บทที่ 2

วิธีที่ทำการวิจัย

2.1 ข้อสมมุติฐานเบื้องต้น

ในการวิจัยหาแรงโก่งงอของแผ่นวงแหวนที่รับแรงกดกระทำตามที่แสดงในรูปที่ 4 เมื่อ a และ b เป็นรัศมีของขอบใน และขอบนอกตามลำดับ h เป็นความหนาของแผ่นวงแหวน และ $\bar{N}$ เป็นแรงกดที่มากระทำต่อความยาวของเส้นรอบวง ข้อสมมุติฐานเบื้องต้น มีดังต่อไปนี้.–

1) แผ่นวงแหวนเป็นแผ่นบาง (b ลบ a มีค่ามากกว่า h มาก)
2) แผ่นวงแหวนเป็นวัสดุที่เป็น isotropic และ homogeneous material
3) การโก่งงอเป็นแบบ elastic buckling
4) กฎของ Hooke สามารถนำมาใช้ได้

2.2 Governing Differential Equation (GDE)

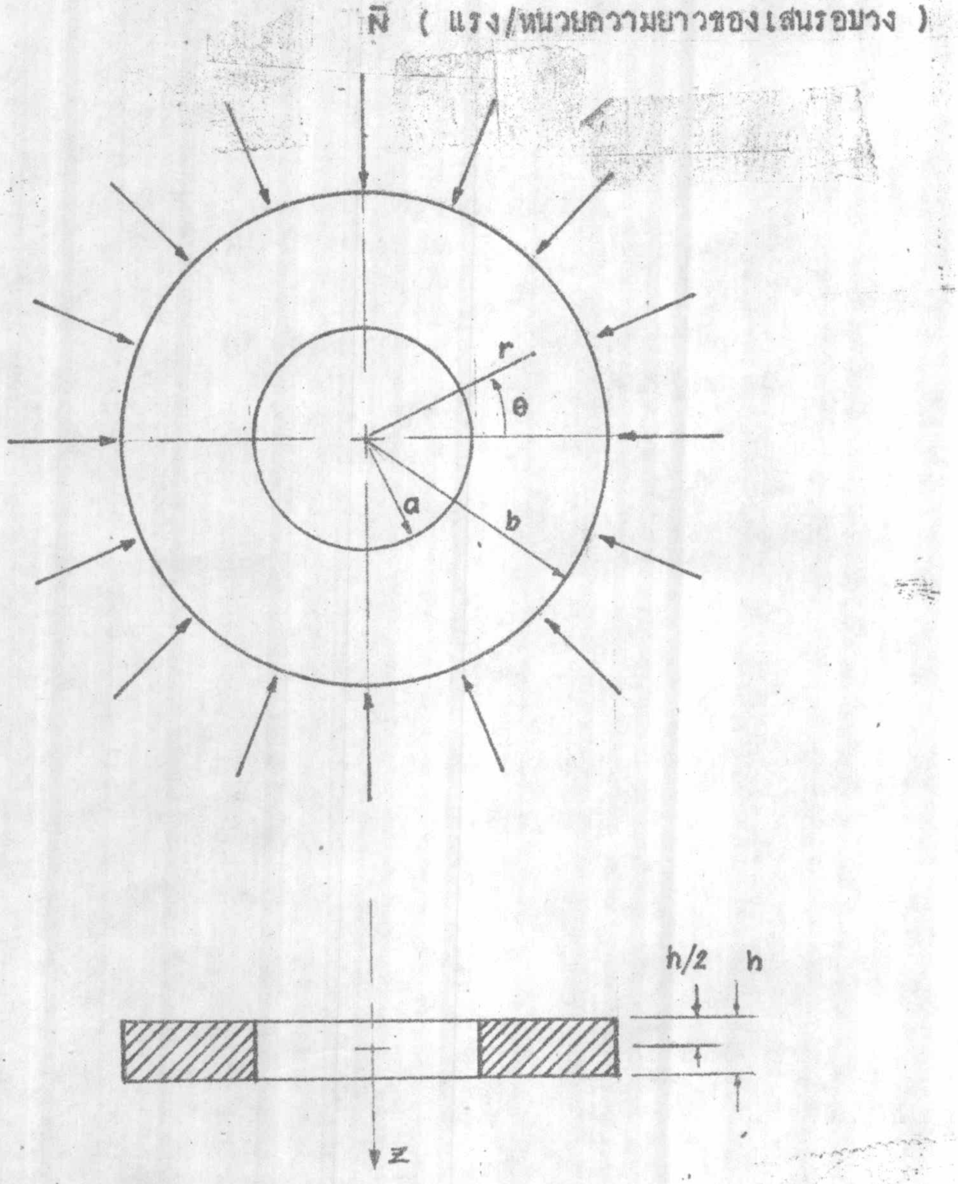
ใน polar coordinate เมื่อถือว่า body force ไม่มี เราจะได้สมการของ membrane equilibrium ดังต่อไปนี้ [8]

