บทที่ 2

ทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวก[1]

เป็นทฤษฎีที่ใช้สำหรับอธิบายการกระจายของนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่วางอยู่ในวัสดุสำหรับลดความเร็วใด ๆ โดยคิดว่านิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนแล้วไปฟุ้งอยู่ในตัวกลางมีอยู่เพียง 2 พวกเท่านั้นคือ นิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลนิวตรอนถือว่านิวตรอนแต่ละพวกมีความเร็วเฉลี่ยเพียงค่าใดค่าหนึ่ง นิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ว เมื่อนิวตรอนเหล่านี้วิ่งไปปรากฏที่ตำแหน่งต่าง ๆ ในตัวกลางจะกลายเป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนที่ตำแหน่งนั้น ดังนั้นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนจะปรากฏอยู่ทุกแห่งในตัวกลาง ส่วนนิวตรอนเร็วมีต้นกำเนิดอยู่เพียงแห่งเดียวคือ ที่ตัวกำเนิดนิวตรอน

ทฤษฎีการฟุ้งของนิวตรอน 2 พวกนี้ เป็นทฤษฎีที่อาศัยสมการ การฟุ้ง (diffusion equation) คำนวณหาฟลักซ์ของนิวตรอนเร็ว (fast flux) แล้วใช้ค่าฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วตามจุดต่าง ๆ ที่คำนวณได้นี้เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอน คำนวณหาเทอร์มาลฟลักซ์ (thermal flux) ออกมาโดยอาศัยสมการ การฟุ้งเช่นเดียวกัน

สมการการฟุ้ง ของระบบ (system) ที่อยู่ในสภาวะสมำเสมอ (steady state) มีค่าเป็น

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = 0 \qquad (2.1)$$

---

[1] Raymond L.Murray, Nuclear Reactor Physics (Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, Inc., 1957), PP.110-111.

เมื่อ D = สัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอน (diffusion coefficient) มีหน่วยเป็น ซ.ม.

ϕ = นิวตรอนฟลักซ์มีหน่วยเป็น นิวตรอน/ตร.ซ.ม. วินาที

Σ_a = ภาคตัดขวางมหภาคสำหรับการดูดกลืน (macroscopic absorption cross section) มีหน่วยเป็น ซ.ม.$^{-1}$

S = อัตราการผลิตนิวตรอนในตัวกลาง 1 ลบ.ซ.ม.ต่อวินาที มีหน่วยเป็นนิวตรอน/ลบ.ซ.ม.วินาที

สำหรับระบบที่ศึกษาอยู่คือ มีตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด วางอยู่ในตัวกลางเอกพันธุ์ที่มีขอบเขตอนันต์ (infinite homogeneous medium) ในการแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียล (2.1) เพื่อหาค่าฟลักซ์ เพื่อความสะดวกเลือกให้ตัวกำเนิดนิวตรอนอยู่ตำแหน่งเดียวกับจุดกำเนิดของ coordinate system ดังนั้นการกระจายของนิวตรอนจากตัวกำเนิด จึงมีความสมมาตรกับจุดกำเนิด (spherical symmetry) ฟลักซ์มีค่าไม่ขึ้นกับมุม สัญญากรของลาปลาซ (Laplacian operator) มีค่าเป็น

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2d}{rdr} \qquad \text{------------(2.2)}$$

2.1.1 <u>กรณีของนิวตรอนเร็ว</u>

เทอม S มีค่าเท่ากับ 0 ณ.ตำแหน่งใด ๆ ยกเว้นตำแหน่งของตัวกำเนิดนิวตรอน สมการการฟุ้งของนิวตรอนเร็วคือ

$$\nabla^2\phi_f - K_f^2\phi_f = 0 \qquad \text{--------------(2.3)}$$

ถ้าให้ $K_f^2 = \frac{1}{L_f^2} = \frac{\Sigma_{af}}{D_f}$

เมื่อ L_f เป็นความยาวของการฟุ้งของนิวตรอนเร็ว

Σ_{af} ในกรณีนี้ไม่เรียกว่าภาคตัดขวางมหภาคสำหรับการดูดกลืน แต่เรียกว่าภาคตัดขวางมหภาคในการทำให้นิวตรอนวิ่งช้าลง (slowing down or removal macroscopic cross sections) เนื่องจากว่า

