บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการศึกษาถึงวิธีการสร้างตัวเลขสุ่ม ตามที่ได้กล่าวแล้ว และเราให้เครื่องคอมพิวเตอร์สร้างตัวเลขสุ่มด้วยวิธี Multiplicative เราได้ตัวเลขจำนวน 10 ชุด แต่ละชุดเรานำมาทำการทดสอบการกระจายแบบคงตัว (Uniform distribution) และทำการทดสอบความอิสระต่อกันในการเกิดของตัวเลข โดยทำการทดสอบ Series ซึ่งเราถือว่าตัวเลขสุ่มจะต้องมีการกระจายแบบคงตัว และตัวเลขที่เกิดจะต้องเป็นอิสระต่อกัน

วิธีทดสอบข้อมูลแบบสุ่ม

ในการทดสอบดูว่าตัวเลขที่ได้เป็นแบบสุ่ม หรือไม่ เราต้องทำการทดสอบดูว่ามีการกระจายแบบคงตัว (Uniform distribution) และดูความอิสระในการเกิด(Independent) ซึ่งการทดสอบนี้ เราใช้วิธีไค-แสควร์ ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมาก

ในการทดสอบด้วยวิธีไค-แสควร์ นั้นตัวเลขที่ทำการทดสอบจำนวนมาก ๆ เพื่อความสดวก เราอาจจะแบ่งตัวเลขออกเป็นช่วง ๆ เช่น แบ่งเป็น k ช่วง ทั้งตัวเลขที่สังเกตมาได้และที่คาดหมายว่าจะเป็นไปตามทฤษฎีแล้วใช้สูตรต่อไปนี้ทำการทดสอบ

สูตร[1]

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(foi - fei)^2}{fei}$$

เมื่อ $fei = N\ pie$

N = จำนวนตัวเลขทั้งหมดที่ต้องการทดสอบ

k = จำนวนช่วงย่อย (subintervals)

foi = ความถี่ของตัวเลขที่ได้จากการทดสองในช่วงย่อยที่ i

pie = ความน่าจะเป็นของตัวเลขที่ได้จากการทดลองจะอยู่ในช่วงย่อยที่ i

---

1. Joe. H. Mize and Grady Cox, Essential of Simulation page 71

fei = ความถี่คาดหมายสำหรับช่วงย่อย i

ในการทำการทดสอบ เราจะต้องนำเอาค่าที่คำนวณได้มาเทียบกับตารางดู จากวิธีการใช้ตาราง จะเห็นได้ว่า ค่าของ ไค-แสควร์ ในช่วงต่าง ๆ ของตารางนั้น มิได้คำนึงถึงค่าของ N และค่าของความน่าจะเป็นที่ได้ จากการสังเกตุแต่ละครั้งเลย คงมีแต่เพียงค่า degree of freedom เท่านั้นที่เกี่ยวข้องกับค่าของ ไค-แสควร์ ในช่วงต่าง ๆ แต่ความเป็นจริงแล้ว ความคิดดังกล่าวหาถูกต้องไม่ แท้จริงแล้วค่า N ในช่วงต่าง ๆ นั้น ผู้สร้างตารางคำนวณขึ้นมาจาก N ที่มีค่าใหญ่พอควร ขนาดของ N ที่พอจะทำให้ความถี่คาดหมายมีค่าใหญ่เท่ากัน หรือใหญ่กว่า 5 แต่ถ้า N ใหญ่กว่า ค่าที่จำกัดไว้แล้วนี้ จะยิ่งทำให้การทดลองได้ผลดียิ่งขึ้นไปอีก สำหรับการทดลองโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์นั้น เราใช้ N อย่างน้อยก็ 500, 1000, หรือ 10,000 หรืออาจมากกว่า ผลการทดสอบจึงควรมีประสิทธิภาพสูงพอแก่การเชื่อถือได้

ด้วยเหตุนี้ เราจึงอาจจะสรุปการทดสอบด้วย ไค-แสควร์ ได้ดังนี้ การทดสอบต้องกระทำกับการสังเกตุที่เป็นอิสระต่อกัน ด้วยค่า N ที่ใหญ่พอควร สมมุติว่าในการสังเกตุนั้นมีสิ่งที่จะต้องทำการสังเกตุ k ประเภท และในการทดลองนั้นประเภทหนึ่ง ๆ เกิดขึ้นกี่มากน้อยเพียงใด นำข้อมูลที่สังเกตุได้ไปคำนวณหาค่าไค-แสควร์ นำค่า ไค-แสควร์ที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่าตาราง การแจกแจงของไค-แสควร์ ณ แถวที่มีขั้นความอิสระ (degree of freedom) ที่เหมาะสมกับการทดลอง

