหนึ่งมิติ เพื่อให้ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตตามเส้นดีขึ้นจึงต้องเปลี่ยนตัวแปรใหม่โดยให้

$$r = e^{s}, \chi(r) = e^{\frac{1}{2}S}\phi(S) \qquad (2.6.3)$$

ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตจะเปลี่ยนไปจากจุด $r = 0$ และ $+\infty$ ไปเป็น $S = -\infty$ และ $+\infty$ ตามลำดับ โดยการดิฟเฟอเรนชิเอท χ เทียบกับ r

$$\frac{d\chi}{dr} = \frac{d\chi}{dS}\cdot\frac{dS}{dr} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}S}\phi(S) + e^{-\frac{1}{2}S}\frac{d\phi(S)}{ds}$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = e^{-3/2\,S}\left[\frac{d^2\phi(S)}{dS^2} - \frac{1}{4}\phi(S)\right] \qquad (2.6.4)$$

แทนค่าลงในสมการ (2.6.2) จะได้

$$\frac{d^2\phi}{dS^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left\{E - V(e^{S})\right\}e^{2S} - \frac{\hbar^2}{2m}(l+\tfrac{1}{2})^2\right]\phi = 0 \qquad (2.6.5)$$

เงื่อนไขขอบเขตของ $\phi(S)$ เป็น

$$\phi(S) \longrightarrow 0 \quad \text{เมื่อ} \quad S \longrightarrow \pm\infty \qquad (2.6.6)$$

จากสมการ (2.6.5) และ (2.6.6) สำหรับกรณีของศักย์รูปบ่อธรรมดาจะได้สมการที่เป็นปฏิภาคของสมการ (2.5.6) ดังนี้

$$2\int_{S_1}^{S_2}\left[2m\left\{E - V(e^{S})\right\}e^{2S} - \hbar^2(l+\tfrac{1}{2})^2\right]^{\frac{1}{2}} dS = (n+\tfrac{1}{2})h \qquad (2.6.7)$$

เมื่อ S_1 และ S_2 คือลิมิต (limit) ของช่วงที่ได้จากรากกำลังสองของวงเล็บที่เป็นค่าบวก เมื่อเราให้ $S = \ln r$ สามารถเขียนสมการ (2.6.7) ในเทอมของ r เป็น

$$2\int_{r_1}^{r_2}\left[2m\left\{E - V(r)\right\} - \frac{\hbar^2}{r^2}(l+\tfrac{1}{2})^2\right]^{\frac{1}{2}} dr = (n+\tfrac{1}{2})h \qquad (2.6.8)$$

จะเห็นได้ว่าเราได้ $(l+\frac{1}{2})^2$ แทนที่จะเป็น $l(l+1)$ และได้ผลการคำนวณดีขึ้น