บทที่ II

บัญญัติการรวมเส้นทาง

(Path Integral Formulation)

ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานวิธีสร้าง การรวมเส้นทางของฟายน์แมน โดยเฉพาะตัวแพร่กระจายฟายน์แมน (Feynman Propagator) และการหาตัวแพร่กระจายฮาโมนิคออสซิลเลเตอร์ (Harmoric Oscillator Propagator) รวมทั้งการหาค่าคงตัวของฮาโมนิกออสซิลเลเตอร์ ในหนึ่งมิติ

II.1 ตัวแพร่กระจายฟายน์แมน (Feynman Propagator)

พิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ซึ่งอนุภาคนี้เคลื่อนที่ได้หลายทางด้วยกัน ในทางกลศาสตร์ควอนตัม(Quantum Mechanics)เราไม่อาจระบุตำแหน่งที่ถูกต้องได้ ภายในระยะเวลาใด ๆ แต่เราจะบอกถึงโอกาสที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่งและเวลาที่กำหนดให้ได้ สำหรับทางกลศาสตร์แบบฉบับ (Classical Mecharics) จะต้องมีอนุภาคที่เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ได้ทางเดียวโดยเฉพาะ ซึ่งทำให้แอกชัน(Action) S มีค่าน้อยที่สุด ที่เราเรียกกฎนี้ว่า กฎแห่งแอกชันที่น้อยที่สุด (Principle of Least Action)

เพื่อให้ง่ายเราจะพิจารณากรณี อนุภาคเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติ กำหนดให้อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่งหนึ่งในเวลาใด ๆ อาจเขียนทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ด้วย $x(t)$ เมื่อ x เป็นโคออร์ดิเนท ที่เป็นฟังก์ชันของเวลา t ถ้าอนุภาคตัวหนึ่ง เริ่มต้นเคลื่อนที่ด้วยเวลา t_a จากจุด x_a และไปยังปลายทางที่ x_b ในเวลา t_b ดังนั้นเส้นทางแบบฉบับ (Classical Path) $x(t)$ อาจกำหนดให้เป็นฟังก์ชัน $L = L(\dot{\bar{x}},\bar{x},t)$

การเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ ทำให้เขียนเส้นทาง **แบบฉบับ** [illegible] **ได้ดังสมการ**

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\bar{x}},\bar{x},t)\,dt \qquad (2.1)$$

จากกฎแห่งแอกชันที่น้อยที่สุด ที่ทำให้แอกชันมีค่าน้อยที่สุด จะได้

$$\delta S = S[\bar{x}+\delta x] - S(\bar{x}) = 0 \qquad (2.2)$$

ในกลศาสตร์ควอนตัมนั้น อนุภาคเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง มีได้หลาย ๆ ทางด้วยกัน แต่ทางกลศาสตร์ **แบบฉบับมีเพียงทางเดียว ดังนั้น** โอกาสของอนุภาคเคลื่อนที่จาก x_a ในเวลา t_a ไปยัง x_b ในเวลา t_b หาโดยการคิดอำพน (Amplitude) K(b,a) กำลังสอง ซึ่งเป็นผลรวมของ $\phi[x(t)]$ ที่เกิดจากแต่ละทาง $x(t)$ อาจเขียนเป็นสมการได้ดังนี้.–

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{รวมทางทุกแห่ง} \\ \text{จาก a ไปยัง b}}} \phi[x(t)] \qquad (2.3)$$

โดยที่ $\phi[x(t)]$ ของทางเดิน $x(t)$ เป็นปฏิภาคโดยตรงกับแอคชัน S ดังสมการ

$$\phi[x(t)] = \text{Constant}.\exp\left\{\frac{i}{h} S[x(t)]\right\} \qquad (2.4)$$

แทนสมการ (2.4) ลงในสมการ (2.3) จะได้ว่า

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{รวมทางทุกแห่ง} \\ \text{จาก } a \text{ ไปยัง } b}} \text{Constant}.\exp\{\tfrac{i}{\hbar} S[x(t)]\} \qquad (2.5)$$

การหาค่าโอกาสที่อำพน $K(b,a)$ จาก a ไปยัง b เราจะต้องหาจากสมการ (2.5) โดยคิดทางเดินทุกแห่งที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้ ในทางปฏิบัติเป็นการยาก ทั้งนี้เราต้องหาทางที่อนุภาคเคลื่อนที่เป็นจำนวนมาก จาก a ไปยัง b ดังนั้นเรายังมีวิธีอื่นที่จะคำนวณหาผลรวมทั้งหมดของทางเดินที่อนุภาคเคลื่อนที่ ได้ดังนี้คือ.

