บทที่ 2

ของไหลอุดมคติ

2.1 ธรรมชาติของของไหล

เป็นที่ทราบกันมาแล้วว่าสสารแบ่งออกเป็น 3 สถานะ คือ ของแข็ง ของเหลว และกาซ สำหรับของเหลวและกาซสามารถเรียกรวมกันได้ว่าของไหล (fluid) เพราะของเหลวและกาซประพฤติตัวเหมือนกันคือ เมื่อได้รับความเค้นเฉือน (shearing stress) จะเกิดการเสียรูปต่อเนื่องกันไปตลอดเวลาไม่ว่าความเค้นเฉือนนั้นจะมีขนาดน้อยเพียงใดก็ตาม ซึ่งคุณสมบัติอันนี้ก็คือการไหลนั่นเอง ของไหลที่จะกล่าวกันต่อไปจะหมายถึงกาซเท่านั้น ซึ่งมีคุณสมบัติมูลฐานที่สำคัญดังนี้

2.1.1 ความดัน[1] (pressure)

เมื่อโมเลกุลของอากาศวิ่งชนผนังภาชนะ จะทำให้มีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม แรงที่เกิดจากทุกโมเลกุลชนผนังในแนวตั้งฉากต่อพื้นที่ของผนังจะเป็นค่าความดัน เขียนเป็นสมการได้ว่า

$$P = \frac{F}{A} \tag{2.1}$$

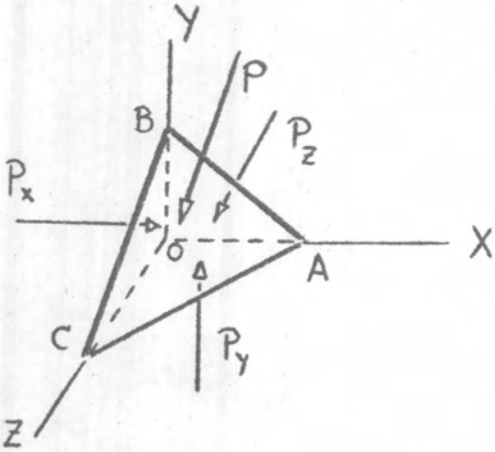
P แทนความดันที่ผนัง

F แทนแรงที่กระทำตั้งฉากกับผนัง

A แทนพื้นที่ของผนัง

สำหรับความดันในของไหลจะแสดงถึงความเค้นกด (normal stress) และที่จุดใดจุดหนึ่งในของไหล ความดันจะมีค่าเท่ากันทุกทิศทางซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

พิจารณาส่วนย่อย (element) ของของไหลรูปจตุรมุข (tetrahedron) อันหนึ่งซึ่งอยู่ในสภาวะสมดุลสถิต คือแรงลัพธ์ในทิศทางใด จะต้องมีค่าเป็นศูนย์



รูปที่ 2.1 แสดงส่วนย่อยของของไหลรูปจตุรมุขในสภาวะสมดุลสถิต

ให้ด้าน OA, OB และ OC มีค่า δx, δy และ δz ตามลำดับ

P เป็นความดันกระทำตั้งฉากกับระนาบ ABC ซึ่งมีพื้นที่เป็น δA ทำมุมกับแกน X, Y และ Z เป็น α, β และ γ ตามลำดับ และ P_x, P_y, P_z เป็นความดันในทิศ X, Y, Z ตามลำดับ

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P_x(\frac{1}{2}\,\delta y\,\delta z) = P\,(\delta A \cos\,\alpha)$$

เนื่องจากว่า $\delta A \cos\,\alpha$ เป็นภาพฉาย (projection) ของ δA บนระนาบตั้งฉากกับแกน X ซึ่งก็คือพื้นที่ของของไหลด้านที่ P_x กระทำนั่นเอง

$$P_x = P$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $P_y = P$ และ $P_z = P$ นั่นคือเมื่อ δx, δy และ δz มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่าความดันที่จุดในของไหลมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง

2.1.2 <u>ความหนาแน่น</u>[2] (density)

ผลรวมของมวลทุกโมเลกุลในหนึ่งหน่วยปริมาตรจะเป็นค่าความหนาแน่น ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{2.2}$$

เมื่อ ρ แทนความหนาแน่นของของไหล

M แทนผลรวมของมวลของของไหล

V แทนปริมาตรของของไหล

เนื่องจากว่าปริมาตรของของไหลพวกกาซขึ้นอยู่กับอุณหภูมิองศาเคลวิน (T) และความดัน (P) ดังนั้น ความหนาแน่นจึงขึ้นกับอุณหภูมิองศาเคลวิน และความดันของของไหลด้วย

ให้ความดัน , ปริมาตร , อุณหภูมิ และความหนาแน่นเป็น P_1 , V_1 , T_1 ρ_1 ตามลำดับ ต่อมาเปลี่ยนเป็น P_2 , V_2 , T_2 และ ρ_2 ตามลำดับ

เนื่องจากว่ามวลของของไหลไม่มีการเปลี่ยนแปลง

$$M = V_1 \rho_1 = V_2 \rho_2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \tag{2.3}$$

จากกฎของกาซ จะได้

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \tag{2.4}$$

จาก (2.3) และ (2.4) จะได้

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2T_1}{P_1T_2} \tag{2.5}$$

สำหรับอากาศที่ความดันและอุณหภูมิปกติคือที่ 76 cm. of Hg และ $0^{o}C$ ความหนาแน่นจะมีค่า 1.293 kg/m^3 ดังนั้น ความหนาแน่นของอากาศที่อุณหภูมิ $t^{o}C$ ความดัน P cm. of Hg จะมีค่า

$$\rho_t = 1.293 \times \frac{P}{76} \times \frac{273}{(273+t)}$$

$$\rho_t = 4.6 \frac{P}{(273+t)} \tag{2.6}$$

2.1.3 ความอัดได้ (compressibility)

