บทที่ 2

ทฤษฎี

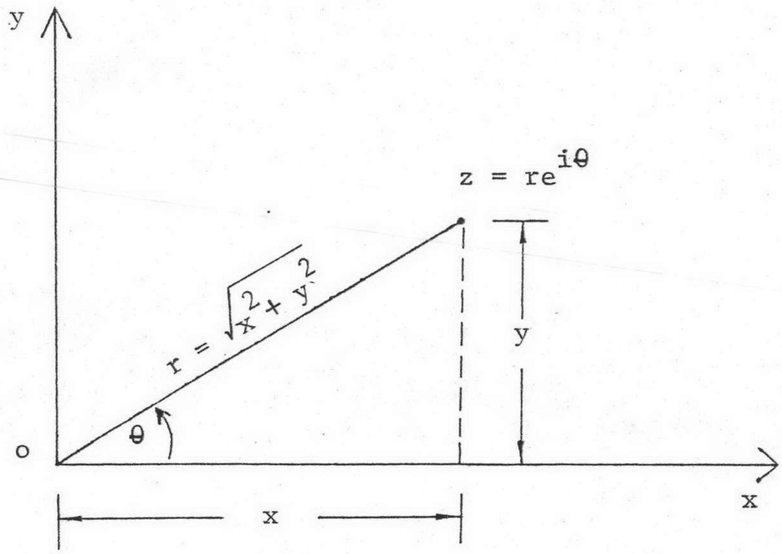
ฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร เป็นชื่อของฝายน้ำล้นชนิดหนึ่งมีรูปร่างลักษณะแบบเลียบตามเส้นการไหล (Streamline) รูปแบบฝายน้ำล้นนี้ได้มาจากแบบการไหลผ่านรูป Symmetrical streamlined strut (รูปที่ 2.5) ซึ่งเป็นแบบการไหลตามวิธีที่คิดค้นขึ้นมาโดย Joukowski จึงมีชื่อเรียกว่า แบบการไหลผ่านรูป Symmetrical Joukowski streamlined strut และเรียกฝายน้ำล้นที่มีรูปร่างลักษณะเหมือน Streamlined strut ครึ่งรูปว่า ฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร (รูปที่ 1.1)

2.1 การหาแบบฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร

การหารูปร่างลักษณะของรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรได้มาจากวิธีการวิเคราะห์หาแบบการไหลของน้ำแบบต่าง ๆ ซึ่งแบบการไหลของน้ำผ่านรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรก็เป็นแบบหนึ่งในหลาย ๆ แบบ วิธีการวิเคราะห์นี้เรียกว่า Conformal transformation ซึ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีของตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable)

2.2 จำนวนเชิงซ้อน (Complex number)

จำนวนที่ประกอบด้วย 2 ส่วนสมมติ คือ a และ b ที่เขียนอยู่ในรูปแบบเชิงซ้อนเป็น $a + ib$ โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) a เรียกว่า ส่วนจริง (Real part), b เรียกว่า ส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ในรูปที่ 2.1 ตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ในพิกัด x,y กำหนดได้โดยจุด z ตัวเดียว โดยที่ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริง คือ x และส่วนจินตภาพ คือ y ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเขียนแทนด้วยลูกศรแสดงตำแหน่ง oz คือ $z = x + iy$ ขนาดของ z คือความยาวลูกศร oz เขียนแทนด้วย $r = x^2 + y^2$ ทิศทางของ z คือ ทิศทางของลูกศร oz เขียนแทนด้วย $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ โดยที่ $-\pi<\theta<\pi$ เป็นมุมวัดจากแกน x ด้านบวกหมุนทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 2.1 แสดงการกำหนดตำแหน่งของจุดบนระนาบ z

การกำหนดตำแหน่งของจุด z บนพิกัด x,y หรือระนาบ z (z-plane) สามารถแสดงได้อีกวิธีหนึ่ง คือแสดงในรูปเชิงขั้ว (Polar form) (r,θ) (รูปที่ 2.1) คือ

$$r = r\cos\theta + i.r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$$

2.3 ฟังก์ชันเส้นการไหล, ψ (Strem function)

ฟังก์ชันเส้นการไหล คือสิ่งที่คิดค้นทางด้านคณิตศาสตร์ที่ใช้สำหรับอธิบายรูปแบบการไหลของน้ำในลักษณะเฉพาะต่าง ๆ ได้อย่างสะดวก ละเอียด สมบูรณ์และถูกต้อง ฟังก์ชันเส้นการไหลเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y หรือ $\psi = f(x,y)$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. $\psi = c$ (c = ค่าคงที่) เป็นสมการทั่วไปของเส้นการไหล (Streamline) เส้นหนึ่งของแบบการไหล (Pattern) แบบหนึ่ง ถ้า c ต่างกันก็จะเป็นสมการของเส้นการไหลที่ต่างกันของแบบการไหลนั้น และตามคำจำกัดความของเส้นการไหล (Definition of streamlines) จะได้สมการของเส้นการไหล คือ $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$

(u = ความเร็วในแนวแกน x, v = ความเร็วในแนวแกน y)

2. $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u$, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v$

3. ถ้า $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2$ จะได้

$$\delta Q = \delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = c_2 - c_1 \quad (2.1)$$

$$dQ = \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx \quad (2.2)$$

(Q = อัตราการไหล)

4. $$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots\ldots\psi_n \quad (2.3)$$

2.4 ฟังก์ชันศักย์ความเร็ว, ϕ (Velocity potential function)

ฟังก์ชันศักย์ความเร็วเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x,y และ t (t = ระยะเวลา) หรือ $\phi = f(x,y,t)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $\phi = c$ เป็นสมการทั่วไปของเส้นศักย์ความเร็ว (Velocity potential lines) กลุ่มหนึ่ง ถ้า c ต่างกันก็จะเป็นสมการของเส้นศักย์ความเร็วต่างกันของกลุ่มนั้น

