บทที่ 3

ทฤษฎีแถวรอคอย

แถวรอคอยมักจะพบอยู่เสมอ ๆ ในชีวิตประจำวัน เช่น การรอสัญญาณไฟจราจร การรอชำระเงินในซุปเปอร์มาเก็ต เป็นต้น ในธุรกิจทุกประเภทไม่ว่าจะเป็นองค์การของรัฐบาล, โรงงานอุตสาหกรรม, โรงเรียน, โรงพยาบาล จะมีปัญหาของแถวรอคอยเข้ามาเกี่ยวข้องอยู่ด้วย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัจจุบัน การแข่งขันทางธุรกิจมีมากขึ้น การปรับปรุงระบบเพื่อให้มีประสิทธิภาพและรวดเร็วในการให้บริการแก่ลูกค้าจึงมีความสำคัญยิ่งขึ้น

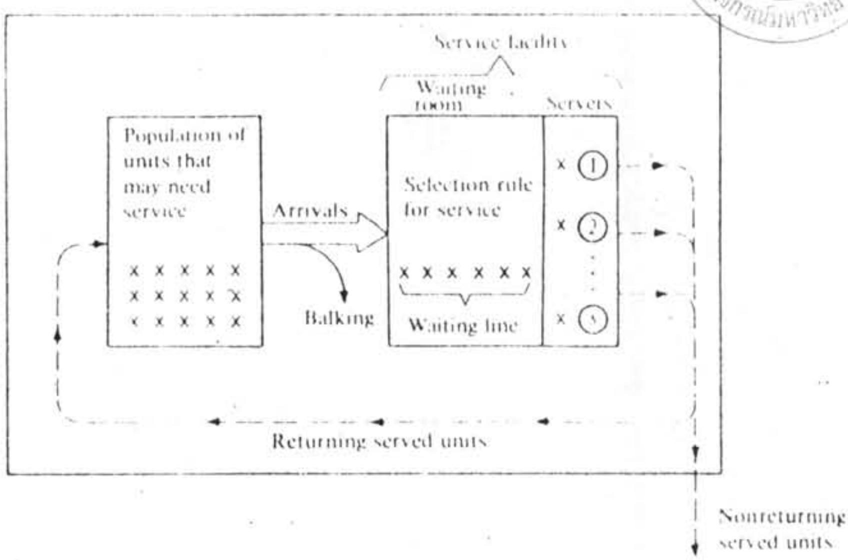
แถวรอคอยเกิดขึ้นเนื่องจากอัตราการมาของผู้รับบริการ (Customer) มีความไม่แน่นอนและไม่สัมพันธ์กับอัตราการให้บริการ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อนำมาวิเคราะห์ปัญหาแถวรอคอยนี้โดยจัดอยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยต่าง ๆ เช่น ค่าเฉลี่ยของเวลาในการรอคอย ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ผู้รับบริการอยู่ในระบบ เปอร์เซนต์ที่ผู้ให้บริการว่างจากการให้บริการ (Idle Time) เป็นต้น ทฤษฎีของแถวรอคอยจัดเป็นแขนงหนึ่งในวิชาวิจัยการดำเนินงาน (Operations Research) โดยมีจุดประสงค์เพื่อใช้แก้ไขและปรับปรุงระบบให้มีความสะดวกและรวดเร็วในการให้บริการแก่ลูกค้าหรือผู้รับบริการ โดยเสียค่าใช้จ่ายที่เหมาะสม เพราะเมื่อจำนวนผู้ให้บริการในระบบถูกเพิ่มขึ้น เพื่อที่จะลดเวลาในการรอคอยของผู้รับบริการจะทำให้ค่าใช้จ่ายในการให้บริการเพิ่มขึ้นด้วย ในทางตรงข้าม ถ้าจำนวนผู้ให้บริการในระบบถูกลดลง เพื่อที่จะลดค่าใช้จ่ายจะทำให้เวลาของการรอคอยของผู้รับบริการมากขึ้น ด้วยเหตุนี้ทฤษฎีแถวรอคอยจึงเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้นักวิเคราะห์สามารถหารูปแบบที่เหมาะสมสำหรับระบบแถวรอคอยนั้น ๆ