การหาอำพน $K(b,a)$ ในช่วงเวลา (t_b, t_a) อาจแบ่งออกเป็นขั้น ๆ กว้าง ε จากการแบ่งนี้เอง ทำให้ได้หนึ่งชุดของ t_i ระยะห่าง ε ในระหว่าง t_b กับ t_a เวลาแต่ละ t_i ของจุด x_i ที่ได้ถูกคัดเลือกและทางเดินหนึ่งได้ถูกสร้าง โดยการเชื่อมจุดทุก ๆ จุดที่เลือกทำให้ได้เป็นเส้นตรง อาศัยวิธีการนี้เราได้สร้างผลรวมของทางเดินทุกแห่ง โดยหาผลรวมของผลคูณทุกค่าของ x_i ที่อยู่ระหว่าง 1 กับ N-1 เมื่อ

$$N\varepsilon = t_b - t_a \;, \qquad \varepsilon = t_{i+1} - t_i$$

$$t_o = t_a \;, \qquad t_n = t_b$$

$$x_o = x_a \;, \qquad x_n = x_b$$

โดยการใช้วิธีนี้ โอกาสของอำพนในสมการ (2.5) อาจเขียนในรูปนี้คือ

$$K(b,a) = \int\int\int\int \cdots\cdots\cdots \int \exp\{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]\} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} \quad (2.6)$$

การหาผลรวมนี้ไม่คิด x_0 กับ x_n เพราะว่า x_a กับ x_b เป็นจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย เพื่อที่จะได้ชุดทางเดินที่เป็นไปได้แบบสมบูรณ์ ระหว่าง a กับ b โดยทำให้ ε มีค่าน้อย และ นอร์มัลไลซิงแฟคเตอร์ (Normalizing Factor) A ที่ขึ้นกับ ε แทนลงในสมการ (2.6) เราจะได้

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{A} \int\int \cdots\cdots\cdots \int \exp\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)]\} \frac{dx_1}{A} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

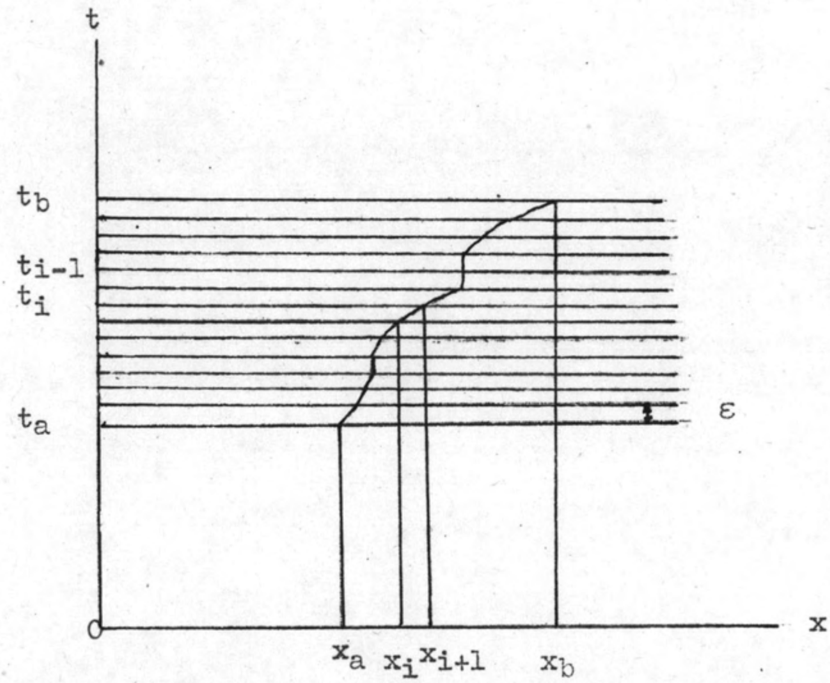
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \frac{dx_{n-1}}{A} \quad (2.7)$$

เมื่อ $A = \left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2}$,

ดังนั้นเราอาจเขียนผลรวมของทางเดินทุกแห่ง ในรูปของสัญกรณ์ (Notation) ได้ดังนี้คือ.—

$$K(b,a) = \int_a^b \exp\{ \frac{i}{\hbar} S[x(t)]\} \mathcal{D}[x(t)] \quad (2.8)$$

