

บทที่ 3

วิธีคำนวณเชิงตัวเลข

3.1 วิธีปริมาตรจำกัด (finite volume method)

ปริมาตรจำกัดเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่ถูกพัฒนาขึ้นโดยใช้รูปแบบปริพันธ์ (integral forms) จากกฎการอนุรักษ์ (conservation laws) ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้นำวิธีดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับกฎทรงมวล และกฎทรงโมเมนตัมของสมการน้ำตื้น การใช้วิธีดังกล่าวนี้จะต้องทำการแบ่งโดเมนออกเป็นส่วนย่อย ๆ เรียกว่า เซลล์ (cell) และเรียกกลุ่มของเซลล์ทั้งหมดว่า กริดเซลล์ (grid cells) โดยจะทำการคำนวณหาค่าของตัวไม่ทราบค่า (unknown) ในแต่ละเซลล์ด้วยการเฉลี่ยค่าในเซลล์นั้น ๆ ซึ่งค่าเฉลี่ยนี้จะได้มาจากค่าฟลักซ์ที่ผ่านเข้ามาทางทุก ๆ ขอบ (interface) ของเซลล์

วิธีของกอดดุนอฟ (Godunov's method) [9] เป็นวิธีหนึ่งในวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการแก้ปัญหาระบบไฮเพอร์โบลิกไม่เชิงเส้น (nonlinear hyperbolic system) และถูกนำมาใช้กับระบบสมการน้ำตื้นอย่างแพร่หลาย

ในงานวิจัยก่อนหน้านี้ [15] ได้นำเอาสมการน้ำตื้นมาประยุกต์ใช้กับปัญหาเขื่อนแตก แต่สมการน้ำตื้นที่นำมาใช้ในงานวิจัยดังกล่าวเป็นเพียงสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์ (homogeneous partial differential equation) เท่านั้น กล่าวคือไม่ได้พิจารณาพจน์แหล่งต้นทางแต่อย่างใด ดังนั้นเมื่อมีการพิจารณาพจน์แหล่งต้นทางร่วมด้วย จึงเป็นสิ่งท้าทายว่าจะจัดการกับพจน์ดังกล่าวและคำนวณหาค่าคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาไม่เชิงเส้นไม่เอกพันธ์นี้ได้อย่างไร

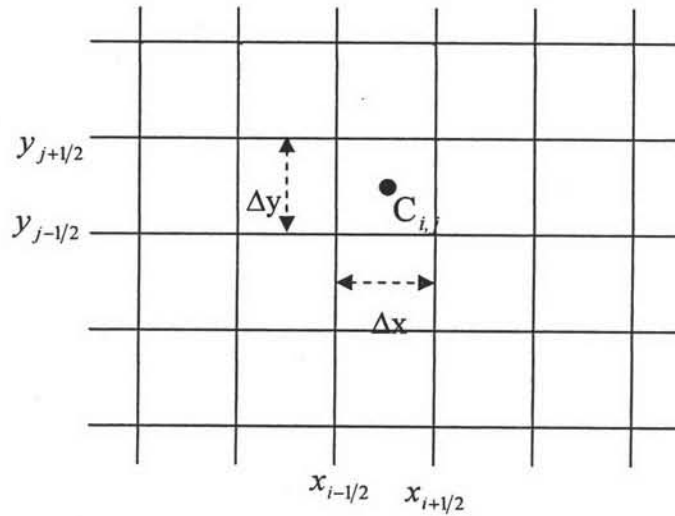
การคำนวณเชิงตัวเลขของสมการน้ำตื้นที่มีพจน์แหล่งต้นทาง

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{S} \quad (3.1)$$

เริ่มจากการกำหนดให้แต่ละเซลล์แทนด้วย $C_{i,j} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ โดยที่ $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ และ $\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$ ดังรูปที่ 3.1 เนื่องจากสมการน้ำตื้นดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ (non-homogeneous partial differential equation) ซึ่งการหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวจะต้องหาคำตอบของสมการเอกพันธ์ก่อน กล่าวคือต้องหาคำตอบของสมการ

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = 0 \quad (3.2)$$

แล้วจึงหาคำตอบของสมการไม่เอกพันธ์ (3.1)



รูปที่ 3.1 แสดงกริดเซลล์ และพิกัดอ้างอิงของเซลล์แต่ละเซลล์ใด ๆ

โดยการอินทิเกรตสมการ (3.2) บนเซลล์ C_{ij} จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q} dx dy + \iint_{C_{ij}} \mathbf{f}(\mathbf{q})_x dx dy + \iint_{C_{ij}} \mathbf{g}(\mathbf{q})_y dx dy &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q} dx dy + \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q})_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dy + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q})_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dx &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