2. $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v \quad (2.4)$$

3. $$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0 \quad (2.5)$$

4. แทนค่าจากสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.5) จะได้

$$udx + vdy = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad (2.7)$$

5. เส้นการไหลจะตัดกับเส้นศักย์ความเร็วเป็นมุมฉากทุกเส้นเสมอ

6. เงื่อนไขการไหลแบบไม่หมุน (Irrotation flow)

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.8}$$

แทนค่า u และ v จากสมการ (2.4) จะได้ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = 0$ (2.9)

แสดงว่า ϕ เป็นฟังก์ชันของการไหลแบบไม่หมุน

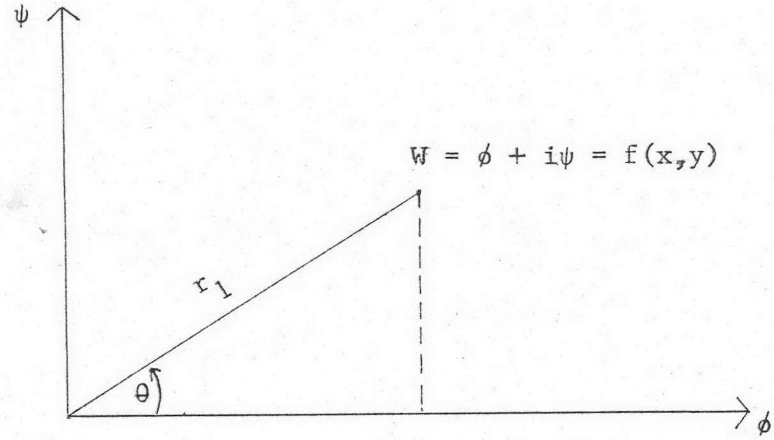
2.5 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน, w (Function of a complex variable)

ถ้า x และ y เป็นตัวแปร ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) $z = x + iy$ เรียกว่าตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable) สมมติว่ามีตัวแปร w ซึ่งกำหนดให้ $w = f(z)$ เช่น $w = z^2$ หรือ $w = \ln z$ ดังนั้น จึงเรียก w ว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน z และ w เองก็เป็นตัวแปรเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริง (Real part) และส่วนจินตภาพ (Imaginary part) ส่วนจริงแทนด้วยฟังก์ชันศักย์ความเร็ว และส่วนจินตภาพแทนด้วยฟังก์ชันเส้นการไหล ψ ทั้ง ϕ และ ψ ต่างก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y ดังนั้น

$$w = \phi + i\psi$$

$$= f_1(x,y) + i \cdot f_2(x,y) \tag{2.10}$$

เป็นจุดอยู่บนพิกัด ϕ, ψ หรือระนาบ w (w-plane) (รูปที่ 2.2)



รูปที่ 2.2 แสดงการกำหนดตำแหน่งของจุดบนระนาบ w

สำหรับแต่ละจุด (x, y) ในระนาบ z จะมีจุดที่สอดคล้องกันคือ จุด (ϕ,ψ) อยู่ในระนาบ w เสมอ เพราะว่าค่าของ ϕ และ ψ หาได้จากค่าของ x และ y ดังนั้น แต่ละเส้นในระนาบ z จะมีเส้นที่สอดคล้องกันในระนาบ w ด้วย การเปลี่ยนรูป (Transformation) จากระนาบ z ไปยังระนาบ w หรือจากระนาบ w ไปยังระนาบ z จะทำให้ลักษณะของเส้นเปลี่ยนแปลงไป แต่เส้น ψ และ ϕ ยังคงตัดกันเป็นมุมฉากทั้งในระนาบ z และระนาบ w รูปแบบการไหลในระนาบ w เป็น Ideal flow คือเป็นการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) ส่วนรูปแบบการไหลในระนาบ z เป็น Physical flow

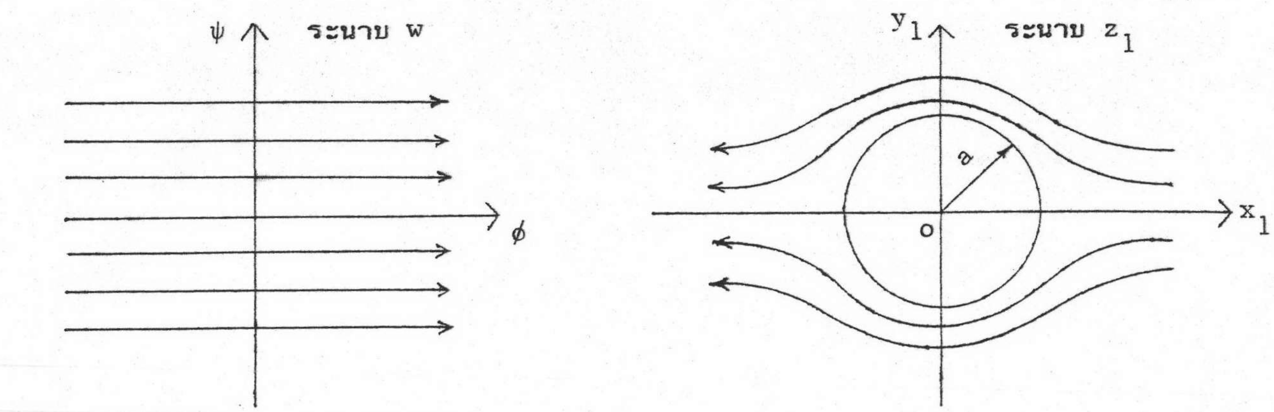
2.6 ลักษณะการไหลผ่านรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร

วิธีการหารูปแบบของการไหลของน้ำผ่านรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรหรือรูป Symmetrical streamlined strut หรือรูป Symmetrical Joukowski Streamlined strut หาได้โดยการแปลงรูป (Transformation) จากการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) ในระนาบ w ไปเป็นแบบการไหลผ่านรูป Symmetrical Streamlined strut ในระนาบ z (z-plane) การแปลงรูปนี้มี 3 ขั้นตอนคือ

1. แปลงลักษณะการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) ในระนาบ w ไปเป็นลักษณะการไหลกลับทิศตรงกันข้ามผ่านรูปทรงกระบอก (Cylinder) ที่มีรัศมีเท่ากับ a ในระนาบ z โดยใช้สมการ $w = -(z_1 + \frac{a^2}{z_1})$ ในการแปลงรูป (รูปที่ 2.3)

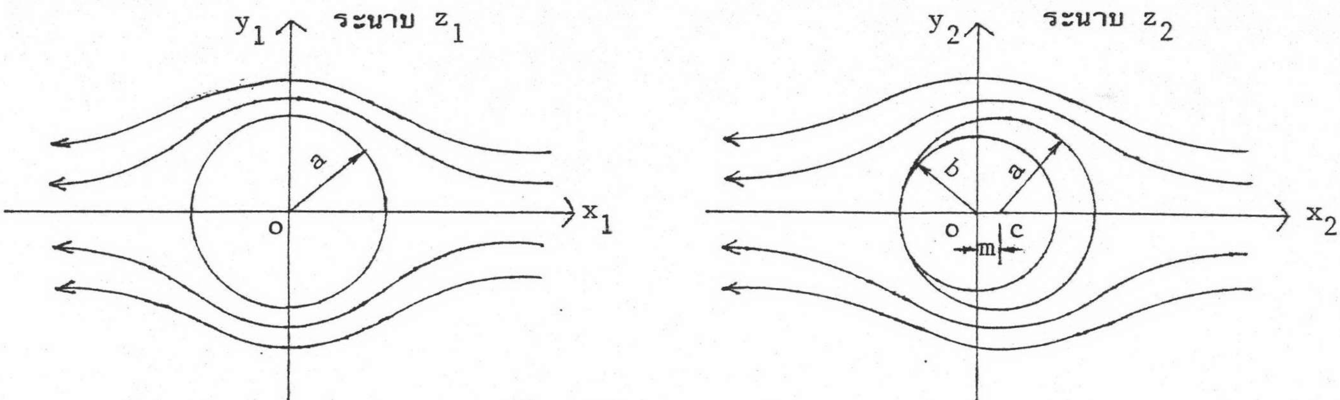
2. แปลงรูปลักษณะการไหลผ่านรูปทรงกระบอกรัศมี a ในระนาบ z_1 ไปเป็นลักษณะการไหลผ่านรูปทรงกระบอกเดียวกัน ซึ่งเคลื่อนที่มาทางขวามือจากจุดศูนย์กลาง 0 เป็นระยะเท่ากับ m ในระนาบ z_2 โดยใช้สมการ $z_1 = z_1 + m$ ในการแปลงรูป (รูปที่ 2.4)

3. แปลงรูปลักษณะการไหลผ่านรูปทรงกระบอกรัศมี a ห่างจากศูนย์กลาง 0 เท่ากับ m ในระนาบ z_2 ไปเป็นรูปลักษณะการไหลผ่าน Symmetrical streamlined strut ในระนาบ z โดยใช้สมการ $z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$ ในการแปลงรูปโดยที่ $b = a-m$ และเป็น



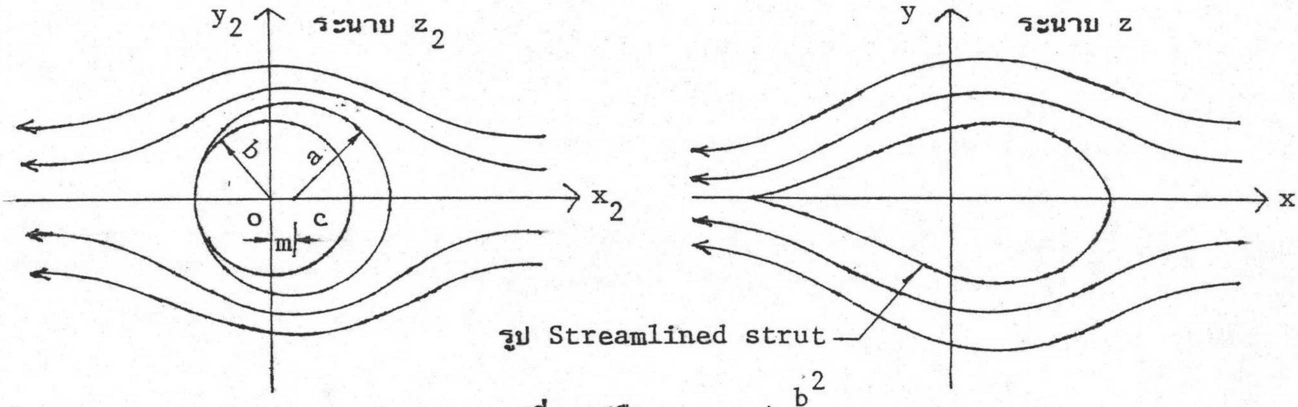
สมการการเปลี่ยนรูปคือ $w = -\ (z_1 + \frac{a^2}{z_1})$

รูปที่ 2.3 แสดงการเปลี่ยนรูปแบบการไหลจากระนาบ w ไปเป็นรูปแบบการไหลบนระนาบ z_1



สมการการเปลี่ยนรูปคือ $z_2 = z_1 + m$

รูปที่ 2.4 แสดงการเปลี่ยนรูปแบบการไหลจากระนาบ z_1 ไปเป็นรูปแบบการไหลบนระนาบ z_2



สมการการเปลี่ยนรูปคือ $z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$ $(b = a-m)$

รูปที่ 2.5 แสดงการเปลี่ยนรูปแบบการไหลจากระนาบ z_2 ไปเป็นรูปแบบการไหลบนระนาบ z

รัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ 0 (รูปที่ 2.5)

ดังนั้น สมการการแปลงรูปการไหลแบบสม่ำเสมอในระนาบ w ไปสู่แบบการไหลผ่านรูป Symmetrical streamlined strut ในระนาบ z สรุปได้ดังนี้