ถ้าค่าไค-แสควร์ ที่ได้จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่าหรือมากกว่า ค่าไค-แสควร์ของตารางในช่อง 1 - 99 % ก็แสดงว่าตัวเลขที่ได้ไม่สุ่ม ค่าไค-แสควร์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าอยู่ระหว่าง 1 - 99 % แสดงว่าตัวเลขสุ่ม ค่าไค-แสควร์ที่ได้จากคำนวณมีค่าอยู่ระหว่าง 25 - 75 % จะสุ่มมากยิ่งขึ้น

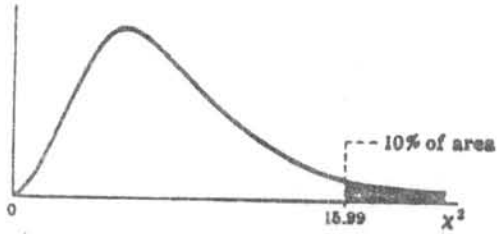
นั่นย่อมหมายความว่า ถ้าตัวเลขที่ได้นำมาทดสอบด้วย ไค-แสควร์แล้วมีค่าอยู่ระหว่าง 40 - 60 % จะมีความสุ่มมากที่สุด

1. การทดสอบการแจกแจงแบบคงตัว (Uniform distribution)

ตามปรกติ ถ้าจำนวนเลขชุดหนึ่ง เกิดขึ้นอย่างสุ่มความถี่ในการเกิดก็ควรจะเท่า ๆ กัน หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เลขชุดนั้น ควรจะมีการแจกแจงเป็นแบบคงตัว (Uniform distribution)

ตารางที่ 3
ตารางค่าไค-แสควร์

Percentage Points of the χ^2 Distribution



Example

For $\phi = 10$ degrees of freedom:

$P[\chi^2 > 15.99] = .10$

ϕ \ P	.995	.99	.975	.95	.90	.75	.50	.25	.10	.05	.025	.01	.005	P \ ϕ
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
z_α	−2.58	−2.33	−1.96	−1.64	−1.28	−0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.960	2.33	2.58	z_α

For $\phi > 100$ take $\chi^2 = \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2\phi - 1})^2$. z_α is the standardized normal deviate corresponding to the α level of significance, and is shown in the bottom of the table.

Source. This table is abridged from "Table of percentage points of the χ^2 distribution" by Catherine M. Thompson, *Biometrika*, Vol. 32 (1941), pp. 187–191, and is published here by permission of the author and editor of *Biometrika*.

วิธีทดสอบชุดลำดับตัวเลขที่สร้างขึ้นมาโดยอาศัยคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือนั้น เราสามารถเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อความสดวกในการทดสอบ โดยเราใช้สูตร ไค-แสควร์ ซึ่งเราเขียนเป็นโปรแกรมได้ดังต่อไปนี้

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในการเขียนโปรแกรม ใช้สัญญลักษณ์ ดังนี้

ค่าเริ่มต้น (Initial value)	= X I
ตัวคูณ (Multiplier)	= A
โมดูลัส M (Modulus m)	= Y
ค่าไค-แสควร์	= Sum
ความถี่ที่ได้จริง	= F
ความถี่คาดหมาย	= 1000