และผลจากการอินทิเกรตในเวลาจาก t_n ถึง t_{n+1} จะได้ความสัมพันธ์ของปริมาณในสมการ (3.3) ระหว่างเวลา t_n และ t_{n+1} ดังนี้

$$\begin{aligned} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}|_{t_{n+1}} dx dy + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q})_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dy dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q})_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dx dt &= \mathbf{0} \\ \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_{n+1}) dx dy - \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_n) dx dy = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q})_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dy dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q})_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} dx dt &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_{n+1}) dx dy - \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_n) dx dy &= - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, y, t)) dy dt \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, y, t)) dy dt \\
&- \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j+1/2}, t)) dx dt \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j-1/2}, t)) dx dt \quad (3.4)
\end{aligned}$$

หารตลอดสมการ (3.4) ด้วยพื้นที่ของเซลล์ $\Delta x \Delta y$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_{n+1}) dx dy &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_n) dx dy \\
&- \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, y, t)) dy dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, y, t)) dy dt \right] \\
&- \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j+1/2}, t)) dx dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j-1/2}, t)) dx dt \right] \\
\frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_{n+1}) dx dy &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_n) dx dy \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, y, t)) dy dt - \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, y, t)) dy dt \right] \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j+1/2}, t)) dx dt - \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j-1/2}, t)) dx dt \right]
\end{aligned}$$

ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\mathbf{Q}_{ij}^{n+1} = \mathbf{Q}_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n] \quad (3.5)$$

เมื่อ $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ คือ ค่าเฉลี่ยของเซลล์ $C_{i,j}$ ที่เวลา t_n ซึ่งกำหนดโดย

$$\mathbf{Q}_{i,j}^n \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{C_{ij}} \mathbf{q}(x, y, t_n) dx dy$$

$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n$ คือ ค่าเฉลี่ยฟลักซ์ในทิศทางของ x ที่ตำแหน่ง $(x_{i-1/2}, y_j)$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n \approx \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, y, t)) dy dt$$

และ $\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n$ คือ ค่าเฉลี่ยฟลักซ์ในทิศทางของ y ที่ตำแหน่ง $(x_i, y_{j-1/2})$ ซึ่งกำหนดโดย

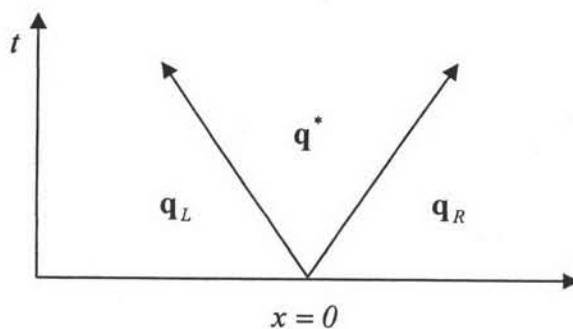
$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{g}(\mathbf{q}(x, y_{j-1/2}, t)) dx dt$$

จากสมการ (3.3) จะพบว่า ค่า Q ณ เวลาที่ t_{n+1} ถูกคำนวณได้จากค่า Q และค่าฟังก์ชัน ณ เวลา t_n เรียกแบบแผนการคำนวณในลักษณะนี้ว่าเป็น แบบแผนโดยชัดแจ้ง (explicit scheme) อย่างไรก็ตามมีปัญหาเกิดขึ้นในการประมาณค่าฟังก์ชัน ณ เวลา t_n ซึ่งเกิดจากความไม่ต่อเนื่องของเซลล์สองเซลล์ที่อยู่ติดกัน แต่เราสามารถแก้ปัญหานี้ได้ในรูปแบบของปัญหารีมานน์

3.2 ปัญหารีมานน์ (Riemann Problem)

ที่ขอบ $x = x_{i-1/2}$ ซึ่งต้องคำนวณหาค่าฟังก์ชันที่เกิดขึ้นจากเซลล์สองเซลล์ที่อยู่ติดกันคือ เซลล์ $C_{i-1,j}$ กับเซลล์ $C_{i,j}$ แต่เนื่องจากว่าทั้งสองเซลล์นั้นถูกประมาณด้วยค่าเฉลี่ย จึงเกิดความไม่ต่อเนื่อง ปัญหาคความไม่ต่อเนื่องดังกล่าวเรียกว่า ปัญหารีมานน์

เราสามารถหาคำตอบของปัญหารีมานน์ได้จาก คลื่น (wave) ที่เคลื่อนตัวด้วยความเร็ว (wave speed) ซึ่งในปัญหาของสมการไฮเพอร์โบลิกนี้ ความเร็วและทิศทางของคลื่นคือค่าเฉพาะ (eigenvalues) และเวกเตอร์เฉพาะ (eigenvectors) นั้นเอง



รูปที่ 3.2 ภาพจำลองแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของคลื่น

