บทที่ 4

ทฤษฎีการปรับแก้และวิเคราะห์ผล

การคำนวณปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยม ได้นำเทคนิคของลีสท์สแควร์มาใช้ในการปรับข้อมูลค่าสังเกต เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของพารามิเตอร์ที่ให้ผลการปรับแก้นั้นมีค่าของ V' PV น้อยที่สุด ทั้งยังให้ค่าของพารามิเตอร์ที่เป็นเอกภาพ (unique) ด้วย โดยมีจำนวนข้อมูลค่าสังเกตมากกว่าจำนวนพารามิเตอร์ ซึ่งการวิจัยนี้ก็ได้นำเอาวิธีการมาใช้สำหรับการปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยม ทั้งที่เป็นโครงข่ายปกติ และโครงข่ายอิสระ ในรูปแบบของวิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติ วิธีสมการค่าสังเกตโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส และวิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส ตามลักษณะและข้อกำหนดของโครงข่ายที่ปรับแก้ ดังนั้นในบทนี้จึงจะได้กล่าวถึงทฤษฎีหรือหลักการคำนวณที่เกี่ยวกับการปรับแก้และวิเคราะห์ผลโดยสังเขปดังนี้คือ

4.1 <u>ทฤษฎีการปรับแก้</u>

4.1.1 วิธีปรับแก้

1. วิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติ

มีส่วนสำคัญตามทฤษฎีดังนี้คือ

แบบจำลองเชิงพีชคณิต	L_a	$= F(X_a)$
รูปสมการเชิงเส้น	V	$= AX + L$
สมการปกติ	$NX+U$	$= o$
ค่าตรวจแก้	X	$= -N^{-1}U$
	N	$= A'PA;\ U = A'PL$
พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว	X_a	$= X_o + X$
ค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว	L_a	$= L_b + V$
ค่าลีสท์สแควร์	$V'PV$	$= L'PL + X'U$
โคแฟกเตอร์	Q_{X_a}	$= N^{-1}$
	Q_{L_a}	$= AN^{-1}A'$

ลำดับชั้นอิสระ $r = n - u$

ค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้

$$\hat{\sigma}_o^2 = V'PV/r$$

(ดูการพิสูจน์ในภาคผนวก ก.1)

2. วิธีสมการค่าสังเกตโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส

มีส่วนสำคัญตามทฤษฎีคล้ายคลึงกับวิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติดังนี้คือ

แบบจำลองเชิงคณิต	L_a	$= F(X_a)$
รูปสมการเชิงเส้น	V	$= AX + L$
สมการปกติ	$NX+U$	$= o$
ค่าตรวจแก้	X	$= -N^+U$
โดยที่	N	$= A'PA;\ U = A'PL$
พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว	X_a	$= X_o + X$
ค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว	L_a	$= L_b + V$
ค่าลีสท์สแควร์	$V'PV$	$= L'PL + X'U$
โคแฟกเตอร์	Q_{X_a}	$= N^+$
	Q_{L_a}	$= AN^+A'$
ลำดับชั้นอิสระ	r	$= n - n_o$

ค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้

$$\hat{\sigma}_o^2 = V'PV/r$$

(การพิสูจน์เหมือนกับวิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติ)

3. วิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส

มีส่วนสำคัญตามทฤษฎีดังนี้คือ

แบบจำลองเชิงคณิต	L_a	$= F(X_a)$ และ $G(X_a) = o$
รูปสมการเชิงเส้น	V	$= AX + L$
	$CX+W$	$= o$
สมการกึ่งปกติ	$NX+U-C'K$	$= o$
	$CX+W$	$= o$

ค่าตรวจแก้ $X = X^* + dx$

โดยที่ $X^* = -N^+U; \; dx = N^+C'K$

$N = A'PA; \; U = A'PL$

$M = CN^+C'; \; K = -M^{-1}(CX^* + W)$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