$$N_{rr,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{N_{rr} - N_{\theta\theta}}{r} = 0$$
$$\frac{1}{r} N_{\theta\theta,\theta} + N_{r\theta,r} + \frac{2}{r} N_{r\theta} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

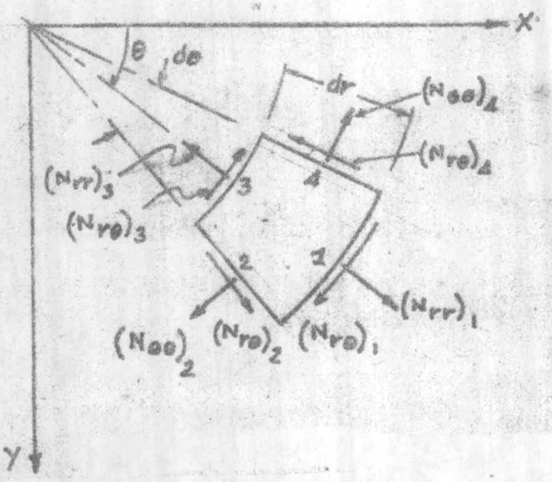
เมื่อเครื่องหมาย comma หมายถึง partial differentiation

สมการแรกของ (1) ได้จากการรวมแรงตามแนวรัศมี และสมการที่ 2 ได้จากการรวมแรงทางด้านตั้งฉากกับแนวรัศมี (รูปที่ 5)

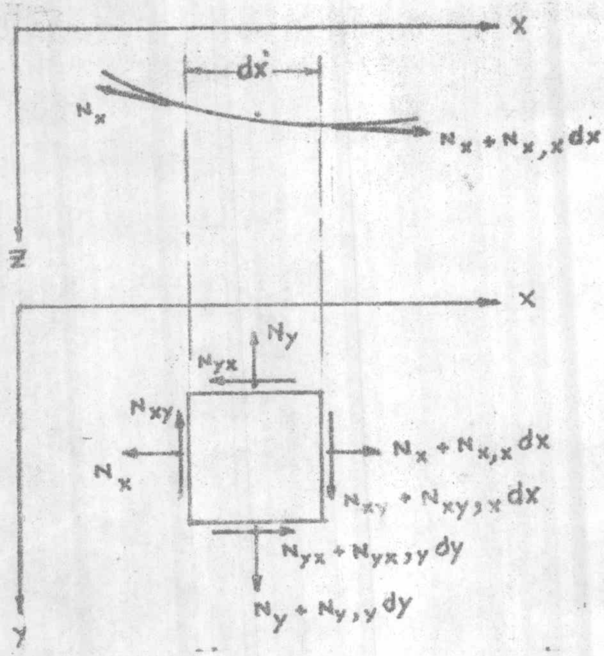
จากทฤษฎีของ thin plate เมื่อมีแรงกระทำทั้งในแนวขวางและแนวระนาบของแผ่นบาง ๆ พร้อมกัน ตัดชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของแผ่นบางมาคิดตามรูปที่ 6 เราจะได้สมการ GDE ของ bending plate อันเนื่องมาจากแรงเหล่านี้ในรูปดังนี้ [9]