สำหรับสมการนำต้นสองมิติ คำตอบของปัญหารีมานน์หาได้จากการพิจารณาทิศทางของคลื่นที่เกิดขึ้นทั้งในแนวแกน x และในแนวแกน y ซึ่งวิธีหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวจะทำโดยการแยกพิจารณาในแต่ละทิศทาง นั่นคือในแนวแกน x จะทำการหาคำตอบของปัญหารีมานน์จาก $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$ โดยอาศัยทิศทางของคลื่นที่เคลื่อนไป ดังนั้น ที่ขอบ $x = x_{i-1/2}$ จะถูกอ้างอิงจากทิศทางความเร็วของคลื่นซึ่งถูกแบ่งเป็น 3 ทิศทาง นั่นคือทิศทางความเร็วทางซ้ายก็คือ $\mathbf{q}_L = \mathbf{Q}_{i-1,j}$, ทิศทางความเร็วส่วนกลาง \mathbf{q}^* และทิศทางความเร็วทางขวาก็คือ $\mathbf{q}_R = \mathbf{Q}_{i,j}$ ดังรูปที่ 3.2 การประมาณค่าคำตอบของปัญหารีมานน์จะกล่าวถึงในหัวข้อที่ 3.4

3.3 วิธีของกอดดุนอฟ (Godunov's method)

กอดดุนอฟได้วิจัยค้นพบการประมาณค่าฟังก์ชัน โดยการแก้ปัญหารีมานน์ของระบบสมการไฮเพอร์โบลิกไว้เมื่อปี ค.ศ. 1959 ซึ่งวิธีดังกล่าวสามารถทำได้ดังต่อไปนี้

- กำหนดให้ $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^n$ เป็นฟังก์ชันประมาณของ \mathbf{q} ซึ่งฟังก์ชันประมาณ $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^n$ ที่สะดวกที่สุดก็คือ $\tilde{\mathbf{q}}^n(x_i, y_j, t_n) = \mathbf{Q}_{i,j}^n$ เมื่อ $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ คือค่าเฉลี่ยของเซลล์ $C_{i,j}$ ซึ่งให้ค่าความถูกต้องอันดับหนึ่ง (first-order) นอกจากนี้ $\tilde{\mathbf{q}}_{ij}^n$ ก็ยังสามารถนิยามเป็นฟังก์ชันแบบอื่น ๆ ได้ ซึ่งจะให้ค่าความถูกต้องในระดับที่สูงขึ้น ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่ได้นิยามขึ้น ดังจะกล่าวต่อไปในหัวข้อที่ 3.6
- คำนวณค่าฟลักซ์ที่เกิดขึ้นที่ขอบ โดยการแก้ปัญหาของริมันน์นั่นคือที่ขอบ $x = x_{i-1/2}$ จะได้

$$\mathbf{F}_{i-1/2,j}^n = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}}_{i-1/2,j}^n) \quad (3.6)$$

โดยที่ $\tilde{\mathbf{q}}_{i-1/2,j}^n$ คือคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากการแก้ปัญหาของริมันน์ $\mathbf{q}_l + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = 0$ ซึ่งถูกประมาณค่าจากเซลล์สองเซลล์ที่ติดกันคือ $\mathbf{Q}_{i-1,j}$ กับ $\mathbf{Q}_{i,j}$ และในทำนองเดียวกันที่ขอบ $y = y_{i,j-1/2}$ ค่าฟลักซ์คำนวณได้จาก

$$\mathbf{G}_{i,j-1/2}^n = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j-1/2}^n) \quad (3.7)$$

โดยที่ $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j-1/2}^n$ คือคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากการแก้ปัญหาของริมันน์ $\mathbf{q}_l + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = 0$ ซึ่งถูกประมาณค่าจากเซลล์สองเซลล์ที่ติดกันคือ $\mathbf{Q}_{i,j-1}^n$ กับ $\mathbf{Q}_{i,j}^n$

- จากค่าประมาณฟลักซ์ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 จะนำมาปรับปรุงเซลล์ในแต่ละเซลล์ ตามสมการ (3.5)

3.4 การประมาณค่าของปัญหาริมันน์ (approximate Riemann solver)

การประมาณค่าฟลักซ์ในสมการ (3.6) และ (3.7) ที่ได้จากการแก้ปัญหาของริมันน์นั้นมีอยู่หลายวิธีด้วยกัน ซึ่งได้ถูกพัฒนามาตามลำดับ เช่น Roe [5], Van Leer [16, 6], Osher and Solomon [10], Harten [7, 8], Alcrudo and Garcia-Navarro [11], Nujic [12], Valiani [13], Harten Lax and Leer Contact [14] ฯลฯ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะนำเสนอเพียงการแก้ปัญหาของริมันน์ด้วยวิธีของ Harten, Lax and van Leer Contact (HLLC) เท่านั้น