เมื่อของไหลถูกอัดด้วยความดัน P จะเป็นผลให้ปริมาตรลดลงเป็น V จากปริมาตรเดิม V_o สามารถกำหนดได้ว่าของไหลนี้มีค่าบัลค์โมดูลัส B (bulk modulus) เป็น

$$B = \frac{PV_o}{V-V_o} = -\frac{PV_o}{\Delta V} \tag{2.7}$$

และกำหนดให้ส่วนกลับของบัลค์โมดูลัสเป็นค่าของความอัดได้ K คือ

$$K = -\frac{\Delta V}{PV_o} \tag{2.8}$$

สำหรับของเหลวค่า ΔV มีค่าน้อยมาก ดังนั้นในการคำนวณอาจถือว่าของเหลวเป็นของไหลที่อัดไม่ได้ แต่สำหรับกาซค่า ΔV มีค่ามากเมื่อถูกอัด ดังนั้นกาซจึงถือเป็นของไหลที่อัดได้ นอกจากกาซอุดมคติ (ideal gas) จะถือว่าอัดไม่ได้ และลมที่ความดันคงที่ ก็ถือว่าเป็นกาซที่อัดไม่ได้เหมือนกัน เช่นอากาศที่ถูกดูดผ่านอุโมงค์ลมแบบเปิด

2.1.4 ความหนืด (viscosity)

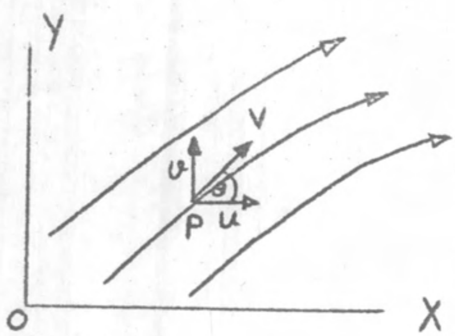
ความหนืดเป็นคุณสมบัติในการต่อต้านการเสียรูปหรือการไหลของของไหล คุณสมบัตินี้เกิดจากแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลกระทำต่อกันในขณะที่โมเลกุลมีความเร็วสัมพัทธ์ระหว่างกันและกัน อุณหภูมิจะมีอิทธิพลต่อความหนืดมาก กล่าวคือ เมื่ออุณหภูมิสูงขึ้นความหนืดของของเหลวส่วนใหญ่จะ

ลดลงแต่ความหนืดของกาซจะเพิ่มขึ้น การเคลื่อนที่ของของไหลที่มีความหนืดจะกล่าวในบทที่ 3 สำหรับการเคลื่อนที่ของของไหลอุดมคติจะถือว่าไม่มีความหนืด

ในการคำนวณหรือการหาลักษณะรูปแบบของการไหลอย่างง่าย ๆ จะถือว่าของไหลเป็นของไหลอุดมคติ (ideal fluid) คือไม่มีความหนืดและอัดไม่ได้

2.2 เส้นกระแสและเส้นทางเดินของของไหล[1] (stream lines and path lines of fluid)

การวิเคราะห์ลักษณะการไหลเพื่อที่จะหาความเร็ว ความดัน รวมทั้งการหารูปร่างของการไหล ได้มีการกำหนดเส้นกระแสขึ้น ซึ่งหมายถึง เส้นที่ลากผ่านจุดที่สัมผัสกับความเร็วขณะใดขณะหนึ่งของของไหล



รูปที่ 2.2 แสดงเส้นกระแสของการไหล 2 มิติ

รูปที่ 2.2 เป็นการไหลใน 2 มิติ โดยมีเส้นกระแสเส้นหนึ่งลากผ่านจุด P(x, y) ซึ่งสัมผัสกับความเร็ว V ที่จุด P และ u, v เป็นส่วนประกอบความเร็ว (velocity component) ตามทิศ X และ Y ตามลำดับ

จากรูปที่ 2.2 จะได้

$$\frac{v}{u} = \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

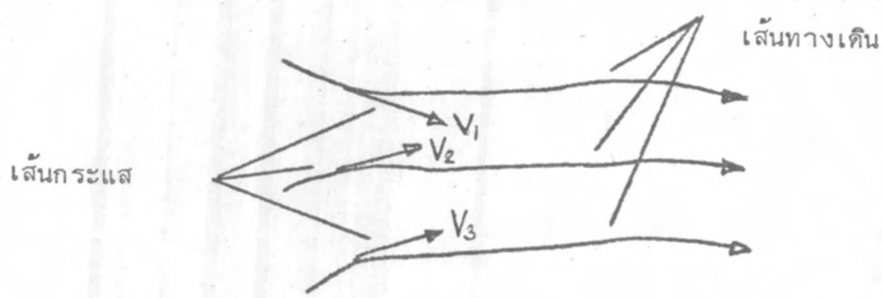
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \qquad (2.9)$$

$$vdx - udy = 0 \qquad (2.10)$$

ในทำนองเดียวกันการไหลใน 3 มิติ ก็จะได้

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (2.11)$$

เมื่อ w เป็นส่วนประกอบความเร็วตามทิศ z เส้นกระแสเป็นเส้นที่เราสมมุติขึ้นเพื่อสะดวกในการหาลักษณะของการไหล ส่วนทางเดินที่อนุภาคของไหลเคลื่อนที่ไปจริงเรียกว่า "เส้นทางเดิน"