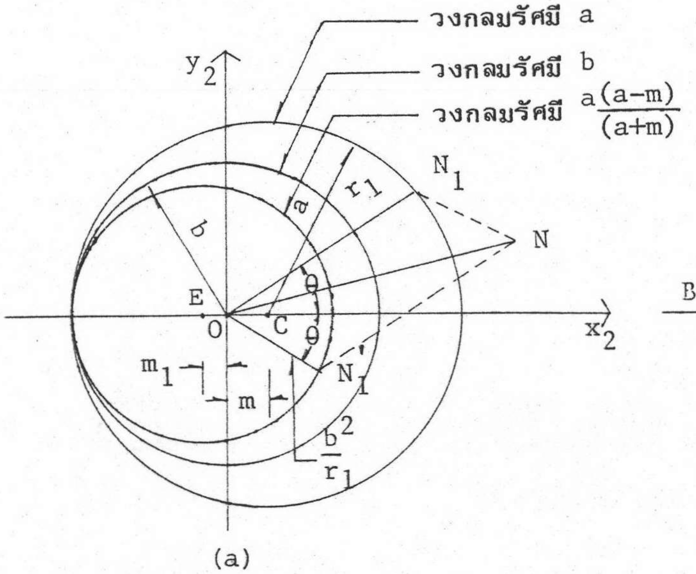
1. $w = -(z_1 + \frac{a^2}{z_1})$

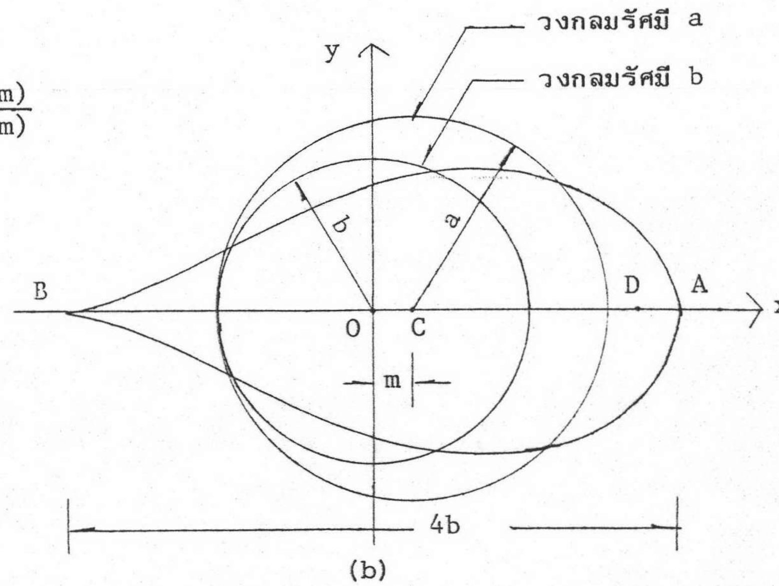
2. $z_2 = z_1 + m$

3. $z = z_2 + \frac{b^2}{z_2}$

2.7 การหารูปแบบการไหลผ่านรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรโดยวิธีกราฟฟิค (Graphical procedure)

การแปลงรูปแบบการไหลจากการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) ในระนาบ w ไปเป็นรูปแบบการไหลผ่านรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรในระนาบ z ตามรายละเอียดข้อ 2.6 นั้น เราสามารถแสดงวิธีการหารูปไฮโดรฟอยล์ด้วยวิธีกราฟฟิค (Graphical procedure) ได้ดังนี้ (รูปที่ 2.6)



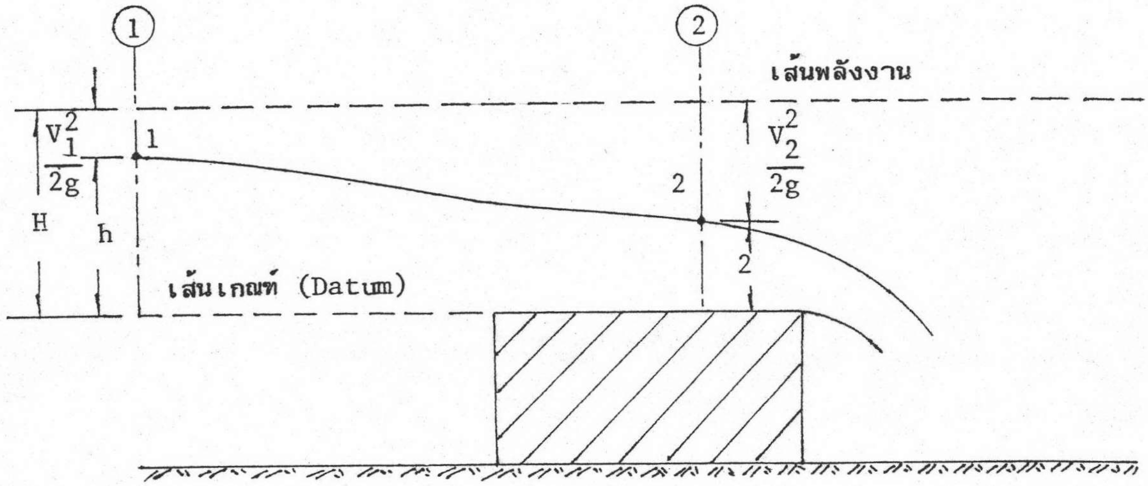


รูปที่ 2.6 การหารูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรโดยวิธีกราฟฟิค วงกลมรัศมี a กลายเป็นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร AB วงกลมรัศมี b กลายเป็นเส้นตรง BD