ค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว $L_a = L_b + V$

ค่าลีสท์สแควร์ $V'PV = L'PL - X'NX$

โคแฟกเตอร์ $Q_{X_a} = N^+ - N^+C'M^{-1}CN^+$

$Q_{L_a} = A.Q_{X_a}.A'$

ลำดับชั้นอิสระ $r = n - n_o + c$

ค่าความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยหลังการปรับแก้

$$\hat{\sigma}_o^2 = V'PV/r$$

(ดูการพิสูจน์ในภาคผนวก ก.2)

4.1.2 การหาซูโดอินเวอร์ส

การหาซูโดอินเวอร์สได้กล่าวไว้แล้วในบทที่ 3 สูตรที่ใช้ในการคำนวณเอามาจากทฤษฎีที่ 7 ในหัวข้อของทฤษฎีการคำนวณซูโดอินเวอร์ส เพื่อความสะดวกได้แปลงสูตรตามทฤษฎีที่อ้างถึงใหม่ ดังนั้นสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาซูโดอินเวอร์สจะพิจารณาตามข้อกำหนดต่อไปนี้

กำหนดให้ N เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และมีลำดับชั้น (rank) เป็น r โดยที่ r มีค่ามากกว่าศูนย์ r มีค่าน้อยกว่า n และ r มีค่าน้อยกว่า m; เมตริกซ์ N ถูกแบ่งเป็นส่วนดังนี้

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

โดยที่ A เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $r \times r$ และมีลำดับชั้นเป็น r ซูโดอินเวอร์สของเมตริกซ์ N สามารถหาได้โดย

$$N = \begin{bmatrix} A'RA & A'RC \\ B'RA & B'RC \end{bmatrix}$$

โดยที่ $R = (A'A + BB')^{-1} A(A'A + C'C)^{-1}$

แต่เนื่องจากเมตริกซ์ N เป็นเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ขนาด $u \times u$

ดังนั้นจะพบว่า $A = A'$, $B = C'$ และ $C = B'$ ซึ่งซูโดอินเวอร์สของ N สามารถหาได้โดย

$$N^{+} = \begin{bmatrix} ARA & ARB \\ CRA & CRB \end{bmatrix}$$

โดยที่ $R = (AA + BC)^{-1} A(AA + BC)^{-1}$

ถ้าให้ $Q = AA + BC$ จะได้

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $R = Q^{-1}AQ^{-1}$

กล่าวโดยสรุป สำหรับการปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกต เมื่อเมตริกซ์สมมาตร N ที่เป็นเมตริกซ์ซิงกูลาร์ขนาด $u \times u$ และมีลำดับชั้น r ซึ่งถูกแบ่งเป็นส่วนดังนี้คือ

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

โดยมีขนาดเมตริกซ์ย่อย A เท่ากับ $r \times r$; B เท่ากับ $r \times (u-r)$; C เท่ากับ $(u-r) \times r$ และ D เท่ากับ $(u-r) \times (u-r)$ สามารถหาซูโดอินเวอร์สของเมตริกซ์ N ได้โดย

$$N^{+} = \begin{bmatrix} ARA & ARB \\ CRA & CRB \end{bmatrix}$$

โดยที่ $R = Q^{-1}AQ^{-1}$ และ $Q = AA + BC$

4.1.3 การจัดสมการค่าสังเกต (สวัสดิ์ชัย, 2523)

แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการค่าสังเกตมีลักษณะดังนี้

$$L_a = F(X_a)$$

ในวิธีนี้สามารถนำข้อมูลการวัดแต่ละตัวมาเขียนเป็นสมการได้ 1 สมการ ในสมการนั้นจะประกอบด้วยพารามิเตอร์หรือตัวไม่ทราบค่าอย่างน้อย 1 ตัว โดยเรียกสมการที่ได้ว่า "สมการการวัด" (หรือสมการค่าสังเกต) สมการค่าสังเกตของโครงข่ายสามเหลี่ยมมี 3 ชนิด ได้แก่ สมการมุม สมการระยะและสมการแอซิมัท

