เอกสารอ้างอิง

วิชา จิวาลัย, "เมตริกซ์เบื้องต้นสำหรับวิชาวิศวกรรมสำรวจ" หนังสือประกอบการสอนหมายเลข ส 20-02 ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2520.

วิชา จิวาลัย, "การคำนวณปรับแก้" เอกสารประกอบการสอนหมายเลข ส 24-03 ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2524.

ธวัชชัย กฤษณ์เพ็ชร, "การตรวจสอบโครงข่ายสามเหลี่ยมด้านทิศตะวันตกของประเทศไทย" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2525.

ภุชงค์ วงษ์เกิด, "การปรับแก้โครงข่ายระดับของประเทศไทยพร้อมกันทั้งโครงโดยวิธีการของลีสท์สแควร์" วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2525.

สวัสดิ์ชัย เกรียงไกรเพชร, "ตัวอย่างรูปจำลองเชิงคณิตสำหรับการปรับแก้ข้อมูลงานสำรวจโดยหลักการลีสท์สแควร์" ในการประชุมทางวิชาการและนิทรรศการ การสำรวจและการแผนที่ จัดโดย ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 2523.

Bjerhammar, A. "Theory of Errors and Generalized Matrix Inverse", Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1973.

Cooper, M.A.R. "Fundamentals of Survey Measurement and Analysis", Grosby Lockwood Staples, London, 1974.

Graybill, F.A. "Introduction to Matrices with Applications in Statistics", Wadsworth Publishing Company, California, 1969.

Grafarend, E. and Schaffrin, B. "Unbiased Free Net Adjustment", The Canadian Surveyor, Dec 1974.

Mikhail, E.M. "Observation and Least Square", IEP, A Din-Donnelly Publishers, New York, 1976.

Pennington, R.H. "Computer Methods and Numerical Analysis", The Mcmillan Company, London, 1970.

Painter, R.J. "Elementary Matrix Algebra with Linear Programming", Prindle, Weber and Schmidt, Incorporated, Massachusetts, 1971.

Veress, S.A. "Adjustment by Least Squares", Class Notes, University of Washington, 1972.

Walpole, R.E. "Introduction to Statistics", Mcmillan Publishing Company, New York, 1974.

ภาคผนวก ก

การพิสูจน์สูตรการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์

โดยรวบรวมและสรุปจาก "วิชา (2524)" และ "Veress (1972)"

สัญญลักษณ์ใช้ตาม "วิชา (2524)"

ก.1 <u>วิธีสมการค่าสังเกต</u> (Method of Observation Equations)

