บทที่ 2

ทฤษฎีการจำลองแบบ

2.1 ทฤษฎีความน่าจะเป็นและแนวความคิดทางสถิติ

ในการศึกษาและดำเนินการจำลองแบบ จำเป็นจะต้องเข้าใจทฤษฎีความน่าจะเป็นและทฤษฎีทางสถิติบางประการ ทั้งนี้เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ข้อมูลต่าง ๆ จากแบบของจริงให้ใกล้เคียงมากที่สุด และเชื่อถือได้ในเชิงสถิติ

2.1.1 ความน่าจะเป็น[1] (Probability)

คือโอกาสที่เหตุการณ์ใดเหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้นภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด (Stated Condition) โดยปกติในการคำนวณทางสถิติจะแสดงด้วยตัวเลขระหว่าง 0 ถึง 1 แต่บางครั้งอาจจะบอกในรูปของเปอร์เซนต์ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 100 เรียกว่าเปอร์เซนต์ของโอกาส (Percent Chance) การหาค่าของความน่าจะเป็นสามารถกระทำได้หลายวิธีตามแต่จุดประสงค์ต่าง ๆ กัน แต่วิธีที่ใช้กันโดยทั่วไป มีอยู่ 2 วิธี คือ

2.1.1.1 Classical Method ถ้าเหตุการณ์ใด ๆ สามารถเกิดขึ้นได้ทั้งหมด n วิธี โดยแต่ละวิธีมีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน เหตุการณ์ A เป็นเหตุการณ์หนึ่งในเหตุการณ์ทั้งหมดนี้และสามารถเกิดขึ้นได้ m วิธี ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะเท่ากับ

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

หมายเหตุ ค่าของ m และ n เป็นค่าที่ทราบได้โดยไม่ต้องทำการทดลอง

2.1.1.2 Frequency Method ในการทดลองหนึ่ง ๆ ถ้าพบว่าเหตุการณ์ A มีโอกาสเกิดขึ้นได้ m ครั้ง จากการทดลองทั้งหมด n ครั้ง ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จะเท่ากับ

$$P'(A) = \frac{m}{n}$$

ถ้าค่าของ n มากขึ้นเพียงใด P'(A) จะยิ่งมีค่าเข้าใกล้ P(A) มากขึ้นเท่านั้น

$$\lim_{n \to \infty} P'(A) = P(A)$$

2.1.2 ตัวแปรสุ่ม[2] (Random Variable) คือฟังก์ชั่นที่มีค่าเป็นเลขจำนวนจริง ซึ่งถูกกำหนดโดยจุดต่าง ๆ ใน Sample Space แบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ

2.1.2.1 ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Variable) ได้แก่ ตัวแปรที่สามารถแจกแจงนับได้ ตัวอย่างเช่น การโยนลูกเต๋า ผล (Outcome) ที่สามารถเป็นไปได้มีอยู่ 6 กรณี คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ตัวเลขเหล่านี้คือ ตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง ถ้ากำหนดตัวแปรสุ่มเหล่านี้ด้วยค่าของความน่าจะเป็นที่แน่นอน สมมุติคือ f(x) ดังแสดงในตารางข้างล่าง

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$f(x)$ จะมีคุณสมบัติเป็นการกระจายของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ

1. $f(x) \geq 0$

2. $\sum_{x} f(x) = 1$

3. $Pr(X = x) = f(x)$

และ $F(x)$ เป็น Cumulative Distribution ของตัวแปรไม่ต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

2.1.2.2 <u>ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง</u> (Continuous Random Variable) คือ ตัวแปรสุ่มที่ไม่สามารถแจกแจงนับได้ เช่น อายุการใช้งานของแบตเตอรี่ ตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องไม่สามารถหาค่าของความน่าจะเป็น ณ จุดใดจุดหนึ่งได้ แต่สามารถหาได้ในช่วงระหว่างจุด 2 จุด (Between 2 Limits) $f(x)$ จะเป็น Probability Density Function ของตัวแปรชนิดต่อเนื่องนี้ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$Pr(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

และ $F(x)$ เป็น Cumulative Distribution ของตัวแปรต่อเนื่องก็ต่อเมื่อ

$$F(x) = Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2.1.3 <u>ค่าคาดหมายคณิตศาสตร์</u>(2) (Mathematical Expectation) ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมีการกระจายของความน่าจะเป็น $f(x)$ แล้ว ค่าคาดหมายคณิตศาสตร์ของ x จะมีค่าเท่ากับ

$$E(x) = \sum_{x} xf(x) \qquad \text{ถ้า } x \text{ เป็นตัวแปรชนิดไม่ต่อเนื่อง}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \qquad \text{ถ้า } x \text{ เป็นตัวแปรชนิดต่อเนื่อง}$$

2.1.4 <u>ค่าเฉลี่ยของข้อมูล</u>(1) (Average of Data หรือ Mean) เป็นค่าที่บ่งบอกถึงความโน้มเอียงศูนย์กลาง (Central Tendency) ของข้อมูลว่าจะมีค่าเท่าใด ซึ่งหาได้จาก