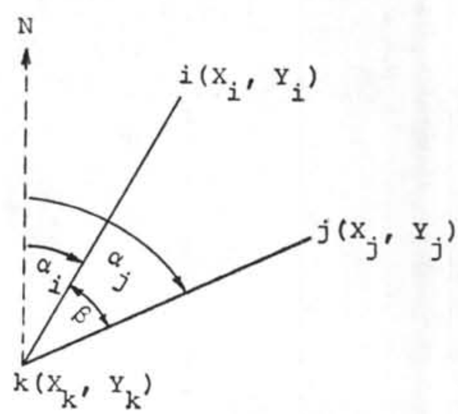
การจัดสมการค่าสังเกตของการคำนวณปรับแก้สำหรับโครงข่ายสามเหลี่ยมมีดังนี้

1. การจัดสมการมุม

การจัดสมการมุมจัดจากผลต่างของสมการของการวัดทิศทาง

$$\beta = \alpha_j - \alpha_i$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{X_j - X_k}{Y_j - Y_k}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{X_i - Y_k}{Y_i - Y_k}\right) \quad \ldots\ldots (4\text{-}1)$$



รูปที่ 4.1 การวัดมุม

จากรูปที่ 4.1

โดยที่ i เป็นจุดปลายแขนของมุมอันที่ 1

j เป็นจุดปลายแขนของมุมอันที่ 2

k เป็นจุดตัดระหว่างแขนของมุมทั้งสอง

α_i เป็นทิศทางการวัดของจุด i

α_j เป็นทิศทางการวัดของจุด j

β เป็นง่ามมุม ณ จุดตัด k

X_i, Y_i เป็นพิกัดราบของจุด i

X_j, X_j เป็นพิกัดราบของจุด j

X_k, Y_k เป็นพิกัดราบของจุด k

ในสมการ (4-1) มีพารามิเตอร์ 6 ตัว ซึ่งได้แก่ พิกัดของจุดสามจุดที่ประกอบขึ้นเป็นง่ามมุม สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของมุมเทียบกับพารามิเตอร์ต่าง ๆ มีดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_{X_i} &= -(Y_i - Y_k)/S^2_{ki} \\
a_{Y_i} &= (X_i - X_k)/S^2_{ki} \\
a_{X_j} &= (Y_j - Y_k)/S^2_{kj} \qquad \text{..........} \quad (4\text{-}2) \\
a_{Y_j} &= -(X_j - Y_k)/S^2_{kj} \\
a_{X_k} &= -(Y_j - Y_k)/S^2_{kj} + (Y_i - Y_k)/S^2_{ki} \\
a_{X_k} &= (X_j - X_k)/S^2_{kj} - (X_i - Y_k)/S^2_{ki}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นสมการการวัดมุมในรูปของสมการเชิงเส้น V = AX + L จึงเป็น

$$
\begin{aligned}
V_\beta &= a_{X_i} dX_i + a_{Y_i} dY_i + a_{X_j} dX_j + a_{Y_j} dY_j + a_{X_k} dX_k + a_{Y_k} dY_k \\
&\quad + (\beta_o - \beta_b) \qquad \text{..........} \quad (4\text{-}3)
\end{aligned}
$$

โดยที่

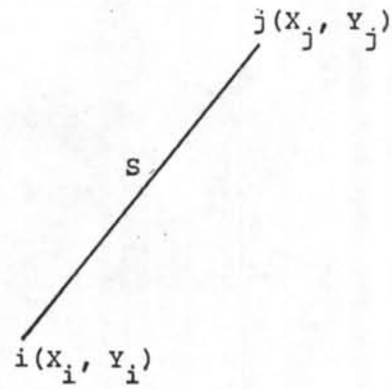
β_o = ค่ามุมที่คำนวณจากสมการ (4-1) โดยใช้ค่าประมาณของพิกัดที่เกี่ยวข้อง

β_b = ค่ามุมที่วัดได้

2. การจัดสมการระยะ

การจัดสมการระยะจัดจากสมการ

$$
S = ((X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{..........} \quad (4\text{-}4)
$$



รูปที่ 4.2 การวัดระยะ

จากรูปที่ 4.2

โดยที่	i	เป็นจุดเริ่มต้นของระยะ
	j	เป็นจุดปลายของระยะ
	S	เป็นระยะระหว่างจุด i กับจุด j
	X_i, Y_i	เป็นพิกัดราบของจุด i
	X_j, Y_j	เป็นพิกัดราบของจุด j