3.1 ส่วนประกอบของแถวรอคอย (4)

ส่วนประกอบของแถวรอคอย (ดังแสดงในรูป 3.1) มีส่วนประกอบที่สำคัญดังนี้

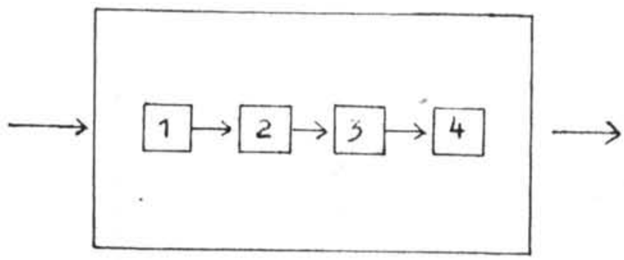
3.1.1 การกระจายการมาของผู้รับบริการ (Arrival Distribution) หมายถึง การกระจายของจำนวนผู้เข้ารับบริการต่อหน่วยเวลา ในบางครั้งอาจจะกำหนดเป็นการกระจายของเวลาห่างระหว่างผู้มารับบริการแต่ละคน (Interarrival Distribution) โดยทั่วไปการกระจายการมาของผู้รับบริการจะเป็นแบบปัวซอง โดยที่การกระจายของเวลาห่างระหว่างผู้มารับบริการแต่ละคนเป็นแบบเอ็กซโพเนนเชียล

3.1.2 การกระจายการจากไปของผู้รับบริการ (Departure Distribution) มีหน่วยเป็นจำนวนผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา

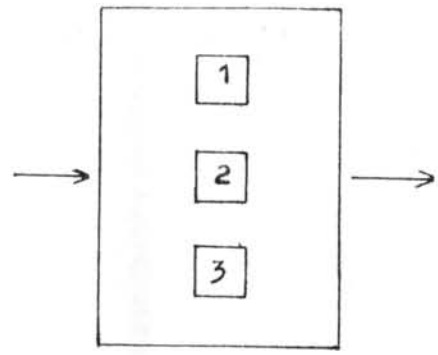


รูป 3.1 ส่วนประกอบของแถวรอคอย

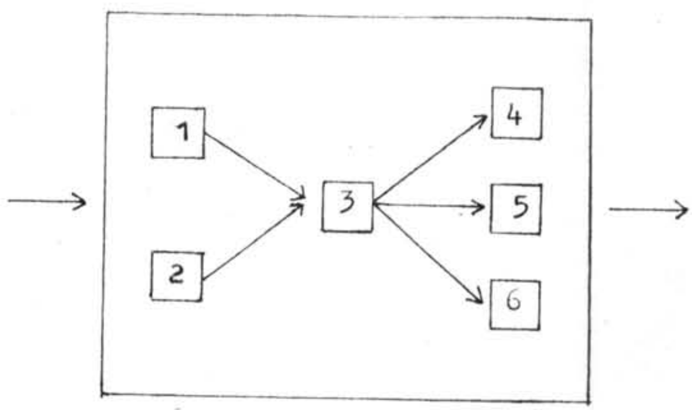
3.1.3 <u>จำนวนช่องทางการให้บริการ</u> (Service Channel) แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ ช่องทางแบบขนานและช่องทางแบบอนุกรม ซึ่งแถวรอคอยบางระบบอาจจะเป็นทั้ง 2 ประเภทผสมกัน ดังแสดงในรูป 3.2



ช่องทางแบบอนุกรม



ช่องทางแบบขนาน



ช่องทางแบบผสม

รูป 3.2 รูปแบบช่องทางการให้บริการ

3.1.4 <u>ระเบียบการให้บริการ</u> (Service Discipline) คือหลักเกณฑ์ในการให้บริการแก่ผู้รับบริการ ที่สำคัญมีดังนี้