เรียกว่า "การรวมเส้นทาง" และอำพนที่อยู่ในรูปนี้เป็นที่รู้จักกันว่าตัวแพร่กระจายฟายน์แมน



รูปที่ 2.1 ภาพที่แสดงการสร้างผลรวมของการรวมเส้นทาง

II.2 ตัวแพร่กระจายฮาโมนิกออสซิลเลเตอร์

(Harmonic Oscillator Propagator)

ก่อนที่จะแสดงวิธีหาตัวแพร่กระจายฟายน์แมน แห่งฮาโมนิกออสซิลเลเตอร์ จะยกตัวอย่างในกรณีการหาตัวแพร่กระจายอนุภาคอิสระในหนึ่งมิติ แล้วจึงจะแสดงวิธีการหาตัวแพร่กระจายแห่งฮาโมนิกออสซิลเลเตอร์ โดยวิธีการรวมเส้นทาง จุดประสงค์ก็เพื่อให้คุ้นเคยกับระบบง่าย ๆ ของแอคชันแบบฉบับเสียก่อน เพื่อนำไปสู่ปัญหายุ่งยากในการคำนวณหาแอกชันแบบฉบับในระบบที่ไม่เป็นระเบียบ

เราจะพิจารณาอนุภาคอิสระ ที่มีลากรังจ์เกียน (Lagrangian) ในรูป

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

แทนลงในสมการ (2.7) ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระ คือ

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\int \cdots\cdots\cdots \int \exp\left[\frac{i\varepsilon}{\hbar} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 \right] \frac{dx_1}{A} \cdot \frac{dx_2}{A} \cdots\cdots \frac{dx_{n-1}}{A} \cdot \frac{1}{A} \qquad (2.9)$$

เมื่อ

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{1/2}$$

จะเห็นได้ว่า อินทิกรัลในเอกซ์โปเนนต์ เป็นแบบเกาเซี่ยนอินทิกรัล (Gaussian Integrals) เช่นอยู่ในรูป $\int \exp(-ax^2)dx$ หรือ $\int \exp(-ax^2+bx)\,dx$ แต่การอินทิเกรตเป็นผลคูณเกาเซี่ยนทั้งหมด n-1 ตัว ดังนั้นเราอินทิเกรตครั้งละหนึ่งตัวแปร ทำเช่นนี้จนกว่าจะอินทิเกรตตัวแปรที่เหลือหมด โดยใช้สูตร

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{a(\underline{r}_o-\underline{r}_1)^2 + b(\underline{r}_2-\underline{r}_1)^2\}d\underline{r}_1$$

$$= \left[-\frac{\pi}{a+b}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{ab}{a+b}(\underline{r}_2-\underline{r}_o)^2\right]$$

ดังนั้นเราอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร dx_1 จะได้ว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}[(\underline{x}_1-\underline{x}_o)^2+(\underline{x}_2-\underline{x}_1)^2]\}d\underline{x}_1\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{-1/2.2}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)\left(\frac{i\pi\hbar\varepsilon}{m}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{im}{2\hbar(2\varepsilon)}(\underline{x}_2-\underline{x}_o)^2\right]$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi\hbar i(2\varepsilon)}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{im}{2\hbar(2\varepsilon)}(\underline{x}_2-\underline{x}_o)^2\right] \qquad (2.10)$$

นำเอา $\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{-1/2} \exp[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\underline{x}_3-\underline{x}_1)]$ คูณกับสมการ (2.10)

และทำการอินทิเกรตเทียบกับ $\underline{x}_2$ จะได้

$$\iint \exp\{\frac{im}{2\hbar\varepsilon}[(\underline{x}_1-\underline{x}_o)^2+(\underline{x}_2-\underline{x}_1)^2+(\underline{x}_3-\underline{x}_2)^2]\} \frac{d\underline{x}_1}{A} \frac{d\underline{x}_2}{A} \frac{1}{A}$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(2\varepsilon)}\right)^{1/2} \int \exp[\frac{im}{2\hbar(2\varepsilon)}(\underline{x}_2-\underline{x}_0)^2] \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2} \exp[\frac{im}{2\hbar\varepsilon}(\underline{x}_3-\underline{x}_2)^2] d\underline{x}_2$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(2\varepsilon)}\right)^{1/2}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{3m}{2\pi i\hbar(2\varepsilon)}\right)^{-1/2} \exp[\frac{im}{2\hbar(3\varepsilon)}(\underline{x}_3-\underline{x}_o)^2]$$

$$=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar(3\varepsilon)}\right)^{1/2} \exp[\frac{im}{2\hbar(3\varepsilon)}(\underline{x}_3-\underline{x}_o)^2]$$