รูปที่ 4 แผ่นวงแหวนรับแรงกดสม่ำเสมอตามขอบนอก



รูปที่ 5 แรงสมดุลย์ใน Polar Coordinate



รูปที่ 6 พิจารณาชิ้นส่วนเล็ก ๆ ของ Plate ที่ถูกกระทำ
ทั้งแรงในแนวระขวางและแรงในแนวระนาบพร้อมกัน

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{1}{D}\,(N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2N_{xy}w_{,xy} + q) \qquad \ldots\ldots(2)$$

เมื่อ w คือ transverse displacement, D เป็น bending stiffness และ q เป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่ผิวกระทำตั้งฉากกับผิว

ถ้า $q = 0$ สมการ (2) จะลดรูปลงเหลือ

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{1}{D}\,(N_{xx}w_{,xx} + N_{yy}w_{,yy} + 2N_{xy}w_{,xy}) \qquad \ldots\ldots(3)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่าง rectangular และ polar coordin ate คือ $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$ แปลงสมการที่ 3 ให้อยู่ในรูป polar coordinate จะได้

$$D\,\nabla^4 w - N_{rr}w_{,rr} - N_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}w_{,r} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\right) - 2N_{r\theta}\left(\frac{1}{r}w_{,\theta}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(4)$$

เมื่อ $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$

จากรูปที่ 4 ถ้าแผ่นบางนี้ไม่เกิดการโก่งงอเราจะได้ $w = 0$ ฉะนั้น เรามีเพียงสมการที่ 1 ซึ่งให้ membrane solution ของ stress resultant ดังต่อไปนี้ (ดูภาคผนวก ข)

$$N^o_{rr} = \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}\,\bar{N}\,\frac{1}{r^2} - \frac{b^2}{b^2 - a^2}\,\bar{N}$$

$$N^o_{\theta\theta} = -\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}\,\bar{N}\,\frac{1}{r^2} - \frac{b^2}{b^2 - a^2}\,\bar{N}$$

ให้ $A = \dfrac{a^2b^2}{b^2 - a^2}$

$$B = -\frac{b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\therefore \quad N^o_{rr} = \left(\frac{A}{r^2} + B\right)\overline{N}$$

$$N^o_{\theta\theta} = \left(-\frac{A}{r^2} + B\right)\overline{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ให้เครื่องหมาย "o" และ " ' " หมายความถึงเทอมก่อนที่จะเกิดการโก่งงอ(หรือเป็น membrane state) และเทอมที่เพิ่มขึ้นเพียงเล็กน้อยเพื่อให้เกิดการโก่งงอตามลำดับ ฉะนั้น เมื่อแผ่นวงแหวนตามรูปที่ 4 เริ่มการโก่งงอขึ้น

$$w = w^o + w' = w' \quad (\because w^o = 0)$$

$$N_{rr} = N^o_{rr} + N'_{rr}$$

$$N_{\theta\theta} = N^o_{\theta\theta} + N'_{\theta\theta}$$

$$N_{r\theta} = N^o_{r\theta} + N'_{r\theta} = N'_{r\theta} \quad (N^o_{r\theta} = 0)$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าข้างบนนี้ลงในสมการ (4) จะได้สมการของการโก่งงอดังนี้

$$D\nabla^4 w - (N^o_{rr} + N'_{rr})w_{,rr} - (N^o_{\theta\theta} + N'_{\theta\theta})\left(\frac{1}{r}w_{,r} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\right) - 2N'_{r\theta}\left(\frac{1}{r}w_{,\theta}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