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

2.1.5 <u>ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน</u>(1) (Standard Deviation) เป็นค่าที่บอกถึงการกระจายของข้อมูลจากค่าเฉลี่ย ถ้าค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่ามากเท่าใด แสดงว่าการกระจายของข้อมูลมีมาก การหาความเบี่ยงเบนนี้หาได้จาก

$$S = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

2.1.6 <u>Relative Frequency Distribution</u> หรือ <u>Empirical Distribution</u>(2) ในการทดลองหรือสังเกตการณ์ใด ๆ การกระจายข้อมูลต่าง ๆ ไม่สามารถจะบอกได้ว่าเป็นเช่นใด การศึกษาถึงลักษณะและพฤติกรรมของข้อมูลจะกระทำได้โดยการจัดกลุ่มข้อมูลนี้ใหม่ ถ้าข้อมูลเป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง การหาความถี่ของข้อมูลจำเป็นที่จะต้องกำหนดเป็นช่วง เมื่อได้ความถี่ในช่วงต่าง ๆ แล้ว จึงนำมาหาค่า Relative Frequency Probabilities ซึ่งตัวเลขนี้สามารถบอกถึงการกระจายของข้อมูลได้

ตัวอย่างข้อมูลอายุการใช้งานของแบตเตอรี่รถยนต์ซึ่งได้จากการเก็บข้อมูล 40 ข้อมูล ปรากฏในตาราง 2.1

2.2	4.1	3.5	4.5	3.2	3.7	3.0	2.6
3.4	1.6	3.1	3.3	3.8	3.1	4.7	3.7
2.5	4.3	3.4	3.6	2.9	3.3	3.9	3.1
3.3	3.1	3.7	4.4	3.2	4.1	1.9	3.4
4.7	3.8	3.2	2.6	3.9	3.0	4.2	3.5

ตาราง 2.1 อายุการใช้งานของแบตเตอรี่รถยนต์ (ปี)

เมื่อนำเอาข้อมูลมาแจกแจงความถี่ในช่วงต่าง ๆ จะสามารถหา Relative Frequency Distribution Probability ได้ ดังแสดงในตาราง 2.2

ช่วงอายุการใช้งาน	จุดกึ่งกลาง	ความถี่	Relative Frequency
1.5 - 1.9	1.7	2	0.050
2.0 - 2.4	2.2	1	0.025
2.5 - 2.9	2.7	4	0.100
3.0 - 3.4	3.2	15	0.375
3.5 - 3.9	3.7	10	0.250
4.0 - 4.4	4.2	5	0.125
4.5 - 4.9	4.7	3	0.075

ตาราง 2.2 Relative Frequency Distribution ของแบตเตอรี่รถยนต์

การจัดข้อมูลให้อยู่ในรูปของ Relative Frequency Probability ทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์ข้อมูลว่ามีการกระจายเช่นไร และทดสอบว่าข้อมูลมีการกระจายทางทฤษฎีหรือไม่ ดังจะได้กล่าวต่อไป

2.1.7 Theoretical Distribution คือ การกระจายของตัวแปรที่สามารถเขียนสมการของ Probability Density Function (pdf) ได้ การกระจายทางทฤษฎีมีมากมายหลายวิธีด้วยกัน ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะการกระจายที่สำคัญ ๆ เท่านั้น

2.1.7.1 Poisson Distribution(1) เป็นการแจกแจงของจำนวนผล (Success) ที่เกิดขึ้นต่อหนึ่งหน่วยเวลา หรือต่อขอบเขตที่แน่นอน เช่น จำนวนโทรศัพท์เข้าใน 1 ชั่วโมง, จำนวนแบคทีเรียในน้ำ 1 ลิตร เป็นต้น

Poisson Distribution เป็นการกระจายของตัวแปรชนิดไม่ต่อเนื่อง pdf ของมันของ คือ

$$P(x\ ;\ \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\ \lambda^{x}}{x!} & x = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นตัวแปรชนิดไม่ต่อเนื่อง และมีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก

λ เป็นค่าเฉลี่ยของผล (Success) ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหรือขอบเขตที่กำหนด