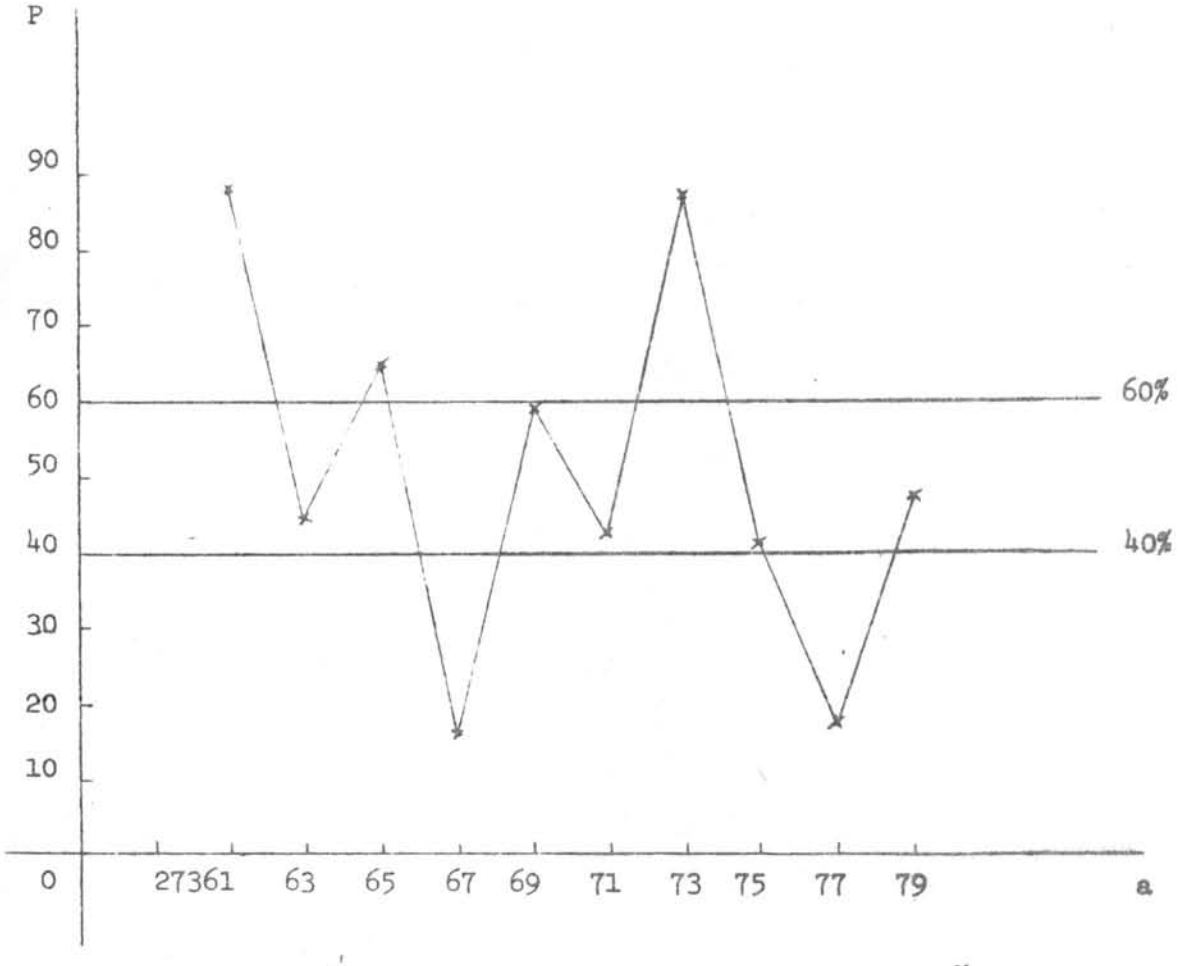
```
      C     PROGRAM GENERATING RANDOM NUMBERS.
      C                   AND
      C     COUNTING THE OBSERVED FREQUENCIES
      C                   FOR
      C     UNIFORM DISTRIBUTION TEST
      C
001         DIMENSION C(10),NA(10),D(10)
002         C(1)=0.1
003         DO 33 I=2,10
004      33 C(I)=C(I-1)+0.1
005         Y=1073741824
006     100 READ(2,20)A,XI
007         WRITE(3,333)A,XI
010     333 FORMAT(//5X,15HINITIAL VALUE A,F10.0,4H  XI,F10.0)
011      20 FORMAT(2F10.0)
012         DO 12 II=1,100
013         DO 55 LLL=1,10
014         DO 55 I=1,10
015         T=A*XI
016         Z=T/Y
017         M=Z
020         Q=M
021         F=Z-Q
022         DO 77 KK=1,10
023         IF(F.LE.C(KK))GO TO 78
024      77 CONTINUE
025      78 NA(KK)=NA(KK)+1
026         D(I)=F
027      55 XI=F*100000000.
030         WRITE(3,30)D
031      30 FORMAT(10F13.8)
032      12 CONTINUE
033         SUM=0
034         DO 79 I=1,10
035         MP=NA(I)-1000
036         P=MP*MP
037         P=P/1000.
040      79 SUM=SUM+P
041         DO 80I=1,10
042      80 WRITE(3,39)C(I),NA(I)
043      39 FORMAT(//10X,F15.1,10X,I5)
044         WRITE(3,38)SUM
045      38 FORMAT(///8X,17HCHI-SQUARE TEST =,F18.6)
046         WRITE(3,40)
047      40 FORMAT(//10X,21HDEGREE OF FREEDOM = 9)
050         STOP
051         END
```