สำหรับปัญหา 2 มิติ สามารถหาฟลักซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } s_L > 0 \\ \mathbf{F}_L^* & \text{if } s^* \geq 0 \geq s_L \\ \mathbf{F}_R^* & \text{if } s_R \geq 0 \geq s^* \\ \mathbf{F}_R & \text{if } 0 > s_R \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{n} = \frac{s_R \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{n} - s_L \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{n} + s_L s_R (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L)}{s_R - s_L}$$

เมื่อตัวห้อย (subscript) L และ R เป็นตัวบ่งชี้ทิศทางของฟลักซ์ทางด้านซ้าย (left) และด้านขวา (right) ตามลำดับ, \mathbf{n} คือเวกเตอร์แนวฉากในทิศพุ่งออก (outward normal vector), \mathbf{F}_L^* และ \mathbf{F}_R^* สามารถหาได้จาก $\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{n}$, s_L และ s_R ถูกแทนด้วยความเร็วของคลื่นในทิศทางซ้ายและขวา ตามลำดับซึ่งสามารถประมาณได้ด้วย [Toro 1992]

$$s_L = \begin{cases} \mathbf{q}_R \cdot \mathbf{n} - 2\sqrt{g_w h_R} & \text{if } h_L = 0 \\ \min(\mathbf{q}_L \cdot \mathbf{n} - \sqrt{g_w h_L}, u^* - \sqrt{g_w h^*}) & \text{if } h_L > 0 \end{cases}$$

$$s_R = \begin{cases} \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{n} + 2\sqrt{g_w h_L} & \text{if } h_R = 0 \\ \max(\mathbf{q}_R \cdot \mathbf{n} + \sqrt{g_w h_R}, u^* + \sqrt{g_w h^*}) & \text{if } h_R > 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$s^* = \frac{s_L h_R (\mathbf{q}_R - s_R) - s_R h_L (\mathbf{q}_L - s_L)}{h_R (\mathbf{q}_R - s_R) - h_L (\mathbf{q}_L - s_L)}$$

เมื่อ h_L และ h_R คือค่าความสูงของน้ำในเซลล์ทางซ้ายและเซลล์ทางขวาตามลำดับ

$$u^* = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R) \cdot \mathbf{n} + \sqrt{g_w h_L} - \sqrt{g_w h_R}$$

$$\sqrt{g_w h^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{g_w h_L} + \sqrt{g_w h_R}) + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_L - \mathbf{q}_R) \cdot \mathbf{n} \quad (3.10)$$

3.5 เงื่อนไขการมีเสถียรภาพของคำตอบ (stability condition)

ในปี 1928 Courant, Friedrichs และ Lewy ได้ค้นพบเงื่อนไขของการคำนวณเชิงตัวเลข ในปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นแบบไฮเพอร์โบลิกเพื่อให้คำตอบที่ได้มีเสถียรภาพ (stability) เงื่อนไขดังกล่าวถูกเรียกว่า เงื่อนไขของซีเอฟแอล (CFL condition)

สำหรับปัญหาของสมการไฮเพอร์โบลิกที่มีความเร็วของคลื่น m ทิศทางนั้น เงื่อนไขของซีเอฟแอลถูกกำหนดดังนี้

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{p=1,2,\dots,m} |\lambda^{(p)}| < 1$$

โดย $\lambda^{(p)}$ คือค่าความเร็วของคลื่นในแต่ละทิศทาง

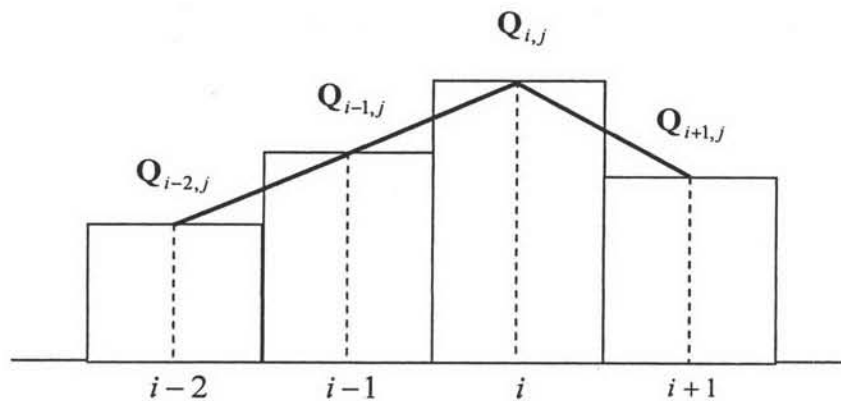
3.6 ค่าความถูกต้องอันดับสูง (high-resolution Godunov's method)