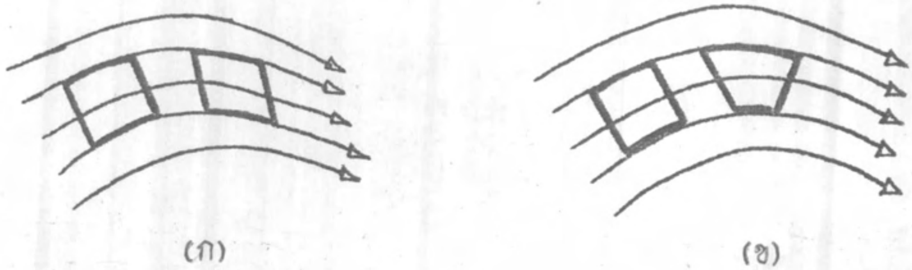


รูปที่ 2.3 แสดงเส้นกระแสและเส้นทางเดิน

เส้นกระแสและเส้นทางเดินจะทับกันเมื่อการไหลเป็นแบบสม่ำเสมอ (steady flow)

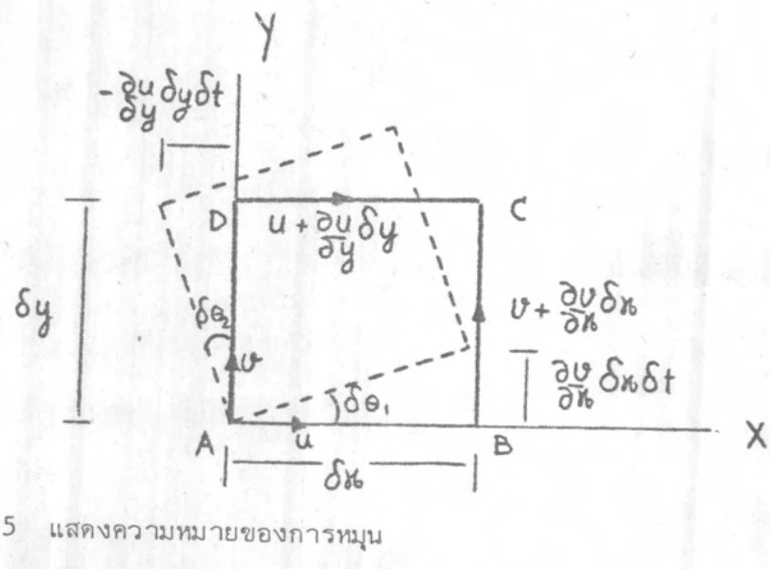
2.3 การไหลแบบหมุนและไม่หมุน[1] (rotational and irrotational flow)

อนุภาคของของไหลที่ไหลไม่ว่าจะไหลเป็นเส้นตรงหรือโค้งอาจจะมีการบิดเบือน (distortion) หรือหมุน หรือทั้งสองอย่างระหว่างการเคลื่อนที่



รูปที่ 2.4 แสดงการไหลเป็นทางโค้ง (ก) มีการบิดเบือน (ข) มีการหมุน

เมื่ออนุภาคหนึ่งในระนาบหนึ่งของการไหลมีอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในระนาบนั้นเป็นศูนย์ คือ อัตราการหมุนตามเข็มนาฬิกาเท่ากับอัตราการหมุนทวนเข็มนาฬิกา จะกล่าวว่า อนุภาคนั้นกำลังถูกบิดเบือนแต่ไม่หมุน แต่ถ้ามีอัตราเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในระนาบนั้นไม่เป็นศูนย์ จะกล่าวว่า อนุภาคนั้นมีการไหลแบบหมุน และเรียกการไหลที่ไม่มีอนุภาคใดเลยมีการหมุนว่า "การไหลแบบไม่หมุน"



รูปที่ 2.5 แสดงความหมายของการหมุน

รูปที่ 2.5 เส้นจุดไข่ปลาแสดงการขจัด (displacement) ของของไหลเทียบกับจุด A ในช่วงเวลา δt โดยมีแกน z ตั้งฉากกับระนาบ xy

ความเร็วเชิงมุมของ AB รอบแกน Z คือ

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta_1}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\,\delta x\,\delta t}{\delta x\;\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

ความเร็วเชิงมุมของ AD รอบแกน Z คือ

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\theta_2}{\delta t} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยคือ $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

ถ้า $\omega \neq 0$ การไหลก็จะเป็นแบบหมุน

$\omega = 0$ การไหลก็จะเป็นแบบไม่หมุน

กำหนดให้ ความวนเวียน (vorticity) $\zeta = 2\omega$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

ในกรณีการไหล 3 มิติ ก็จะเกิดการหมุนซึ่งขนานกับแกน X, Y และ Z ตามลำดับ โดยมีความเร็วเชิงมุมตามแกน X, Y และ Z ตามลำดับ โดยมีความเร็วเชิงมุมตามแกน x, Y และ Z สอดคล้องกับความวนเวียน ξ , η และ ζ ดังนี้