e คือค่าคงที่ ซึ่งได้มาจากผลบวกของ

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} = 2.71828$$

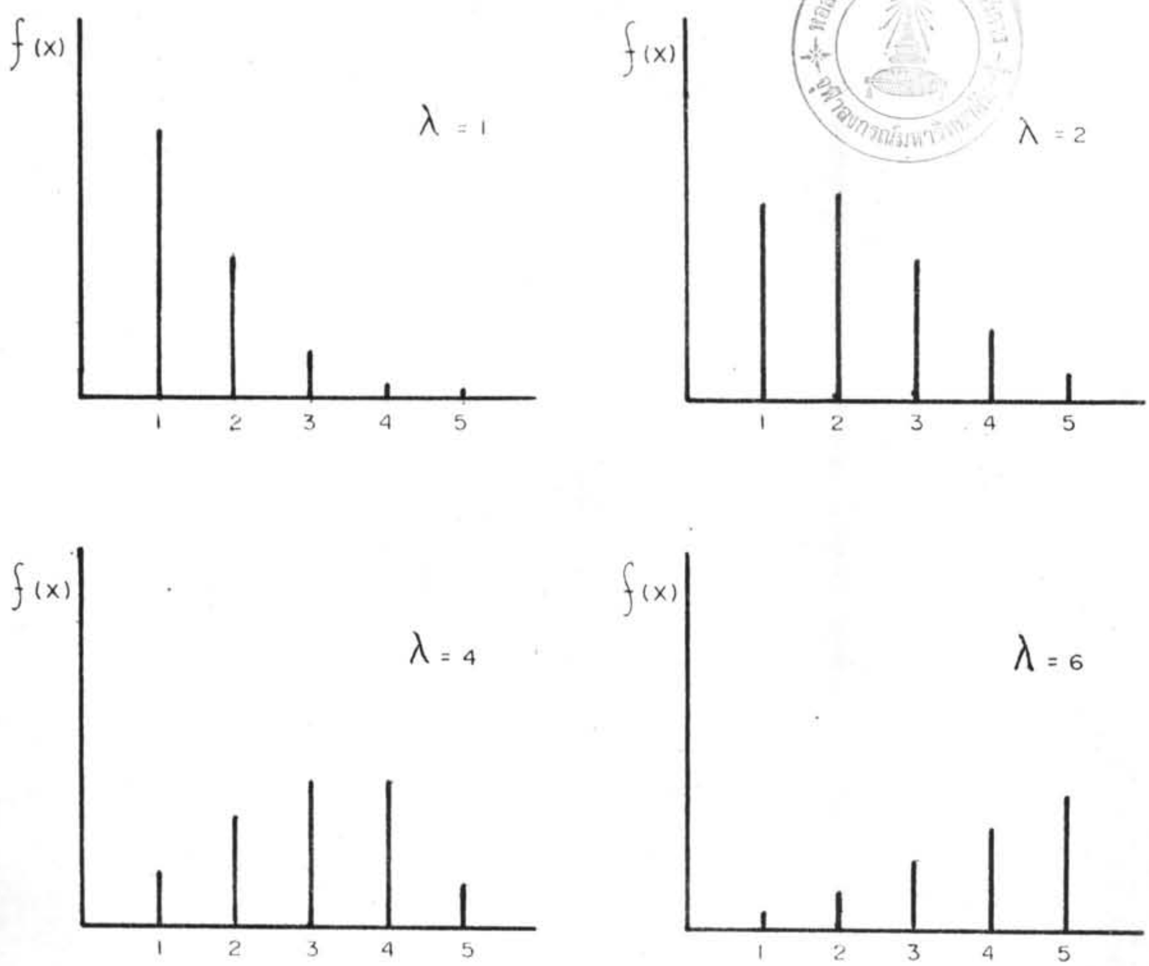
ปัวซองมี Parameter 1 ตัว คือ λ

Best Estimator of λ $=$ $\bar{X}$ $=$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Expected Value μ $=$ λ

Standard Deviation σ $=$ $\sqrt{\lambda}$

การกระจายแบบปัวซองจะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับค่าของ Parameter λ ดังแสดงในรูป 2.1



รูป 2.1 ลักษณะการกระจายแบบปัวซองที่มีค่า λ ต่าง ๆ กัน

2.1.7.2 Exponential Distribution (1) เป็นการกระจายแบบต่อเนื่อง ถ้าเหตุการณ์หนึ่งเกิดขึ้นในช่วงระยะเวลาสั้น ๆ และเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นนี้เป็นอิสระไม่ขึ้นกับเหตุการณ์อื่นแล้ว การกระจายของช่วงเวลาระหว่างเหตุการณ์นี้จะมีการกระจายแบบ Exponential ยกตัวอย่าง เช่น ในแถวการรอคอย ค่าอัตราการมาของผู้รับบริการมีการกระจายแบบปัวซอง ซึ่งมี Mean $= \lambda$ ดังนั้น การกระจายของเวลาระหว่างผู้รับบริการแต่ละคนจะมีการกระจายเป็นแบบ Exponential ซึ่งมี Mean $= \theta$ เมื่อ $\theta = \frac{1}{\lambda}$

Probability Density Function ของการกระจายแบบ Exponential เขียนได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \; ; \; \lambda > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

เมื่อ x เป็นตัวแปรชนิดต่อเนื่อง มีค่าเป็นเลขจำนวนจริงที่มากกว่า 0

$\lambda = \frac{1}{\theta} =$ ส่วนกลับของเวลาระหว่างผล (Success) ที่เกิดขึ้นแต่ละครั้ง

$e = 2.71828$

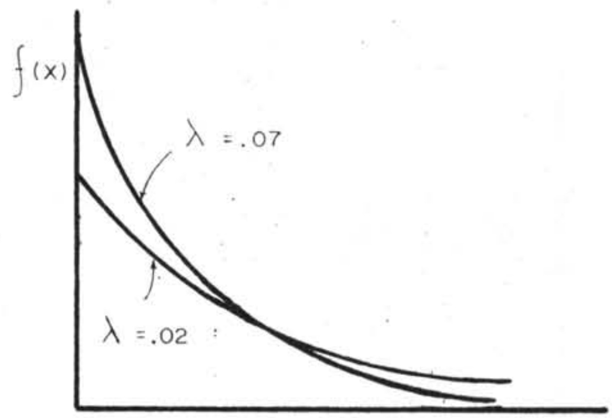
Exponential มี Parameter 1 ตัว คือ λ

Best Estimator of $\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$

Expected Value $\mu = \frac{1}{\lambda}$

Standard Deviation $\sigma = \frac{1}{\lambda}$

การกระจายแบบ Exponential จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับค่าของ Parameter ดังแสดงในรูป 2.2