3.1.4.1 <u>First Come First Serve (FCFS)</u> ผู้รับบริการที่มาถึงสถานีบริการก่อนจะได้รับบริการก่อน

3.1.4.2 <u>Last Come First Serve (LCFS)</u> ผู้รับบริการที่มาถึงสถานีบริการหลังสุดจะได้รับบริการก่อน

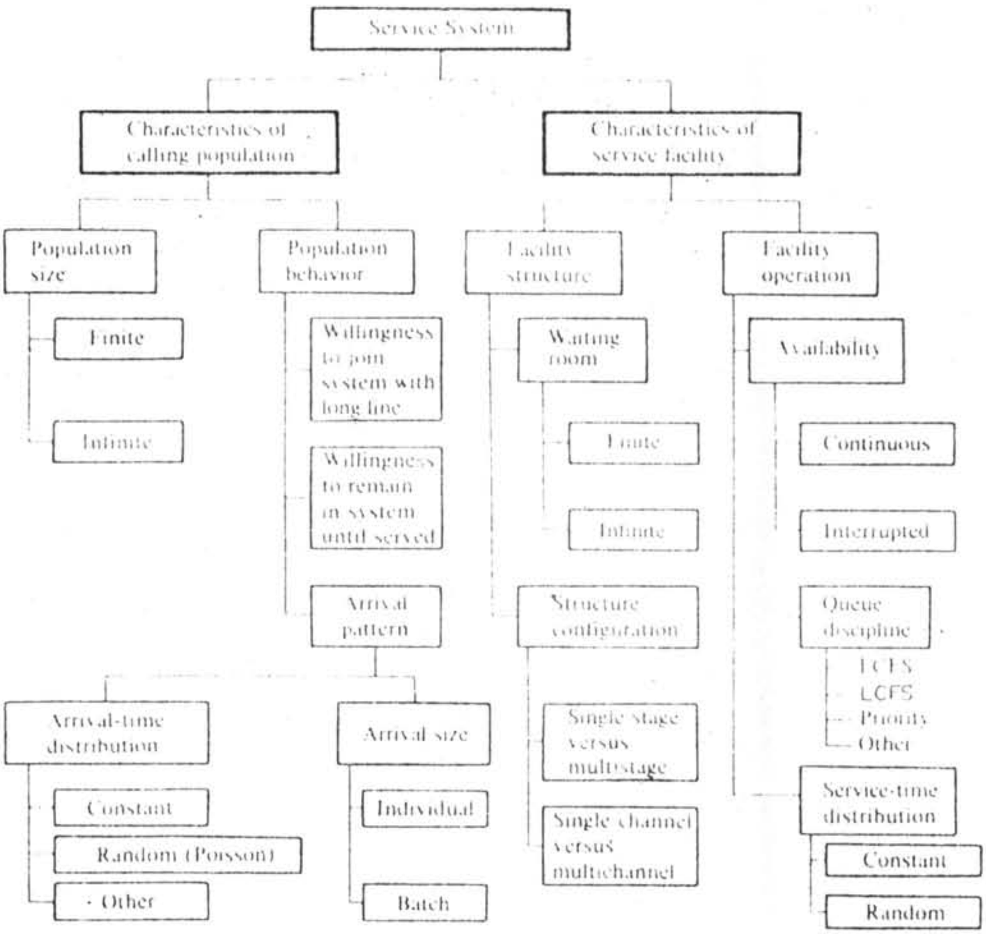
3.1.4.3 <u>Serve in Random Order (SIRO)</u> การให้บริการในลักษณะเดาสุ่ม ไม่เลือกว่าผู้รับบริการจะมาถึงสถานีก่อนหรือหลัง

3.1.4.4 <u>General Serve Discipline (GD)</u> โดยทั่วไปการให้บริการทั้ง 3 ประเภทแรกจะให้ผลในทางคำนวณเหมือนกัน จึงรวมเรียกว่า GD.