จากแบบจำลองเชิงคณิต

$$L_a = F(X_a)$$

ทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดย

$$L_b + V = F(X_o + X)$$

$$= F(X_o) + \frac{\partial F}{\partial X_o}(X_a - X_o)$$

$$= F(X_o) + AX$$

หรือ $L_b + V = L_o + AX$

$$V = AX + (L_o - L_b)$$

$$V = AX + L$$

หลักการของลีสท์สแควร์ $V'PV \rightarrow$ minimum

ฟังก์ชัน $\phi = V'PV$

$$= (AX + L)'P(AX + L)$$

$$= (X'A' + L')P(AX + L)$$

$$= X'A'PAX + 2X'A'PL + L'PL$$

กำหนดให้ $N = A'PA$ และ $U = A'PL$

ดังนั้น $\phi = X'NX + 2X'U + L'PL$

ทำฟังก์ชัน ϕ ให้มีค่าน้อยที่สุด

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial X} = X'N' + U' = o$$

จะได้สมการปกติ (normal equations) เป็น

$$NX + U = o$$

ค่าพารามิเตอร์ $X = -N^{-1}U$

ค่าลีสท์สแควร์ $V'PV = X'NX + 2X'U + L'PL$

$$= X'(NX + U) + X'U + L'PL$$

$$= o + X'U + L'PL$$

ดังนั้น $V'PV = X'U + L'PL$

ค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V'PV}{n-u}$$

เมื่อ n = จำนวนสมการค่าสังเกต และ u = จำนวนพารามิเตอร์

สูตรความสัมพันธ์

$$L_b = I.L_b$$

$$L = L_o - L_b$$

$$X = - N^{-1}U = - N^{-1}A'PL$$

$$V = AX + L = (- AN^{-1}A'P + I)L$$

$$X_a = X_o + X$$

$$L_a = L_b + V$$

Autocofactor Matrices

$$Q_{L_b} = Q_L = P^{-1}$$

$$Q_x = (- N^{-1}A'P)Q_{L_b}(- N^{-1}A'P)'$$

$$= N^{-1}A'PP^{-1}AN^{-1}$$

$$= N^{-1}NN^{-1}$$

$$= N^{-1}$$

$$Q_v = (- AN^{-1}A'P + I)Q_L(- AN^{-1}A'P + I)'$$

$$= (- AN^{-1}A'P + I)P^{-1}(- PAN^{-1}A' + I)$$

$$= (AN^{-1}A'PP^{-1} - P^{-1})(PAN^{-1}A' - I)$$

$$= (AN^{-1}A' - P^{-1})(PAN^{-1}A' - I)$$

$$= AN^{-1}NN^{-1}A' - P^{-1}PAN^{-1}A' - AN^{-1}A' + P^{-1}$$

$$= AN^{-1}A' - AN^{-1}A' - AN^{-1}A' + P^{-1}$$

$$= P^{-1} - AN^{-1}A'$$

$$Q_{X_a} = Q_X = N^{-1}$$

$$Q_{L_a} = Q_{L_b} + Q_V + Q_{L_bV} + Q_{VL_b}$$

$$= Q_{L_b} - Q_V$$

$$= P^{-1} - (P^{-1} - AN^{-1}A')$$

$$= AN^{-1}A'$$

ดังนั้น $Q_{X_a} = N^{-1}$

$$Q_{L_a} = AN^{-1}A'$$

โดยที่ N^{-1} คือส่วนกลับปกติ (regular inverse) ของเมตริกซ์ N

สำหรับการปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกตโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส ส่วนกลับของเมตริกซ์ N คือ ซูโดอินเวอร์ส (pseudo inverse) N^{+} และการคำนวณค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้ คำนวณจาก

$$\hat{\sigma}_o = \frac{V'PV}{r} = \frac{V'PV}{n-n_o}$$

เมื่อ r = ลำดับชั้นอิสระ

n = จำนวนค่าสังเกต

n_o = จำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุด

ก.2 <u>วิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับ</u> (Method of Observation Equations with Constraints)

แบบจำลองเชิงคณิต

$$L_a = F(X_a) \qquad \text{..... (1)}$$

$$G(X_a) = o \qquad \text{..... (2)}$$

จากแบบจำลองเชิงคณิตสมการ (1) ทำให้เป็นสมการเชิงเส้น

$$L_b+V = F(X_o + X)$$

$$= F(X_o) + \frac{\partial F}{\partial X_o} (X_a - X_o)$$

$$= F(X_o) + AX$$

หรือ $L_b+V = L_o + AX$

$$V = AX + (L_o - L_b)$$

$$V = AX + L \qquad \text{..... (3)}$$

จากแบบจำลองเชิงคณิตสมการ (2) ทำให้เป็นสมการเชิงเส้น

$$G(X_o + X) = o$$

$$\frac{\partial G}{\partial X_o} (X_a - X_o) + G(X_o) = o$$

$$CX + W = o \qquad \text{..... (4)}$$

หลักการของลีสท์สแควร์ $V'PV \rightarrow$ minimum

ฟังก์ชัน $\phi = V'PV - 2K'(CK + W)$

$$= (AX + L)'P(AX + L) - 2(CX + W)'K$$

$$= (X'A' + L')P(AX + L) - 2(X'C' + W')K$$

$$= (X'A' + L')(PAX + PL) - 2(X'C' + W')K$$

$$= X'A'PAX + 2X'A'PL + L'PL - 2X'C'K - 2W'K$$

กำหนดให้ $N = A'PA$ และ $U = A'PL$

ดังนั้น $\phi = X'NX + 2X'U + L'PL - 2X'C'K - 2W'K$

ทำฟังก์ชัน ϕ ให้มีค่าน้อยที่สุด

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial X} = X'N' + U' + C'K = o$$

ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จะได้สมการกึ่งปกติ (quasi-normal equations) เป็น

$$NX + U - C'K = o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$CX + W = o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ค่าพารามิเตอร์จากสมการ (5)

$$X = - N^{-1}U + N^{-1}C'K \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

แทนค่า X ในสมการ (6)

$$K = (CN^{-1}C')^{-1}(CN^{-1}U - W) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