1) ภาคตัดขวางสำหรับการดูดกลืนนิวตรอนเร็วของวัสดุที่ใช้เป็นตัวลดความเร็วนิวตรอนมีค่าน้อยมาก

2) การเคลื่อนที่ของนิวตรอนเร็ว ส่วนมากเป็นการวิ่งช้าลงเรื่อย ๆ จนกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอนเนื่องจากการชนกับนิวเคลียส

เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) สำหรับหาค่าฟลักซ์ในสมการ (2.3) มีดังนี้

1) ฟลักซ์มีค่าไม่เป็นอนันต์ที่ทุก ๆ จุด

2) จำนวนนิวตรอนทั้งหมดที่วิ่งผ่านพื้นที่ผิวของทรงกลมซึ่งมีรัศมียาวเท่ากับ r ใน 1 วินาที มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที เมื่อรัศมี r ของทรงกลมมีค่าเข้าใกล้ 0

ถ้า J เป็นความหนาแน่นของกระแสนิวตรอน[2] (neutron current density) ที่ผิวของทรงกลมซึ่งรัศมียาวเท่ากับ r มีหน่วยเป็นนิวตรอน/ตร.ซ.ม. วินาที เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้เป็น

$$\lim_{r \to 0} 4\pi r^2 J = a$$

เมื่อ a = จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอนใน 1 วินาที

$\vec{J} = -D\vec{\nabla}\phi$ จากกฎของฟิค (Fick's law)

นำค่า ∇^2 ในสมการ (2.2) แทนลงในสมการ (2.3) แล้วใช้เงื่อนไขทั้ง 2 ข้อช่วยจะได้คำตอบเป็น

$$\phi_f(r) = \frac{a}{4\pi D_f} \cdot \frac{e^{-K_f r}}{r} \quad \text{------------(2.4)}$$

สมการที่ (2.4) นี้ คือค่าฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วรอบ ๆ ตัวกำเนิดนิวตรอนที่ระยะห่างออกไปเท่ากับ r ในตัวกลางที่มีขนาดอนันต์ ซึ่งนำไปใช้ในกรณีที่ตัวกลางมีขนาดไม่เป็น

---

[2]Samuel Glasstone, and Milton C. Edlund, <u>The Elements of Nuclear Reactor Theory</u> (New York : D.Van Nostrand Company, Inc., 1952), pp.92-96

อนันต์ได้ ถ้าตำแหน่ง r ไม่อยู่ใกล้ขอบเขตของตัวกลางมากนัก เนื่องจากค่าฟลักซ์ที่ตำแหน่ง r ใด ๆ นั้นส่วนใหญ่เกิดจากนิวตรอนที่กระจายอยู่ในตัวกลางที่บริเวณใกล้ ๆ กับตำแหน่ง r นั้นเท่านั้น

2.1.2 <u>กรณีของเทอร์มาลนิวตรอน</u>

เทอม s มีค่าเท่ากับ $\Sigma_{af}\phi_f$ ดังนั้นสมการการฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอนคือ

$$\nabla^2\phi_s - K_s^2\phi_s + \frac{\Sigma_{af}\phi_f}{D_s} = 0 \quad \text{-------------} (2.5)$$

ถ้าให้ $K_s^2 = \frac{1}{L_s^2} = \frac{\Sigma_{as}}{D_s}$

เมื่อ L_s เป็นความยาวของการฟุ้งของเทอร์มาลนิวตรอน

เงื่อนไขขอบเขตสำหรับหาค่าเทอร์มาลฟลักซ์ในสมการ (2.5) มีดังนี้

1) ฟลักซ์มีค่าไม่เป็นอนันต์ที่ทุก ๆ จุด

2) จำนวนนิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอน ซึ่งวางอยู่ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ มีค่าเท่ากับจำนวนนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง[3]

เงื่อนไขข้อที่ 2 เขียนได้เป็น

$$\int_0^\infty (\Sigma_{as}\phi_s)4\pi r^2 dr = a \quad \text{-----------} (2.6)$$

เมื่อ $\Sigma_{as}\phi_s$ = จำนวนเทอร์มาลนิวตรอนที่ถูกดูดกลืนอยู่ในตัวกลาง 1 ลบ.ซ.ม. ต่อวินาที