รูป 2.2 ลักษณะการกระจายแบบเอ็กซโพเนนเชียลที่มีค่า λ ต่าง ๆ กัน

2.1.7.3 Normal Distribution[1] เป็นการกระจายที่สำคัญแบบหนึ่งที่ใช้กันอย่างแพร่หลาย การกระจาย Normal เป็นแบบต่อเนื่อง มีลักษณะรูปร่างคล้ายระฆังคว่ำ แบบสมมาตร pdf ของการกระจายแบบ Normal คือ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} & -\infty \leq x \leq \infty \; ; \; \sigma > 0 \; ; \; -\infty \leq \mu \leq \infty \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

เมื่อ x = ตัวแปรชนิดต่อเนื่อง มีค่าระหว่าง $-\infty$ ถึง ∞

μ = ค่าเฉลี่ยของตัวแปร (Mean)

σ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

π = 3.1415926

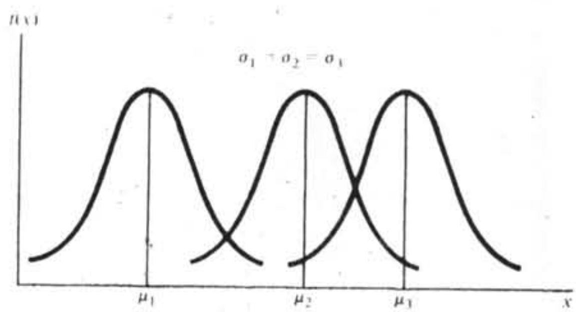
e = 2.71828

การกระจายแบบ Normal มี Parameter 2 ตัว คือ μ และ σ

Best Estimator $\mu = \bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

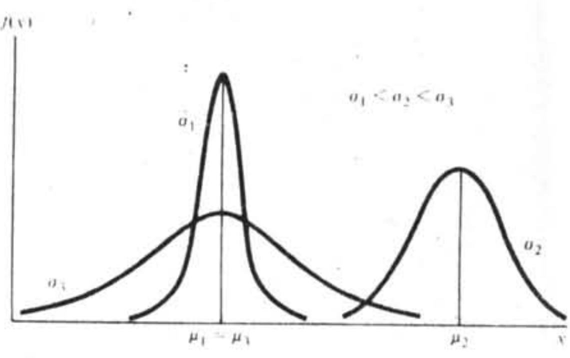
Standard Deviation $\sigma = S = \left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$

การกระจายแบบ Normal จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างออกไปขึ้นอยู่กับค่า Parameter μ และ σ ดังแสดงในรูป 2.3



(a)

The normal pdf for different values of (a) μ and (b) μ and σ.



(b)

รูป 2.3 ลักษณะการกระจายแบบปกติที่มีค่า μ และ σ ต่างกัน

Standard Normal Distribution

การคำนวณค่า pdf ของการกระจายแบบ Normal สำหรับค่า μ และ σ แต่ละค่าจากสมการข้างต้นกระทำได้ไม่สะดวก โดยทั่วไปจึงนิยมใช้การแปลงการกระจายแบบ Normal นั้น ๆ มาเป็น Standard Normal Distribution โดยคำนวณหาค่า z แล้วไปดูค่า z ที่คำนวณได้จากตาราง Standard Normal Distribution ซึ่งแสดงไว้ในตารางที่ 1 ในภาคผนวก

Standard Normal Distribution คือการกระจายแบบ Normal ซึ่งมีค่า μ = 0 และ σ = 1 ดังนั้น pdf คือ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty \leqslant z \leqslant \infty$$

เมื่อ $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

2.1.7.4 Gamma Distribution (3) เป็นการกระจายแบบต่อเนื่องที่สำคัญอีกแบบหนึ่ง และมีบทบาทมากในการจำลองแบบ การกระจายแบบนี้ถูกกำหนดโดย Parameter 2 ตัว คือ α และ β, α คือ Shape Parameter และ β คือ Scale Parameter

pdf ของการกระจายแบบ Gamma คือ

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{(\alpha-1)!}$$

เมื่อ α = Shape Parameter

β = Scale Parameter มีค่าเป็นเลขจำนวนจริงที่มากกว่า 0

x = เป็นตัวแปรชนิดต่อเนื่อง มีค่าเป็นเลขจำนวนจริงที่มากกว่า 0

$(\alpha - 1)!$ = Gamma Function = $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

