



ทฤษฎีของรูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟา

เราจะแบ่งพิจารณาเส้นสเปกตรัมย่อยของเส้นไฮโดรเจนอัลฟาออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีแรกเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมารบกวน ระดับพลังงานในอะตอมไฮโดรเจน จะแบ่งเป็นระดับย่อยตามทฤษฎีสัมพัทธภาพที่คิดค้นของอีเลกตรอนและการเลื่อนของแลมบ์ ซึ่งจะทำให้ได้เส้นสเปกตรัมย่อยของเส้นไฮโดรเจนอัลฟาออกมา 7 เส้น เรียกว่า เส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์ (fine structure splitting and Lamb shift) อีกกรณีหนึ่ง เมื่ออะตอมไฮโดรเจนอยู่ในสนามไฟฟ้าสถิต ระดับพลังงานในอะตอมจะแบ่งเป็นระดับย่อยตามค่าสนามไฟฟ้าโดยผลสตาร์ค (Stark effect) ทำให้ได้เส้นสเปกตรัมย่อยของเส้นไฮโดรเจนอัลฟาออกมา 15 เส้น เรียกว่า เส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากผลสตาร์ค (Stark components) ต่อจากนั้นจะพิจารณากลไกที่ทำให้เกิดการขยายกว้างของเส้นสเปกตรัมย่อย แล้วจึงรวมเส้นสเปกตรัมย่อยในแต่ละกรณีออกมาเป็นรูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟา

2.1 เส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์

2.1.1 โครงสร้างละเอียดของระดับพลังงานในอะตอมไฮโดรเจน พิจารณาระบบของอีเลกตรอนที่มีมวล m เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v รอบนิวเคลียสที่เป็นโปรตอนภายใต้พลังงานศักย์ $-\frac{e^2}{r}$ ในอะตอมไฮโดรเจนเมื่อไม่มีสนามรบกวนจากภายนอก จะเขียนสมการคลื่นสัมพัทธภาพของดิแรคแทนได้เป็น (Dirac, 1958)

$$H \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\text{เมื่อ } H = \text{ฮามิลโตเนียนของระบบ} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + mc^2\beta - \frac{e^2}{r}$$

$$c = \text{ความเร็วของแสง} = 2.9979 \times 10^{10} \text{ เซนติเมตรต่อวินาที}$$

$$m = \text{มวลของอิเล็กตรอน} = 9.1096 \times 10^{-28} \text{ กรัม}$$

$$e = \text{ประจุของอิเล็กตรอน} = 4.8033 \times 10^{-10} \text{ อีเอสยู}$$

$$r = \text{ระยะห่างจากนิวเคลียสของอิเล็กตรอนหน่วยเป็นเซนติเมตร}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = \text{ค่าคงที่ของพลังค์} = 6.6262 \times 10^{-27} \text{ เออร์กวินาที}$$

$$\vec{p} = \text{โอเปอเรเตอร์โมเมนตัม}$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{ฟังก์ชันคลื่นที่ตำแหน่ง } \vec{r} \text{ เมื่อเวลา } t$$

$$\vec{\alpha}, \beta = \text{โอเปอเรเตอร์ที่ไม่ขึ้นกับ } \vec{p} \text{ และ } \vec{r} \text{ มีคุณสมบัติว่า ถ้า}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (2.2)$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 = \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0 \quad (2.4)$$

และสามารถเขียนแทนด้วยเมทริกซ์

$$\vec{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{และ} \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ส่วนประกอบ (element) แต่ละตัว เป็นรูปย่อที่เขียนแทนเมทริกซ์

$$\vec{\sigma} = \text{เมทริกซ์ที่เขียนแทนโอเปอเรเตอร์สปีน } \vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \hbar \quad (2.5)$$

$$\text{ถ้า } \vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \text{และ} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

เราต้องการหาค่าพลังงานของอิเล็กตรอน E ซึ่งเป็นค่าไอเกน (eigenvalue) ของโอเปอเรเตอร์ H ที่มีฟังก์ชันคลื่นที่ไม่ขึ้นกับเวลา $\psi(\vec{r})$ เป็นเวกเตอร์ไอเกน (eigenvector) โดยแทน

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{iE}{\hbar} t} \quad (2.6)$$

ในสมการ (2.1) แล้วใช้โคออร์ดิเนตทรงกลมในการถอดสมการ จะได้

$$H \psi(\vec{r}) = \left(c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + E_0 \beta - \frac{e^2}{r} \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (2.7)$$

$$\text{เมื่อ } E_0 = \text{พลังงานหยุดนิ่งของอิเล็กตรอน} = mc^2$$

จากคุณสมบัติของเวกเตอร์เราสามารถเขียน

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha_r \left(p_r + i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) + \hbar}{r} \right) \quad (2.8)$$

$$\text{เมื่อ } p_r = \text{โอเปอเรเตอร์โมเมนตัมส่วนที่ขึ้นกับ } r = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$\alpha_r = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = \text{โอเปอเรเตอร์โมเมนตัมเชิงมุมของวงโคจร} = \vec{r} \times \vec{p}$$

และนิยามโอเปอเรเตอร์ K ด้วยความสัมพันธ์

$$\hbar K = (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + \hbar) \quad (2.9)$$

เราพบว่า K มีค่าไอเกนเป็น k ซึ่ง

$$k = \pm (j + \frac{1}{2}) \quad (2.10)$$

$$\text{เมื่อ } j = \text{เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมทั้งหมด} = \begin{cases} \ell + s & ; \ell > 0 \\ \frac{1}{2} & ; \ell = 0 \end{cases}$$

$$\ell = \text{เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมของวงโคจร} = 0, 1, 2, \dots$$

$$s = \text{เลขควอนตัมโมเมนตัมเชิงมุมของสปิน} = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

นอกจากนี้เรายังพบว่า K สามารถคอมมิวต์ (commute) กับ H นั่นคือ
โอเปอเรเตอร์ทั้งสองมีฟังก์ชันไอเกนเหมือนกัน สมการ (2.8) จะเขียนได้เป็น

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = \alpha_r (p_r + i \frac{\beta \hbar k}{r}) \quad (2.11)$$

เมื่อแทนในสมการ (2.7) จะได้

$$(c\alpha_r p_r + \frac{i\hbar c}{r} \alpha_r \beta k + E_0 \beta - \frac{e^2}{r}) \psi(r) = E \psi(r) \quad (2.12)$$

เมื่อ $\psi(r) =$ ฟังก์ชันคลื่นส่วนที่ขึ้นกับ r สำหรับฟังก์ชันคลื่นส่วนที่ขึ้นกับมุมและสปิน
จะหาได้โดยพิจารณาว่า $\psi(\vec{r})$ เป็นฟังก์ชันไอเกนของ K