ในสมการ (4-4) คำนวณระยะทางระหว่างจุดสองจุด มีพารามิเตอร์ 4 ตัว ที่เกี่ยวข้องซึ่งได้แก่ พิกัดของจุดสองจุดของระยะ สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของระยะทางเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัวมีค่าดังนี้

$$
\begin{aligned}
b_{x_i} &= -(X_j - X_i)/S \\
b_{y_i} &= -(Y_j - Y_i)/S \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}5) \\
b_{x_j} &= (X_j - X_i)/S \\
b_{y_j} &= (Y_j - Y_i)/S
\end{aligned}
$$

ดังนั้นสมการการวัดระยะในรูปของสมการเชิงเส้น $V = AX + L$ จึงเป็น

$$V_s = b_{x_i} dX_i + b_{y_i} dY_i + b_{x_j} dX_j + b_{y_j} dY_j + (S_o - S_b) \qquad \ldots\ldots\ldots (4\text{-}6)$$

โดยที่

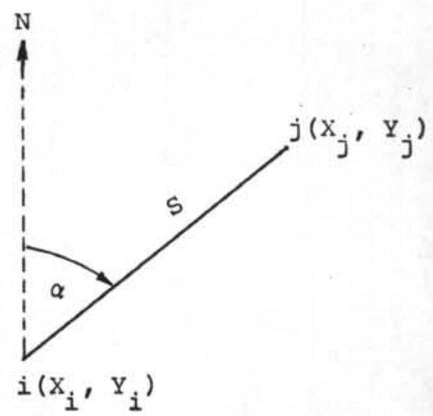
S_o = ค่าระยะทางที่คำนวณจากสมการ (4-4) โดยใช้ค่าประมาณของพิกัดที่เกี่ยวข้อง

S_b = ค่าระยะที่วัดได้

3. การจัดสมการแอซิมัท

การจัดสมการแอซิมัทจัดจากสมการ

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{X_j - X_i}{Y_j - Y_i} \right) \qquad \text{..........} \quad (4\text{-}7)$$



รูปที่ 4.3 การวัดแอซิมัท

จากรูปที่ 4.3

โดยที่ i เป็นจุดเริ่มต้นของแนวที่วัดแอซิมัท

j เป็นจุดปลายของแนวที่วัดแอซิมัท

α เป็นแอซิมัทของแนว ij

X_i, Y_i เป็นพิกัดราบของจุด i

X_j, Y_j เป็นพิกัดราบของจุด j

ในสมการ (4-7) มีพารามิเตอร์ 4 ตัว ที่เกี่ยวข้องซึ่งได้แก่ พิกัดของจุดสองจุดที่ใช้หาแนวของแอซิมัท สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของแอซิมัทเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัวมีค่าดังนี้

$$c_{x_i} = (Y_j - Y_i)/S^2$$

$$c_{y_i} = (X_j - X_i)/S^2 \qquad \text{............} \quad (4\text{-}8)$$

$$c_{x_j} = (Y_j - Y_i)/S^2$$

$$c_{y_j} = (X_j - X_i)/S^2$$

ดังนั้นสมการการวัดแอซิมัทในรูปของสมการเชิงเส้น V = AX + L จึงเป็น

$$V_\alpha = c_{x_i} dX_i + c_{y_i} + dY_i + c_{x_j} + dX_j + c_{y_j} dY_j + (\alpha_o - \alpha_b) \quad \ldots\ldots\ldots (4-9)$$

โดยที่

α_o = ค่าแอซิมัทที่คำนวณจากสมการ (4-7) โดยใช้ค่าประมาณของพิกัดที่เกี่ยวข้อง

α_b = ค่าแอซิมัทที่วัดได้

4.1.4 การจัดสมการเงื่อนไขบังคับ

แบบจำลองเชิงคณิตของสมการเงื่อนไขบังคับมีลักษณะดังนี้

$$G(X_a) = 0$$

รูปสมการเชิงเส้นเป็น

$$CX + W = 0$$

ในวิธีนี้สามารถนำข้อมูลบังคับแต่ละตัวมาเขียนเป็นสมการได้ 1 สมการ ในสมการนั้นจะประกอบด้วยพารามิเตอร์หรือตัวไม่ทราบค่าอย่างน้อย 1 ตัว โดยเรียกสมการที่ได้ว่า "สมการเงื่อนไขบังคับ"