3.1.4.5 <u>Priority Serve</u> การให้บริการตามลำดับความสำคัญของผู้รับบริการ

3.1.5 <u>จำนวนผู้รับบริการมากที่สุดที่สามารถอยู่ในระบบ</u> ตัวอย่างเช่น ร้านตัดผม มีช่างประจำอยู่ 3 คน และมีเก้าอี้ 4 ตัวสำหรับนั่งรอ ดังนั้นจำนวนผู้รับบริการที่สามารถอยู่ในระบบได้จึงมีเท่ากับ 7 คน ข้อจำกัดของระบบอันนี้มีความสำคัญประการหนึ่ง เพราะถ้าจำนวนผู้รับบริการอยู่เต็มในระบบแล้ว เมื่อมีผู้รับบริการมาถึงระบบอีกไม่สามารถที่จะรอคอยได้อาจทำให้เสียลูกค้าไป

3.1.6 <u>ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการ</u> (Calling Source) หมายถึง ต้นกำเนิดของผู้เข้ารับบริการ ตัวอย่างเช่น ศูนย์อนามัยจุฬา ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการรักษาจะเป็นเฉพาะนิสิตและข้าราชการในสังกัดจุฬาเท่านั้น แต่ถ้าเป็นโรงพยาบาลทั่วไป ผู้มีสิทธิเข้ารับบริการคือ ประชาชนทั่วไป



รูป 3.3 การจำแนกลักษณะของระบบให้บริการ

ในการศึกษาระบบแถวรอคอย เนื่องจากระบบแต่ละระบบมีส่วนประกอบที่มีลักษณะแตกต่างกันออกไป ดังนั้น D.G. Kendall จึงได้กำหนดสัญญลักษณ์ขึ้นเพื่อใช้แทนลักษณะของระบบแถวรอคอยในลักษณะต่าง ๆ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

(a/b/c) : (d/e/f)

เมื่อ – a หมายถึง การกระจายการมาของผู้รับบริการ

– b หมายถึง การกระจายการจากไปของผู้รับบริการ

a และ b ถ้าแทนด้วยสัญญลักษณ์

M หมายถึง การกระจายเป็นแบบปัวซองหรือเอ็กซโพเนนเชียล

D หมายถึง การกระจายเป็นแบบคายตัว (Deterministic Distribution)

E_k หมายถึง การกระจายเป็นแบบ Erlang หรือ Gamma

– c หมายถึง จำนวนช่องทางให้บริการแบบขนาน แทนด้วยเลขจำนวนเต็มบวก

– d หมายถึง ระเบียบของการให้บริการ เช่น FCFS, LCFS, SIRO เป็นต้น

– e หมายถึง จำนวนผู้รับบริการที่สามารถอยู่ในระบบ มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง ∞

– f หมายถึง จำนวนผู้มีสิทธิเข้ารับบริการ มีค่าเป็นเลขจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง ∞

ตัวอย่าง เช่น (M/M/1) : (FCFS/1/∞)

หมายถึง อัตราการมาและการจากไปของผู้รับบริการ มีการกระจายเป็นแบบปัวซองหรือเอ็กซโพเนนเชียล โดยมีช่องทางการให้บริการ 1 ช่องทาง และผู้มาถึงสถานีบริการก่อนจะได้รับบริการก่อน จำนวนผู้ที่อยู่ในระบบมีได้เพียง 1 คน โดยผู้มีสิทธิเข้ารับบริการมาจากแหล่งที่ไม่จำกัด

3.2 สภาวะแปรเปลี่ยนและสภาวะคงที่ (Transient and Steady States)