การแก้สมการ (2.12) เราจะแทน α_r และ β ด้วยเมทริกซ์ขนาด 2×2

$$\alpha_r = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

และเขียน $\psi(r)$ ในรูปของเมทริกซ์คอลัมน์

$$\psi(r) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} F(r) \\ G(r) \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

เมื่อแทนในสมการ (2.12) จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล 2 สมการคือ

$$(\hbar c)^{-1} (E - E_0 + \frac{e^2}{r}) F + \frac{dG}{dr} + \frac{k}{r} G = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{และ } (\hbar c)^{-1} (E + E_0 + \frac{e^2}{r}) G - \frac{dF}{dr} + \frac{k}{r} F = 0 \quad (2.15)$$

$$\text{เราแทน } B = \frac{E + E_0}{\hbar c}, \quad A = \frac{E_0 - E}{\hbar c}, \quad D = \sqrt{AB} \quad \text{และ } \rho = Dr$$

ในสมการทั้งสองจะได้

$$\left(\frac{A}{D} - \frac{\alpha}{\rho}\right) F - \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{k}{\rho}\right) G = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{และ } \left(\frac{B}{D} + \frac{\alpha}{\rho}\right) G - \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{k}{\rho}\right) F = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \text{ค่าคงที่โครงสร้างละเอียด} = \frac{e^2}{\hbar c}$$

เราจะหาคำตอบที่อยู่ในรูปของอนุกรม

$$F(\rho) = e^{-\rho} \sum_{v=0}^{\infty} a_v \rho^{s+v} \quad (2.18)$$

$$\text{และ } G(\rho) = e^{-\rho} \sum_{v=0}^{\infty} b_v \rho^{s+v} \quad (2.19)$$

โดยแทนค่ากลับเข้าไปในสมการ (2.16) และ (2.17) แล้วเทียบให้สัมประสิทธิ์ของเทอม ρ^{s+v-1} เป็นศูนย์ จะหาค่า s ได้

$$s = (k^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

และหาความสัมพันธ์ระหว่าง a_v กับ b_v ได้

$$a_v \left(-\sqrt{\frac{B}{A}} \alpha + s + v - k \right) = b_v \left(\sqrt{\frac{B}{A}} (s + v + k) + \alpha \right) \quad (2.21)$$

ส่วนค่าของ a_v และ b_v นั้นพบว่า เมื่อ v มีค่าสูงมาก ($\rightarrow \infty$) a_v และ b_v จะมีค่าที่ทำให้อนุกรมประพจน์ตาม $e^{2\rho}$ ซึ่งจะทำให้คำตอบมีค่าอนันต์ที่ตำแหน่งอนันต์ซึ่งไม่ถูกต้อง ดังนั้น คำตอบที่เป็นไปได้จะต้องเป็นผลบวกที่ประกอบด้วย N เทอม โดยที่ $a_{v+1} = b_{v+1} = 0$ เมื่อ $v \geq N$ และทำให้ได้

$$\sqrt{A} a_N = -\sqrt{B} b_N \quad (2.22)$$

เมื่อแทนในสมการ (2.21) โดยให้ $v = N$ จะได้

$$\frac{B - A}{D} \alpha = 2(s + N) \quad (2.23)$$

ซึ่งแทนค่า A , B และ D ได้

$$E = E_0 \left\{ 1 + \alpha^2 \left[N + |k| \sqrt{1 - \alpha^2 k^{-2}} \right]^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

เรานิยามเลขควอนตัมหลัก n ว่า

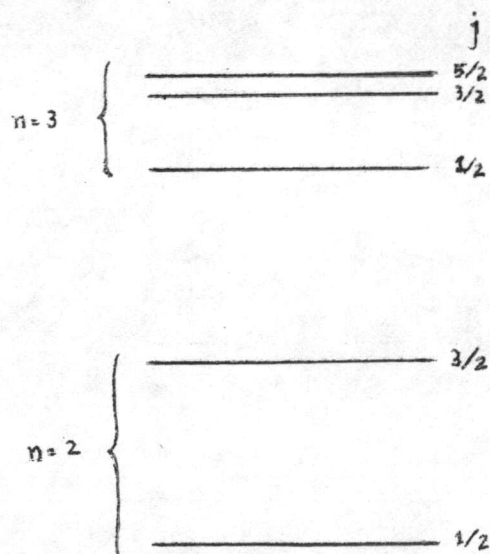
$$n = N + |k| = N + j + \frac{1}{2} \quad \dots (2.25)$$

$$\text{ดังนั้นจึงได้ } E_{nj} = E_0 \left\{ 1 + \alpha^2 \left[(n - j - \frac{1}{2}) + (j + \frac{1}{2}) \sqrt{1 - \alpha^2 (j + \frac{1}{2})^{-2}} \right]^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

เราเขียนผลบวกยกกำลังให้เป็นอนุกรมยกกำลังของ α ทั้งหมด โดยคิดถึงเทอม α^4 จะได้

$$E_{nj} = E_0 - \frac{E_0 \alpha^2}{2n} + \frac{E_0 \alpha^4}{2n^4} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j + \frac{1}{2}} \right) \quad (2.27)$$

เป็นค่าระดับพลังงานของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจน ประกอบด้วย เทอมแรกคือค่าพลังงานหยุดนิ่งของอิเล็กตรอน เทอมที่สองเป็นสัมพัทธ์ของพลังงานในระดับยึดเมื่อไม่คิดสัมพัทธ์ภาพและสปิน (คือพลังงานที่ได้จากสมการคลื่นของชโรดิงเงอร์นั่นเอง) และเทอมที่สามเป็นเทอมแก้สัมพัทธ์ภาพและสปินของอิเล็กตรอน จะเห็นว่าค่าพลังงานในระดับ n แบ่งออกเป็นระดับย่อยตามเลขควอนตัม j ซึ่งมีอยู่ n ค่าโดยไม่คำนึงถึงเลขควอนตัม l ระดับพลังงานที่ $n = 2$ และ $n = 3$ ที่เราสนใจจะแบ่งย่อยออกเป็น 2 และ 3 ค่าตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.1

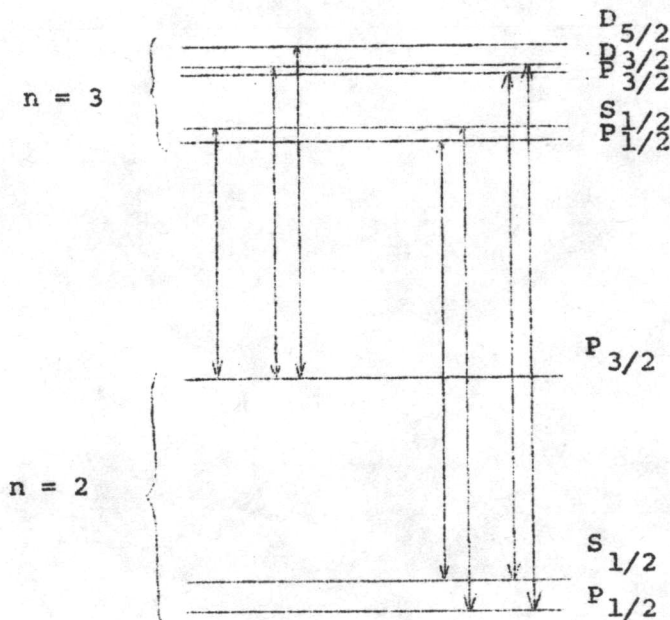


รูปที่ 2.1 แผนภาพพลังงานย่อยในระดับที่ 2 และ 3 ของไฮโดรเจน เนื่องจากโครงสร้างละเอียด