ถ้าเราทำการอินทิเกรตเช่นนี้เรื่อย ๆ จนถึง n-1 จะได้ว่า

$$K(b,a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar n\varepsilon}\right)^{1/2} \exp[\frac{im(\underline{x}_n-\underline{x}_o)^2}{2\hbar n\varepsilon}]$$

แต่ในที่นี้ $n\varepsilon = t_b-t_a$, $x_o = x_a$ และ $x_n = x_b$

จะได้ตัวแพร่กระจาย

$$K(b,a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}\right)^{1/2} \exp[\frac{im(\underline{x}_b-\underline{x}_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}]$$

$$= F(t_b-t_a)\exp[\frac{im(\underline{x}_b-\underline{x}_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}] \qquad (2.11)$$

เมื่อค่าคงตัวของตัวแพร่กระจายอิสระ

$$F(t_b-t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b-t_a)}\right)^{1/2} \qquad (2.11a)$$

ต่อไป เราจะพิจารณาฮาโมนิคออสซิเลเตอร์ ที่มีลากรังจ์เกียน (Lagrangian) ในรูป

$$L = \frac{m}{2}[\dot{x}^2(\tau) - W^2x^2(\tau)] \qquad (2.12)$$

และคิดอินทิเกรชันของทางเดินทุกแห่ง จาก (x_1 , t_1) ไปยัง (x_2, t_2) ของตัวแพร่กระจาย

$$K(x_2,x_1,t_2-t_1) = \int_{x_1}^{x_2} \exp\{\frac{i}{\hbar} S[x(\tau)]\}\mathcal{D}[x(\tau)] \qquad (2.13)$$

เมื่อแอคชันคือ

$$S[x(\tau)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}[\dot{x}^2(\tau) - W^2x^2(\tau)]d\tau \qquad (2.14)$$

เพื่อที่จะหาตัวแพร่กระจายในสมการ (2.13) ก่อนอื่นเราจะต้องพิจารณาว่าทางเดิน $x(\tau)$ อาจเขียนในรูปของทางเดินแบบฉบับ $\bar{x}(\tau)$ กับทางเดิน $y(\tau)$ ที่เบี่ยงเบนจากทางเดินแบบฉบับ ดังสมการ

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + y(\tau) \qquad (2.15)$$

นั่นคือ แทนที่จะนิยาม จุดบนทางเดินระยะ $x(\tau)$ จากแกนโคออร์ดิเนทใด ๆ เราจึงนิยามใหม่ว่า จุดบนทางเดินระยะ $x(\tau)$ เบี่ยงเบนไปจากทางเดินแบบฉบับด้วย $y(\tau)$ แต่ทางเดินใด ๆ $x(\tau)$ และทางเดินแบบฉบับ $y(\tau)$ จะต้องมาถึงจุดเดียวกัน เพราะฉะนั้น

$$y(0) = y(\tau) = 0$$

และแทน $\mathcal{D}[x(\tau)]$ ด้วย $\mathcal{D}[y(\tau)]$

จากสมการ (2.14) และ (2.15) ผลของแอกชัน ก็คือ

$$
\begin{aligned}
S[x(\tau)] &= S[\bar{x}(\tau) + y(\tau)] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} d\tau \{\frac{m}{2}[\dot{\bar{x}}^2(\tau) - W^2\bar{x}^2(\tau)]\} \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} d\tau \{\frac{m}{2}[\dot{y}^2(\tau) - W^2 y^2(\tau)]\} \\
&= S_{cl} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m[\dot{y}^2(\tau) - W^2 y^2(\tau)]\, d\tau \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

เมื่อแอกชันแบบฉบับคือ

$$
S_{cl} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m[\dot{\bar{x}}^2(\tau) - W^2\bar{x}^2(\tau)]\, d\tau
$$

แทนสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.13) จะได้ตัวแพร่กระจาย

$$
\begin{aligned}
K[x_2,x_1;t_2-t_1] &= \exp[\frac{i}{\hbar} S_{cl}] \int_0^0 \exp\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}[\dot{y}^2(\tau) - W^2 y^2]d\tau\}\mathcal{D}[y(\tau)] \\
&= \exp[\frac{i}{\hbar} S_{cl}]\, F(t_2-t_1) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