ระบบใด ๆ อยู่ในสภาวะแปรเปลี่ยนเมื่อลักษณะการดำเนินงานหรือพฤติกรรมของระบบ (Operating Characteristic or Behavior) ขึ้นอยู่กับเวลา โดยทั่วไปมักจะเกิดในตอนเริ่มต้นดำเนินงานของระบบ ในการวิเคราะห์ระบบนั้นส่วนมากจะวิเคราะห์กันในลักษณะการดำเนินงานระยะยาว (Long – Run) เมื่อพฤติกรรมและลักษณะการดำเนินงานของระบบไม่ขึ้นกับเวลา ซึ่งเรียกว่า ภาวะคงที่

3.3 สัญลักษณ์ของระบบแถวรอคอย[(4)]

n = จำนวนผู้รับบริการในระบบ

$P_n(t)$ = ความน่าจะเป็นในภาวะที่เปลี่ยนแปลงได้ (Transient State Probability) ที่ระบบจะมีผู้รับบริการอยู่ n คน เมื่อเวลา t (สมมุติว่าระบบเริ่มต้นเมื่อเวลา 0)

P_n = ความน่าจะเป็นในภาวะคงที่ (Steady State Probability) ที่ระบบจะมีผู้รับบริการอยู่ n คน

λ = ค่าเฉลี่ยของอัตราการมาของผู้รับบริการมีหน่วยเป็น จำนวนผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา

μ = ค่าเฉลี่ยของอัตราการให้บริการ มีหน่วยเป็น จำนวนผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา

c = จำนวนช่องทางแบบขนาน

ρ = $\frac{\lambda}{\mu}$ = Utilization Factor

$W(\tau)$ = Probability Density Function ของเวลาในการรอคอย

W_s = เวลารอคอยคาดหมายในระบบต่อผู้รับบริการ 1 คน

W_q = เวลารอคอยคาดหมายในแถวรอคอยของผู้รับบริการ 1 คน

L_q = จำนวนผู้รับบริการคาดหมายในแถวรอคอย

L_s = จำนวนผู้รับบริการคาดหมายในระบบ

ความสัมพันธ์ระหว่าง L_s, L_q, W_s, W_q

$$L_s = \lambda W_s$$

$$L_q = \lambda W_q$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = L_s - \rho$$

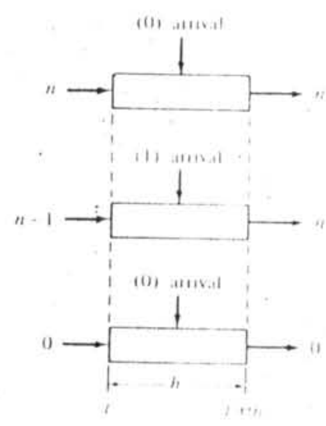
3.4 <u>การกระจายของการมาของผู้รับบริการ</u>[4] (Pure Birth Model)

สมมุติว่าระบบเริ่มเมื่อเวลาเท่ากับศูนย์ ($t = 0$) และไม่มีผู้รับบริการอยู่ในระบบเลย ($n = 0$)

ให้ λ เป็นอัตราการมาของผู้รับบริการต่อหน่วยเวลา

h เป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก

ในช่วงเวลาระหว่าง t และ $t + h$ จะมีทางเป็นไปได้ 2 กรณี คือ



1. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ n คน และระหว่างเวลา t ถึง $t + h$ ไม่มีผู้รับบริการมาถึงระบบเลย โดยมีโอกาส $= 1 - \lambda h$
2. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ $n - 1$ คน และระหว่างเวลา t ถึง $t + h$ มีผู้รับบริการมาถึงระบบ 1 คน โดยมีโอกาส $= \lambda h$

ดังนั้น

$$P_n(t+h) \cong P_n(t)(1-\lambda h) + P_{n-1}(t)\lambda h \quad , \quad n > 0 \qquad (3.1)$$

$$P_o(t+h) \cong P_o(t)(1-\lambda h) \quad , \quad n = 0 \qquad (3.2)$$

จากสมการ 3.1

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} \cong -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad (3.3)$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = P'_n(t)$$