การจัดสมการเงื่อนไขบังคับมีดังนี้

1. การจัดสมการเงื่อนไขบังคับระยะ

สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของระยะทางเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัว คำนวณจากสมการ (4-5)

ดังนั้นสมการเงื่อนไขบังคับระยะในรูปของสมการเชิงเส้น CX + W = 0 จึงเป็น

$$b_{x_i} dX_i + b_{y_i} dY_i + b_{x_j} dX_j + b_{Y_j} dY_j + (S_o - S_c) = o \quad \ldots\ldots\ldots (4-10)$$

โดยที่

S_o = ค่าระยะทางที่คำนวณจากสมการ (4-4) โดยใช้ค่าประมาณของพิกัดที่เกี่ยวข้อง

S_c = ค่าระยะที่บังคับ

2. การจัดสมการเงื่อนไขบังคับแอซิมัท

สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์คือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของแอซิมัทเทียบกับพารามิเตอร์แต่ละตัว คำนวณจากสมการ (4-8)

ดังนั้นสมการเงื่อนไขบังคับแอซิมัทในรูปของสมการเชิงเส้น

จึงเป็น

$$c_{x_i} dX_i + c_{y_i} dY_i + c_{x_j} dX_j + c_{y_j} dY_j + (\alpha_o - \alpha_c) = 0 \qquad \ldots\ldots. (4\text{-}11)$$

โดยที่

α_o = ค่าแอซิมัทที่คำนวณจากสมการ (4-7) โดยใช้ค่าประมาณของพิกัดที่เกี่ยวข้อง

α_c = ค่าแอซิมัทที่บังคับ

3. การจัดสมการเงื่อนไขบังคับจุดพิกัด

เนื่องจากจุดพิกัดประกอบด้วยค่าพิกัด X และY ดังนั้นจึงเขียนสมการเงื่อนไขบังคับได้ 2 สมการ ถ้า i เป็นจุดพิกัด จะได้สมการเป็น

$$\begin{aligned} dX_i + (O_{x_o} - O_{x_c})_i &= 0 \quad \text{สมการที่ 1} \\ dY_i + (O_{y_o} - O_{y_c})_i &= 0 \quad \text{สมการที่ 2} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots. (4\text{-}12)$$

โดยที่

O_{x_o}, O_{y_o} = ค่าประมาณของพิกัดที่จุด i

O_{x_c}, O_{y_c} = ค่าบังคับของพิกัดที่จุด i

4.1.5 เมตริกซ์น้ำหนัก (ภูชงค์, 2525)

น้ำหนักในที่นี้หมายถึงน้ำหนักของค่าสังเกต ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบค่าสังเกตนั้น ๆ กับค่าอื่น ๆ ในเชิงสัมพัทธ์ หรืออาจกล่าวได้ว่าน้ำหนักเป็นการคาดคะเนหรือแสดงความน่าเชื่อถือในเชิงสัมพัทธ์ (relative reliabilities) ของค่าสังเกต ถ้าความแปรปรวนของค่าสังเกตมีน้อยแสดงว่าค่าสังเกตนั้นดี นั่นคือน้ำหนักของค่าสังเกตมีค่ามาก แต่ในทางตรงกันข้าม ถ้าความแปรปรวนของค่าสังเกตมีค่ามาก จะทำให้น้ำหนักของค่าสังเกตมีค่าน้อย จึงสรุปได้ว่า น้ำหนักของค่าสังเกตเป็นส่วนกลับกับความแปรปรวนของค่าสังเกต

ในงานสำรวจมักจะถือว่าค่าที่วัดได้แต่ละครั้งเป็นอิสระแก่กัน ดังนั้นค่าสังเกตในงานสำรวจส่วนใหญ่จึงไม่มีสหสัมพันธ์กัน (uncorrelate) จะได้ว่าเมตริกซ์ของความแปรปรวนของค่าสังเกต (L_b) เป็นเมตริกซ์ทแยง (diagonal matrix)

$$\Sigma_{L_b} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \phi \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \phi & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