เมื่อ w ใน (6) ก็คือ w' นั่นเอง

เนื่องจากว่า เราพิจารณาการโก่งงอเป็นแบบ Classical Buckling ตามรูปที่ 1 ตำแหน่ง A เป็น membrane state ที่จุดวิกฤตพอดี ฉะนั้น เราสามารถที่จะให้ค่าของแรงที่เพิ่มขึ้นให้น้อยเท่าไรก็ได้ ก็จะทำให้เกิดการโก่งงอทันที และดังนั้นค่าของ N'_{rr}, $N'_{\theta\theta}$ $N'_{r\theta}$ อันเนื่องมาจากแรงที่เพิ่มขึ้นเพื่อให้เกิดการโก่งงอ จึงมีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับค่าอื่นในสมการ (6) เราจึงสามารถปัดค่าเหล่านี้ทิ้งไปได้สมการใหม่จะเหลือ

$$D\nabla^4 w - N^o_{rr}w_{,rr} - N^o_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}w_{,r} + \frac{1}{r^2}w_{,\theta\theta}\right) = 0$$

และเมื่อแทนค่าจาก (5) ลงในสมการข้างบนนี้อีกที เราจะได้

$$D \nabla^4 w - (\frac{A}{r^2} + B)\, \bar{N} . w,_{rr} - (- \frac{A}{r^2} + B)\bar{N}(\frac{1}{r} w,_r + \frac{1}{r^2} w,_{\theta\theta}) = 0$$

ให้ $N = \bar{N}/D$ แล้วจัดเทอมเสียใหม่

$$\nabla^4 w + N(\frac{A}{r} - B)\nabla^2 w - \frac{2AN}{r^2} w,_{rr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

สมการที่ (7) นี้ เป็นสมการที่ควบคุมกลไกของการโก่งงอ (GDE) ของแผ่นวงแหวนบางซึ่งถูกกดด้วยแรงที่กระจายออกไปอย่างสม่ำเสมอที่ขอบนอก (ตามรูปที่ 4)

2.3 การหาแรงโก่งงอ

สมมุติว่าการโก่งงอเกิดในรูป

$$. \quad w = F(r) \cos n\theta , \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคลื่นที่เกิดขึ้นตามแนวเส้นรอบวง ในขณะโก่งงอ

แทนค่า w ลงในสมการ (7) แล้วจัดเทอมใหม่จะได้

$$. \quad F^{IV} + \frac{2F'''}{r} - (\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2})\, F'' - (\frac{\alpha_1}{r} - \frac{\alpha_2}{r^3})F' + (n^2\frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^4})F = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

เมื่อตัวเลขโรมันเหนือตัว F หมายถึง order ของ differentiation เมื่อเทียบกับ r และ

$$\alpha_1 = BN$$

$$\alpha_2 = 1 + 2n^2 + AN$$

$$\alpha_3 = n^2(n^2 - AN - 4)$$

จะเห็นว่า GDE (9) ติดอยู่ในเทอมของรัศมี r เท่านั้นเมื่อเลือก F(r) ที่เหมาะสมมาแทนค่า สมมุติ เช่น F(r)ถูกเลือกให้อยู่ในรูป

$$F(r) = C\, f(r)$$

โดย C เป็นตัวคงที่ตามใจชอบ และ f(r) เป็น function ที่เหมาะสมคือสอดคล้องกับ boundary conditions ทุก ๆ ข้อ เมื่อใช้วิธีของ Galerkin (ดูภาค

ผนวก ก) จะได้

$$\int_a^b (\text{GDE ของ } F(r)) \cdot f(r)dr = 0$$

หรือ $$C\int_a^b (\text{GDE ของ } f(r)) \cdot f(r)dr = 0$$

แต่เราเลือก $C \neq 0$

$$\therefore \int_a^b (\text{GDE ของ } f(r)) \cdot f(r)dr = 0 \quad \text{.............(10)}$$

ในที่นี้เราสมมุติ **f(r)** ในแต่ละกรณีของเงื่อนไขของขอบ (boundary conditions) สำหรับปัญหาของเราดังต่อไปนี้

a) กรณีที่ 1 เราสมมุติ $f(r) = (a^2 - r^2)^2(b^2 - r^2)^2$

สำหรับแผ่นวงแหวนที่ ขอบนอกและขอบในต่างถูกยึดแน่นและสำหรับกรณีนี้มีเงื่อนไขของการรองรับที่ขอบดังนี้.