เขียนวงกลมรัศมี b มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O บนระนาบ x_2y_2 วัดระยะ OC = m แล้วใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมรัศมี a โดย a = b + m ให้ N_1 เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมรัศมี a และ $ON_1 = r_1$ มีค่าเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งของจุด N_1 วัดระยะ OE โดยให้ $OE = m_1 = \frac{m(a-m)}{(a+m)}$ เขียนวงกลมโดยใช้ E เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ $\frac{a(a-m)}{(a+m)}$ ให้จุด N_1' เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมรัศมี $\frac{a(a-m)}{(a+m)}$ ดังนั้น เมื่อลากเส้น $ON_1 = r_1$ ทำมุม $N_1\hat{O}X_2 = \theta$ และลากเส้น ON_1' ทำมุม $X_2\hat{O}N_1' = \theta$ เท่ากัน จะทำให้ระยะ $ON_1' = \frac{b^2}{r_1}$ ให้ ON_1 และ ON_1' เป็นเส้นลูกศร (Vector) เมื่อรวมเส้นลูกศร ON_1 และ ON_1' เข้าด้วยกันตามกฎของการรวมเส้นลูกศร (parallelogram rule of addition) จะได้ผลลัพธ์คือเส้นลูกศร ON โดยวิธีการเดียวกันเมื่อเปลี่ยนค่า θ ไปเรื่อย ๆ จาก 0 ถึง 180° จะได้ตำแหน่งของจุด N ต่าง ๆ กัน ทางเดินของจุด N คือรูป Symmetrical streamlined strut หรือรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตร AB ซึ่งแปลงรูปมาจากรูปวงกลมรัศมี a (รูปที่ 2.6)

2.8 สัมประสิทธิ์ของอัตราการไหลของฝายน้ำล้นแบบสันกว้าง (Broad-crested weir)

ในรูปที่ 2.7 แสดงการไหลของน้ำผ่านฝายน้ำล้นแบบสันกว้าง การหาสูตรอัตราการไหล (Q) สามารถหา (derive) ได้ดังนี้



รูปที่ 2.7 การไหลผ่านฝายน้ำล้นแบบสันกว้าง

ให้ H = หัวความดันรวม (Total head) เหนือสันฝาย

h = หัวความดัน (Head) ของน้ำเหนือสันฝาย

$\frac{V_1^2}{2g}$ = หัวความดันความเร็ว (Velocity head) ที่หน้าตัด (1)

d = ความสูงของน้ำบนสันฝาย

$\frac{V_2^2}{2g}$ = หัวความดันความเร็ว (Velocity head)ที่หน้าตัด (2)

B = ความกว้างของสันฝายซึ่งตั้งฉากกับหน้ากระดาษ

A = พื้นที่หน้าตัดของลำน้ำแบบสันฝาย = Bd

C = สัมประสิทธิ์ของอัตราการไหล

ใช้สมการของเบอร์นูลลี (Bernoulli's equation) ระหว่างจุด 1 และจุด 2 โดยคิดจากเส้นเกณฑ์ (Datum) และไม่คิดค่าสูญเสียต่าง ๆ เนื่องจากความฝืดของผิวฝาย

พลังงานรวมที่จุด 1 = พลังงานรวมที่จุด 2

$$h + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = d + \frac{V_2^2}{2g} + 0 \qquad (2.11)$$

$$V_2 = \sqrt{2g\left(h + \frac{V_1^2}{2g} - d\right)}$$

$$V_2 = \sqrt{2g(H-d)} \qquad (2.12)$$

$\therefore$ อัตราการไหล $Q = CAV_2$ (2.13)

$$= CBd\sqrt{2g(H-d)}$$

$$= CB\sqrt{2g(d^2H-d^3)} \qquad (2.14)$$

สมมติว่าอัตราการไหล Q นี้เป็นค่าสูงสุดสำหรับค่าหัวความดันรวม H ที่จุด 1 จะเห็นว่า Q มีค่าสูงสุดเมื่อ d^2H-d^3 มีค่าสูงสุด และ d^2H-d^3 จะมีค่าสูงสุดเมื่อ

$$\frac{d}{dd}(d^2H-d^3) = 0$$

$$2dH - 3d^2 = 0$$

$$d = \frac{2}{3}H$$

แทนค่า $d = \frac{2}{3}H$ ในสมการ (2.14) จะได้

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2g}{3}}\,CBH^{3/2} \tag{2.15}$$

ถ้าไม่คิดหัวความดันความเร็ว (Velocity head) ที่หน้าตัด (1) เนื่องจากมีค่าน้อย เราสาสามารถเขียนสูตรได้ดังนี้

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2g}{3}}\,CBh^{3/2} \tag{2.16}$$

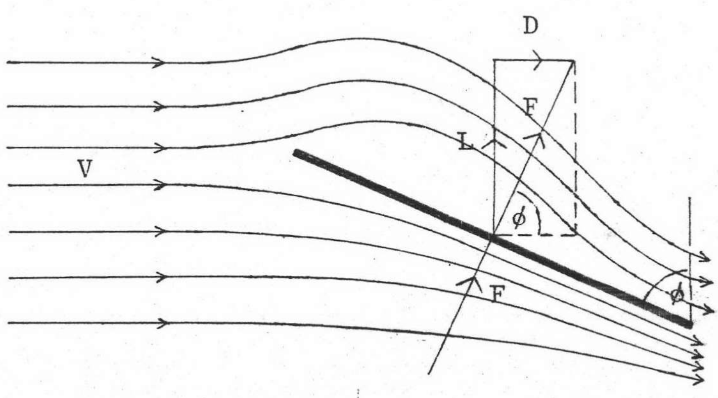
สัมประสิทธิ์ของอัตราการไหล $C = \dfrac{Q}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2g}{3}}\,Bh^{3/2}}$ (2.17)

สำหรับลักษณะการไหลผ่านฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรก็เป็นการไหลผ่านฝายน้ำล้นแบบสันกว้างชนิดหนึ่ง จึงได้ใช้สูตรการหาสัมประสิทธิ์ของอัตราการไหลสูตรเดียวกับการหาสัมประสิทธิ์ของอัตราการไหลผ่านฝายน้ำล้นแบบสันกว้าง คือ

$$C = \frac{Q}{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2g}{3}}\,Bh^{3/2}}$$

2.9 การไหลผ่านแผ่นเรียบเอียง (Fluid flow past an inclined plate)