ในขั้นตอนแรกของวิธีการอดดุนอฟคือการหาค่าของ $\mathbf{Q}_{i,j}^n$ เพื่อหาค่าให้กับฟังก์ชันประมาณ $\tilde{\mathbf{q}}_v^n$ ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 3.3 เราได้กำหนดให้ $\tilde{\mathbf{q}}^n(x_i, y_j, t_n) = \mathbf{Q}_{i,j}^n$ ซึ่งให้ค่าความถูกต้องอันดับหนึ่ง เพราะฉะนั้นในบทย่อนี้จะได้กล่าวถึงวิธีประมาณค่า $\tilde{\mathbf{q}}_v^n$ เพื่อให้ค่า

ความถูกต้องอยู่ในอันดับที่สอง โดยใช้เทคนิควิธีแบบเอ็มยูเอสซีแอล (MUSCL-Monotonic Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) ซึ่งเทคนิควิธีนี้จะนำค่าที่ขอบมาพิจารณาเพื่อสร้างฟังก์ชันประมาณ \tilde{q}_i^n ดังนี้

$$\tilde{q}^n(x_i, y_j, t_n) = Q_{i,j}^n + \frac{1}{2} \sigma_{i,j}^n \Delta x$$

เมื่อ $\sigma_{i,j}^n$ คือค่าความชันของเซลล์ $C_{i,j}$ ดังแสดงในรูปที่ 3.3 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าความชัน $\sigma_{i,j}^n$ จะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise linear function) ซึ่งจากเทคนิควิธีดังกล่าวนี้ ส่งผลให้ค่าความถูกต้องของคำตอบอยู่ในอันดับสอง



รูปที่ 3.3 ภาพจำลองแสดงค่าความชันที่เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งต่อเนื่องเป็นช่วง

ตัวปรับค่าความชันมีหลายแบบ คือ

3.6.1 ตัวปรับค่าความชันแบบมินมอด (minmod slope limiter)

$$\sigma_{i,j}^n = \text{minmod} \left(\frac{Q_{i,j}^n - Q_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1,j}^n - Q_{i,j}^n}{\Delta x} \right)$$

โดยที่ฟังก์ชันของ **minmod** ถูกกำหนดไว้ดังนี้

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| \leq |b| \text{ and } ab > 0 \\ b & \text{if } |b| \leq |a| \text{ and } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab \leq 0 \end{cases}$$

3.6.2 ตัวปรับค่าความชันแบบเอ็มซี (MC-monotonized central difference limiter)

$$\sigma_{i,j}^n = \text{minmod} \left(\frac{Q_{i+1,j}^n - Q_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, 2 \left(\frac{Q_{i,j}^n - Q_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right), 2 \left(\frac{Q_{i+1,j}^n - Q_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \right)$$

3.6.3 ตัวปรับค่าความชันแบบซูเปอร์บี (super-bee limiter)

$$\sigma_{i,j}^n = \max\text{mod}(\sigma_{i,j}^{(1)}, \sigma_{i,j}^{(2)})$$

โดยที่

$$\sigma_{i,j}^{(1)} = \min\text{mod}\left(\left(\frac{Q_{i+1,j}^n - Q_{i,j}^n}{\Delta x}\right), 2\left(\frac{Q_{i,j}^n - Q_{i-1,j}^n}{\Delta x}\right)\right)$$

$$\sigma_{i,j}^{(2)} = \min\text{mod}\left(2\left(\frac{Q_{i+1,j}^n - Q_{i,j}^n}{\Delta x}\right), \left(\frac{Q_{i,j}^n - Q_{i-1,j}^n}{\Delta x}\right)\right)$$

3.7 พจน์แหล่งต้นทาง (source term)

สมการน้ำตื้นที่ถูกนำมาใช้ในงานวิจัยในอดีตไม่ได้ให้ความสำคัญกับการพิจารณาพจน์แหล่งต้นทาง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะความสะดวกในการแก้ปัญหาหรรวมไปถึงความสะดวกในการคำนวณเชิงตัวเลข และมุ่งเน้นเพื่อศึกษาพฤติกรรมเบื้องต้นของการไหลของน้ำเพียงเท่านั้น แต่เมื่อนำพจน์แหล่งต้นทางมาพิจารณาในสมการน้ำตื้นก็จะทำให้ปัญหามีความใกล้เคียงกับธรรมชาติมากยิ่งขึ้น ส่งผลให้สามารถอธิบายพฤติกรรมการไหลของน้ำได้มากขึ้นกว่าเดิม

ดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อที่ 3.1 แล้วว่า การจะหาคำตอบของสมการน้ำตื้นเริ่มจากการแก้ปัญหาสมการเอกพันธ์ หรือ $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{0}$ โดยใช้วิธีของกอดดุนอฟทำให้ได้สมการ (3.5) ต่อไปจะได้กล่าวถึงการแก้ปัญหาสมการไม่เอกพันธ์หรือการแก้ปัญหาสมการ $\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{S}$ โดยใช้เทคนิคแบ่งแยกกึ่งปริยาย (semi-implicit splitting technique)