นำค่า ∇^2 จากสมการ (2.2) และ ϕ_f จากสมการ (2.4) แทนลงในสมการ (2.5) แล้วใช้เงื่อนไข 2 ข้อนี้ช่วย จะได้คำตอบเป็น

$$\phi_s(r) = \frac{aK_f^2}{4\pi D_s(K_s^2-K_f^2)r}\left(e^{-K_f r} - e^{-K_s r}\right) \quad \text{------} (2.7)$$

สมการที่ (2.7) นี้คือค่าเทอร์มาลฟลักซ์ ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r

---

[3] Robert V. Meghreblian, and David K. Holmes, <u>Reactor Analysis</u> (New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1960), p.183

2.2 ทฤษฎีการกระเจิงครั้งแรก[4]

เมื่อตัวกำเนิดนิวตรอนวางอยู่ในตัวกลางสำหรับลดความเร็วใด ๆ นิวตรอนที่แผ่ออกจากตัวกำเนิดนิวตรอน จะวิ่งไปในตัวกลางและชนกับนิวเคลียส นิวตรอนที่วิ่งออกมาจากตัวกำเนิดนิวตรอนเป็นนิวตรอนที่มีพลังงานสูง ภาคตัดขวางของการดูดกลืนนิวตรอนเหล่านี้มีค่าน้อย (ภาคตัดขวางของการดูดกลืนเป็นปฏิภาคกลับกับความเร็ว) ดังนั้นเมื่อนิวตรอนวิ่งไปชนนิวเคลียส นิวตรอนจะถูกทำให้กระเจิงไปมากกว่าที่จะถูกดูดกลืน นิวตรอนแต่ละตัวที่ออกมาจากตัวกำเนิดจะมีการชนกับนิวเคลียสหลายครั้งก่อนที่จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน ระยะทางที่นิวตรอนวิ่งได้จากตัวกำเนิดนิวตรอนถึงตำแหน่งที่จะกระเจิงครั้งแรกมีค่ามากเมื่อเทียบกับ ระยะทางที่นิวตรอนวิ่งได้ระหว่างการกระเจิงครั้งแรกกับครั้งที่ 2 หรือระหว่างครั้งที่ 2 กับ 3 และครั้งต่อ ๆ ไป ดังนั้นนิวตรอนเร็วจะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอนใกล้ ๆ บริเวณที่นิวตรอนเร็วชนกับนิวเคลียสครั้งแรก เพราะฉะนั้นจำนวนเทอร์มาลนิวตรอนที่เกิดขึ้นในหนึ่งหน่วยปริมาตรของตัวกลางที่ตำแหน่งใด ๆ ก็คือความหนาแน่นของนิวตรอนเร็วตรงบริเวณใกล้กับที่เกิดการกระเจิงครั้งแรก แต่ทฤษฎีนี้ถือว่านิวตรอนเร็วกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน เนื่องจากนิวตรอนเร็ววิ่งไปชนถูกนิวเคลียสของตัวกลางเพียงครั้งเดียว ดังนั้นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนในหนึ่งหน่วยปริมาตรที่ตำแหน่งใด ๆ ก็คือความหนาแน่นของนิวตรอนเร็ว ณ. ตำแหน่งซึ่งนิวตรอนเร็วชนกับนิวเคลียสแล้วกระเจิงไปเป็นครั้งแรก

สำหรับกรณีของตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด ที่มีความแรง a นิวตรอน/วินาที วางอยู่ในตัวกลางเอกพันธุ์ที่มีขอบเขตอนันต์ ถ้า Σ_s เป็นภาคตัดขวางมหภาคของการกระเจิงสำหรับนิวตรอนเร็ว ความหนาแน่นของนิวตรอนเร็วตรงบริเวณที่เกิดการกระเจิงครั้งแรกซึ่งห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r ในทิศใด ๆ มีค่าเป็น

$$\begin{bmatrix}\text{จำนวนนิวตรอน}\\\text{ที่ปรากฏบนพื้นที่}\\\text{ผิว 1 ตารางหน่วย}\\\text{ของทรงกลมรัศมี r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{ความน่าจะเป็นของ}\\\text{การกระเจิงครั้งแรก}\\\text{ซึ่งเกิดขึ้นที่เปลือก}\\\text{ของทรงกลมรัศมี r ,}\\\text{ซึ่งมีความหนา 1 หน่วย}\end{bmatrix} = \left[\frac{a}{4\pi r^2}\right]\left[\Sigma_s e^{-\Sigma_s r}\right]$$

$$= \frac{a\Sigma_s}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_s r} \qquad (2.8)$$

---

[4] Ibid., pp. 237-239.