ในรูปที่ 2.8 แสดงการไหลของของไหลผ่านแผ่นเรียบ (Flat plate) โดยของไหลมีความเร็ว V และแผ่นเรียบเอียงทำมุม ϕ กับแนวดิ่ง ของไหลนี้อาจเป็นของเหลวหรือกาซ ของไหลส่วนหนึ่งจะไหลไปตามผิวด้านล่างของแผ่นเรียบด้วยแรงดันของไหลทำให้เกิดแรงลากดึงเนื่องจากความฝืดที่ผิวของแผ่นเรียบ ส่วนที่ผิวด้านบนของแผ่นเรียบของไหลจะไหลแยกห่างจากผิวด้านบนจากขอบของแผ่นเรียบ แล้วจึงไหลโค้งลงมาเรียบไปตามผิวด้านบน ลักษณะเช่นนี้จะทำให้เกิดความดันลบ (Negative pressure) หรือความดันที่ต่ำกว่าบรรยากาศที่ผิวบนของแผ่นเรียบ แรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวด้านบนและด้านล่างของแผ่นเรียบ คือแรง F ซึ่งกระทำตั้งฉากกับผิวแผ่นเรียบ และแรง F นี้จะแปรผันตามพื้นที่ผิวของแผ่นเรียบและพลังงานจลน์ของของไหล



รูปที่ 2.8 แรงกระทำบนแผ่นเรียบที่มีของไหลไหลผ่าน

นั่นคือ $$F \alpha \ A.\rho\frac{V^2}{2} \qquad (2.18)$$

โดยที่พลังงานจลน์ของของไหล คือ $\rho\frac{V^2}{2}$, ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล และ A คือ พื้นที่ผิวของแผ่นเรียบ

จะเห็นว่าแรง F สามารถแยกออกได้เป็นแรง 2 แรง คือ $F \sin \phi$ ซึ่งเป็นแรงตั้งฉากกับทิศทางการไหล เรียกว่า แรงยก (Lift force) และแรง $F \cos \phi$ ซึ่งเป็นแรงที่มีทิศทางเดียวกับทิศทางการไหล เรียกว่า แรงลากดึง (Drag force) ดังนั้น จากสมการ (2.18) เราสามารถเขียนได้ว่า

$$F_L = C_L A \rho\frac{V^2}{2} \qquad (2.19)$$

และ

$$F_D = C_D A \rho\frac{V^2}{2} \qquad (2.20)$$

โดยที่ F_L = แรงกระทำบนแผ่นเรียบ ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางการไหลหรือแรงยก

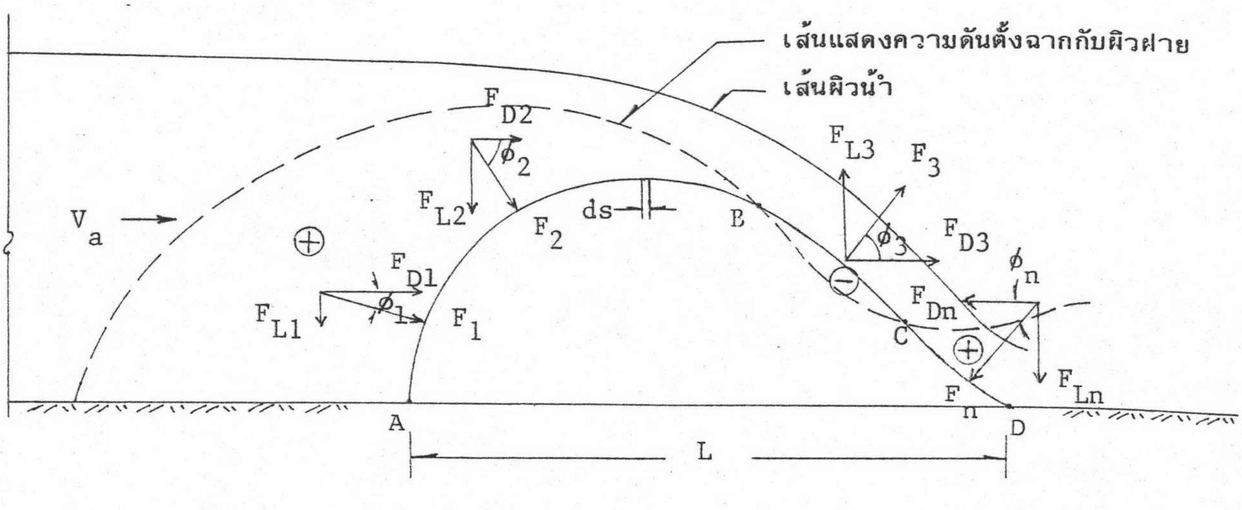
C_L = สัมประสิทธิ์ของแรงยก (Lift Coefficient)

F_D = แรงลากดึงหรือแรงต้านทานของแผ่นเรียบในทิศทางเดียวกับทิศทางการไหล

C_D = สัมประสิทธิ์ของการลากดึง (Drag Coefficient)

2.10 แรงกระทำบนผิวฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรในของไหล

สูตรแรงกระทำของของไหลบนแผ่นเรียบในหัวข้อ 2.9 สามารถนำมาใช้กับรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรได้ในทำนองเดียวกัน ในรูปที่ 2.9 แสดงแรงกระทำบนผิวฝาย



รูปที่ 2.9 แสดงแรงกระทำบนผิวฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรในของไหล

สมมติฝายน้ำล้นดังกล่าวนี้มีความดันกระทำตั้งฉากกับผิวฝาย แสดงด้วยเส้นประ เส้นประส่วนที่อยู่เหนือผิวฝายเป็นค่าความดันบวก (Positive pressure) เส้นบางส่วนที่อยู่ใต้ผิวฝาย ค่าความดันเป็นลบ (Negative pressure) หรือความดันที่ต่ำกว่าความดันบรรยากาศ ดังนั้น ผิวฝายช่วง AB มีค่าความดันบวก ช่วง BC มีค่าความดันลบ ช่วง CD มีค่าความดันบวก ให้แรงย่อยต่าง ๆ ที่กระทำตั้งฉากกับผิวฝายจาก A ถึง D คือแรง F_1, F_2, F_3 ....F_n กระทำ ณ จุดที่มีความดัน P_1, P_2, P_3.........P_n ตามลำดับ และให้ฝายน้ำล้นมีความกว้าง (ตั้งฉากกับกระดาษ) 1 หน่วยมีความดันกระทำตามผิวฝายในช่วงความยาว ds