เทคนิคแบ่งแยกกึ่งปริยายนี้ จะทำการพิจารณาพจน์แหล่งต้นทางที่ละพจน์ โดยประมาณค่าของพจน์แหล่งต้นทางนั้นด้วยค่าเฉลี่ยในเวลา ซึ่งพจน์แหล่งต้นทางที่จะกล่าวถึงในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แก่ ความชันของพื้นผิว และแรงเสียดทาน ซึ่งจากสมการ (2.9) จะได้ว่า

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_w h (S_{0x} - S_{fx}) \\ g_w h (S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} = \mathbf{S}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{q})$$

เมื่อ

$$\mathbf{S}_0(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_w h S_{0x} \\ g_w h S_{0y} \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{S}_f(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g_w h S_{fx} \\ -g_w h S_{fy} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{q}) + \mathbf{S}_f(\mathbf{q})$$

กำหนดให้ $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{adv}$ เป็นฟังก์ชันประมาณค่าที่ได้จากการแก้ปัญหาสมการเอกพันธ์นั่นคือ $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{adv} = \mathbf{Q}_{ij}^n$ และ $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*$ เป็นฟังก์ชันประมาณค่าที่ได้จากการแก้ปัญหาสมการเอกพันธ์ที่มีพจน์แหล่งต้นทางเป็นความชัน และเมื่อประมาณค่าของพจน์แหล่งต้นทางในส่วนของความชันด้วยค่าเฉลี่ยในเวลาจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{i,j}^* = \mathbf{Q}_{i,j}^{adv} + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{s}_0(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{adv}) + \mathbf{s}_0(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*)]$$

แต่เนื่องจากความชันของพื้นผิวไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา นั่นคือ $\mathbf{s}_0(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{adv}) = \mathbf{s}_0(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*)$ ดังนั้น

$$\mathbf{Q}_{i,j}^* = \mathbf{Q}_{i,j}^{adv} + \Delta t \mathbf{s}_0(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*) \quad (3.11)$$

กำหนดให้ $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n+1}$ เป็นฟังก์ชันประมาณค่าที่ได้จากการแก้ปัญหาสมการเอกพันธ์ที่มีพจน์แหล่งต้นทางเป็นความชันและแรงเสียดทาน เพราะฉะนั้นเมื่อประมาณค่าของพจน์แหล่งต้นทางในส่วนของแรงเสียดทาน ด้วยค่าเฉลี่ยในเวลาจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i,j}^* + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*) + \mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n+1})]$$

แต่เนื่องจากแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ดังนั้นจะประมาณค่าของ $\mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^{n+1})$ ด้วยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor's series) รอบค่า $\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\mathbf{Q}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{i,j}^* + \Delta t \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \Phi(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*) \right]^{-1} \cdot \mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}_{i,j}^*) \quad (3.12)$$

เมื่อ $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}^*) = \frac{\partial \mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}^*)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^*}$ คือจาโคเบียนเมทริกซ์ ซึ่งสามารถหาค่าของ $\Phi(\tilde{\mathbf{q}}^*)$ ได้ดังต่อไปนี้

$$\text{กำหนดให้ } \mathbf{s}_f(\tilde{\mathbf{q}}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ ghS_{fx} \\ ghS_{fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \end{bmatrix} \text{ และ } \tilde{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น}$$

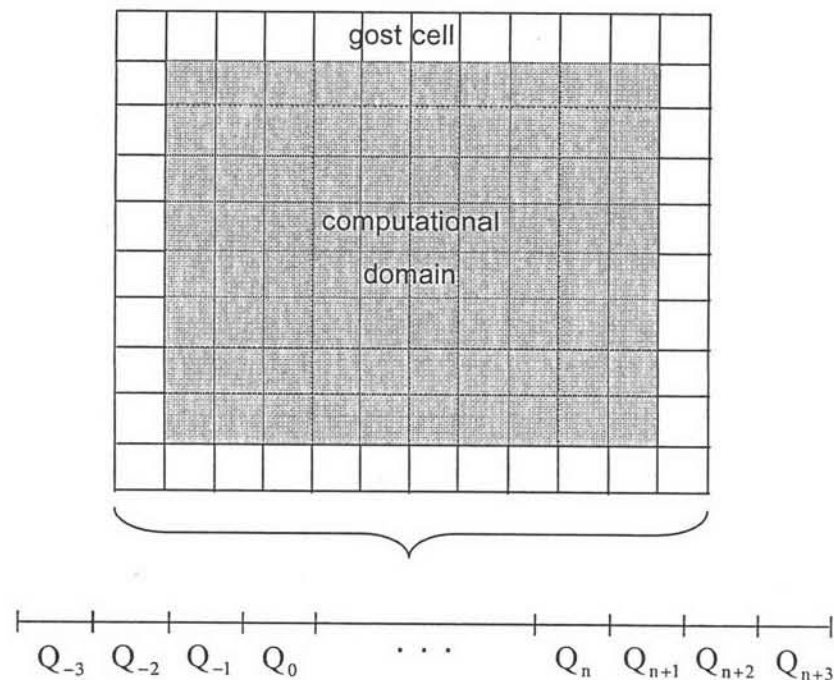
$$\Phi(\tilde{\mathbf{q}}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{q}_2} & \frac{\partial \mathbf{S}_1}{\partial \mathbf{q}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \mathbf{q}_2} & \frac{\partial \mathbf{S}_2}{\partial \mathbf{q}_3} \\ \frac{\partial \mathbf{S}_3}{\partial \mathbf{q}_1} & \frac{\partial \mathbf{S}_3}{\partial \mathbf{q}_2} & \frac{\partial \mathbf{S}_3}{\partial \mathbf{q}_3} \end{bmatrix}$$