$$2\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \xi \tag{2.13.1}$$

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \eta \tag{2.13.2}$$

$$2\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta \tag{2.13.3}$$

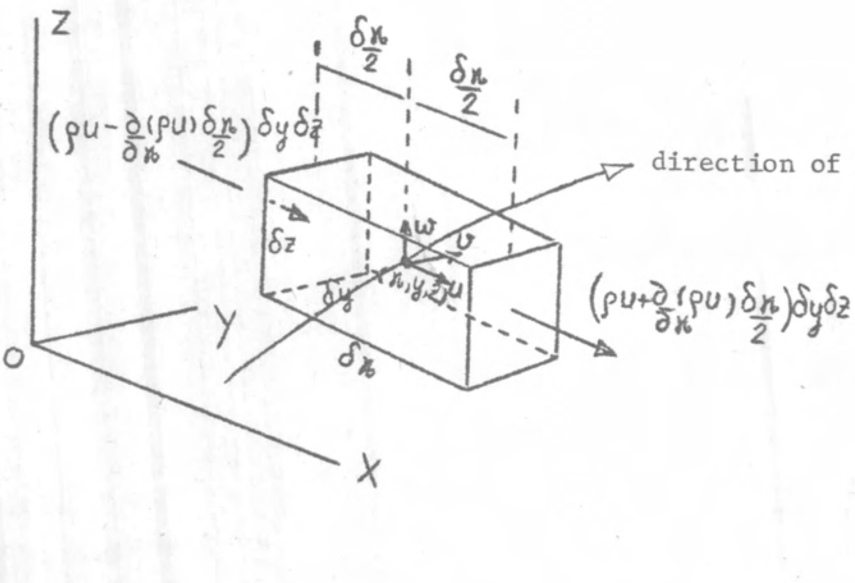
สำหรับการไหลแบบไม่หมุนจะได้

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} , \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} , \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.14}$$

2.4 <u>สมการของความต่อเนื่อง</u> [1] (equation of continuity)

ส่วนประกอบของความเร็วและความหนาแน่นของของไหล จะต้องมีความต่อเนื่องกันทั้งในระยะทางและเวลา คือจะไม่เกิดช่องว่างเปล่าในของไหลและมวลของของไหลจะไม่สูญหายหรือเกิดขึ้นใหม่ ซึ่งความสัมพันธ์อันนี้ใช้ได้ทั้งในของไหลที่มีความหนืดและไม่มีความหนืด

พิจารณาส่วนย่อยของของไหลที่มีลักษณะเป็นรูปกล่องสี่เหลี่ยม (parallelpiped) ซึ่งมีขนาดเป็น δx, δy, δz โดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (x, y, z) และมีส่วนประกอบความเร็วตามทิศ X , Y และ Z ณเวลา t ที่จุด (x , y , z) เป็น u, v และ w ตามลำดับ ให้ ρ เป็นความหนาแน่นของของไหล



รูปที่ 2.6 แสดงการไหลของมวลของของไหลรูปกล่องสี่เหลี่ยมในทิศ X ของการไหล 3 มิติ

มวลของของไหลที่ไหลผ่านจุด (x, y, z) ในทิศ X ต่อหนึ่งหน่วยเวลาคือ $\rho u \delta y \delta z$

อัตราการไหลของมวลที่ผ่านเข้าทางทิศ X ณ ด้านที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ $\frac{1}{2}\delta x$ คือ $(\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{1}{2}\delta x)\delta y \delta z$

และอัตราการไหลของมวลที่ผ่านออกทางทิศ X ณ ด้านที่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ $\frac{1}{2}\delta x$ คือ $(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\frac{1}{2}\delta x)\delta y \delta z$

ผลลัพธ์ของมวลในส่วนย่อยรูปกล่องสี่เหลี่ยมต่อหนึ่งหน่วยเวลาตามทิศ X คือ $-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\ \delta x \delta y \delta z$

ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ของมวลในส่วนย่อยรูปกล่องสี่เหลี่ยมต่อหนึ่งหน่วยเวลาตามทิศ Y และ Z คือ

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\ \delta x\ \delta y\ \delta z \quad \text{และ} \quad -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\ \delta x \delta y \delta z \quad \text{ตามลำดับ}$$

ผลลัพธ์ของมวลในส่วนย่อยรูปกล่องสี่เหลี่ยมทั้ง 3 ทิศทางคือ

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right]\delta x \delta y \delta z$$

ซึ่งจะเท่ากับอัตราการเพิ่มของมวลคือ $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x\ \delta y\ \delta z)$ หรือ $\frac{\partial \rho}{\partial t}\ \delta x \delta y \delta z$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad (2.15)$$

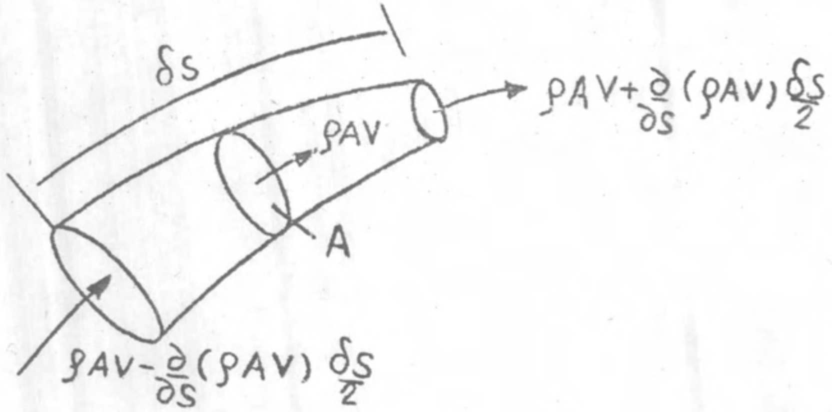
(2.15) เรียกว่า "สมการของความต่อเนื่อง" สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้ ρ จะมีค่าคงที่ (2.15) จะเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.16)$$

ถ้าส่วนความเร็วในทิศทาง ใดทิศทางหนึ่งคงที่ เช่น ทางทิศ Z (2.16) จะลดรูปเป็น 2 มิติคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.17}$$

สำหรับการไหลใน 1 มิติ จะพิจารณาการไหลที่เป็นลำท่อโดยไม่มีการไหลเข้าและออกทางด้านข้างเลย จะเกิดเฉพาะด้านปลายทั้งสองเท่านั้น ถ้าความเร็วเฉลี่ยที่กึ่งกลางตามแนวแกนท่อเป็น V และมีพื้นที่หน้าตัดเป็น A ดังรูปที่ 2.7 ให้ A และ V เป็นฟังชั่น (function) ของระยะทาง S ตามแนวแกนท่อ