ถ้า แรงลัพธ์ คือแรง F

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots F_n$$

$$= P_1(1.ds) + P_2(1.ds) + P_3(1.ds) + \ldots\ldots P_n(1.ds)$$

$$= P_1 ds + P_2 ds + P_3 ds + \ldots\ldots P_n ds \qquad (2.21)$$

แรง F สามารถแยกออกเป็น 2 แรงได้ คือแรงยก F_L และแรงลากดึง F_D โดยที่

$$F_L = F \sin \phi \qquad (2.22)$$

$$F_D = F \cos \phi \qquad (2.23)$$

ϕ คือมุมระหว่างแรง F กับแนวราบ

ดังนั้น แรงยก $F_L = F_{L1} + F_{L2} + F_{L3} + \ldots\ldots F_{Ln}$

$$= F_1 \sin \phi_1 + F_2 \sin \phi_2 + F_3 \sin \phi_3 + \ldots\ldots F_n \sin \phi_n$$

$$= P_1 \sin \phi_1 ds + P_2 \sin \phi_2 ds + P_3 \sin \phi_3 ds + \ldots\ldots P_n \sin \phi_n ds$$

$$= \sum_{n=1}^{n} P_n \sin \phi_n ds \qquad (2.24)$$

แรงลากดึง $F_D = F_{D1} + F_{D2} + F_{D3} + \ldots\ldots\ldots\ldots F_{Dn}$

$$= F_1 \cos \phi_1 + F_2 \cos \phi_2 + F_3 \cos \phi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots F_n \cos \phi_n$$

$$= P_1 \cos \phi_1 ds + P_2 \cos \phi_2 ds + P_3 \cos \phi_3 ds + \ldots\ldots\ldots P_n \cos \phi_n ds$$

$$= \sum_{n=1}^{n} P_n \cos \phi_n ds \qquad (2.25)$$

ดังนั้น จากสูตร $F_D = C_D A \rho \frac{V^2}{2}$

แทนค่า $F_D = \sum_{n=1}^{n} P_n \cos \phi_n ds$ และ $A = 1 \times D' = D'$ จะได้

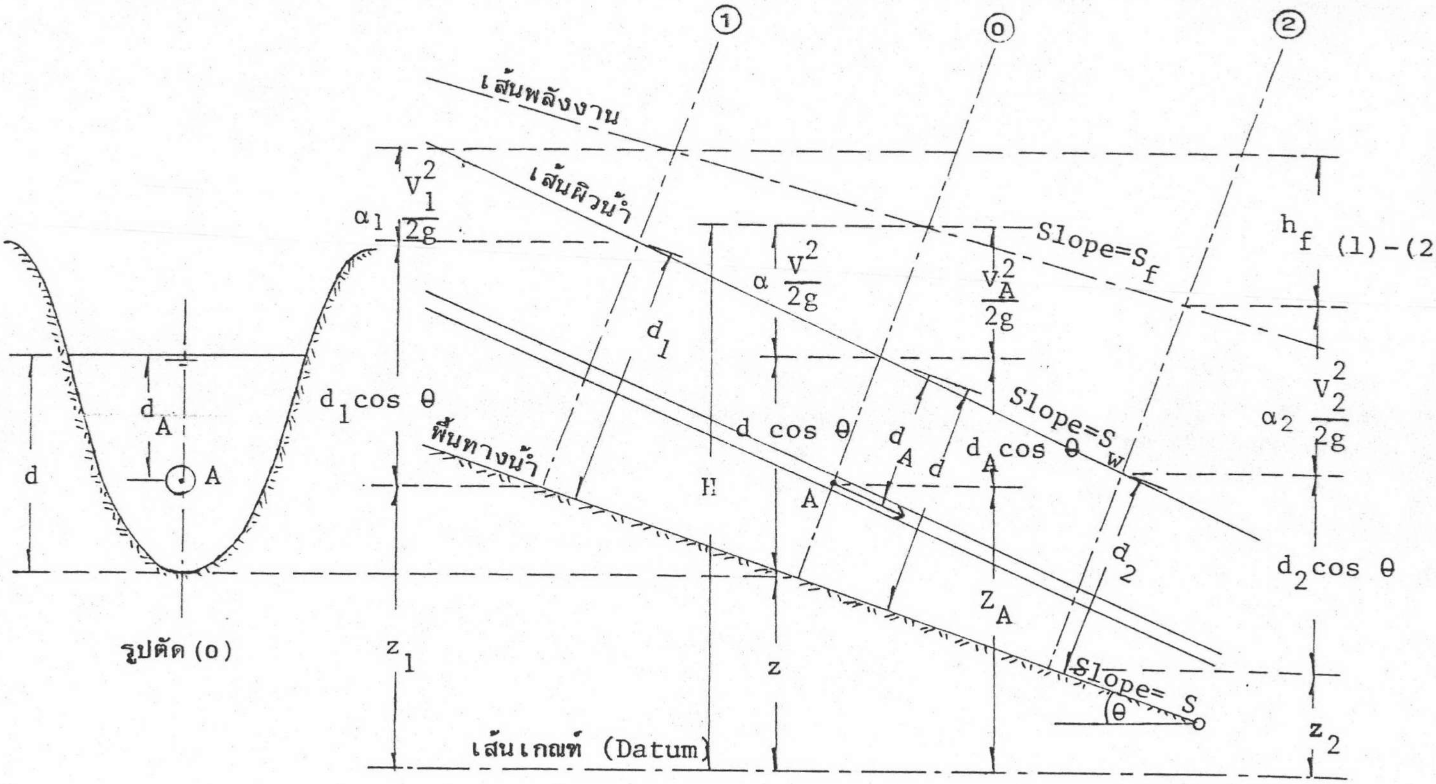
$$\sum_{n=1}^{n} P_n \cos \phi_n ds = C_D D' \rho \frac{V^2}{2}$$

ส.ป.ส. ของการลากดึง $C_D = \dfrac{\sum_{n=1}^{n} P_n \cos \phi_n ds}{\frac{1}{2} D' \rho V^2}$ (2.26)