จากสมการ 3.3

$$\therefore \quad P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad (3.4)$$

โดยวิธีเดียวกัน สมการ 3.2 จะได้

$$P'_o(t) = -\lambda P_o(t) \qquad (3.5)$$

สมการ 3.4 และ 3.5 เรียกว่า Difference - Differential Equation ซึ่งเมื่อแก้สมการโดยใช้ Z - Transform จะได้

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (3.6)$$

ซึ่งก็คือ การกระจายแบบปัวซองซึ่งมีค่าคาดหมาย (Expected Value) = λt

3.5 การกระจายของเวลาห่างระหว่างผู้มารับบริการ

สมมุติว่าการกระจายการมาของผู้รับบริการเป็นแบบปัวซอง

ให้ $f(t)$ = pdf ของ interarrival time, $t > 0$

$F(t)$ = cdf ของ interarrival time, $t > 0$

$$\therefore \quad F(t) = \int_0^t f(u)\,du \qquad (3.7)$$

ถ้าไม่มีการมาเกิดขึ้นในช่วง o ถึง t

$$P_o(t) = \int_t^\infty f(u)\,du = 1 - \int_0^t f(u)\,du \qquad (3.8)$$

จากสมการ 3.6 และ 3.8

$$P_o(t) = e^{-\lambda t} \qquad (3.9)$$

$\therefore$ สมการ 3.7, 3.8, 3.9

$$1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F'(t) = f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

นั่นคือ ถ้าการกระจายการมาของผู้รับบริการเป็นแบบปัวซอง การกระจายของเวลาห่างระหว่างผู้รับบริการแต่ละคนจะเป็นแบบเอ็กซโพเนนเชียล

3.6 การกระจายของการจากไปของผู้รับบริการ (Pure Death Model)

ให้ μ เป็นอัตราการจากไปของผู้รับบริการ

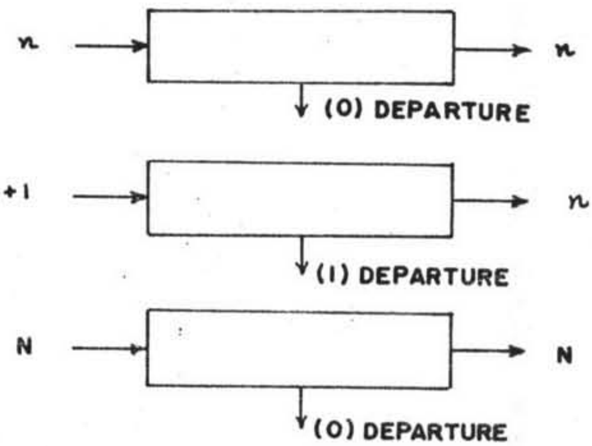
h เป็นช่วงเวลาที่สั้นมาก

ระบบเริ่มเมื่อ $t = 0$ และ $n = 0$

I15825384

N จำนวนผู้รับบริการที่สามารถอยู่ในระบบ

ในช่วงเวลาระหว่าง t และ t + h จะมีทางเป็นไปได้ 2 กรณี คือ



1. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ n คน และระหว่าง t ถึง t + h ไม่มีผู้รับบริการจากไปเลย โดยมีโอกาส = 1 - μ h
2. ณ เวลา t มีผู้รับบริการอยู่ n +1 คน และระหว่างเวลา t ถึง t + h มีผู้รับบริการจากไป 1 คน โดยมีโอกาส = μ h

$$\therefore \quad P_N(t + h) \simeq P_N(t)(1 - \mu h), \quad n = N \qquad (3.10)$$

$$P_n(t + h) \simeq P_n(t)(1 - \mu h) + P_{n+1}(t)\mu h, \quad o<n<N \qquad (3.11)$$

$$P_o(t + h) \simeq P_o(t)(1) + P_1(t)\mu h, \quad n = 0 \qquad (3.12)$$

จากสมการ 3.10

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_N(t + h) - P_N(t)}{h} = -\mu P_N(t)$$

$$P'_N(t) = -\mu P_N(t)$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โดยวิธีเดียวกัน สมการ 3.11 และ 3.12 จะได้