3.8 เงื่อนไขค่าขอบ (boundary condition)

พื้นผิวในธรรมชาติซึ่งถือได้ว่าเป็นโดเมนที่มีขอบเขตไม่จำกัด ดังนั้นจึงเป็นเรื่องยากหากจะนำโดเมนในธรรมชาติมาพิจารณาเพื่อหาคำตอบ ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นต้องทำการพิจารณาเพียงบริเวณที่สนใจเท่านั้น ซึ่งบริเวณดังกล่าวนี้ถือได้ว่าเป็นบริเวณที่มีขอบเขตจำกัด ดังนั้น สิ่งสำคัญประการหนึ่งในการหาคำตอบคือ เงื่อนไขค่าขอบ ซึ่งเงื่อนไขนี้จะป็นเงื่อนไขที่บ่ง

บอกถึงลักษณะทางกายภาพในธรรมชาติ กล่าวคือ คลื่นที่เคลื่อนตัวมาที่ขอบของบริเวณที่พิจารณาจะเกิดการสะท้อนกลับหรือเคลื่อนตัวผ่านขอบออกไป ซึ่งในแต่ละปัญหาก็จะมีเงื่อนไขค่าขอบที่แตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของปัญหาและลักษณะทางกายภาพของปัญหานั้น ๆ

ในการคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาค่าขอบจำเป็นจะต้องเพิ่มกริดเซลล์บริเวณขอบของโดเมน ซึ่งเรียกกริดเซลล์ที่เพิ่มขึ้นมาบริเวณขอบนี้ว่า โกลเซลล์ (ghost cell) เพื่อใช้ในการอ้างอิงสำหรับการคำนวณค่าฟลักซ์ ดังรูปที่ 3.4 ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะได้นำเสนอเงื่อนไขค่าขอบสองลักษณะ คือ เงื่อนไขค่าขอบแบบผนัง (solid wall condition) และเงื่อนไขค่าขอบแบบนอยมันน์ (Neumann condition)



รูปที่ 3.4 ภาพแสดงโกลเซลล์และโดเมนในการคำนวณ

3.8.1 เงื่อนไขค่าขอบแบบผนัง

เงื่อนไขค่าขอบแบบผนังนี้ถูกนำมาใช้กับปัญหาค่าขอบที่มีลักษณะทางกายภาพแบบเป็นผนัง กล่าวคือมีการสะท้อนของคลื่นในทิศตั้งฉากกับขอบทำให้คลื่นสามารถเกิดการสะท้อนในทิศตั้งฉากกับขอบเท่านั้น ดังนั้นความเร็วในทิศตั้งฉากของคลื่นที่ขอบจึงมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจากความหมายเชิงกายภาพนี้ทำให้ได้มาซึ่งค่าบนโกลเซลล์ดังต่อไปนี้

ในทิศทางของ x

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ hv \end{bmatrix}_{0,j} \quad \text{เมื่อ } i = -1, -2, -3 \text{ และ}$$

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ hv \end{bmatrix}_{n,j} \quad \text{เมื่อ } i = n+1, n+2, n+3$$

ในทิศทางของ y

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ 0 \end{bmatrix}_{i,0} \quad \text{เมื่อ } j = -1, -2, -3 \text{ และ}$$

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ 0 \end{bmatrix}_{i,m} \quad \text{เมื่อ } j = m+1, m+2, m+3$$

เมื่อ n และ m เป็นค่าของจำนวนเซลล์ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

3.8.2 เงื่อนไขค่าขอบแบบนอยมันน์

เงื่อนไขค่าขอบแบบนอยมันน์นี้ถูกนำมาใช้กับปัญหาค่าขอบที่มีลักษณะทางกายภาพแบบไม่มีขอบเขต กล่าวคือไม่มีการสะท้อนของคลื่นทำให้คลื่นสามารถเคลื่อนที่ผ่านขอบไปได้ ดังนั้นความเร็วของคลื่นที่ขอบจึงมีค่าไม่เป็นศูนย์ แต่มีค่าเท่ากับความเร็วของคลื่นที่เข้ามา ซึ่งจากความหมายเชิงกายภาพนี้ทำให้ได้มาซึ่งค่าบนโกลเซลล์ดังต่อไปนี้