2.1.2 การเลื่อนของแลมบ์ เป็นความแตกต่างของค่าพลังงานในระดับ n ที่มีเลขควอนตัม j เท่ากัน แต่เลขควอนตัม l ต่างกัน ความแตกต่างของค่าพลังงานนี้เป็นผลมาจากอันตรกิริยาของอิเล็กตรอนกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดจากโฟตอนเสมือน (virtual photon) ซึ่งเป็นโฟตอนที่ถูกคายหรือถูกดูดกลืนอีกในช่วงชีวิต Δt ของหลักความไม่แน่นอน (Uncertainty Principle)

$$h\nu(\Delta t) \approx \hbar \quad (2.28)$$

สมการของดิแรคไม่สามารถหาค่าความแตกต่างของพลังงานนี้ได้ ต้องใช้ทฤษฎีทางควอนตัมอิเล็กโทรไดนามิกส์ ซึ่งพบว่า การเลื่อนของแลมบ์ดังกล่าวทำให้ค่าพลังงานในระดับ $n = 2$ และ $n = 3$ แบ่งย่อยออกเป็น 3 และ 5 ค่า ตามลำดับ (Kuhn, 1969) ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แผนภาพพลังงานย่อยในระดับที่ 2 และ 3 ของไฮโดรเจน เนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์ (Kuhn, 1969)

การเปลี่ยนค่าพลังงานระหว่างระดับที่ $n = 2$ และ $n = 3$ ตามกฎการเลือก (selection rule) $\Delta l = \pm 1$ จะทำให้ได้เส้นสเปกตรัมย่อย 7 เส้น ดังแสดงด้วยเส้นโยงในรูปที่ 2.2 เส้นย่อยแต่ละเส้นที่เกิดขึ้นจะมีความแรงไม่เท่ากัน เนื่องจากโอกาสที่จะเกิดไม่เท่ากัน เมื่อเรียงลำดับเส้นตามความยาวคลื่น (จากขวาไปซ้ายในรูปที่ 2.2) พบว่าโอกาสที่จะเกิดเส้นซึ่งบอกเป็นค่า f (f value หรือ oscillator strength) มีค่าตามตารางที่ 2.1 (Zelenka, 1975) ในการรวมเส้นสเปกตรัมย่อยทั้งหมดเข้าด้วยกันเป็นเส้นไฮโดรเจนอัลฟา ค่า f นี้จะเป็นตัวบ่งชี้ความถี่หรือความแรงของแต่ละเส้นย่อยว่ามีตารางที่ 2.1 แสดงค่า f ของเส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์

λ_i (อังสตรอม)	6562.710	6562.725	6562.752	6562.772	6562.852	6562.867	6562.910
f_i	.271474	.113113	.005302	.056559	.488653	.054294	.010605

มากนักน้อยเพียงใด

2.2 เส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากผลสตาร์ก พิจารณาระบบของอะตอมไฮโดรเจนที่อยู่ในสนามไฟฟ้าสถิตที่มีความเข้ม F ใช้สมการคลื่นชโรดิงเงอร์เขียนแทนได้เป็น (Epstein, 1926)

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - U) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.29)$$

เมื่อ $\nabla^2 =$ โอเปอเรเตอร์ลาปลาเซียน $= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ เมื่อ

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$$

$\mu =$ มวลส่วนลด (reduced mass) ของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจน
 $= 9.1046 \times 10^{-28}$ กรัม

$E =$ พลังงานรวมของระบบ

$$U = \text{พลังงานศักย์ของระบบ} = -\frac{e^2}{r} + eFz$$

$$F = \text{ความเข้มของสนามไฟฟ้าที่กระทำในทิศ } \hat{z} \text{ หน่วยเป็นอีเอสยูต่อเซนติเมตร}$$

การถอดสมการจะใช้โคออร์ดิเนตพาราโบลิก $\vec{r}(\xi, \eta, \phi)$ ที่กำหนดโดย

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \phi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}$$

$$\text{เมื่อ } 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$\text{ซึ่งทำให้ได้ } r = \frac{\xi + \eta}{2}$$

$$\text{และ } \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\vec{r}) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\vec{r}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}(\vec{r}) \right]$$

เมื่อแทนในสมการคลื่น (2.29) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\vec{r}) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\vec{r}) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}(\vec{r}) + \frac{\mu}{2\hbar^2} \left[E(\xi + \eta) + 2e^2 - \frac{eF(\xi^2 - \eta^2)}{2} \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.30)$$

เราถอดสมการ (2.30) ด้วยวิธีแยกตัวแปรโดยให้

$$\psi(\vec{r}) = P(\xi) Q(\eta) \frac{\cos}{\sin} (s-1)\phi \quad (2.31)$$

แทนในสมการคลื่น (2.30) จะได้สมการดิฟเฟอเรนเชียล 2 สมการคือ

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dP}{d\xi} + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2} + \frac{u}{\xi} - \frac{(s-1)^2}{4} \frac{1}{\xi^2} - \frac{\mu e}{4\hbar^2} F\xi \right) P = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{และ } \frac{d^2 Q}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dQ}{d\eta} + \left(\frac{\mu E}{2\hbar^2} + \frac{u}{\eta} - \frac{(s-1)^2}{4} \frac{1}{\eta^2} + \frac{\mu e}{4\hbar^2} F\eta \right) Q = 0 \quad (2.33)$$

โดยที่
$$u + u' = \frac{\mu e^2}{\hbar^2} \quad (2.34)$$

เราต้องการหาค่า E และ u ที่จะทำให้ออกสมการ (2.32) และ (2.33) หาค่า P และ Q ได้ โดยมีเงื่อนไขที่ขอบเขตว่า P และ Q จะต้องเป็นค่าที่ไม่เป็นอนันต์ที่ $\xi = 0$ และ $\eta = 0$ และเป็น 0 ที่ $\xi = \infty$ และ $\eta = \infty$ ตามลำดับ