e = 2.71828

Gamma Distribution มี Parameter 2 ตัว คือ α และ β

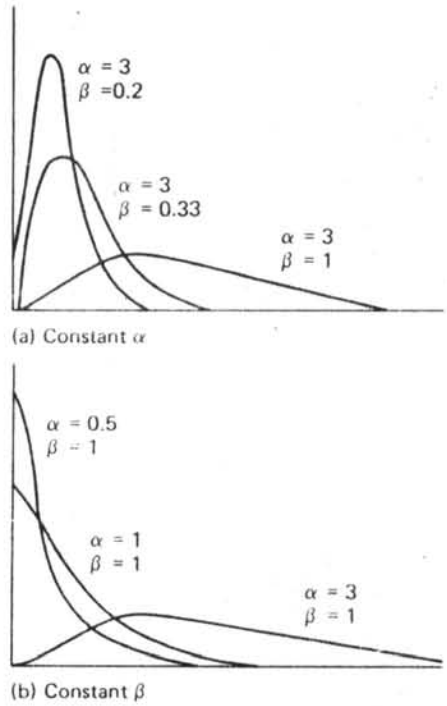
Best Estimator of α = $\frac{\bar{X}^2}{s^2}$

$$\beta = \frac{\bar{X}}{s^2}$$

Expected Value $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$

Standard Deviation $\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$

การกระจายแบบ Gamma จะมีรูปร่างลักษณะแตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับ Parameter α และ β ดังแสดงในรูป 2.4



รูป 2.4 ลักษณะการกระจายแบบแกมม่าที่มีค่า α และ β ต่าง ๆ กัน

การกระจายแบบ Gamma นี้ มีความสัมพันธ์ใกล้ชิดกับการกระจายอื่น ๆ มาก ตัวอย่าง เช่น ถ้า $\alpha = 1$ และ β เป็นค่าคงที่ สมมุติว่าเป็น λ การกระจายแบบ Gamma ก็คือ การกระจายแบบ Exponential ซึ่งมี $\mu = \frac{1}{\lambda}$ ถ้า $\beta = 1$ และ α มีค่ามาก การกระจายแบบ Gamma จะเข้าใกล้การกระจายแบบ Normal

2.1.8 <u>การทดสอบภาวะสารูปสนิทสุด</u> (Goodness of Fit)

ในการทดลองต่าง ๆ บางครั้งจำเป็นจะต้องทราบว่า ข้อมูลมีการกระจายเช่นไร การทดสอบภาวะสารูปสนิทสุด คือการตรวจสอบข้อมูลที่ได้จากการทดลองว่ามีการกระจายแบบ การกระจายทางทฤษฎี (Theoretical Distribution) ตามที่ได้ตั้ง

สมมุติฐานไว้หรือไม่ โดยใช้ระดับความมีนัยสำคัญ (Significant Level) ตามที่กำหนดไว้ การทดสอบภาวะสารูปสนิทสุดอาจกระทำได้หลายวิธี แต่วิธีที่แพร่หลายและนิยมใช้กันมากได้แก่ การทดสอบ Chi Square ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดสมมุติฐานว่าข้อมูลมาจากการกระจายทางทฤษฎีแบบใด
2. นำข้อมูลมารวบรวมหาความถี่สังเกตการณ์ (O_i) ในช่วงต่าง ๆ
3. คำนวณหาค่า Probability ของตัวแปรในช่วงต่าง ๆ โดยมี Parameter ของการกระจายซึ่งได้มาโดยการประมาณค่าจากข้อมูล
4. คำนวณหาความถี่คาดหมายทางทฤษฎี (E_i) ซึ่งหาได้จาก

$$E_i = nP_i$$

เมื่อ n = จำนวนข้อมูลทั้งหมด

P = Probability ซึ่งได้จากข้อ 3

5. คำนวณหาค่า Chi Square จากสูตร

$$\chi^2_{test} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

6. หา Degree of Freedom จากสูตร

$$\nu = k - r - 1$$

k = จำนวนช่วงทั้งหมดของตัวแปร

r = จำนวน Parameter ที่ต้องประมาณค่าจากข้อมูล

7. เปิดตาราง Chi Square (แสดงไว้ในตารางที่ 2 ในภาคผนวก)

ถ้าค่าของ $\chi^2_{test} < \chi^2_{(\nu, \alpha)}$ จึงยอมรับได้ว่าข้อมูลมาจากการกระจายทางทฤษฎีที่ได้ตั้งสมมุติฐานไว้ โดยมีนัยสำคัญเท่ากับ α

หมายเหตุ[1] เพื่อความถูกต้องในการทดสอบค่าของ E_i ที่นำมาคำนวณในสูตร ในข้อ 5 จะต้องมีค่ามากกว่า 5 ถ้า E_i มีค่าน้อยกว่า 5 ให้รวมค่าของ E_i เข้ากับค่าของ E_i ถัดไปจนกว่าค่ามากกว่า 5

2.2 ทฤษฎีการจำลองแบบ[3]