โดยการใช้ค่าในสมการ (2.8) นี้เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอน ในสมการการ ฟุ้ง (2.1) ได้

$$D_s \nabla^2 \phi_s - \Sigma_{as}\phi_s + \frac{a\Sigma_s}{4\pi r^2} e^{-\Sigma_s r} = 0 \qquad (2.9)$$

คำตอบของสมการ (2.9) หาได้โดยอาศัยวิธีของเคอร์เนล (Kernel method) คำตอบทั่วไปของสมการ การฟุ้งที่ได้จากวิธีของเคอร์เนลคือ

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{S(\vec{\rho})\, e^{-|\vec{r}-\vec{\rho}|K}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{\rho}|}\, d\vec{\rho} \qquad (2.10)$$

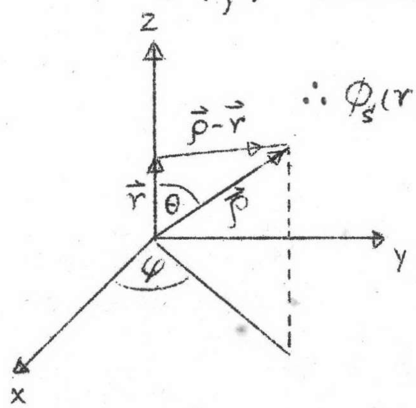
เมื่อ $\phi(\vec{r})$ เป็นค่าฟลักซ์ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ เกิดจากต้นกำเนิดนิวตรอน S $(\vec{\rho})$ ซึ่งกระจายอยู่อย่างต่อเนื่องรอบ ๆ จุด $\vec{r}$ ที่ตำแหน่ง $\vec{\rho}$

$\frac{e^{-|\vec{r}-\vec{\rho}|K}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{\rho}|}$ เป็นค่าฟลักซ์ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ (ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์) เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่มีความแรง 1 นิวตรอน/วินาที ที่ตำแหน่ง $\vec{\rho}$

เทอม $\frac{e^{-|\vec{r}-\vec{\rho}|K}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{\rho}|}$ นี้เรียกว่า point diffusion kernel [5]

S $(\vec{\rho})$ ในที่นี้คือ $\frac{a\Sigma_s}{4\pi\rho^2} e^{-\Sigma_s \rho}$

$$\therefore \phi_s(r) = \frac{a\Sigma_s}{(4\pi)^2 D_s} \int \frac{e^{-\Sigma_s \rho - K_s|\vec{r}-\vec{\rho}|}}{\rho^2 |\vec{r}-\vec{\rho}|}\, d\vec{\rho} \qquad (2.11)$$



การอินทิเกรตสมการ (2.11) นี้ ทำได้โดยเลือกให้เวกเตอร์ $\vec{r}$ อยู่บนแกน z ดังรูปที่ 2.1

รูปที่ 2.1 แสดง Coordinate System

[5] Glasstone, and Edlund, op. cit., pp. 127-129.

$$\therefore \phi_s(r) = \frac{a\Sigma_s}{(4\pi)^2 D_s}\int_0^{\infty} e^{-\Sigma_s\rho}d\rho\int_0^{\pi}\frac{\exp[-K_s(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{\frac{1}{2}}]\sin\theta d\theta}{(r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta)^{1/2}}\int_0^{2\pi}d\varphi \quad ----(2.12)$$

และจะได้

$$\phi_s(r) = \frac{a\Sigma_s}{4\pi D_s K_s r}\left[e^{-K_s r}\int_0^r \frac{\sinh K_s\rho \cdot e^{-\Sigma_s\rho}}{\rho}d\rho + \sinh K_s r\int_r^{\infty}\frac{e^{-(\Sigma_s+K_s)\rho}}{\rho}d\rho\right] \quad -----(2.13)$$

สมการ (2.13) นี้เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ระยะห่างจากตัวกำเนิดนิวตรอนเท่ากับ r

2.3 ทฤษฎีเฟอร์มิเอจ[6]