เพื่อแปลงรูปสมการ (2.32) และ (2.33) ให้ง่ายขึ้น เราจะแทน

$$P = \xi^{(s-1)/2} e^{\alpha\xi} X(\xi) \quad (2.35)$$

และ
$$Q = \eta^{(s-1)/2} e^{\alpha\eta} Y(\eta) \quad (2.36)$$

ในสมการ (2.32) และ (2.33) ตามลำดับ เมื่อ $\alpha = \sqrt{\frac{-\mu E}{2\hbar^2}}$ จะได้

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + (2\alpha + \frac{s}{\xi}) \frac{dX}{d\xi} + (\frac{u + s\alpha}{\xi} - \frac{\mu e F}{4\hbar^2} \xi) X = 0 \quad (2.37)$$

และ
$$\frac{d^2 Y}{d\eta^2} + (2\alpha + \frac{s}{\eta}) \frac{dY}{d\eta} + (\frac{u' + s\alpha}{\eta} + \frac{\mu e F}{4\hbar^2} \eta) Y = 0 \quad (2.38)$$

ฟังก์ชัน X , Y และค่า α , u , u' จะขึ้นอยู่กับค่าสนามไฟฟ้า F เราสมมติให้เขียนได้เป็น

$$\alpha = \alpha_0 + F\alpha_1 + F^2\alpha_2 + \dots \quad (2.39)$$

$$u = u_0 + Fu_1 + F^2u_2 + \dots \quad (2.40)$$

$$u' = u'_0 - Fu'_1 - F^2u'_2 + \dots \quad (2.41)$$

$$X = X_0 + FX_1 + F^2X_2 + \dots \quad (2.42)$$

$$Y = Y_0 + FY_1 + F^2Y_2 + \dots \quad (2.43)$$

เทอมที่มีอักษรกลาง (subscript) เป็น 0 หมายถึง เทอมที่ได้จากการถอดสมการคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้ามาบวกรวม ซึ่งจะเห็นได้จากการแทน $F = 0$ ลงไปทั้งหมด

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ในสมการ (2.37) สำหรับฟังก์ชัน X จะได้สมการที่เกิดจากการเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอมที่มี F ยกกำลังเท่ากันออกมาเป็น

$$\frac{d^2 X_0}{d\xi^2} + (2\alpha_0 + \frac{s}{\xi}) \frac{dX_0}{d\xi} + (\frac{u_0 + s\alpha_0}{\xi}) X_0 = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + (2\alpha_0 + \frac{s}{\xi}) \frac{dX_1}{d\xi} + (\frac{u_0 + s\alpha_0}{\xi}) X_1 = -2\alpha_1 \frac{dX_0}{d\xi} - (\frac{u_1 + s\alpha_1}{\xi}) X_0 + \frac{\mu e \xi}{4\hbar^2} X_0 \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_2}{d\xi^2} + (2\alpha_0 + \frac{s}{\xi}) \frac{dX_2}{d\xi} + (\frac{u_0 + s\alpha_0}{\xi}) X_2 = & -2\alpha_1 \frac{dX_1}{d\xi} - (\frac{u_1 + s\alpha_1}{\xi}) X_1 + \frac{\mu e \xi}{4\hbar^2} X_1 - \\ & - 2\alpha_2 \frac{dX_0}{d\xi} - (\frac{u_2 + s\alpha_2}{\xi}) X_0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

และสำหรับฟังก์ชัน Y ก็จะได้สมการออกมาในทำนองเดียวกัน เพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมายของ u_1, u_2 และเทอม $\frac{\mu e}{4\hbar^2}$ เท่านั้น ส่วนค่าพลังงาน E ที่เราต้องการทราบก็จะเขียนได้ในรูป

$$\begin{aligned} E &= \frac{-2\hbar^2}{\mu} \alpha^2 = \frac{-2\hbar^2}{\mu} (\alpha_0 + F\alpha_1 + F^2\alpha_2 + \dots)^2 \\ &= \frac{-2\hbar^2}{\mu} (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 F + (\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2) F^2 + \dots) \end{aligned} \quad (2.47)$$

เทอมแรกเป็นค่าพลังงานเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้าบวกรวม เทอมต่อ ๆ ไปเป็นเทอมแก้ค่าพลังงานอันดับที่ $1, 2, \dots$ ของสนามไฟฟ้ากำลัง $1, 2, \dots$ ตามลำดับ สำหรับอะตอม

ไฮโดรเจนชั้นตรรกิริยาที่อะตอมทำกับสนามไฟฟ้าสถิตที่ไม่แรงนักจะเป็นแบบเชิงเส้น (linear Stark effect) เราคิดเฉพาะเทอมแก๊อันดับที่ 1 ซึ่งเป็นผลของสนามไฟฟ้ากำลังที่หนึ่งได้ ดังนี้

$$E = \frac{-2\hbar^2}{\mu} (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 F) \quad (2.48)$$

ค่า α_0 และ α_1 จะหาได้จากการถอดสมการ (2.44) และ (2.45) สำหรับฟังก์ชัน X และสมการทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชัน Y

พิจารณาสมการ (2.44) ซึ่งเป็นสมการไฮเพอร์จีโอเมตริก จะมีคำตอบเป็นผลบวกอนุกรมยกกำลังซึ่งเขียนแทนได้เป็น

$$X_0 = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \xi^v \quad (2.49)$$

เพื่อให้เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต เราพบว่าคำตอบจะต้องเป็นผลบวกอนุกรมยกกำลังที่มีจำนวนจำกัด ซึ่งทำให้ค่าของ p ในความสัมพันธ์

$$u_0 + s\alpha_0 = -2\alpha_0 p \quad \text{สำหรับฟังก์ชัน } X \quad (2.50)$$

และค่า q ในความสัมพันธ์

$$u'_0 + s\alpha_0 = -2\alpha_0 q \quad \text{สำหรับฟังก์ชัน } Y \quad (2.51)$$

ถูกจำกัดให้มีค่าดังนี้คือ $p, q = 0, 1, 2, \dots$

จากความสัมพันธ์ทั้งสอง เราสามารถหา α_0 ได้โดยแทนค่า u และ u' จากสมการ (2.40) และ (2.41) ตามลำดับ ลงในสมการ (2.34) จะได้

$$\alpha_0 = \frac{-\mu e^2}{2\hbar^2} \frac{1}{p+q+s} ; s = 1, 2, 3, \dots \quad (2.52)$$

ซึ่งทำให้ได้ค่าพลังงานเมื่อไม่มีสนามรบกวนออกมาเป็น

$$E = E_0 = \frac{-\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(p+q+s)^2} \quad (2.53)$$