ในปัจจุบันปัญหาทางด้านบริหารมีความสลับซับซ้อนมากขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งระบบที่ดำเนินงานโดยบุคคล ความซับซ้อนเหล่านี้มีสาเหตุมาจากความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยงานต่าง ๆ ซึ่งตั้งขึ้นเพื่อประสานงานหรือร่วมกันดำเนินงานไปตามวัตถุประสงค์ของระบบ และเป็นความจริงอย่างหนึ่งว่า เมื่อระบบใดถูกเปลี่ยนแปลงแก้ไข ณ จุดใดจุดหนึ่ง ย่อมมีผลกระทบกระเทือนไปถึงส่วนอื่น ๆ ของระบบนั้น ๆ ด้วย เหตุนี้เทคนิคของการวิเคราะห์ระบบจึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อช่วยให้นักบริหารได้เข้าใจและศึกษาถึงปัญหาที่เกิดขึ้นได้อย่างแท้จริง สามารถแก้ไขข้อบกพร่องได้อย่างถูกต้องมีประสิทธิภาพ ความเจริญก้าวหน้าด้านวิทยาการทางคอมพิวเตอร์ ได้มีส่วนช่วยให้เทคนิคของการจำลองแบบเป็นที่แพร่หลาย และนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาที่สลับซับซ้อนดังกล่าว ซึ่งไม่สามารถจะแก้ไขได้ด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์

การจำลองแบบ (Simulation) คือ ขบวนการของการจัดสร้างแบบจำลองขึ้นเพื่อเลียนแบบระบบจริงและทำการทดลองผลจากแบบจำลองนั้น ด้วยจุดประสงค์ที่จะเข้าใจพฤติกรรมของระบบ หรือเพื่อที่จะหาแนวทางของการแก้ปัญหา หรือการดำเนินงานของระบบภายใต้ข้อกำหนดที่วางไว้

แบบจำลอง (Model) หมายถึง หุ่น ระบบ หรือแนวความคิดซึ่งอยู่ในรูปใดรูปหนึ่งที่ไม่ใช่รูปแบบที่แท้จริง เพื่อช่วยนักวิเคราะห์ในการอธิบาย ให้ความเข้าใจหรือปรับปรุงระบบ

ระบบ (System) หมายถึง กลุ่มหรือหน่วยงานหลาย ๆ หน่วยที่รวมกันขึ้นเพื่อร่วมประสานงาน หรือปฏิบัติงานตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

วิธี Monte - Carlo (Monte - Carlo Sampling)

วิธีมอนติคาร์โลเป็นพื้นฐานของแนวความคิดของทฤษฎีการจำลองแบบ ซึ่งคิดขึ้นโดย Von Neumann และ Ulan ในระหว่าง ค.ศ.1945 - 1950 โดยได้นำมาใช้แก้ไขปัญหาด้านนิวเคลียร์ ซึ่งเป็นงานลับที่เมืองลอส อลาโมส โดยใช้รหัสว่า มอนติคาร์โล วิธีมอนติคาร์โลได้ถูกนำมาใช้ในการแก้ปัญหาอย่างแพร่หลายและให้ผลเป็นที่น่าพอใจ

เทคนิค Monte-Carlo ใช้การผลิตตัวเลขสุ่มขึ้นแทนค่าความน่าจะเป็นสะสม เพื่อหาค่าตัวแปรของการกระจายของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้นในระบบ การผลิตตัวเลขสุ่มนี้อาจได้มาจากตารางตัวเลขสุ่ม การหมุนวงล้อ หรือ Computer Subroutine ฯลฯ ส่วนการกระจายของเหตุการณ์ต่าง ๆ ได้มาจากการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลอง รายงานต่าง ๆ ในอดีต หรือจากการตั้งเป็นการกระจายทางทฤษฎี (Theoretical Distribution)

ขั้นตอนของเทคนิค Monte-Carlo มีดังนี้

1. สร้างสมการ ตาราง หรือกราฟของการกระจายต่าง ๆ ของระบบในรูปของความน่าจะเป็นสะสม ถ้าเป็นกราฟจะมีค่าของตัวแปรอยู่ในแนวแกน x และค่าของความถี่สะสมอยู่ในแนวแกน y
2. ผลิตตัวเลขสุ่มมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1
3. นำค่าตัวเลขสุ่มในข้อ 2 กำหนดเป็นค่าความน่าจะเป็นสะสม แล้วนำมาหาค่าของตัวแปรตามความสัมพันธ์ในข้อ 1
4. ค่าตัวแปรที่ได้ในข้อ 3 คือค่าที่ถูกเลือกขึ้นเพื่อแทนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในการจำลองแบบ
5. กลับไปเริ่มต้นทำข้อ 2 ถึงข้อ 4 ใหม่ จนได้จำนวนครั้งของการจำลองแบบตามต้องการ

การจำลองแบบมักจะมีปัญหาเกิดขึ้นเสมอว่า การกระจายต่าง ๆ ที่ใช้แทนเหตุการณ์ของระบบนั้นควรจะใช้ Empirical Distribution หรือ Theoretical Distribution ซึ่งการที่จะใช้ Distribution แบบใดมีผลต่อการจำลองแบบมาก ดังนั้น ก่อนที่จะกำหนดว่าจะใช้ Distribution แบบใด ควรที่จะพิจารณาเหตุผล 3 ประการ