เป็นทฤษฎีที่ศึกษาถึงการกระจายของนิวตรอน ในตัวกลางที่ประกอบขึ้นด้วยนิวเคลียสที่ค่อนข้างหนักเมื่อเทียบกับนิวตรอน เช่นคาร์บอน (หรือกราไฟต์) ซึ่งมีเลขมวลเท่ากับ 12 หรือเบอริลเลียมซึ่งมีเลขมวลเท่ากับ 9 เป็นต้น สำหรับตัวกลางที่ประกอบขึ้นด้วยนิวเคลียสที่เบา เช่นน้ำซึ่งประกอบขึ้นด้วยนิวเคลียสของไฮโดรเจน ซึ่งมีเลขมวลเท่ากับ 1 ใช้ทฤษฎีนี้อธิบายไม่ได้ นิวตรอนที่วิ่งออกจากตัวกำเนิดเป็นนิวตรอนเร็ว เมื่อนิวตรอนนี้วิ่งไปในตัวกลางซึ่งประกอบขึ้นด้วยนิวเคลียสที่ค่อนข้างหนัก นิวตรอนจะมีการชนกับนิวเคลียสหลายครั้งก่อนที่จะกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน การชนระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียส (ที่มีเลขมวลค่อนข้างมาก) แต่ละครั้ง นิวตรอนจะสูญเสียพลังงานไปมีค่าน้อยมาก ถือได้ว่าการวิ่งช้าลงของนิวตรอนเนื่องจากการสูญเสียพลังงานโดยชนกับนิวเคลียสเป็นไปอย่างต่อเนื่อง (continuous) อัตราส่วนระหว่างพลังงานของนิวตรอนก่อนชนกับหลังชนทุกครั้งมีค่าใกล้เคียงกัน ไม่ขึ้นกับว่าก่อนชนนิวตรอนจะมีพลังงานเท่าใด สำหรับทฤษฎีนี้ถือว่าอัตราส่วนนี้มีค่าคงที่ตลอดเวลาสำหรับนิวตรอนทุกตัว ตั้งแต่นิวตรอนเร็วเริ่มมีการชนกับนิวเคลียสจนกระทั่งกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน

$$\nabla^2 q - \frac{\partial q}{\partial \tau} = 0 \quad ----------(2.14)$$

---

[6] Ibid, pp. 172-188.

สมการ (2.14)นี้คือสมการเฟอร์มิเอจ (Fermi age equation) สำหรับตัวกลางที่ไม่ดูดกลืนนิวตรอน (nonabsorbing medium)สมการเฟอร์มิเอจนี้ได้มาจากสมการการฟุ้ง (2.1) เมื่อ $\Sigma_a = 0$ q คือความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง (slowing down density)[7] ซึ่งหมายถึงจำนวนนิวตรอนพลังงาน E ที่วิ่งช้าลงในหนึ่งหน่วยปริมาตรต่อวินาทีมีค่าเท่ากับ

$$q = \phi(E)\xi\Sigma_s E \qquad \text{-----------}(2.15)$$

เมื่อ ϕ (E) = นิวตรอนฟลักซ์ต่อหนึ่งหน่วยช่วงพลังงานที่ E

Σ_s = ภาคตัดขวางมหภาคของการกระเจิงของตัวกลางสำหรับนิวตรอนเร็ว

ξ = สัมประสิทธิ์การวิ่งช้าลงของนิวตรอน (slowing down coefficient) มีค่าดังนี้

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \overline{\ln E_0 - \ln E} = \overline{\ln \frac{E_0}{E}} = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A-1}{A+1} \\ \text{และ}\quad \xi &= \frac{2}{A+\frac{2}{3}}, \quad \text{เมื่อ } A > 10 \end{aligned}\right\} \text{--}(2.16)$$

ในสมการ (2.16) E_0 เป็นพลังงานของนิวตรอนก่อนชน, E เป็นพลังงานของนิวตรอนหลังชน และ A เป็นเลขมวลของตัวกลาง

ค่า τ ในสมการ (2.14) มีค่าเท่ากับ

$$\tau(E) = \int_E^{E_0} \frac{D_f\,dE}{E\xi\Sigma_s} \qquad \text{-----------}(2.17)$$

ค่า τ นี้เรียกว่าเฟอร์มิเอจหรือเอจของนิวตรอนใด ๆ ที่มีพลังงานเท่ากับ E โดยมีพลังงานเริ่มต้นเท่ากับ E_0 มีหน่วยเป็นความยาวยกกำลังสอง แต่เรียกว่าเอจ (ซึ่งหมายถึงอายุหรือยุค) ก็เพราะ τ แสดงตัวคล้ายกับตัว t (เวลา) ในสมการดิฟเฟอเรนเชียลของการนำความร้อน (differential equation of heat conduction)

$$K\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

---

[7]Gilbert Cahen, and Pierre Trille, Nuclear Engeneering (Boston: Allyn, and Bacon, Inc., 1961), p.99.