หรือ

$$E_n = \frac{-\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.54)$$

ในที่นี้ $n = p + q + s$ ก็คือเลขควอนตัมหลักนั่นเอง

สำหรับการหา α_1 เราต้องใช้คำตอบของสมการ (2.44) คือ X_0 แทนทางด้านขวาของสมการ (2.45) ซึ่งเป็นสมการอินโฮโมจีเนียส (inhomogeneous equation) ของสมการประเภทเดียวกับสมการ (2.44) การหา X_1 ในสมการ (2.45) เราต้องจัดสมการ (2.45) ให้อยู่ในรูปเดียวกับสมการ (2.44) ซึ่งจะทำได้ความสัมพันธ์

$$u_1 + (s + 2p)\alpha_1 = \frac{\mu e}{16\hbar^2 \alpha_0^2} \left[(s+p)(p+1) + (s+2p)^2 + (s+p-1)p \right] \quad (2.55)$$

และในทำนองเดียวกัน การหา Y_1 จะทำได้ความสัมพันธ์

$$-u_1 + (s + 2q)\alpha_1 = \frac{-\mu e}{16\hbar^2 \alpha_0^2} \left[(s+q)(q+1) + (s+2q)^2 + (s+q-1)q \right] \quad (2.56)$$

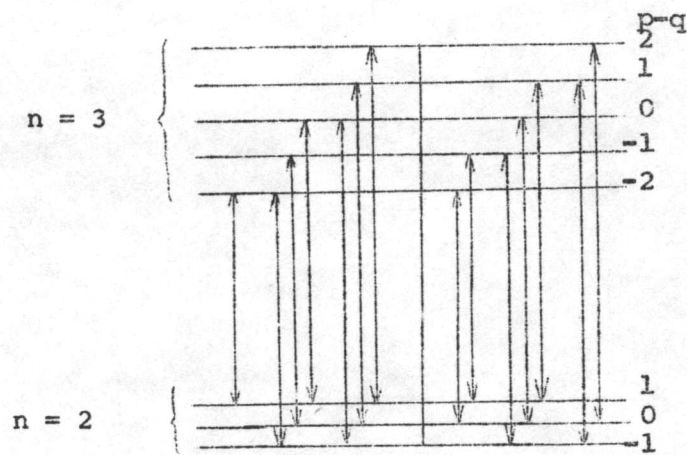
เมื่อเอาสมการ (2.55) และ (2.56) มาบวกกันจะได้

$$\alpha_1 = \frac{3}{16} \frac{\mu e}{\hbar^2 \alpha_0^2} (p - q) \quad (2.57)$$

แทนค่า α_0 และ α_1 จากสมการ (2.52) และ (2.57) ตามลำดับ ลงในสมการ (2.48) จะได้ค่าพลังงานออกมาเป็น

$$E = \frac{-\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} + \frac{3\hbar^2}{2\mu e} n(p - q)F \quad (2.58)$$

จะเห็นว่าเทอมที่สองทางด้านขวาซึ่งเป็นเทอมแก้ค่าพลังงานเนื่องจากผลสตาร์ค จะทำให้ค่าพลังงานในระดับที่ n แบ่งย่อยตามค่า $(p - q)$ เมื่อ p และ q เป็นค่าที่ทำให้ $p + q + s = n$; $s = 1, 2, \dots$ สำหรับระดับที่ $n = 2$ และ $n = 3$ ที่เราสนใจจะพบว่าค่าพลังงานแบ่งออกเป็น 3 ค่า และ 5 ค่า ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แผนภาพพลังงานย่อยในระดับที่ 2 และ 3 ของไฮโดรเจน เนื่องจากผลสตาร์ค

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนค่าพลังงานระหว่างระดับ n กับ n' ใด ๆ ในอะตอมไฮโดรเจน ค่าพลังงานที่แตกต่างไปจากค่าความแตกต่างของระดับพลังงานเดิม (ซึ่งไม่มีสนามไฟฟ้ารบกวน) จะเป็น

$$\Delta E_{nn'} = \frac{3\hbar^2}{2\mu e} \left[n(p - q) - n'(p' - q') \right] F \quad (2.59)$$

ซึ่งคิดเป็นความยาวคลื่นได้

$$\Delta \lambda_k = \frac{3\hbar}{4\pi \mu e c} \lambda^2 k F \quad (2.60)$$

$$\text{เมื่อ } k = n(p - q) - n'(p' - q')$$

สำหรับเส้นไฮโดรเจนอัลฟา $n = 3$, $n' = 2$ เราแทนค่าที่เป็นไปได้ของ p, q, p', q' ที่จะทำให้ $p + q + s = 3$ และ $p' + q' + s' = 2$ หาค่า k ได้ 15 ค่า คือ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8$ ซึ่งจะทำให้มีเส้นสเปกตรัมย่อยของ สตาร์ค (Stark components) เกิดขึ้น 15 เส้น ดังแสดงด้วยเส้นโยงในรูปที่ 2.3 และโอกาสที่จะเกิดเส้นย่อยแต่ละเส้นซึ่งบอกเป็นค่า f มีค่าตามตารางที่ 2.2 (Schlapp, 1928)

ตารางที่ 2.2 แสดงค่า f ของเส้นสเปกตรัมย่อยเนื่องจากผลสตาร์ค

k	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 8
f_k	.291092	.102651	.038653	.122163	.089130	.000848	.000954	.000053

2.3 การขยายกว้างของเส้นไฮโดรเจนอัลฟา

ในการสังเกตเส้นไฮโดรเจนอัลฟา เราไม่สามารถแยกเส้นสเปกตรัมย่อยที่เกิดขึ้นในแต่ละกรณีให้เห็นอย่างชัดเจนได้ นอกจากจะเป็นเพราะอยู่ชิดกันมากแล้ว แต่ละเส้นยังมีการขยายกว้างเนื่องจากสภาวะทางฟิสิกส์ และธรรมชาติของอะตอมไฮโดรเจนที่เป็นแหล่งกำเนิดอีกด้วย สิ่งที่สังเกตเห็นจะเป็นรูปทรงเส้นที่เกิดจากการรวมรูปทรงเส้นย่อยทั้งหมดเข้าด้วยกัน เราจะอธิบายรูปทรงเส้นด้วยฟังก์ชันของรูปทรงเส้น (line profile function) ϕ_ν ที่ความถี่ต่าง ๆ เมื่อ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\nu \, d\nu = 1 \quad (2.61)$$

รูปทรงเส้นที่ได้จะมีลักษณะเฉพาะตัวที่ถูกกำหนดโดยกลไกที่ทำให้เกิดการขยายกว้างของเส้นนั่นเอง ในกรณีของเส้นไฮโดรเจนอัลฟา กลไกที่สำคัญมีอยู่ 3 ประการคือ

2.3.1 การขยายกว้างตามธรรมชาติ (Natural Broadening) จากหลักความไม่แน่นอน ถ้าอะตอมมีช่วงชีวิตจำกัด Δt ที่จะอยู่ในระดับพลังงานหนึ่ง เราไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนของพลังงานในระดับนั้นได้ละเอียดกว่า ΔE ซึ่ง $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}$ เมื่ออะตอมเปลี่ยนระดับพลังงานเส้นสเปกตรัมที่ได้จึงมีการขยายกว้างเกิดขึ้น