รูปที่ 2.7 แสดงการไหลของมวลของไหลในลำท่อ

โดยการทำในทำนองเดียวกับการไหลใน 3 มิติ ก็จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial S}(\rho AV) = 0 \tag{2.18}$$

สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้ และการไหลเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ (unsteady flow) (2.18) จะเป็น

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S}(AV) = 0 \qquad (2.19)$$

สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้ และการไหลเป็นแบบสม่ำเสมอ (2.19) จะเป็น

$$\frac{\partial}{\partial S}(AV) = 0$$

นั่นคือ

$$AV = \text{ค่าคงที่} \qquad (2.20)$$

2.5 ฟังชั่นกระแส[1] (stream functions)

ในการที่จะอธิบายลักษณะของการไหลให้ได้ดีจะต้องบอกรูปร่างของขอบเขต (boundaries) และรูปร่างของเส้นกระแส ตลอดจนส่วนประกอบความเร็ว ณ จุดต่าง ๆ ของการไหล ด้วยเหตุนี้เองจึงได้มีการนำเอาฟังชั่นทางคณิตศาสตร์ (mathematical function) มาใช้เพื่อการนี้ ซึ่งผลที่ได้จะให้ทั้งความถูกต้อง ความสมบูรณ์ และรัดกุม ฟังชั่นนี้เรียกว่า "ฟังชั่นกระแส" (Ψ) ซึ่งทุกแบบของการไหลสามารถอธิบายด้วยฟังชั่นนี้ได้ สำหรับการไหลสม่ำเสมอใน 2 มิติในระนาบ XY ฟังชั่นกระแสจะเป็นฟังชั่นของ 2 ตัวแปรคือ x และ y

$$\Psi = f(x, y) \qquad (2.21)$$

ฟังชั่นกระแสนี้จะมีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1. ถ้าฟังชั่นกระแสของแบบการไหลหนึ่งมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง ผลก็คือฟังชั่นนี้จะเป็นสมการทั่วไปของเส้นกระแสของแบบการไหลนั้น ส่วนค่าคงที่ที่ต่างกันออกไปก็จะแสดงถึงเส้นกระแสที่ต่าง ๆ กัน

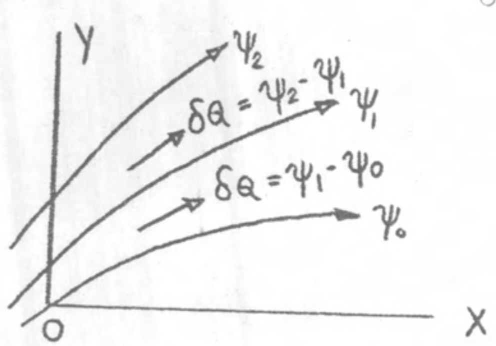
2. เมื่อฟังชั่นกระแสได้รับการดิฟเฟอเรนติเอต (differentiated) เทียบกับ y และ x ผลก็คือจะได้สมการทั่วไปของส่วนประกอบความเร็วตามทิศ X และตามทิศ Y ตามลำดับ ดังนี้คือ

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{2.22.1}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.22.2}$$

3. ในการไหลแบบหนึ่ง อัตราการไหลของปริมาตรของของไหลจากข้างหนึ่งไปอีกข้างหนึ่งระหว่างเส้นกระแส 2 เส้นใด ๆ $\psi_1 = C_1$ และ $\psi_2 = C_2$ จะมีค่าเป็น $\delta Q = \delta\psi = C_2 - C_1$

4. เมื่อมีการไหลหลายแบบเกิดขึ้นพร้อมกัน วิธีที่ง่ายที่สุดที่จะหาผลลัพธ์ของแบบของการไหล คือ การรวมกันของฟังชั่นกระแสเหล่านั้น



รูปที่ 2.8 แสดงอัตราการไหลใน 2 มิติ

คุณสมบัติของฟังชั่นกระแสนี้ใช้ได้ทั้งการไหลแบบหมุนและไม่หมุน สำหรับการไหลแบบไม่หมุนใน 2 มิติ จาก (2.12) จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (2.23)$$

แทน (2.22) ใน (2.23) จะได้

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.24)$$

ในทำนองเดียวกัน การไหลแบบไม่หมุนใน 3 มิติ จะได้

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.25)$$

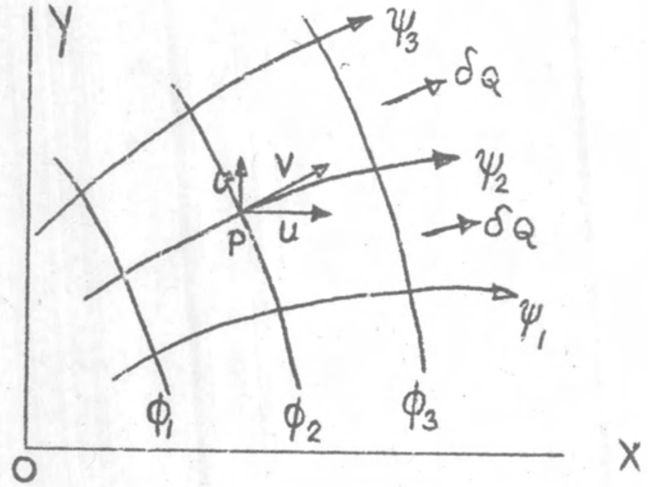
จะเห็นว่าการไหลแบบไม่หมุนจะมี ψ เป็นคำไข (solution) ที่สอดคล้อง (satisfy) กับสมการลาปลาซ (Laplace equation) ของการไหล (2.25)