D_f ในสมการ (2.17) คือสัมประสิทธิ์การฟุ้งของนิวตรอนเร็ว

ถ้าพิจารณาถึงตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบ ขนาดอนันต์ ที่ให้นิวตรอนเร็วออกมามีพลังงานค่าเดียว (infinite plane source of fast (monoenergetic) neutrons) และปล่อยนิวตรอนออกมาอย่างสม่ำเสมอในอัตรา a นิวตรอน/ตร.ซ.ม.วินาที วางอยู่ในระนาบของ y,z ผ่านตำแหน่ง x = 0 ในตัวกลางเอกพันธุ์ซึ่งมีขอบเขตอนันต์ เนื่องจากตัวกำเนิดนิวตรอนมีลักษณะเป็นระนาบ และมีขนาดอนันต์ ค่า q ที่ตำแหน่งห่างจากตัวกำเนิดเท่ากับ x มีค่าไม่ขึ้นกับค่า y และค่า z สมการเฟอร์มิเอจเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 q(x,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial q(x,\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad \text{, สำหรับ } x \neq 0 \qquad (2.18)$$

ตำแหน่งที่ตัวกำเนิดนิวตรอนอยู่ (คือ x = 0) τ มีค่าเป็น 0 ซึ่งเป็นเงื่อนไขของตัวกำเนิดนิวตรอน (source condition) เขียนได้เป็น

$$q(x,0) = a\,\delta(x) \qquad (2.19)$$

เมื่อ $\delta(x)$ เป็น Dirac delta function มีค่าดังนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \qquad (2.20)$$

คำตอบของสมการ (2.18) หาได้โดยใช้วิธีแยกตัวแปร (separation of variables) และใช้เงื่อนไขของตัวกำเนิดนิวตรอน (คือสมการ 2.19) ช่วย คำตอบที่ได้คือ

$$q(x,\tau) = \frac{a}{\sqrt{4\pi\tau}}\, e^{-x^2/4\tau} \qquad (2.21)$$

$q(x,\tau)$ ในสมการ (2.21) นี้คือความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง ที่ตำแหน่งห่าง x จากตัวกำเนิดแบบระนาบซึ่งวางอยู่ในระนาบ x = 0

ถ้าตัวกำเนิดนิวตรอนนี้วางอยู่ในระนาบ $x = x_o$ $q(x,\tau)$ จะมีค่าเป็น

$$q(x,\tau) = \frac{a}{\sqrt{4\pi\tau}}\, e^{-|x-x_o|^2/4\tau} \qquad (2.22)$$

สำหรับกรณีที่ตัวกำเนิดนิวตรอนซึ่งวางอยู่ที่ตำแหน่ง x = 0 ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์เป็นตัวกำเนิดนิวตรอนชนิดจุด คำตอบของสมการเฟอร์มิเอจสามารถหาได้โดยตรงจากคำตอบ

ของสมการเฟอร์มิเอจที่มีตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบที่มีขนาดอนันต์ (คือสมการ (2.21)) โดยใช้ความสัมพันธ์ [8]

$$q_{pt}(x,\tau) = -\frac{1}{2\pi x}\frac{d}{dx}q_{pl}(x,\tau) \qquad (2.23)$$

เมื่อ $q_{pt}(x,\tau)$ = ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง จากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด

$q_{pl}(x,\tau)$ = ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง จากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบขนาดอนันต์

เมื่อแทนค่า $q(x,\tau)$ จากสมการ (2.21) ลงในสมการ (2.23) จะได้

$$q_{pt}(x,\tau) = \frac{a}{(4\pi\tau)^{3/2}}e^{-x^2/4\tau} \qquad (2.24)$$

ในกรณีของตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด x คือระยะทางระหว่างตัวกำเนิด (x = 0) กับตำแหน่งที่ต้องการหาค่าฟลักซ์ เราสามารถแทนค่า x ได้ด้วย r

$$\therefore q_{pt}(r,\tau) = \frac{a}{(4\pi\tau)^{3/2}}e^{-r^2/4\tau} \qquad (2.25)$$