พิจารณาการเปลี่ยนพลังงานที่เกิดขึ้นเองระหว่างระดับ U กับระดับ L ใด ๆ ของอะตอม ถ้า U เป็นระดับพลังงานที่มีช่วงชีวิตจำกัด คืออะตอมที่อยู่ในระดับพลังงาน U มีโอกาสที่จะเปลี่ยนไปอยู่ระดับพลังงานอื่นเป็น $\Gamma_U = \sum_{i < U} A_{Ui}$ เมื่อ A_{Ui} เป็นอัตราการคายพลังงานเอง (spontaneous emission rate) จากระดับ U ไประดับ i และสมมติว่า L เป็นระดับที่มีช่วงชีวิตไม่จำกัด คือเมื่ออะตอมอยู่ในระดับพลังงานนี้แล้วจะไม่เปลี่ยนไปอยู่ที่ระดับพลังงานอื่นอีก โอกาสที่จะพบอะตอมอยู่ในระดับพลังงาน U เราเขียนได้เป็น (Mihalas, 1970)

$$P_U(t) = \psi_U^* \psi_U e^{-\Gamma_U t} \quad (2.62)$$

ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นขณะเวลา t ใด ๆ จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \psi_U(\vec{r}, t) e^{-\Gamma_U t/2} &= \psi_U(\vec{r}) e^{-iE_U t/\hbar} e^{-\Gamma_U t/2} \\ &= \psi_U(\vec{r}) e^{-(i\omega_U + \frac{1}{2} \Gamma_U) t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

การเปลี่ยนพลังงานจากระดับ U ไประดับ L จะไม่ทำให้ได้ค่าพลังงาน E_U ที่แน่นอน แต่จะเป็นค่าใด ๆ ที่กระจายอยู่รอบ E_U จากวิชาควอนตัม ขนาดของการแจกแจงค่าพลังงานจะหาได้จากการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันคลื่นที่ขึ้นกับเวลา และการแจกแจงของโอกาสที่จะพบค่าพลังงานหนึ่งก็จะเป็นกำลังสองของขนาดนั้น ซึ่งก็คือสเปกตรัมของพลังงานนั่นเอง ด้วยวิธีนี้เราสามารถหาสเปกตรัมของพลังงานที่มีความถี่เชิงมุม ω ที่เกิดจากการเปลี่ยนระดับพลังงานจาก U ไป L ได้เป็น

$$I_1(\omega) = \frac{\Gamma_U}{2\pi} \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma_U}{2}\right)^2 \right]^{-1} \quad (2.64)$$

$$\text{เมื่อ } \int_{-\infty}^{\infty} I_1(\omega) d\omega = 1$$

ω_0 = ความถี่เชิงมุมอภินาทรระหว่างระดับทั้งสอง

Γ_U อาจเรียกว่าเป็นส่วนกลับของช่วงชีวิตเฉลี่ยในระดับ U

ในทางกลับกัน ถ้า U เป็นระดับพลังงานที่มีช่วงชีวิตไม่จำกัด และ L เป็นระดับพลังงานที่มีช่วงชีวิตเฉลี่ย $\frac{1}{\Gamma_L}$ สเปกตรัมของพลังงานความถี่เชิงมุม ω ที่เกิดจากการเปลี่ยนพลังงานจากระดับ L ไประดับ U ก็เขียนได้เป็น

$$I_2(\omega) = \frac{\Gamma_L}{2\pi} \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma_L}{2}\right)^2 \right]^{-1} \quad (2.65)$$

รูปของสเปกตรัม $I_1(\omega)$ และ $I_2(\omega)$ นี้เรียกว่ารูปทรงลอเรนทซ์ (Lorentz profile) ที่มีการกระจาย Γ_U และ Γ_L ตามลำดับ ถ้าทั้งระดับ U และระดับ L ต่างก็มีช่วงชีวิตจำกัดด้วยกันทั้งคู่ สเปกตรัมของพลังงานความถี่เชิงมุม ω ที่เกิดจากการเปลี่ยนพลังงานระหว่างระดับทั้งสองจะเป็นคอนโวลูชัน (convolution) ของ $I_1(\omega)$ กับ $I_2(\omega)$ (คำอธิบายเรื่องคอนโวลูชันอยู่ในบทที่ 3) คอนโวลูชันระหว่างรูปทรงลอเรนทซ์ 2 รูป จะเป็นรูปทรงลอเรนทซ์ที่มีการกระจายเป็นผลบวกของการกระจายของรูปทรงทั้งสองนั้น (Gray, 1976) คือ

$$I_{UL}(\omega) = \frac{\Gamma_{UL}}{2\pi} \left[(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma_{UL}}{2}\right)^2 \right]^{-1} \quad (2.66)$$

$$\text{เมื่อ } \Gamma_{UL} = \Gamma_U + \Gamma_L$$

ซึ่งก็คือรูปทรงเส้นนั้นเอง เมื่อแปลงให้อยู่ในรูปความถี่ ν จะได้

$$\phi_{UL}(\nu) \equiv I_{UL}(\nu) = \frac{\Gamma_{UL}}{4\pi} \left[(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\Gamma_{UL}}{4\pi}\right)^2 \right]^{-1} \quad (2.67)$$

ค่า Γ_{UL} เป็นตัวแสดงคุณลักษณะประจำรูปทรงเส้นย่อยหนึ่ง ๆ เรียกว่า ค่าคงที่ของความหน่วงตามธรรมชาติ (natural damping factor) สำหรับเส้นสเปกตรัมย่อยของเส้นไฮโดรเจน อัลฟาที่เกิดจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์ เราจะเขียนรูปทรงเส้นย่อยเป็น

$$\phi_i(v) = \frac{\Gamma_i}{4\pi} \left[(v-v_i)^2 + \left(\frac{\Gamma_i}{4\pi}\right)^2 \right]^{-1} ; i = 1, 2, \dots, 7 \quad (2.68)$$

เมื่อ v_i = ความถี่กลางเส้นย่อยที่ i

Γ_i มีค่าตามตารางที่ 2.3 (Zelenka, 1975) เมื่อ λ_i คือค่าความยาวคลื่นที่สอดคล้องกับ v_i

ตารางที่ 2.3 แสดงค่าคงที่ของความหน่วงตามธรรมชาติของเส้นย่อยเนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์

λ_i (อังสตรอม)	6562.710	6562.725	6562.752	6562.772	6562.852	6562.867	6562.910
$\Gamma_i \times 10^{-8}$ (วินาที ⁻¹)	6.9075	1.8960	6.3245	1.8960	6.9075	6.9075	6.3245

รูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟาตามธรรมชาติเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้ารบกวน ก็จะเป็น

$$\begin{aligned} \phi_v &= \sum_{i=1}^7 f_i \phi_i(v) \\ &= \sum_{i=1}^7 f_i \frac{\Gamma_i/4\pi^2}{(v-v_i)^2 + (\Gamma_i/4\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.69)$$

สำหรับเส้นสเปกตรัมย่อยของเส้นไฮโดรเจนอัลฟาที่เกิดจากผลสตาร์ค จะเขียน

รูปทรงเส้นย่อยเป็น

$$\phi_k(v) = \frac{\Gamma_k}{4\pi} \left[(v-v_k)^2 + \left(\frac{\Gamma_k}{4\pi}\right)^2 \right]^{-1} ; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6, \pm 8 \quad (2.70)$$

เมื่อ v_k = ความถี่กลางเส้นสเปกตรัมที่ $k = v_0 + \Delta v_k$; $\Delta v_k = \frac{\Delta \lambda_k}{\lambda_0} v_0$

Γ_k มีค่าตามตารางที่ 2.4 (Zelenka, 1975)

ตารางที่ 2.4 แสดงค่าคงที่ของความกว้างตามธรรมชาติของเส้นย่อยเนื่องจากผลสเปกตรัม

k	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±8
$\Gamma_k \times 10^{-8}$ (วินาที ⁻¹)	12.072	4.398	8.944	7.526	4.204	4.398	7.332	4.204

รูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟาตามธรรมชาติเมื่อมีสนามไฟฟ้าสถิตรบกวนก็จะเป็น

$$\begin{aligned} \phi_v &= \sum_{\substack{k=-8 \\ k \neq \pm 7}}^8 f_k \phi_k(v) \\ &= \sum_{\substack{k=-8 \\ k \neq \pm 7}}^8 f_k \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(v-v_k)^2 + (\Gamma_k/4\pi)^2} \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.3.2 การขยายกว้างเนื่องจากอนุภาคแวดล้อม (Pressure Broadening)

อนุภาคแวดล้อมในที่นี้หมายถึง อนุภาคต่าง ๆ ที่อยู่ภายนอกอะตอม ได้แก่ อะตอมอื่น ๆ ไอออน และอิเล็กตรอน ซึ่งสามารถรบกวนระดับพลังงานของอะตอมขณะที่กำลังให้เส้นสเปกตรัม ทำให้เกิดการขยายกว้างของเส้นเพิ่มขึ้น จะแยกพิจารณาเป็นกรณีดังต่อไปนี้

2.3.2.1 การขยายกว้างอภินาต (Resonance Broadening) เป็น

การขยายกว้างของเส้นเมื่อถูกรบกวน (perturbors) คืออะตอมชนิดเดียวกับที่ให้เส้นสเปกตรัม

ซึ่งก็คืออะตอมไฮโดรเจนด้วยกันนั่นเอง การรบกวนจะมองในแง่ที่ว่าตัวรบกวนเหนี่ยวนำให้เกิด การเปลี่ยนค่าพลังงานในอะตอมทำให้ช่วงชีวิตเฉลี่ยที่จะอยู่ในระดับพลังงานหนึ่งของอะตอมสั้นลง ความไม่แน่นอนของค่าพลังงานในระดับนั้นก็มากขึ้น เมื่อมีการเปลี่ยนระดับพลังงาน เส้นสเปกตรัม ที่ได้ก็จะขยายกว้างขึ้นด้วย พังค์ชันของรูปทรงเส้นจะเขียนได้เป็น

$$\phi_{\nu} = \sum_{i=1}^7 f_i \frac{\Gamma_i' / 4\pi^2}{(\nu - \nu_i)^2 + (\Gamma_i' / 4\pi)^2} \quad (2.72)$$

เมื่อ $\Gamma_i' = \Gamma_i + \Gamma_R$

$\Gamma_R =$ ค่าคงที่ของความหน่วงอภินา (resonance damping factor)
 $= 6.61 \times 10^{-8} N_1$ วินาที⁻¹ (Zelenka, 1975)

$N_1 =$ จำนวนอะตอมของไฮโดรเจนในสถานะพื้นต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

หรือทำนองเดียวกันเมื่ออะตอมอยู่ในสนามไฟฟ้าสถิต

2.3.2.2 การขยายกว้างเนื่องจากอิเล็กตรอน (Electron Broadening)

เป็นการขยายกว้างของเส้นเมื่ออิเล็กตรอนเป็นตัวรบกวน พังค์ชันของรูปทรงเส้นจะมีค่าคงที่ของความหน่วงเนื่องจากอิเล็กตรอน (electron damping factor) Γ_e เพิ่มเข้าไปในทำ ท่างองเดียวกับการขยายกว้างอภินา แต่เนื่องจากการคำนวณค่อนข้างยุ่งยาก ได้ทดลอง หาค่า Γ_e สำหรับเส้นไฮโดรเจนอัลฟาในบรรยากาศดวงอาทิตย์ พบว่ามีค่าน้อยกว่า Γ_R มาก (Jefferies, 1968) ในที่นี้จึงตัดทิ้งไป

2.3.2.3 การขยายกว้างเนื่องจากอนุภาคที่มีประจุ (Stark Broadening)

เป็นการขยายกว้างของเส้นเนื่องจากอนุภาคที่มีประจุ (ไม่รวมอิเล็กตรอน) รอบ ๆ อะตอม เรียงตัวกันในลักษณะที่ทำให้เกิดสนามไฟฟ้ารวม (net electric field) มารบกวนระดับ พลังงานในอะตอม ซึ่งให้ผลเช่นเดียวกับเมื่ออะตอมอยู่ในสนามไฟฟ้าสถิตค่าเดียวกันนั่นเอง แต่เนื่องจากตัวรบกวนมีการจัดเรียงตัวอย่างไม่เป็นระเบียบ ในขณะหนึ่งอาจให้สนามไฟฟ้า รวมมีค่าเท่าไรก็ได้ โอกาสที่จะให้สนามไฟฟ้ารวมค่า F ออกมาสามารถเขียนได้เป็น (Mihalas, 1970)

$$w(\beta) d\beta = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^{\infty} \exp \left[-(x/\beta)^{3/2} \right] x \sin x \, dx \, d\beta \quad (2.73)$$

$$\text{เมื่อ } \beta = \frac{F}{F_0} = \frac{\Delta\lambda_k}{\Delta\lambda_0} = \frac{\Delta v_k}{\Delta v_0}$$

F_0 = สนามปกติของอะตอมที่มีระยะห่างจากกันเฉลี่ย r_0 ซึ่งทำให้เส้นสตาร์ก
ที่ k เลื่อนห่างไป $\Delta\lambda_0$

$$= \frac{e}{r_0^2} = \frac{e}{\left(\frac{4}{3} \pi N\right)^{-2/3}} = 1.25 \times 10^{-9} N^{2/3} \text{ อีเอสยูต่อเซนติเมตร}$$