2.6 <u>ฟังชั่นศักย์ความเร็ว</u>[1] (velocity potential functions)

เป็นที่ทราบมาแล้วว่ารูปแบบของการไหลใน 2 มิติของเส้นกระแส หาได้จากฟังชั่นกระแสที่มีค่าเท่ากับค่าคงที่ นอกจากนี้ยังมีอีกฟังชั่นหนึ่งซึ่งใช้กับการไหลแบบไม่หมุนเท่านั้น คือ ฟังชั่นศักย์ความเร็ว (ϕ) ซึ่งเป็นฟังชั่นของ x, y และ t เมื่อค่าฟังชั่นศักย์ความเร็วมีค่าเท่ากับค่าคงที่ ก็จะได้สมการของชุดเส้นศักย์ความเร็ว (velocity potential lines) ซึ่งจะตัดกับเส้นกระแสเป็นมุมฉาก นั่นคือเส้นกระแสและเส้นศักย์ความเร็วจะก่อร่างสานกันเป็นตาข่าย ซึ่งทุกจุดที่ตัดกันจะเป็นมุมฉาก และเมื่อดิฟเฟอเรนติเอทเทียบกับ x และ y ก็จะได้ส่วนประกอบความเร็วทางทิศ X และทิศ Y ตามลำดับ คือ

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad (2.26.1)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (2.26.2)$$



รูปที่ 2.9 แสดงเส้นกระแสและเส้นศักย์ความเร็ว

ณ ขณะหนึ่งบนเส้นศักย์ความเร็วเส้นหนึ่งที่มีค่าคงที่ จะได้

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \tag{2.27}$$

แทนค่า $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ด้วย (2.26)

$$udx + vdy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \tag{2.28}$$

จะเห็นว่าค่าความชันของเส้นศักย์ความเร็ว ณ จุดตัดกับเส้นกระแสจะมีค่าเป็นค่าลบของส่วนกลับของค่าความชันของเส้นกระแส

เมื่อแทนค่า u และ v จาก (2.26) ลงในสมการของความต่อเนื่องของการไหล 2 มิติ (2.17) จะได้

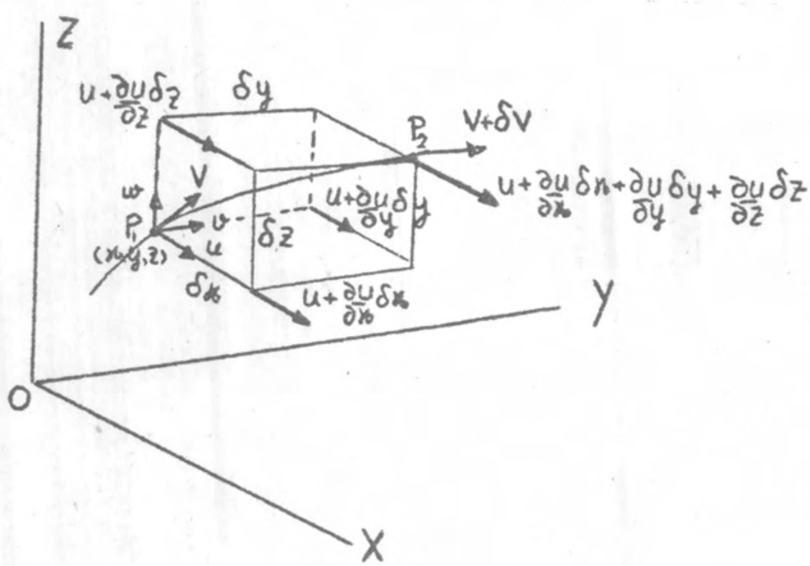
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.29)$$

จะเห็นว่า การไหลแบบไม่หมุนจะมี ϕ เป็นคำไขที่สอดคล้องกับสมการลาปลาซของการไหล (2.29)

2.7 สมการของยูเลอร์[(1)] (Euler's equations)

สมการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในการหาการเคลื่อนที่ของของไหลที่ไม่มีความหนืด ได้สมการหนึ่งคือสมการของยูเลอร์ โดยการให้ จุด (x, y, z) เป็นจุดทั่ว ๆ ไปจุดหนึ่ง ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา (t) จะพิจารณาความเร็วและความเร่งของอนุภาคหนึ่งของของไหลที่ไหลผ่านจุด (x, y, z) นี้ไป

ให้ u, v และ w เป็นส่วนประกอบความเร็วตามทิศ X , Y และ Z ตามลำดับที่จุด (x, y , z) ณ เวลา t พิจารณาอนุภาคหนึ่งที่จุด (x, y, z)ณ เวลา t และให้เคลื่อนที่ในช่วงเวลาสั้น ๆ δt ดังนั้นระยะทางที่ได้จะมีค่า $\delta x = u\,\delta t$ $\delta y = v\,\delta t$ และ $\delta z = w\,\delta t$ ตามทิศ X, Y และ Z ตามลำดับ ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 แสดงการเปลี่ยนแปลงส่วนความเร็วทางทิศ X ของอนุภาคตัวหนึ่งของของไหล ขณะเคลื่อนที่จากจุด P_1 ไป P_2 ในช่วงเวลา δt

ในทางคณิตศาสตร์ ส่วนประกอบความเร็วนี้จะเป็นฟังชั่นของ x, y, z และ t เช่น

$$u = f_1(x, y, z, t) \tag{2.30}$$

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \frac{\delta u}{\partial z}\delta z$$