1. $w\Big|_{r=a} = 0$
2. $w\Big|_{r=b} = 0$
3. $w,_r\Big|_{r=a} = 0$
4. $w,_r\Big|_{r=b} = 0$

b) กรณีที่ 2 เราสมมุติ $f(r) = (a^2 - r^2)(b^2 - r^2)^2$

สำหรับแผ่นวงแหวนที่ขอบนอกถูกยึดแน่น ขอบในรองรับแบบธรรมดามีเงื่อนไขการรองรับที่ขอบดังนี้

1. $w\Big|_{r=a} = 0$
2. $w\Big|_{r=b} = 0$
3. $w,_{rr} + \frac{\nu}{r}(w,_r + \frac{1}{r}w,_{\theta\theta})\Big|_{r=a} = 0$

$$4.\quad w_{,r}\Big|_{r=b} = 0$$

เมื่อนำสมการที่สมมุติในกรณี 1, 2 ไปแทนค่าลงในสมการ (10) ตามลำดับ integrate ออกมาทั้งสองกรณีเราจะได้คำตอบออกมาในรูป

$$\bar{N}_{cr} = \lambda \frac{D}{b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

เมื่อ λ เป็นเทอมที่ติดค่า n (จำนวนคลื่น), a/b (อัตราส่วนระหว่างรัศมีขอบในและขอบนอก) เมื่อแทนค่า n ในแต่ละค่าของ a/b เราก็สามารถหาคำตอบได้ว่า แต่ละขนาดของรูวงแหวน แรงวิกฤตที่จะเกิดขึ้นที่ n มีค่าเท่าไหร่ ถ้า n = 0 ย่อมหมายถึงการโก่งงอเป็นแบบมีสมมาตรถ้า n ที่ให้แรงวิกฤตต่ำสุด มีค่านอกเหนือจากศูนย์ หมายถึงเกิดการโก่งงอที่มีรูปร่างเป็นคลื่นตามแนวเส้นรอบวง และเมื่อได้ผลออกมาแต่ละขนาดของรูวงแหวนแล้วนำไปเขียนกราฟเพื่อใช้ในการออกแบบต่อไป

2.4 ตัวอย่างการคำนวณ

เมื่อเลือก f(r) ที่ต้องการได้แล้ว กระจายเทอมของ f(r) ออกมาในรูป

$$f(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n r^n$$

เมื่อ $c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots c_n$ ต่างก็อยู่ในรูป f(a,b)

เพื่อที่จะแสดงให้ง่ายเข้าเราจะสมมุติว่า f(r) เมื่อกระจายเทอมออกมามีค่าดัชนีสูงสุดเท่ากับ 4 และมีดัชนีเป็นเลขคู่เท่านั้น (ซึ่งความจริง f(r) เมื่อกระจายออกมาอาจจะมีค่าดัชนีของ r ตั้งแต่ 0 ถึงค่าไหนก็ได้แล้วแต่สมมุติให้ f(r) นั้นให้สอดคล้อง boundary conditions ดีแค่ไหน) ดังนั้น f(r) ที่สมมุติให้ง่ายเข้าจะอยู่ในรูป

$$f(r) = c_0 + c_2 r^2 + c_4 r^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$\therefore \quad f' = 2c_2 r + 4c_4 r^3$$

$$f'' = 2c_2 + 12c_4 r^2$$

$$f''' = 24c_4 \cdot r$$
$$f^{iv} = 24c_4$$

เนื่องจาก F(r) อยู่ในรูปของ C f(r) เมื่อแทนค่า F(r) และ **differentiation** ของ F(r) ลงใน GDE (9) จะได้