2.11 พลังงานการไหลของน้ำในทางน้ำเปิด (Energy in open-channel flow)

เป็นที่รู้กันทั่วไปในวิชาชลศาสตร์เบื้องต้นว่า พลังงานทั้งหมดของน้ำของเส้นการไหล (Streamline) ใด ๆ ที่ไหลผ่านหน้าตัดของทางน้ำ (Channel section) สามารถเขียนแสดงแทนได้ด้วยค่าหัวความดันรวม (Total head) ของน้ำซึ่งมีค่าเท่ากับผลรวมของความสูงเหนือเส้นเกณฑ์ หัวความดันของความดัน (Pressure head) และหัวความดันของความเร็ว (Velocity head) รูปที่ 2.10 ค่าหัวความดันรวม H ที่จุด A บนเส้นการไหลที่หน้าตัด (o) ของการไหลในทางน้ำที่มีความลาดเอียงของพื้นทางน้ำมาก (Large slope) สามารถเขียนได้เป็น

$$H = z_A + d_A \cos \theta + \frac{V_A^2}{2g} \qquad (2.27)$$



รูปที่ 2.10 พลังงานการไหลของน้ำในทางน้ำเปิด

โดยที่ z_A คือค่าความสูงของจุด A เหนือเส้นเกณฑ์ (Datum)

d_A คือค่าความลึกของจุด A ใต้ระดับผิวน้ำซึ่งวัดตามหน้าตัดของทางน้ำ

θ คือค่ามุมลาดเอียงของพื้นทางน้ำ

$\frac{V_A^2}{2g}$ คือค่าหัวความดันความเร็ว (Velocity head) ของการไหลในเส้นการไหลผ่านจุด A

โดยปกติ ทุก ๆ เส้นการไหล (Streamline) ที่ไหลผ่านหน้าตัดของทางน้ำจะมีค่าหัวความดันของความเร็ว (Velocity head) ต่างกัน เนื่องจากความเร็วของทุก ๆ จุดของหน้าตัดทางน้ำมีค่าไม่เท่ากัน (Nonuniform velocity distribution) ในการไหลจริง ๆ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติ เราสมมติให้หัวความดันของความเร็วมีค่าเท่ากันทุก ๆ จุดของหน้าตัดทางน้ำ และใช้สัมประสิทธิ์ของพลังงาน (Energy coefficient) เป็นตัวแก้ให้ถูกต้องสำหรับผลอันเนื่องมาจากความเร็วที่ไม่เท่ากันของทุก ๆ จุดของหน้าตัดทางน้ำ ดังนั้น พลังงานรวมที่หน้าตัดทางน้ำ (o) คือ

$$H = z + d \cos \theta + \alpha\frac{V^2}{2g} \tag{2.28}$$

สำหรับทางน้ำซึ่งมีพื้นลาดเอียงน้อย ๆ หรือ $\theta \simeq 0$ ดังนั้น พลังรวมที่หน้าตัดทางน้ำ (o) คือ

$$H = z + d + \alpha\frac{V^2}{2g} \tag{2.29}$$

ในรูป 2.10 เส้นแสดงความสูงของหัวความดันรวมเรียกว่า เส้นพลังงาน (Energy line) ความลาดเอียงของเส้นพลังงานเขียนแทนด้วย S_f ความลาดเอียงของผิวน้ำเขียนแทนด้วย S_w และความลาดเอียงของพื้นทางน้ำเขียนแทนด้วย $S_o = \sin \theta$ สำหรับการไหลแบบสม่ำเสมอ (Uniform flow) ค่า $S_f = S_w = S_o = \sin \theta$

ตามหลักการของพลังงาน (Principle of conservation of energy) จะได้พลังงานรวมที่หน้าตัดทางน้ำ (1) ด้านเหนือน้ำเท่ากับพลังงานรวมที่หน้าตัดทางน้ำ (2) ด้านท้ายน้ำบวกกับพลังงานที่สูญเสีย h_f (Energy loss) ระหว่าง 2 หน้าตัด นั่นคือ

$$z_1 + d_1 \cos \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2 \cos \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \tag{2.30}$$

ถ้าพื้นทางน้ำมีความลาดเอียงน้อย $\theta \simeq 0$ และค่า $\alpha_1 \simeq \alpha_2 \simeq 1$

ดังนั้น สมการ (2.30) เขียนได้เป็น

$$z_1+ y_1+ \frac{V_1^2}{2g} = z_2+ y_2+ \frac{V_2^2}{2g} + h_f \tag{2.31}$$

y_1 และ y_2 คือความลึกจากผิวน้ำถึงพื้นทางน้ำที่หน้าตัด (1) และ (2) ตามลำดับ

ถ้า $\theta = 0$ ดังนั้น $Z_1 = Z_2$

สมการที่ (2.31) เขียนได้เป็น

$$y_1+ \frac{V_1^2}{2g} = y_2+ \frac{V_2^2}{2g} + h_f \tag{2.32}$$

ในการทดลองการไหลผ่านฝายน้ำล้นรูปไฮโดรฟอยล์แบบสมมาตรได้ปรับให้พื้นรางน้ำทดลองอยู่ในแนวราบ ($\theta = 0$) จึงได้ใช้สมการที่ (2.32) ในการหาพลังงานของน้ำที่สูญเสีย (Energy loss) โดยให้

$E_1 = y_1+ \frac{V_1^2}{2g}$ = พลังงานของน้ำเหนือพื้นรางน้ำที่หน้าตัด (1)

$E_2 = y_2+ \frac{V_2^2}{2g}$ = พลังงานของน้ำเหนือพื้นรางน้ำที่หน้าตัด (2)

$\Delta E = h_f$ = พลังงานของน้ำที่สูญเสียระหว่างหน้าตัด (1) ถึงหน้าตัด (2)

ดังนั้น สมการที่ (2.32) เขียนได้เป็น

$$E_1 = E_2+ \Delta E$$

$$\Delta E = E_1- E_2 \tag{2.33}$$