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

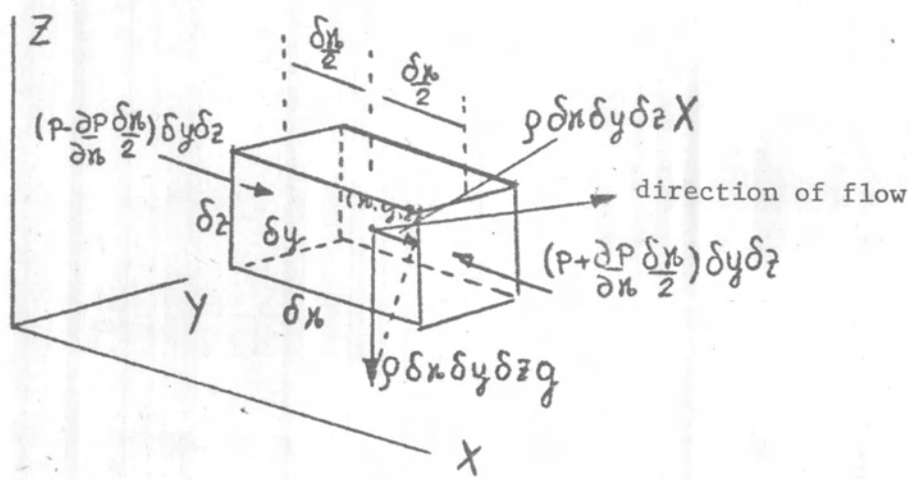
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.31}$$

ในทำนองเดียวกันก็จะได้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{2.32}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.33}$$

เมื่อนำกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันมาใช้ในการหาการเคลื่อนที่ของของไหลที่กล่าวข้างต้น โดยพิจารณาส่วนย่อยของของไหลรูปกล่องสี่เหลี่ยมขนาด δx δy และ δz มีความหนาแน่น ρ และ ณ จุดกึ่งกลาง (x, y, z) มีความดัน P ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 แสดงแรงที่กระทำทางทิศ X ของส่วนย่อยของของไหลที่ไม่มีความหนืดรูปกล่องสี่เหลี่ยมใน 3 มิติ

ให้ X, Y และ Z เป็นส่วนประกอบความเร่งของความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง ณ เวลา t ตามทิศ X, Y และ Z ตามลำดับ มวลของของไหลส่วนย่อยรูปกล่องสี่เหลี่ยม $= \rho\delta x\delta y\delta z$

เมื่อใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันคิดการเคลื่อนที่ตามทิศ X จะได้

$$\rho\delta x\delta y\delta z \frac{du}{dt} = \rho\delta x\delta y\delta z\, X + (P - \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z - (P + \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\delta x}{2})\delta y\delta z$$

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (2.34)$$

จาก (2.31) และ (2.34) จะได้

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (2.35.1)$$

ในทำนองเดียวกันตามทิศ Y และ Z จะได้

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (2.35.2)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \qquad (2.35.3)$$

(2.35.1) , (2.35.2) และ (2.35.3) เรียกว่าสมการของยูเลอร์ ซึ่งจะนำไปสู่สมการของเบอร์นูลี

2.8 สมการของเบอร์นูลี[1] (Bernoulli's equation)

จากสมการของยูเลอร์ X, Y และ Z เป็นส่วนประกอบความเร่งของความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปของ "ศักย์แรงความโน้มถ่วง" (gravity force potential , Ω) ซึ่งเป็นฟังชั่นของ x , y และ z เมื่อดิฟเฟอเรนติเอตฟังชั่นนี้เทียบกับ x , y และ z ก็จะได้ค่าลบของส่วนประกอบความเร่งตามทิศ x , y และ

z ตามลำดับ คือ

$$X = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad , \quad Y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad , \quad Z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \tag{2.36}$$

และจากคุณสมบัติของฟังค์ชั่นศักย์ความเร็ว จะได้

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{2.37}$$

แทนค่า (2.36) , (2.37) และใช้เงื่อนไขการไหลแบบไม่หมุน (2.14) ในสมการของยูเลอร์จะได้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

สำหรับของไหลที่อัดไม่ได้ ρ คงที่แล้วอินติเกรต (integration) เทียบกับ x , y และ z จากสมการข้างบน ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \Omega + \frac{P}{\rho} = F_1(y, z, t) \tag{2.38.1}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \Omega + \frac{P}{\rho} = F_2(z, x, t) \tag{2.38.2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \Omega + \frac{P}{\rho} = F_3(x, y, t) \tag{2.38.3}$$

สมการ (2.38.1) , (2.38.2) และ (2.38.3) จะเท่ากันได้ต่อเมื่อค่าคงที่ F_1 , F_2 และ F_3 เป็นฟังชั่นของเวลาเท่านั้น

ถ้าให้ V เป็นความเร็วที่มีส่วนประกอบความเร็วทางทิศ X, Y และ Z เป็น u, v และ w ตามลำดับ สมการทั้ง 3 สามารถเขียนเป็นสมการเดียวได้คือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \Omega + \frac{P}{\rho} = F(t) \qquad (2.39)$$

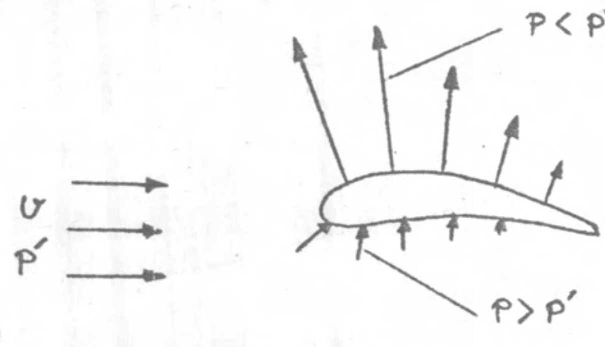
เรียก (2.39) เป็นสมการของเบอร์นูลีสำหรับการไหลแบบไม่สม่ำเสมอ (unsteady) และไม่หมุนของของไหลที่ไม่มีความหนืดและอัดไม่ได้ แต่ถ้าไหลอย่างสม่ำเสมอ ϕ และ F จะไม่เป็นฟังชั่นของเวลา ดังนั้น (2.39) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{V^2}{2} + \Omega + \frac{P}{\rho} = \text{ค่าคงที่} \qquad (2.40)$$