ในทิศทางของ x

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{0,j} \quad \text{เมื่อ } i = -1, -2, -3 \text{ และ}$$

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{n,j} \quad \text{เมื่อ } i = n+1, n+2, n+3$$

ในทิศทางของ y

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,0} \quad \text{เมื่อ } j = -1, -2, -3 \text{ และ}$$

$$Q_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,j} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}_{i,m} \quad \text{เมื่อ } j = m+1, m+2, m+3$$

เมื่อ n และ m เป็นค่าของจำนวนเซลล์ในแนวแกน x และแกน y ตามลำดับ

3.9 ขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีปริมาตรจำกัด

1. กำหนดค่าตัวแปรเพื่อการคำนวณดังนี้

ขนาดของกริดเซลล์ Δx และ Δy

ขนาดของผลต่างของเวลา Δt

เวลาในการสร้างแบบจำลอง Time

ค่าความชันของพื้นผิว $(S_0)_x$ และ $(S_0)_y$ ในทุกเซลล์

กำหนดค่าเวลาเริ่มต้น $t = 0$

2. กำหนดเงื่อนไขค่าขอบบนบนโกลเซลล์

(ดังแสดงรายละเอียดเงื่อนไขค่าขอบในหัวข้อที่ 3.8)

3. คำนวณค่าฟลักซ์ที่เกิดขึ้นบนขอบในทิศทางของ x โดยการแก้ปัญหาริมนันท์ กล่าวคือ

$$F_{i-1/2,j}^n = f(\tilde{q}_{i-1/2,j}^n)$$

4. ปรับปรุงค่าเซลล์ทุกเซลล์ในโดเมนของการคำนวณ

$$Q_{ij}^{adv} = Q_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n]$$

5. คำนวณค่าฟลักซ์ที่เกิดขึ้นบนขอบในทิศทางของ y โดยการแก้ปัญหาริมนันท์ กล่าวคือ

$$G_{i,j-1/2}^n = g(\tilde{q}_{i,j-1/2}^n)$$

6. ปรับปรุงค่าเซลล์ทุกเซลล์ในโดเมนของการคำนวณ

$$Q_{ij}^{adv} = Q_{ij}^{adv} - \frac{\Delta t}{\Delta y} [G_{i,j+1/2}^n - G_{i,j-1/2}^n]$$

7. ถ้าพื้นผิวมีความชันหรือ $S_0 \neq 0$ จึงทำการปรับปรุงค่าจากพจน์แหล่งต้นทางในส่วนของความชันพื้นผิวดังนี้

$$Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^{adv} + \Delta t \cdot g_w h \cdot (S_0)$$

หากพื้นผิวไม่มีความชันหรือ $S_0 = 0$ ให้ $Q_{i,j}^* = Q_{i,j}^{adv}$

8. กำหนดค่าแรงเสียดทาน S_{fx} และ S_{fy} ซึ่งประมาณด้วยกฎของแมกนิง

$$S_{fx} = \frac{un^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad \text{และ} \quad S_{fy} = \frac{vn^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$$

9. ถ้าพื้นผิวมีความชันหรือ $S_f \neq 0$ จึงทำการปรับปรุงค่าจากพจน์แหล่งต้นทางในส่วนของแรงเสียดทานดังนี้

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^* + \Delta t \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2} \Phi(\tilde{q}_{i,j}^*) \right]^{-1} \cdot S_f \quad \text{เมื่อ} \quad \Phi(\tilde{q}^*) = \frac{\partial S_f(\tilde{q}^*)}{\partial \tilde{q}^*}$$

หากพื้นผิวไม่มีแรงเสียดทานหรือ $S_f = 0$ ให้ $Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^*$

10. จัดเก็บค่า $Q_{i,j}^{n+1}$ ลงสู่อันดับที่ข้อมูลทางคอมพิวเตอร์ และกำหนดให้ค่า $t \leftarrow t + \Delta t$

11. ตรวจสอบค่า $t \leq Time$

ถ้าเป็นจริงให้ทำข้อ 2 ถ้าไม่จริงให้ทำข้อ 12

12. นำค่า $Q_{i,j}^n$ ที่เวลา n ใด ๆ ที่บันทึกไว้แสดงผลด้วยรูปภาพเคลื่อนไหว

ซึ่งจากขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีปริมาตรจำกัดดังกล่าวนี้สามารถแสดงเป็นผังงานของการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีปริมาตรจำกัดได้ดังต่อไปนี้