1. Empirical Data เป็นข้อมูลที่ได้จากเหตุการณ์ที่ได้มาจากการทดลอง หรือข้อมูลในอดีต ซึ่งบางครั้งการกระจายของเหตุการณ์ต่าง ๆ นี้อาจจะเปลี่ยนแปลงไปตามกาลเวลา ดังนั้น การใช้ Empirical Distribution จึงให้ผลของการจำลองแบบที่มีผลใช้ได้ในช่วงเวลาสั้น ๆ (ตราบเท่าที่การกระจายไม่เปลี่ยนแปลง)
2. การใช้ Theoretical Distribution จะมีความสะดวกในการศึกษาพฤติกรรมของระบบเมื่อ Parameter ของการกระจายบางตัวเปลี่ยนค่าไป หรืออีกนัยหนึ่งคือ สะดวกในการทดสอบ Sensitivity
3. โดยทั่วไปการใช้ Theoretical Distribution จะประหยัด Computer Time และ Computer Storage

จากเหตุผลทั้ง 3 ประการ จึงพอสรุปได้ว่าถ้าเราสามารถใช้ Theoretical Distribution ได้ประสิทธิภาพของการจำลองแบบจะมีมากกว่า

2.3 <u>การผลิตตัวเลขสุ่ม</u> (Generation of Random Numbers)

ในการจำลองแบบจำเป็นต้องผลิตตัวเลขสุ่มขึ้นเพื่อใช้หาค่าตัวแปรของการกระจายของเหตุการณ์ต่าง ๆ ในระบบที่จะสมมุติให้เกิดขึ้น ตัวเลขสุ่ม คือ ตัวเลขที่มีค่าระหว่าง 0 ถึง 1 ซึ่งมีการกระจายเสมอกัน (Uniform Distribution) ในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์การผลิตตัวเลขสุ่มส่วนใหญ่จะใช้วิธีทางเลขคณิต ซึ่งมีอยู่หลายวิธีด้วยกัน แต่วิธีที่นิยมใช้กันมากที่สุดได้แก่ Multiplicative Congruent Method เพราะใช้หน่วยความจำและเวลาในการคำนวณน้อยกว่า วิธีดังกล่าวอาศัยความสัมพันธ์ของ

$y = x \pmod{m}$; เมื่อ y, x และ m เป็นเลขจำนวนเต็ม

ความสัมพันธ์ของสมการข้างต้นหมายความว่า ผลลัพธ์ของ $(x - y)$ จะเป็นเลขจำนวนเต็มที่สามารถหารด้วย m ลงตัว $(0 \leqslant y \leqslant m)$ นั่นคือ $(x - y) = km$ เมื่อ k เป็นเลขจำนวนเต็ม เช่น $2 = 92 \pmod{3}$ เพราะว่า $(92 - 2)/3 = 30$ ซึ่ง 30 เป็นเลขจำนวนเต็ม

ในการผลิตตัวเลขสุ่มกำหนดให้ความสัมพันธ์เป็น

$x_{i+1} = ax_i \pmod{m}$; เมื่อ a และ m เป็นเลขบวก

จากสมการอธิบายได้ว่า นำเอาผลคูณของ a และตัวเลขสุ่มเดิม(x_i) ไปหารด้วย m แล้วนำเอาเศษของผลหารกำหนดเป็นตัวเลขสุ่มใหม่ (x_{i+1})

ในทางปฏิบัติจำเป็นต้องกำหนดค่าเริ่มต้น x_o, ตัวคูณ(a), และ Modulus (m) การกำหนดค่าเริ่มต้นต่าง ๆ นี้มีความสำคัญ เพราะแต่ละค่าเริ่มต้นต่าง ๆ ที่กำหนดขึ้นจะให้จำนวนตัวเลขสุ่มได้จำนวนจำกัด (เนื่องจากตัวเลขจะกลับมาซ้ำของเดิม)

การเลือกค่าของ m ขึ้นอยู่กับระบบคอมพิวเตอร์ที่ใช้ โดยกำหนดให้เท่ากับจำนวน Computer Word ในเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้เลขฐาน 2 m จึงมีค่าเท่ากับ 2^b เมื่อ b เป็นจำนวนบิท (bit) ใน Computer Word ถ้ากำหนดค่าของ a และ x_o ที่เหมาะสมแล้ว จำนวนของตัวเลขสุ่มที่มากที่สุดที่ไม่ซ้ำของเดิม(p) จะเท่ากับ

$$P = 2^{b-2} = \frac{m}{4} \qquad \text{เมื่อ} \quad b > 2$$

การเลือกค่า a ควรจะเป็นตัวเลขมีจำนวนหลักเท่ากับ 5 หรือมากกว่า และต้องไม่ประกอบด้วยเลข 0 หรือเลข 1 ที่เรียงต่อกันจำนวนมาก โดยมีความสัมพันธ์

$$a = 8T \pm 3 \qquad \text{เมื่อ } T \text{ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ}$$

การเลือกค่า x_o ควรจะเป็นเลขที่มีจำนวนหลักน้อยกว่า 9 ตำแหน่ง และเป็น

เลขจำนวนเต็มบวกที่ไม่ใช่เลขคี่ ขั้นตอนในการผลิตตัวเลขสุ่ม มีดังนี้

1. กำหนดค่า x_0
2. คูณ x_0 ด้วยค่าของ a
3. คูณผลคูณในข้อ 2 ด้วย $1/m$ (ใช้การคูณเพื่อประหยัดเวลาคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์)
4. กำหนดให้ส่วนทศนิยมในข้อ 3 เป็นตัวเลขสุ่มที่มีค่า 0 ถึง 1
5. ตัดจุดทศนิยมในข้อ 4 ออก แล้วกำหนดให้เป็น x_0 แล้วย้อนกลับไปเริ่มต้นข้อ 2 ใหม่เรื่อยไปจนได้จำนวนตัวเลขสุ่มตามต้องการ