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

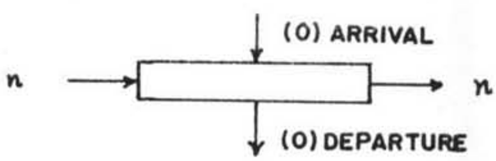
$$P'_o(t) = \mu P_1(t)$$

$$\therefore \quad P_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N$$

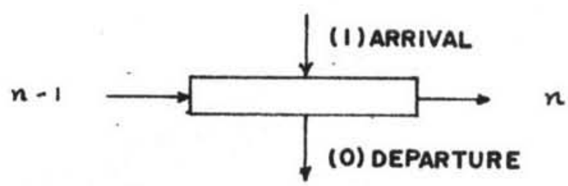
3.7 <u>แถวรอคอยพื้นฐานแบบปัวซอง (M/M/1) : (FCFS/∞/∞)</u>

ในช่วงเวลา t ถึง t + h จะมีกรณีที่เป็นไปได้อยู่ 3 กรณี คือ

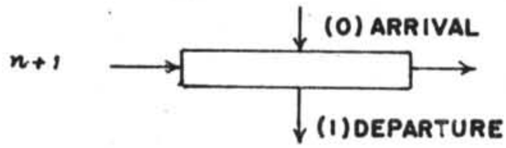
ก. มีผู้รับบริการ n คน อยู่ในระบบเมื่อเวลา t และไม่มีการจากไป หรือการมาของผู้รับบริการในช่วงเวลา h ซึ่งมีโอกาส = $1 - \lambda h - \mu h$



ข. มีผู้บริการ n - 1 คน อยู่ในระบบเมื่อเวลา t และไม่มีการจากไป ของผู้รับบริการ แต่มีผู้รับบริการมาถึงระบบ 1 คน ในช่วงเวลา h ซึ่งมีโอกาส = λh



ค. มีผู้รับบริการอยู่ $n + 1$ คนในระบบ เมื่อเวลา t และไม่มีการมาของผู้รับบริการ แต่มีการจากไปของผู้รับบริการ 1 คน ในช่วงเวลา h ซึ่งมีโอกาส $= \mu h$



ดังนั้น $P_n(t + h) \cong$ ความน่าจะเป็นของข้อ ก + ความน่าจะเป็นของข้อ ข + ความน่าจะเป็นของข้อ ค

เมื่อ $n > 0$

$$P_n(t + h) \cong P_n(t)(1 - \lambda h - \mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h) + P_{n+1}(t)(\mu h), \qquad (3.13)$$

เมื่อ $n = 0$

$$P_0(t + h) \cong P_0(t)(1 - \lambda h) + P_1(t)(\mu h) \qquad (3.14)$$

โดยการ take limit เมื่อ h เข้าสู่ 0

สมการ 3.13

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_n(t + h) - P_n(t)}{h} = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t)$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu) P_n(t), \qquad (3.15)$$

โดยวิธีเดียวกัน สมการ 3.12 จะได้

$$P_0'(t) = - \lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \qquad (3.16)$$

สำหรับ Steady State แล้ว t เข้าสู่ ∞ จะทำให้

$$P'_n(t) = 0$$

$$P_n(t) = P_n$$

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดังนั้น สมการ 3.15 และ 3.16 จึงกลายเป็น

$$\lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} - (\lambda + \mu) P_n = 0 \qquad (3.17)$$

$$-\lambda P_o + \mu P_1 = 0 \qquad (3.18)$$

โดยการแก้สมการ 3.17 และ 3.18 จะได้

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$ เมื่อ $n = 1, 2, 3 \ldots$ และ $\rho < 1$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$