เมื่อ

$$F(t_2-t_1) = \int_0^0 \exp\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}[\dot{y}^2(\tau)-W^2y^2]d\tau\}\mathcal{D}[y(\tau)] \qquad (2.18)$$

คือมัลติพลิเคทิฟว์ ฟังก์ชัน ของเวลาที่ปลายจุด พิจารณาการหาแอกชันแบบฉบับ S_{cl} ที่เขียนอยู่ในรูป

$$S_{cl} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} [\dot{\bar{x}}^2(\tau)-W^2\bar{x}^2(\tau)]d\tau \qquad (2.19)$$

เมื่อทางเดิน แบบฉบับ $\bar{x}(\tau)$ ต้องสอดคล้องกับหลักแห่งแอกชันที่น้อยที่สุดดังนั้น

$$\delta S_{cl} = 0 = \frac{m}{2}[\int_{t_1}^{t_2} 2\dot{\bar{x}}\delta\dot{\bar{x}}-W^2.2\bar{x}\delta\bar{x}]d\tau$$

$$= m\dot{\bar{x}}\delta\bar{x}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}[-m\ddot{\bar{x}}-mW^2\bar{x}]\delta\bar{x}d\tau \qquad (2.20)$$

แต่ การผันแปรทางเดินที่ปลายจุมีค่าคงที่ ดังนั้นเทอมที่ 1 ในสมการ (2.20) มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\ddot{\bar{x}}(\tau) + W^2\bar{x}(\tau) = 0 \qquad (2.21)$$

คำตอบของสมการ (2.21) คือ

$$\bar{x}(\tau) = A\sin W\tau + B\cos W\tau \qquad (2.22)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ตามใจชอบ (Arbitrary Constant)

เงื่อนไขขอบเขต $x(t_1) = x_1$

$$x(t_2) = x_2$$

และ $T = t_2-t_1$

โดยใช้เงื่อนไขข้างบน เราอาจหาค่าคงที่ A และ B ได้ดังนี้คือ

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{x_2-x_1\cos WT}{\sin WT} \\ B &= x_1 \end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

จากสมการ(2.19) ในวงเล็บอาจอินทิเกรตแบ่งที่ละส่วนได้

$$S_{cl} = \frac{m}{2}[\dot{\bar{x}}(\tau)\bar{x}(\tau)\Big|_0^T - \int_0^T \bar{x}\ddot{\bar{x}}d\tau - W^2\int_0^T \bar{x}^2(\tau)d\tau]$$

$$= \frac{m}{2}[\dot{\bar{x}}(T)x(T)-\dot{\bar{x}}(0)\bar{x}(0)- \int_0^T \bar{x}(\tau)[\ddot{\bar{x}}(\tau)+W^2\bar{x}(\tau)]d\tau$$

แต่ $\ddot{\bar{x}}(\tau) + W^2\bar{x}(\tau) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$S_{cl} = \frac{m}{2}[\dot{\bar{x}}(T)\bar{x}(T)-\dot{\bar{x}}(0)\bar{x}(0)] \quad (2.24)$$

ดิฟเฟอเรนทิเอท สมการ(2.22) เทียบกับ τ จะได้

$$\dot{\bar{x}}(\tau) = AW\cos W\tau - BW\sin W\tau \quad (2.25)$$

เราอาจหาค่าในวงเล็บ สมการ(2.21) โดยใช้เงื่อไขที่ $t = 0$ และ$t = T$ และใช้สมการ (2.22),(2.25) กับ (2.23)จะได้แอกชันเดิมว่า

$$S_{cl} = \frac{mW}{2\sin WT}[\cos WT(x_1^2 + x_2^2)-2x_1x_2] \quad (2.26)$$

จากสมการ (2.18) ทุก ๆ เส้นทาง y(t) ที่เคลื่อนที่จาก 0 ในเวลา $t = 0$ ถึง 0 ในเวลา $t = T$ ทางเดินเช่นนี้ อาจเขียนเป็นอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier Sine Series) ซึ่งมีคาบเป็น ดังสมการ