2.4 <u>การผลิตตัวแปรสุ่ม</u> (Generation of Random Deviates)

2.4.1 <u>การกระจายเอ็กซโพเนนเชียล</u>

pdf ของเอ็กซโพเนนเชียล คือ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 , \lambda > 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ดังนั้น cdf ของเอ็กซโพเนนเชียล คือ

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

ในการผลิตตัวเลขสุ่ม กำหนดให้ Random Number (RN) เท่ากับ F(x)

$$RN = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

จากการแก้สมการข้างต้นหาค่า x จะได้

$$x = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{1 - RN}\right) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{RN}\right)$$

$$x = -\theta \ln(RN) \qquad \text{เมื่อ } \theta = \frac{1}{\lambda}$$

2.4.2 การกระจายแบบแกมม่า (Gamma Distribution)

pdf ของการกระจายแบบแกมม่า คือ

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha} x^{(\alpha-1)} e^{-\beta x}}{(\alpha-1)!}$$

การหาตัวแปรสุ่มของการกระจายแบบแกมม่า ซึ่งมีพารามิเตอร์ β และ α จะอาศัยหลักของ Convolution(4) ด้วยการผลิตตัวแปรสุ่มแบบเอ็กซโพเนนเชียล ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ β ทั้งหมด α ตัวแปร นำมาบวกกันจะเป็นตัวแปรสุ่มของการกระจายแบบแกมม่า ตัวอย่างเช่น การกระจายแบบแกมม่า ซึ่งมีค่า β = 0.1 และ α = 3 เลือกตัวเลขสุ่มมา 3 ค่า RN_1 = 0.09656, RN_2 = 0.96657 และ RN_3 = 0.64842 นำค่าตัวเลขสุ่มทั้ง 3 มาหาค่า x ในสมการ

$$x = -\frac{1}{\beta} \ln(RN)$$

ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น x = 23.38, x_2 = 0.34 และ x_3 = 4.33 ดังนั้น ตัวแปรสุ่มของการกระจายแบบแกมม่าจะเท่ากับ $x_1 + x_2 + x_3$ = 28.05

2.4.3 การกระจายแบบปกติ (Normal Distribution)

เนื่องจากการหาตัวแปร x ไม่สามารถหาได้จาก $x = F^{-1}(RN)$ การผลิตตัวเลขสุ่มของการกระจายแบบปกติจึงใช้ทฤษฎีของ Central limit มาช่วย โดยการผลิตตัวเลขสุ่ม n ตัว สมมุติคือ $RN_1, RN_2, RN_3 \ldots, RN_n$ และให้

$$T = RN_1 + RN_2 + RN_3 \ldots + RN_n$$

ดังนั้น

$$E(T) = n/2$$

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{n} Var(RN_i) = n/12$$

โดยให้ T มีการกระจายเป็นแบบปกติ ซึ่งมี Mean = n/2 และ Variance = n/12

ดังนั้น

$$Z = \frac{T - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

ถ้ามีการกระจายแบบ Normal ซึ่งมี Mean = μ และ Variance = σ^2 ซึ่งต้องการหาตัวแปร x ซึ่งสอดคล้องกับตัวเลขสุ่มข้างต้น สามารถหาได้จาก

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = Z = \frac{T - n/2}{\sqrt{n/12}}$$

ดังนั้น

$$x = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} (T - n/2)$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n/12}} \left(\sum_{i=1}^{n} RN_i - n/2 \right)$$

ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปจะใช้ค่า n = 12 ดังนั้น ตัวแปรสุ่มแบบปกติหาได้จากสมการ

$$x = \mu + \sigma \left(\sum_{i=1}^{12} RN_i - 6 \right)$$

2.4.4 <u>Discrete Distribution</u>

หรือเรียกว่า Tabular Method ใช้ในการผลิตตัวแปรสุ่มที่ไม่สามารถหาการกระจายทางทฤษฎีที่ใกล้เคียงได้ ตัวอย่างเช่น Probability Density Function อันหนึ่ง มีลักษณะดังนี้

x	0	1	2	3
f(x)	.1	.3	.4	.2

คำนวณหา Cumulative Density Function ได้เป็น

x	0	1	2	3
f(x)	.1	.4	.8	1.00

นำมากำหนดช่วงของตัวเลขสุ่มที่จะให้ค่าตัวแปร (x) แต่ละค่าดังนี้ ถ้า

$0 \leqslant RN \leqslant .1$ กำหนดให้ $x = 0$

$.1 < RN \leqslant .4$ กำหนดให้ $x = 1$

$.4 < RN \leqslant .8$ กำหนดให้ $x = 2$

$.8 < RN \leqslant 1.00$ กำหนดให้ $x = 3$

เช่น ถ้าตัวเลขสุ่มมีค่า RN = 0.4565 ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง .4 และ .8 ดังนั้น กำหนดให้ x มีค่าเท่ากับ 2 เป็นต้น