กำหนดให้ $M = CN^{-1}C'$, $X^{*} = - N^{-1}U$ และ $dX = N^{-1}C'K$

แทนค่าในสมการ (8) จะได้

$$K = - M^{-1}(CX^{*} + W)$$

แทนค่าในสมการ (7) จะได้

$$X = X^{*} + dX$$

ค่าลีสท์สแควร์

$$V'PV = X'NX + 2X'U + L'PL$$

ค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้

$$\hat{\sigma}_{o}^{2} = \frac{V'PV}{r} = \frac{V'PV}{n-u+c}$$

เมื่อ n = จำนวนสมการค่าสังเกต

u = จำนวนพารามิเตอร์

c = จำนวนสมการเงื่อนไขบังคับ

สูตรความสัมพันธ์

$$L_b = I.L_b$$

$$L = L_o - L_b$$

$$U = A'PL$$

$$X = X^{*} + dX$$

$$= (-N + N\,C'M\,CN)U - N\,C'M\,W$$

$$V = AX + L$$

$$= (I - A\,(N^{-1} - N^{-1}CM^{-1}CN^{-1})A'P) - AN^{-1}C'M^{-1}W$$

$$X_a = L_b + V$$

Autocofactor Matrices

$$Q_{L_b} = Q_L = P^{-1}$$

$$Q_U = (A'P)Q_L(A'P)'$$

$$= A'PP^{-1}PA$$

$$= A'PA$$

$$= N$$

$$Q_X = (-N^{-1} + N^{-1}C'N^{-1}CN^{-1})Q_U(-N^{-1} + N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1})'$$

$$= (N^{-1} - N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1})N(N^{-1} - N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1})$$

$$= (I - N^{-1}C'M^{-1}C)N^{-1}(I - C'M^{-1}CN^{-1})$$

$$= N^{-1}(I - C'M^{-1}CN^{-1})(I - C'M^{-1}CN^{-1})$$

$$= N^{-1}(I - C'M^{-1}CN^{-1})$$

$$= N^{-1} - N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1}$$

$$Q_{X_a} = Q_X = N^{-1} - N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1}$$

$$Q_V = (I - A.\,Q_X.\,A'P)\,Q_L(I - A.Q_X.A'P)'$$

$$= (I - A.Q_X.A'P)P^{-1}(I - PA.Q_X.A')$$

$$= P^{-1}(I - PA.Q_X.A')(I - PA.Q_X.A')$$

$$= P^{-1}(I - PA.Q_X.A')$$

$$= P^{-1} - A.Q_X.A'$$

$$Q_{L_a} = Q_{L_b} - Q_V$$

$$= P^{-1} - (P^{-1} - A.Q_X.A')$$

$$= P^{-1} - P^{-1} + A.Q_X.A'$$

$$= A.Q_X.A'$$

$$= A.Q_{X_a}.A'$$

$$Q_{X_a} = N^{-1} - N^{-1}C'M^{-1}CN^{-1}$$

$$Q_{L_a} = A.Q_{X_a}.A'$$

โดยที่ N^{-1} คือส่วนกลับปกติของเมตริกซ์

สำหรับการปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส ส่วนกลับของเมตริกซ์ N คือ ซูโดอินเวอร์ส N^{+} และการคำนวณค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้ คำนวณจาก

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V'PV}{r} = \frac{V'PV}{n-n_o+c}$$

เมื่อ n = จำนวนสมการค่าสังเกต

n_o = จำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุด

c = จำนวนสมการเงื่อนไขบังคับ

ประวัติผู้เขียน

ข้าพเจ้านายวัฒนะ ทวนพรมราช เกิดเมื่อวันที่ 31 เดือนมีนาคม พ.ศ. 2495 ที่จังหวัดนครราชสีมา ได้เข้าศึกษาในระดับปริญญาบัณฑิตที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ในสาขาวิศวกรรมโยธา และสำเร็จการศึกษาได้รับวุฒิทางการศึกษา วศ.บ. (โยธา) เมื่อปี พ.ศ. 2518 ภายหลังสำเร็จการศึกษาได้รับราชการที่สำนักงานเร่งรัดพัฒนาชนบท และกรมอาชีวศึกษา

ปัจจุบันเป็นอาจารย์ผู้สอนประจำแผนกวิชาช่างสำรวจ คณะวิชาช่างโยธา ในตำแหน่งอาจารย์ 1 ระดับ 4 ที่วิทยาเขตเทคนิคภาคตะวันออกเฉียงเหนือ นครราชสีมา กองงานวิทยาเขต วิทยาลัยเทคโนโลยีและอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