เมื่อ σ_i^2 คือความแปรปรวนของค่าสังเกตที่ i; $i = 1, 2 \ldots\ldots n$

n คือจำนวนค่าสังเกต

และ P คือเมตริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกตจะได้ว่า

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{L_b}^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots (4\text{-}13)$$

โดยที่ σ_0^2 เป็นความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยก่อนการปรับแก้

4.1.6 ลำดับชั้นอิสระ

ในการปรับแก้เมื่อเลือกแบบจำลองขึ้นมาแล้ว แบบจำลองนั้นจะนำไปสู่จำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุดจำนวนหนึ่ง ซึ่งแทนด้วยปริมาณ n_o ถ้าแทนจำนวนค่าสังเกตด้วยปริมาณ n ค่าสังเกตเหล่านั้นต้องเป็นอิสระแก่กันคือ จะไม่มีค่าสังเกตใดที่สามารถได้จากค่าสังเกต $(n-1)$ ที่เหลือ และเมื่อ n มีขนาดมากกว่า n_o แสดงว่าจะต้องมีข้อมูลเกินมา จึงจำเป็นต้องทำการปรับแก้เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นเอกภาพสำหรับแบบจำลองนั้น ปริมาณที่เกินมา (redundancy) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ลำดับชั้นอิสระ (degree of freedom) แทนด้วยปริมาณ n จึงสามารถหาได้จาก

$$r = n - n_o$$

เมื่อ r = ลำดับชั้นอิสระ

n = จำนวนค่าสังเกต

n_o = จำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุด

ในกลุ่มของตัวแปรอิสระนี้ถ้ามีเงื่อนไขเพิ่มเข้ามาจะมีผลทำให้ปริมาณของลำดับชั้นอิสระมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งคำนวณได้จากสูตรความสัมพันธ์ทั่วไป

$$r = n - n_o + c$$

เมื่อ c = จำนวนเงื่อนไข

การวิจัยได้ทำการปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมในหลายลักษณะ ซึ่งจะให้ผลการปรับแก้ในรูปแบบจำลองที่เป็นเอกภาพแตกต่างกัน การคำนวณหาค่าของลำดับชั้นอิสระจึงต้องแยกกรณีตามลักษณะและวิธีการปรับแก้ของโครงข่ายโดยสรุปได้ดังนี้

1. การปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมปกติด้วยวิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติ เป็นการปรับโครงข่ายที่มีข้อมูลพร้อมสมบูรณ์ ประกอบด้วยข้อมูลการวัดและการตรึงค่า โดยมีความสัมพันธ์ของจำนวนพารามิเตอร์กับจำนวนตัวแปรอิสระต่ำสุดและจำนวนเงื่อนไขดังนี้คือ

$$u = n_o - c \quad \text{เมื่อ } u = \text{จำนวนพารามิเตอร์}$$

เมื่อแทนค่าลงในสูตรความสัมพันธ์ทั่วไป สามารถหาค่าลำดับชั้นอิสระได้จาก

$$r = n - u$$

2. การปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมอิสระด้วยวิธีสมการค่าสังเกตโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส เป็นการปรับแก้โครงข่ายเฉพาะข้อมูลที่มีอยู่เพียงบางส่วนไม่มีเงื่อนไขเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นเมื่อพิจารณาสูตรความสัมพันธ์ทั่วไปจะเห็นว่า ในเทอมของ c มีค่าเป็นศูนย์ ลำดับชั้นอิสระจึงสามารถคำนวณได้จาก

$$r = n - n_o$$

3. การปรับแก้โครงข่ายสามเหลี่ยมอิสระด้วยวิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส เป็นการปรับแก้โครงข่ายเฉพาะข้อมูลที่มีอยู่เพียงบางส่วนก่อนแล้วจึงเพิ่มเงื่อนไขเข้าไปภายหลัง ดังนั้นลำดับชั้นอิสระจึงสามารถคำนวณได้จากสูตรความสัมพันธ์ทั่วไปคือ

$$r = n - n_o + c$$

4.2 <u>ทฤษฎีการวิเคราะห์ผล</u>

ภายหลังการคำนวณปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ที่เป็นไปตามลำดับขั้นตอน สามารถให้ผลลัพธ์ออกมาประกอบด้วยค่าคาดคะเนตัวแปรสุ่มต่าง ๆ อันได้แก่ พารามิเตอร์ ค่าสังเกต พร้อม