$$\text{GDE ของ } F(r) = C\Big[24c_4 + 48c_4 - (\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{r^2})(2c_2 + 12c_4r^2) - (\frac{\alpha_1}{r} - \frac{\alpha_2}{r^3})(2c_2r + 4c_4r^3) + (n^2 \cdot \frac{\alpha_1}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^4})(c_o + c_2r^2 + c_4r^4)\Big]$$

$$= C\Big[\frac{c_o\alpha_3}{r^4} + (n^2c_o\alpha_1 + c_2\alpha_3)\frac{1}{r^2} + \{72c_4 + (n^2c_2 - 4c_2)\alpha_1 - 8c_4\alpha_2 + c_4\alpha_3\} + (n^2c_4 - 16c_4)\alpha_1r^2\Big]$$

ให้

$$s_1 = c_o\alpha_3$$

004833

$$s_2 = n^2c_o\alpha_1 + c_2\alpha_3$$
$$s_3 = 72c_4 + (n^2c_2 - 4c_2)\alpha_1 - 8c_4\alpha_2 + c_4\alpha_3$$
$$s_4 = (n^2c_4 - 16c_4)\alpha_1$$

$$\text{GDE ของ } F(r) = C(\frac{s_1}{r^4} + \frac{s_2}{r^2} + s_3 + s_4r^2)$$

เมื่อใช้วิธีของ Galerkin จะได้ $\int_a^b (\text{GDE ของ } F(r)) \cdot f(r)dr = 0$

$$C \neq 0, \therefore \int_a^b (\frac{s_1}{r^4} + \frac{s_2}{r^2} + s_3 + s_4r^2)(c_o + c_2r^2 + c_4r^4)dr = 0 \qquad (b)$$

สมการ (b) ก็คือสมการที่ (10) นั่นเองกระจายเทอมของ (b) ออกมา

$$\int_a^b \left[\frac{s_1 c_o}{r^4} + (s_2 c_o + s_1 c_2)\frac{1}{r^2} + (s_3 c_o + s_2 c_2 + s_1 c_4) + (s_4 c_o + s_3 c_2 + s_2 c_4) r^2 + (s_4 c_2 + s_3 c_4) r^4 + (s_4 c_4) r^6 \right] dr = 0$$

ถ้าให้ $x_m = \frac{b^m - a^m}{m}$ สมการข้างบน integrate ออกมาได้

$$(s_1 c_o) x_{-3} + (s_2 c_o + s_1 c_2) x_{-1} + (s_3 c_0 + s_2 c_2 + s_1 c_4) x_1 + (s_4 c_o + s_3 c_2 + s_2 c_4) x_3 + (s_4 c_2 + s_3 c_4) x_5 + (s_4 c_4) x_7 = 0 \qquad \text{.............(c)}$$

เมื่อแทนค่า $s_1, s_2, s_3, s_4, c_o, c_2, c_4$ ลงใน (c) และสุดท้ายเราจะได้สมการติดอยู่ในค่า N, a, b, n เท่านั้น แต่เนื่องจากเมื่อแทนค่าโดยตรงจนได้ N = f(a, b, n) จะได้สมการยาวมาก และยุ่งยากต่อการคำนวณและยังเสี่ยงต่อการคำนวณผิดได้ง่าย เช่น ต้องคำนวณค่า a/b แต่ละค่าก่อนแล้วแปรผันค่า n ไปเรื่อย ๆ โดยเริ่มจากค่าศูนย์ เมื่อได้ค่าที่พอใจแล้วก็กำหนดค่า a/b ใหม่ แล้วแปรผันค่า n ไปอีกเช่นนี้ ซึ่งใช้เวลาในการคำนวณมาก จึงต้องใช้เทคนิคทางคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณ โดยจัดรูปร่างของสมการให้ดี และในที่สุดสมการขั้นสุดท้ายจะได้ออกมาในรูป

$$\bar{N}_{cr} = \lambda \frac{D}{b^2}$$

เมื่อ $\lambda = f(a/b, n)$ ซึ่งสามารถคำนวณค่า λ ตามที่ต้องการออกมาได้