N = จำนวนอะตอมไฮโดรเจนต่อลูกบาศก์เซนติเมตร

ดังนั้น รูปทรงเส้นย่อยเนื่องจากผลสตาร์ก จะต้องเขียนเป็น

$$\phi_k(\nu) = \int_0^{\infty} \frac{\Gamma_k/4\pi^2}{(\nu-\nu_k)^2 + (\Gamma_k/4\pi)^2} w(\beta) d\beta \quad (2.74)$$

ฟังก์ชัน $w(\beta)$ มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันโฮลท์ซมาร์ค (Holtsmark function)

2.3.3 การขยายกว้างเนื่องจากผลดอปเปลอร์ (Doppler Broadening)

เส้นสเปกตรัมที่มาจากอะตอมที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยพลังงานจลน์เนื่องจากความร้อนจะมีความถี่เปลี่ยนไปตามผลดอปเปลอร์ และเนื่องจากทิศทางการเคลื่อนที่ของอะตอมเป็นไปในนานาทิศ (random motion) จึงเกิดเป็นการขยายกว้างของเส้นขึ้น

พิจารณาแก๊สกลุ่มหนึ่งที่มีอุณหภูมิ T มีการแจกแจงความเร็วเป็นแบบแมกซ์เวลล์ (Maxwellian velocity distribution) ถ้า ξ แทนความเร็วในแนวสายตา โอกาสที่จะพบอะตอมมีความเร็วอยู่ในช่วง $(\xi, \xi + d\xi)$ จะเป็น (Mihalas, 1970)

$$P(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2/\xi_0^2) \frac{d\xi}{\xi_0} \quad (2.75)$$

$$\text{เมื่อ } \xi_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$k = \text{ค่าคงที่โบลท์ซมานน์} = 1.3806 \times 10^{-16} \text{ เออร์กต่อเคลวิน}$$

$$T = \text{อุณหภูมิหน่วยเป็นเคลวิน}$$

$$m = \text{มวลของอะตอมที่กำลังพิจารณาในที่นี้คือ ไฮโดรเจน} = 1.6735 \times 10^{-24} \text{ กรัม}$$

ถ้าเราพิจารณาสเปกตรัมที่มาจากอะตอมในแก๊สกลุ่มนั้นที่ความเร็ว v ในกรอบอ้างอิงที่หยุดนิ่ง อะตอมที่มีความเร็ว ξ จะกำลังดูดกลืนพลังงานความเร็ว $v - \frac{v\xi}{c}$ ในกรอบอ้างอิงของอะตอมเอง รูปทรงเส้นจากอะตอมจะเป็น $\phi(v - \frac{v\xi}{c})$ ดังนั้นที่ความเร็ว v รูปทรงเส้นย่อยเนื่องจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์จะเป็น

$$\phi'_i(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i \left(v - \frac{v\xi}{c} \right) P(\xi) d\xi \quad (2.76)$$

เราสนใจกรณีที่ความเร็วของอะตอมน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ๆ ซึ่งสามารถแทน $\frac{v\xi}{c}$ ด้วย

$\frac{v\xi}{c}$ ได้ เมื่อ v_i เป็นความเร็วที่กลางเส้นย่อยขณะอะตอมหยุดนิ่ง จะได้

$$\begin{aligned} \phi'_i(v) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_i/4\pi^2 \exp(-\xi^2/\xi_0^2)}{\left(v - v_i - \frac{v\xi}{c} \right)^2 + (\Gamma_i/4\pi)^2} \right) \frac{d\xi}{\xi_0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{H(a_i, v_i)}{\Delta v_D} \end{aligned} \quad (2.77)$$

เมื่อ $H(a_i, v_i) = \frac{a_i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{(v_i - y)^2 + a_i^2}$ เรียกว่า ฟังก์ชันไวท์ (Voigt function)

$$y = \frac{v - v_i}{\xi_0}$$

$$a_i = \frac{\Gamma_i}{4\pi\Delta v_D}$$

$$v_i = \frac{v - v_i}{\Delta v_D}$$

$$\Delta v_D = \text{ความกว้างดอปเปลอร์ (Doppler width)} = \frac{\xi_0 v_i}{c}$$

รูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟาที่เกิดเส้นย่อยจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์ ซึ่งรวมการขยายกว้างเนื่องจากผลดอปเปลอร์กับการขยายกว้างตามธรรมชาติ ก็จะเป็น

$$\begin{aligned} \phi_v &= \sum_{i=1}^7 f_i \phi_i'(v) \\ &= \sum_{i=1}^7 \frac{f_i}{\sqrt{\pi}} \frac{H(a_i, v_i)}{\Delta v_D} \end{aligned} \quad (2.78)$$

ถ้าคิดเส้นย่อยที่เกิดจากผลสตาร์ค รูปทรงเส้นย่อยแต่ละเส้นจะเป็น

$$\phi_k'(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(v - \frac{\xi v}{c}) P(\xi) d\xi \quad (2.79)$$

รูปทรงเส้นไฮโดรเจนอัลฟาก็จะเขียนในเทอมของฟังก์ชันไวท์และฟังก์ชันไฮลท์ซมาร์คได้เป็น

$$\phi_v = \sum_{\substack{k=-8 \\ k \neq \pm 7}}^8 \frac{f_k}{\sqrt{\pi} \Delta v_D} \int_0^{\infty} H(a_k, v_k) w(\beta) d\beta \quad (2.80)$$

เมื่อ

$$a_k = \frac{\Gamma_k}{4\pi \Delta v_D}$$

$$v_k = \frac{v - v_k}{\Delta v_D}$$

สำหรับกรณีที่เกิดการขยายกว้างทั้ง 3 ประการพร้อมกัน เราจะเขียนฟังก์ชันของรูปทรงเส้นออกมาเป็น (Zelenka, 1975)

$$\phi_v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{i=1}^7 f_i \frac{H(a'_i, v_i)}{\Delta v_D} \int_0^{\beta_\ell} w(\beta) d\beta + \sum_{\substack{k=-8 \\ k \neq \pm 7}}^8 \frac{f_k}{\Delta v_D} \int_{\beta_\ell}^{\infty} H(a'_k, v_k) w(\beta) d\beta \right] \quad (2.81)$$

$$\text{เมื่อ } a'_i = \frac{\Gamma_i + \Gamma_R}{4\pi\Delta v_D}$$

$$a'_k = \frac{\Gamma_k + \Gamma_R}{4\pi\Delta v_D}$$

ค่า β_ℓ กำหนดจากค่าสนามไฟฟ้าที่จะทำให้ผลสตาร์กมีค่าน้อยจนตัดทิ้งได้เมื่อเทียบกับผลจากโครงสร้างละเอียดและการเลื่อนของแลมบ์เมื่อ $\beta < \beta_\ell$ และกลับกันเมื่อ $\beta > \beta_\ell$