ทั้งค่าคาดคะเนของเมตริกซ์ของความแปรปรวนของปริมาณเหล่านั้น การวิเคราะห์จะกระทำด้วยการตรวจสอบ ทดสอบ การวัด และการเปรียบเทียบ โดยมีทฤษฎีหลักเกณฑ์ของการวิเคราะห์ผลดังต่อไปนี้

4.2.1 การตรวจสอบการคำนวณ

สามารถตรวจสอบการคำนวณปรับแก้ได้ดังนี้

1. การปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกตแบบปกติ

ตรวจสอบผลได้จากสมการ $NX + U = 0$

หรือ $A'PV = 0$

2. การปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกตโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส

ตรวจสอบได้จากสมการ $NX + U = 0$ หรือ $A'PV = 0$

3. การปรับแก้โดยวิธีสมการค่าสังเกตผสมเงื่อนไขบังคับโดยใช้เทคนิคของซูโดอินเวอร์ส

ตรวจสอบได้จากสมการ $NX + U - C'K = 0$

และ $CX + W = 0$

4.2.2 การทดสอบความแปรปรวน (วิชา, 2524)

การทดสอบทางสถิติที่นิยมใช้กับข้อมูลลีสท์สแควร์เป็นการทดสอบเกี่ยวกับความแปรปรวนของน้ำหนักหนึ่งหน่วยก่อนการปรับแก้ (σ_0^2) และหลังการปรับแก้ ($\hat{\sigma}_0^2$) จากการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์สามารถทราบค่า $V'PV$ ที่ลำดับชั้นอิสระ r ทำให้ได้

$$\hat{\sigma}_0^2 = V'PV$$

โดยที่ $\hat{\sigma}_0^2$ เป็นค่าคาดคะเนที่ไม่โน้มเอียง (unbiased estimator) ของ σ_0^2

การทดสอบทางสถิติเกี่ยวกับ $\hat{\sigma}_0^2$ เปรียบเทียบกับ σ_0^2 ใช้ χ^2-test (Chi-Square test) โดยที่

$$\chi_r^2 = r.\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\text{-}14)$$

มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ด้วยลำดับชั้นอิสระ r โดยใช้ระดับนัยสำคัญ α ในการตัดสินใจสมมุติฐาน

การทดสอบแบ่งออกได้เป็น 3 แบบ คือ

1. การทดสอบทางเดียวสำหรับค่าที่น้อยกว่า (one-tail lower bound test)

สมมุติฐาน $H_o : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

ปฏิเสธ H_o เมื่อ $\chi^2 < \chi^2_{(1-\alpha),r}$ (ค่าวิกฤตล่าง)

เนื่องจาก $P(r.\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2 < \chi^2_{(1-\alpha).r}) = \alpha$

2. การทดสอบทางเดียวสำหรับค่าที่มากกว่า (one-tail upper bound test)

สมมุติฐาน $H_o : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$

ปฏิเสธ H_o เมื่อ $\chi_r^2 > \chi^2_{\alpha,r}$ (ค่าวิกฤตบน)

เนื่องจาก $P(r.\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2 > \chi^2_{\alpha,r}) = \alpha$

3. การทดสอบสองทาง (two-tail test)

สมมุติฐาน $H_o : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$, $H_1 : \hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2$

ปฏิเสธ H_o เมื่อ $\chi_r^2 < \chi^2_{(1-\alpha/2),r}$ (ค่าวิกฤตล่าง)

หรือ $\chi_r^2 > \chi^2_{\alpha/2,r}$ (ค่าวิกฤตบน)

เนื่องจาก $P(\chi^2_{(1-\alpha/2),r} < r.\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2 < \chi^2_{\alpha/2,r}) = 1 - \alpha$

สำหรับค่าวิกฤตล่างหรือค่าวิกฤตบนนั้น ได้จากการเปิดตารางที่ 4.1 ในการวิจัยนี้ได้เลือกการทดสอบไคสแควร์แบบการทดสอบสองทางเป็นหลักในการทดสอบค่าของ $\hat{\sigma}_0^2$ ทั้งนี้เนื่องจากไม่ทราบว่าค่าจากการคำนวณจะออกมาทางค่าน้อยหรือมากของเขตวิกฤต