ตารางที่ 4

ผลการทดสอบการกระจายแบบคงตัว

a	x	χ^2	40% - 60%
			9.36 - 7.32
32761	89745369	6.096	
32763	89745369	8.994	*
32765	89745369	6.926	
32764	89745369	13.378	
32769	89745369	7.790	*
32771	89745369	9.248	*
32773	89745369	4.492	
32775	89745369	9.380	*
32777	89745369	13.028	
32779	89745369	8.614	*

Degree of freedom = 9 เครื่องหมาย * หมายถึง accepted number



กราฟที่ 1 แสดงผลการทดสอบการกระจายแบบคงตัว

I 18040688

2. การทดสอบ Series

นอกจากเราจะทำการทดสอบดูว่า ตัวเลขที่เกิดขึ้นเป็นแบบคงตัว คือตัวเลขแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันแล้ว เรายังต้องทำการทดสอบดูว่าตัวเลขแต่ละตัวที่เกิดขึ้นเป็นอิสระต่อกันหรือไม่โดยใช้การทดสอบ Series

การทดสอบ Series เราใช้สูตร ดังนี้

$$\text{สูตร } \chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \frac{(foi,j - fei,j)^2}{fei,j} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} foi,j - \sum_{j=1}^{k} fei,j\right)^2}{\sum_{j=1}^{k} fei,j}$$

k = จำนวนช่วงย่อย (subintervals)

foi,j = ความถี่ของตัวเลขที่ได้จากการทดลองในช่วงย่อยที่ i,j

fei,j = ความถี่คาดหมายสำหรับช่วงย่อยที่ i,j

และสูตรนี้ใช้ degree of freedom = $k^2 - k$ ในการเทียบค่ากับตารางไค-แสควร์

จากสูตร การทดสอบ Series เรานำมาเขียนเป็นโปรแกรมป้อนเข้าเครื่องคอมพิวเตอร์ และให้เครื่องคอมพิวเตอร์คำนวณค่าออกมาแล้วนำมาเทียบกับตารางดูว่าตัวเลขที่ได้สุ่มหรือไม่

โปรแกรมคอมพิวเตอร์

ในการเขียนโปรแกรมเราใช้สัญญลักษณ์ ดังนี้

ค่าเริ่มต้น (Initial value)	=	X I
ตัวคูณ (Multiplier)	=	A
โมดูลัส M (Modulus m)	=	Y
ไค-แสควร์	=	C
ความถี่ที่ได้จริง	=	F
ความถี่คาดหมาย	=	1000