(2.40) จะมีความหมายเป็นการเคลื่อนที่ของอนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ไปตามเส้นกระแสเส้นหนึ่งของการไหลแบบสม่ำเสมอและไม่หมุน

2.9 การแผ่กระจายความเร็วและความดัน (velocity and pressure distributions)

การแผ่กระจายความเร็วสามารถแสดงได้ 2 วิธีคือ การใช้ชุดของลูกศร (series of arrows) โดยขนาดของลูกศรจะแทนขนาดของความเร็ว และหัวลูกศรจะแทนทิศของการไหล อีกวิธีหนึ่งคือ เขียนเป็นส่วนโค้งของการแผ่กระจายความเร็ว (velocity distribution curues) ซึ่งทั้ง 2 วิธีอาจจะแสดงความเร็วสัมบูรณ์ (absolute velocities) หรือความเร็วสัมพัทธ์ (relative velocities) ที่เทียบกับความเร็วอ้างอิงซึ่งได้จากความเร็วในบริเวณที่มีการไหลแบบเอกรูป (uniform flow) ก็ได้



รูปที่ 2.12 แสดงการแผ่กระจายความดันบนปีกเครื่องบิน

การแผ่กระจายความดันของการไหลแบบสม่ำเสมอและไม่หมุนหาได้จากการแผ่กระจายความเร็วโดยใช้สมการของเบอร์นูลี เมื่อพิจารณาจุด 2 จุดบนเส้นกระแสเส้นหนึ่งซึ่งอยู่ในระนาบแนวราบ นั่นคือ Ω จะมีค่าคงที่ ก็จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเร็วดังนี้

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P = \frac{1}{2}\rho V_o^2 + P_o \tag{2.41}$$

ถ้าความเร็วที่จุดใดเป็นศูนย์ จะเรียกจุดนั้นว่า "จุดนิ่ง" (stagnation point) และเรียกความดันที่จุดนิ่งว่า "ความดันนิ่ง" (stagnation pressure , P_{st}) เช่น

$V_o = 0$, P_o จะเป็น P_{st} (2.41) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + P = P_{st} \tag{2.42}$$

และจาก (2.42) สามารถหาความเร็ว ณ จุดหนึ่ง ๆ ในเส้นกระแสได้ ถ้ารู้ผลต่างความดัน $P_{st} - P$

$$V = \left[\frac{2}{\rho}(P_{st} - P)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.43}$$

2.10 <u>เงื่อนไขขอบเขต</u>(1) (boundary conditions)

ข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการวิเคราะห์การไหลของของไหลจะต้องมีรายละเอียดมากพอเกี่ยวกับขอบเขตทั้งหมด รวมทั้งตำแหน่งของของไหลที่ไหลเข้าและออกจากขอบเขต การวิเคราะห์จะต้องใช้หลักของกลศาสตร์ของไหล (fluid mechanics) เพื่อที่จะคำนวณเกี่ยวกับการไหลเมื่อถูกบังคับด้วยเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ของไหลอุดมคติเมื่อไหลไปตามขอบเขตที่เป็นผิวของแข็งจะต้องคิดให้ทั้งสองสสารสัมผัสกัน ณ ที่ผิวของขอบเขต โดยปราศจากการเคลื่อนที่ผ่านซึ่งกันและกันเพื่อว่าอนุภาคของไหลบนผิวของขอบเขตที่อยู่นิ่งจะไม่สามารถมีส่วนความเร็วในทิศตั้งฉากกับผิวของ

ขอบเขต แต่ถ้าผิวของขอบเขตเคลื่อนที่ ส่วนความเร็วในทิศตั้งฉากกับผิวของขอบเขตของอนุภาคของไหลจะเท่ากับความเร็วของผิวขอบเขตในทิศตั้งฉาก ณ จุดนั้น และนอกจากนั้นอนุภาคของของไหลของการไหลแบบต่อเนื่องจะต้องสอดคล้องกับสมการผิวของขอบเขตด้วย เช่น ให้ $F(x, y, z, t) = 0$ เป็นสมการผิวของขอบเขต ในช่วงเวลาสั้น ๆ δt อนุภาคหนึ่งของของไหลเคลื่อนที่ไปตามผิวของขอบเขต ได้ระยะทาง δx, δy และ δz ทางทิศ X, Y และ Z ตามลำดับ ตำแหน่งใหม่ของอนุภาคนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการผิวของขอบเขตด้วย จะได้ว่าการเปลี่ยนแปลง δF จะต้องเป็น 0 คือ

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t = 0$$

$$\frac{\delta F}{\delta t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dF}{dt} = u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad (2.44)$$

เมื่อ u , v และ w เป็นส่วนประกอบความเร็วทิศ X , Y และ Z ตามลำดับของอนุภาคของของไหล (2.44) จะสอดคล้องกับทุกจุดบนผิวของขอบเขต

สำหรับการไหลของของไหลที่มีความหนืดบนผิวของขอบเขต จะถือว่าความเร็วสัมพัทธ์ของของไหลกับขอบเขตจะเป็นศูนย์บนผิวที่สัมผัสกัน