ถ้าตัวกำเนิดนิวตรอน (ขนาดจุด) อยู่ที่ตำแหน่ง r_0 $q_{pt}(r,\tau)$ มีค่าเป็น

$$q_{pt}(r,\tau) = \frac{a}{(4\pi\tau)^{3/2}}e^{-|r-r_0|^2/4\tau} \qquad (2.26)$$

จะเห็นได้ว่า ความหนาแน่นของนิวตรอนที่วิ่งช้าลง ณ.ตำแหน่ง r (หรือ x) ใด ๆ ขึ้นกับค่า r (หรือ x) กับค่า τ ดังนั้นถ้าใช้ค่า τ ซึ่งเป็นเอจของเทอร์มาลนิวตรอน คำนวณหาค่า q ค่า q ที่ได้ก็จะเป็นความหนาแน่นของเทอร์มาลนิวตรอนซึ่งเกิดขึ้นจากการวิ่งช้าลงของนิวตรอนที่มีพลังงานสูงกว่า (thermal neutron slowing down density)

∴ ความหนาแน่นของเทอร์มาลนิวตรอนที่ตำแหน่งห่าง x_0 จากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบ ขนาดอนันต์ (จากสมการ (2.21)) มีค่าเท่ากับ

$$q(x_0,\tau) = \frac{a}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-x_0^2/4\tau} \qquad (2.27)$$

---

[8] Glasstone, and Edlund, <u>op. cit.,</u> p.110.

เมื่อ τ เป็นเทอร์มาลเอจ

ถ้าพิจารณาถึงปริมาตรเล็ก ๆ อันหนึ่งที่ตำแหน่ง x_0 ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัด 1 ตร.ซ.ม. หนา dx_0 ต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอนในปริมาตรอันนี้มีค่า

$$q(x_0,\tau)\,dx_0 = \frac{a}{\sqrt{4\pi\tau}}\,e^{-x_0^2/4\tau}\,dx_0 \qquad \text{---------(2.28)}$$

อาศัยวิธีของเคอร์เนล โดยมีค่าในสมการ (2.28) เป็นต้นกำเนิดของเทอร์มาลนิวตรอน ซึ่งกระจายอยู่ทั่วไปในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์ เทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง x มีค่าเท่ากับ

$$\phi_s(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-K_s|x-x_0|}}{2K_sD_s}\cdot\frac{a}{\sqrt{4\pi\tau}}\,e^{-x_0^2/4\tau}\,dx_0$$

หรือ

$$\phi_s(x,\tau) = \frac{a}{4K_sD_s\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-K_s|x-x_0| - x_0^2/4\tau\right]dx_0 \qquad \text{-----(2.29)}$$

เมื่อ $\frac{e^{-K|x-x_0|}}{2KD}$ เป็นค่าฟลักซ์ที่ตำแหน่ง x (ในตัวกลางที่มีขอบเขตอนันต์) เกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนที่มีความแรง 1 นิวตรอน/ตร.ซ.ม.วินาที ที่ตำแหน่ง x_0

เทอม $\frac{e^{-K|x-x_0|}}{2KD}$ นี้เรียกว่า plane diffusion kernel[9]

การอินทิเกรตสมการ (2.29) ทำได้โดยแยกการอินทิเกรตออกเป็น 2 ช่วงคือ

1) จาก $x_0 = -\infty$ ถึง $x_0 = x$ ในกรณีนี้ สามารถแทน $|x - x_0|$ ได้ด้วย $x - x_0$, $\because x > x_0$

2) จาก $x_0 = x$ ถึง $x_0 = \infty$ ในกรณีนี้สามารถแทน $|x - x_0|$ ได้ด้วย $x_0 - x$, $\because x_0 > x$

ผลสุดท้ายได้คำตอบเป็น

$$\phi_s(x,\tau) = \frac{a\,e^{K_s^2\tau}}{4K_sD_s}\left\{e^{-K_sx}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} - K_s\sqrt{\tau}\right)\right] + e^{K_sx}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}} + K_s\sqrt{\tau}\right)\right]\right\} \qquad \text{----(2.30)}$$

เมื่อ $\mathrm{erf}(x)$ = error function $= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$

---

[9] Glasstone, and Edlund, op.cit., pp. 127-129.