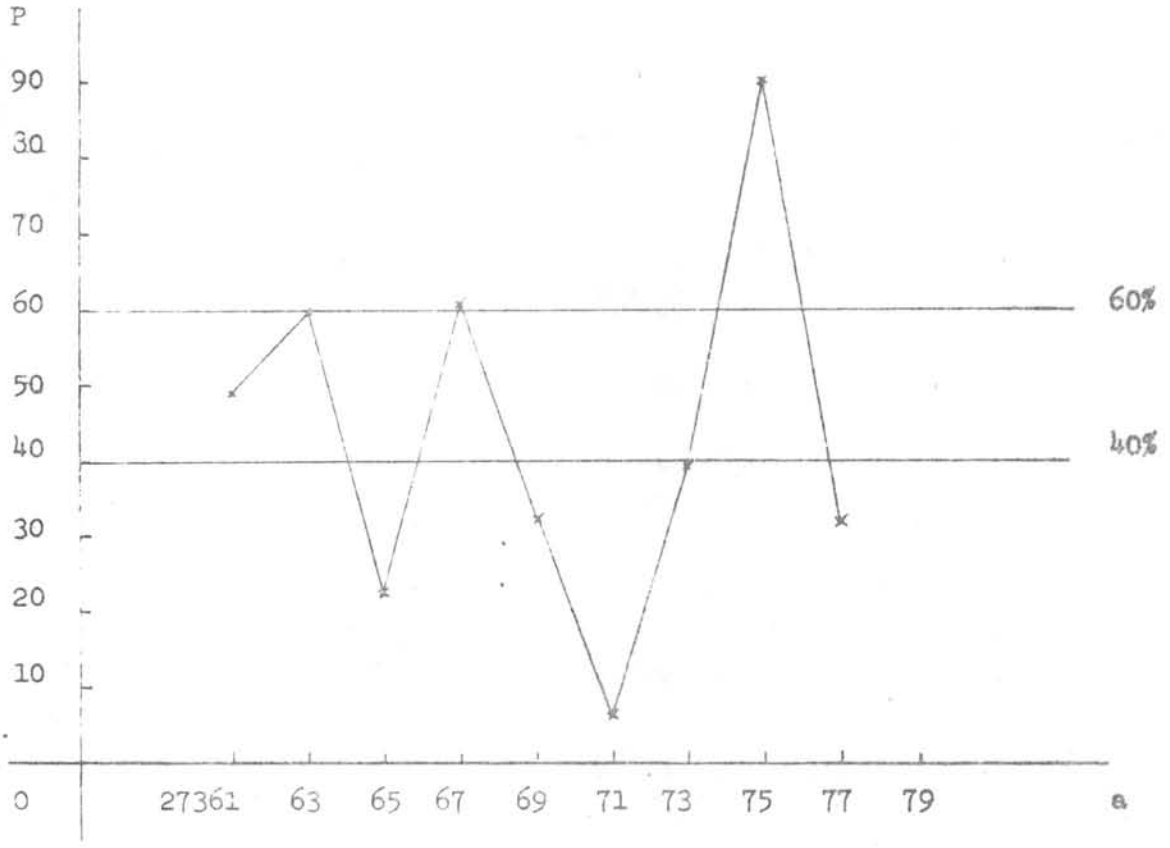
```
      C     PROGRAM GENERATING RANDOM NUMBERS.                        38
      C                   AND
      C     COUNTING THE OBSERVED FREQUENCIES
      C                   FOR
      C           SERIAL TEST
      C
001         DIMENSION N(10,10),NN(10)
002         Y=1073741824.
003         READ(2,20)A,XI
004      20 FORMAT(2F10.0)
005         WRITE(3,29)A,XI
006      29 FORMAT(//5X,15HINITIAL VALUE A,F10.0,4H  XI,F10.0)
007         DO 3I=1,10
010         DO 3J=1,10
011       3 N(I,J)=0
012         DO 10 I=1,10001
013         T=A*XI
014         Z=T/Y
015         MM=Z
016         Q=MM
017         F=Z-Q
020         XI=F*100000000.
021         IF(I.GT.1)GO TO 2
022         K=F*10.+1.
023         GO TO 10
024       2 L=F*10.+1.
025         N(K,L)=N(K,L)+1
026         K=L
027      10 CONTINUE
030         S=0
031         DO 4 I=1,10
032         DO 4J=1,10
033         MM=N(I,J)-100
034         P=MM*MM
035       4 S=S+P/100.
036         R=0
037         DO 5 I=1,10
040       5 NN(I)=0
041         DO 6I=1,10
042         DO 7J=1,10
043       7 NN(I)=NN(I)+N(I,J)
044         MM=NN(I)-1000
045         P=MM*MM
046       6 R=R+P/1000.
047         C=S-R
050         DO 8I=1,10
051       8 WRITE(3,30)(N(I,J),J=1,10),NN(I)
052      30 FORMAT(/11I10)
053         WRITE(3,31)C
054      31 FORMAT(///8X,17HCHI-SQUARE TEST =,F20.6)
055         WRITE(3,40)
056      40 FORMAT(//10X,22HDEGREE OF FREEDOM = 90)
057         STOP
060         END
```

ตารางที่ 5

ผลการทดสอบความอิสระของการเกิดตัวเลข

a	x	χ^2	40% - 60 % 91.5 - 85.2
32761	89745369	89.738	*
32763	89745369	85.232	*
32765	89745369	100.432	
32767	89745369	85.348	
32769	89745369	95.898	
32771	89745369	112.620	
32773	89745369	93.150	
32775	89745369	72.704	
32777	89745369	95.898	
32779	89745369	115.064	

Degree of freedom = 90 เครื่องหมาย * หมายถึง accepted number



กราฟที่ 2 แสดงผลการทดสอบความเป็นอิสระของตัวเลข