$$y(\tau) = \sum_n a_n \sin\frac{n\pi\tau}{T} \tag{2.27}$$

จากสมการ(2.27) เราพิจารณาเส้นทางเป็นฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ a_n แทนที่จะเป็นฟังก์ชันของ y ที่เวลาใด ๆ t ซึ่งเป็นการแปลงแบบเชิงเส้น(Linear Transformation) ที่จาโคเบียน (Jacobian) J มีค่าคงที่ จะเห็นได้ว่าเส้นทาง y(t) ไม่ขึ้นกับ w,m และ $\hbar$ ดังนั้นเราอาจหาจาโคเบียนได้โดยตรง แต่อย่างไรก็ตาม เราจะยังไม่หาจาโคเบียน ทั้งนี้เราจะรวมแฟคเตอร์ต่าง ๆ ที่ไม่ขึ้นกับ w รวมเป็นค่าคงที่เพียงตัวเดียวในตอนต่อไป เพราะฉะนั้นแอกชันในอินทิกรัล อาจเขียนในเทอมอนุกรมฟูเรียร์ ดังสมการ(2.27) ดังนั้นเทอมพลังงานจลย์ $\dot{y}(t)$ คือ

$$\int_0^T \dot{y}^2(\tau)\,d\tau = \sum_n \sum_m \frac{n\pi}{T}\frac{m\pi}{T} a_n a_m \int_0^T \cos\frac{n\pi\tau}{T}\cos\frac{m\pi\tau}{T}\,d\tau$$

$$= T\frac{1}{2}\sum_n \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2 \tag{2.28}$$

ในทำนองเดียวกัน เทอมพลังงานศักย์จะได้

$$\int_0^T y^2 dt = T\frac{1}{2}\sum_n a_n^2 \qquad (2.29)$$

ต่อไปแบ่งเวลา T ออกเป็นขั้น ๆ แยกออกจากกันตามช่วงยาว ε เช่นเดียวกับ (1.1) ดังนั้นจะมีสัมประสิทธิ์ a_n ทั้งหมด N ตัว แทนสมการ (2.28) และ (2.29) ลงในสมการ (2.18) ฉะนั้นทางเดินรวม จึงเป็น

$$F(T) = J\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{im}{2\hbar}\left[\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - W^2\right] a_n^2\right]\right\} \frac{da_1}{A}\frac{da_2}{A}\cdots\cdots\frac{da_N}{A}$$

เทอมในเอกซ์โปเนนต์อาจแยกออกเป็นหลายเทอมด้วยกัน ผลรวมของแต่ละสัมประสิทธิ์ อาจทำแยกออกจากกัน ดังนั้นผลของหนึ่งอินทิเกรตชันจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{\exp[\frac{im}{2\hbar}(\frac{n^2\pi^2}{T^2} - W^2)a_n^2]\}\frac{da_n}{A} = (\frac{n^2\pi^2}{T^2} - W^2)^{-1/2}$$

โดยได้ใช้สูตร

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(+ax^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}}$$

แต่การรวมเส้นทาง ปรากฏว่าเป็นปฏิภาค โดยตรงกับ

$$\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2}-W^2\right)^{-1/2}=\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2}\right)^{-1/2}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{W^2T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1/2}$$

จะเห็นได้ตัวคูณตัวแรกทางขวามือ ไม่ได้ขึ้นกับ W ซึ่งเรารวมกับจาโคเบียน และแฟคเตอร์อื่น ๆ เป็นค่าคงที่ตัวเดียว

จากเอกลักษณ์

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{W^2T^2}{n^2\pi^2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{\sin WT}{WT}\right)^{-1/2}$$

ดังนั้น

$$F(T)=C\left(\frac{\sin WT}{WT}\right)^{-1/2}$$

เมื่อ C คือค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับ W

ถ้า W = 0 อินทิกรัลของเราก็เป็นกรณีอนุภาคอิสระซึ่งเราได้หาแล้วว่า

$$F(T)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}$$

ดังนั้น ฮาร์โมนิกออสซิลเลเทอร์ ของมัลติพลิเคทิพว์ฟังก์ชันเป็น

$$F(T)=\left(\frac{mW}{2\pi i\hbar\sin WT}\right)^{1/2}\qquad(2.30)$$

โดยการใช้สมการ (2.26) , (2.30) และ (2.17) จะได้ตัวแพร่กระจายแห่งฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ในหนึ่งมิติ เป็น

$$K(\underline{x}_2, \underline{x}_1, t_2-t_1) = \left(\frac{mW}{2\pi i\hbar \sin WT}\right)^{1/2} \exp\{\frac{i}{\hbar}\frac{mW}{2\sin WT}[\cos WT(\underline{x}_2^2+\underline{x}_1^2) - 2\underline{x}_1\underline{x}_2]\} \qquad (2.31)$$