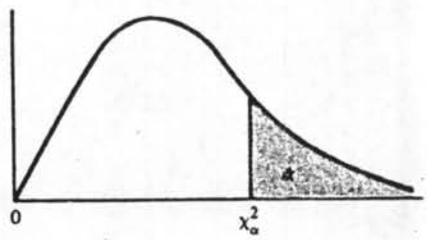
ในการทดสอบทางสถิติของค่า $\hat{\sigma}_0^2$ เป็นการบอกกล่าวความน่าจะเป็น (probability) ของผลการปรับแก้ ถ้าผลการทดสอบไม่ผ่านตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้แสดงว่า ผลของการปรับแก้นั้นไม่ได้เป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ควรที่จะมีการตรวจสอบต่อไป

4.2.3 การหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

อาศัยกฎของการแพร่ (rule of propagation) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสามารถหาได้จากเมตริกซ์ความแปรปรวนดังนี้

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าวิกฤตของโค้งการกระจายไคสแควร์

Critical Values of the Chi-square Distribution



	α							
ν	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

1. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว หาได้จากเมตริกซ์ Σ_{X_a}

$$\Sigma_{X_a} = \sigma_o^2 \cdot Q_{X_a}$$

2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่ารังเกตที่ปรับแก้แล้ว หาได้จากเมตริกซ์

$$\Sigma_{L_a} = A \cdot \Sigma_{X_a} \cdot A'$$

โดยที่

Q_{X_a} คือโคแฟกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว

A คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์

$A = \dfrac{\partial F}{\partial X_a}$ จากแบบจำลองเชิงคณิต $L_a = F(X_a)$

4.2.4 วงรีของความคลาดเคลื่อน

จากทฤษฎีวงรีของความคลาดเคลื่อนโดยการหมุนระบบแกนพิกัด เป็นการหาความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัด XY และระบบแกนพิกัด UV โดยที่ระบบแกนพิกัด UV เป็นของวงรีที่ต้องการสร้างขึ้น ดังรูปที่ 4.4 ซึ่งมีแกน U เป็นแกนหลัก (major axis) และแกน V เป็นแกนรอง (minor axis) ในการคำนวณวงรีของความคลาดเคลื่อนโดยอาศัยกฎการแพร่ จะพิจารณาจากเมตริกซ์ของความแปรปรวนของพารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้วคือ

$$\sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{x_1} & \sigma_{x_1x_2} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma^2_{x_2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งมีองค์ประกอบจากการคำนวณดังนี้

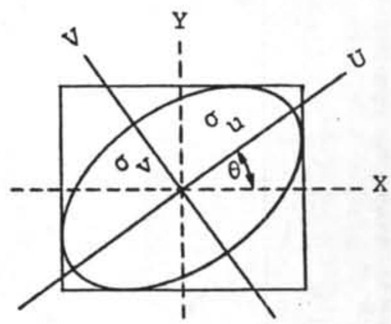
$$\sigma_u = ((\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} + W)/2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_v = ((\sigma^2_{x} + \sigma^2_{x_2} - W)/2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\left(2\sigma_{x_1x_2} / (\sigma^2_{x_1} - \sigma^2_{x_2})\right)\right) / 2$$

$$\rho = \frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$$

โดยที่ $W = \left(\left(\sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} - 4\left(\sigma^2_{x_1} \cdot \sigma^2_{x_2} - \sigma_{x_1x_2} \cdot \sigma_{x_2x_1}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$



รูปที่ 4.4 วงรีของความคลาดเคลื่อน

ดังนั้นวงรีของความคลาดเคลื่อนสามารถสร้างขึ้นได้ตามขนาดของ θ, σ_u และ σ_v ที่ได้จากการคำนวณ ซึ่งวงรีของความคลาดเคลื่อนที่ได้นี้จะได้นำไปใช้สำหรับการวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนค่าพิกัดของสถานีในโครงข่ายสามเหลี่ยมต่อไป