ค่า $\phi_s(x, \tau)$ ในสมการ (2.30) นี้เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่งห่าง x จากตัวกำเนิดนิวตรอน แบบระนาบ ขนาดอนันต์ ที่มีความแรง a นิวตรอน/ตร.ซ.ม. วินาที ซึ่ง วางอยู่ที่ระนาบ x = 0 ในตัวกลางเอกพันธุ์ที่มีขอบเขตอนันต์

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟลักซ์ซึ่งเกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด กับค่าฟลักซ์ซึ่งเกิดจากตัวกำเนิดนิวตรอนแบบระนาบมีค่าดังนี้

$$\phi_{pt}(x,\tau) = -\frac{1}{2\pi x}\frac{d}{dx}\phi_{pl}(x,\tau) \qquad \text{----------(2.31)}$$

แทนค่า $\phi_s(x,\tau)$ จากสมการ (2.30) ซึ่งเป็น $\phi_{pl}(x,\tau)$ ลงในสมการ (2.31) จะได้

$$\phi_{pt}(x,\tau) = \frac{a}{8\pi D_s}\frac{e^{K_s^2\tau}}{x}\left\{e^{-K_s x}\left[1+erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}-K_s\sqrt{\tau}\right)\right]-e^{K_s x}\left[1-erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}+K_s\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}$$

----------(2.32)

เราสามารถแทน x ในสมการ (2.32) ได้ด้วย r เพราะว่าเป็นระยะระหว่างตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุด (ที่ x =0) กับตำแหน่งที่ต้องการหาค่าฟลักซ์

$$\therefore \phi_{pt}(r,\tau) = \frac{a}{8\pi D_s}\frac{e^{K_s^2\tau}}{r}\left\{e^{-K_s r}\left[1+erf\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau}}-K_s\sqrt{\tau}\right)\right]-e^{K_s r}\left[1-erf\left(\frac{r}{2\sqrt{\tau}}+K_s\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}$$

----------(2.33)

ค่า $\phi_{pt}(r, \tau)$ ในสมการ (2.33) เป็นค่าเทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง r ใด ๆ รอบ ๆ ตัวกำเนิดนิวตรอนขนาดจุดที่มีความแรง a นิวตรอน/วินาที ซึ่งวางอยู่ที่ตำแหน่ง r = 0 ในตัวกลางเอกพันธุ์ที่มีขอบเขตอนันต์

2.4 ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลฟลักซ์[10]

ความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วกับเทอร์มาลฟลักซ์คือ

$$\phi_s(r) = \frac{\phi_f(r)\, e^{\tau/\lambda^2}}{\Sigma_{as}\lambda} \qquad \text{----------(2.34)}$$

---

[10] Herbert Goldstein, Fundamental Aspect of Reactor Shielding (London: Pergamon Press, 1959), pp. 298-299.

เมื่อ τ = เทอร์มาลเอจ

Σ_{as} = ภาคตัดขวางมหภาคสำหรับดูดกลืนเทอร์มาลนิวตรอนของน้ำ

λ = ระยะทางเฉลี่ยที่นิวตรอนเร็ววิ่งได้ จากตำแหน่งที่เป็นนิวตรอนเร็วถึงตำแหน่งที่กลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน

= $\frac{1}{\Sigma_{af}}$, เมื่อ Σ_{af} เป็นภาคตัดขวางมหภาคในการทำให้นิวตรอนวิ่งช้าลงจนกลายเป็นเทอร์มาลนิวตรอน

$\phi_s(r)$ = เทอร์มาลฟลักซ์ที่ตำแหน่ง r

$\phi_f(r)$ = ฟลักซ์ของนิวตรอนเร็วที่ตำแหน่ง r ซึ่งมีลักษณะดังนี้[11]

$$\phi_f(r') = \phi_f(r)e^{-(r'-r)/\lambda} \quad \text{------------} (2.35)$$

ค่าฟลักซ์ของนิวตรอนมีลักษณะดังในสมการ (2.35) นี้เฉพาะบนช่วงระยะสั้น ๆ เท่านั้น

---

11 <u>Ibid</u> p. 299.