บทที่ 2

สมการน้ำตื้น

รูปแบบและลักษณะของคลื่นต่างก็มีปัจจัยและผลกระทบมาจากองค์ประกอบหลายสิ่งหลายอย่างด้วยกัน ซึ่งจะสัมพันธ์กันในแบบไม่เชิงเส้น ในทางคณิตศาสตร์เรียกปัญหาเหล่านี้ว่าปัญหาไม่เชิงเส้น ภายใต้องค์ความรู้ที่มีอยู่ในปัจจุบันหากจะนำทุกปัจจัยหรือทุกผลกระทบที่ส่งผลต่อรูปแบบของคลื่นมาพิจารณาเพื่อสร้างแบบจำลองแล้ว ก็จะทำให้การแก้ปัญหาเพื่อศึกษารูปแบบของคลื่นทำได้ยาก ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องละเว้นบางปัจจัยที่ส่งผลกระทบต่อรูปแบบของคลื่นน้อยที่สุดเมื่อเทียบกับปัจจัยอื่น ๆ

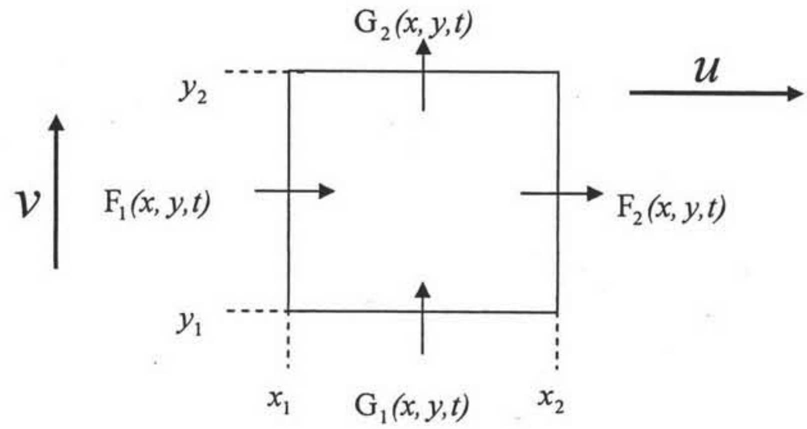
สมมติฐานและปัจจัยที่มีผลต่อรูปแบบของคลื่นที่ถูกนำมาใช้ในการได้มาของสมการน้ำตื้นคือ

- ของไหลสภาพอัดไม่ได้ (incompressible fluid)
- ความดันอุทกสถิต (hydrostatic pressure)
- ไม่เกิดการไหลแบบปั่นป่วน (nonturbulence)

กำหนดให้ $q(x,y,t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งบ่งบอกปริมาณใด ๆ ของสิ่งที่สนใจ และพิจารณา

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} q(x,y,t)\,dx\,dy \tag{2.1}$$

สมการ (2.1) หมายถึงผลรวมของปริมาณดังกล่าวบนบริเวณที่พิจารณาคือ $\{(x,y) \mid x_1 \le x \le x_2$ และ $y_1 \le y \le y_2\}$ ซึ่งล้อมรอบโดย $x_1 \le x \le x_2$ และ $y_1 \le y \le y_2$ (ดังรูปที่ 2.1)



รูปที่ 2.1 แสดงบริเวณและทิศทางการไหลของของไหล

กำหนดให้ $F_i(x,y,t)$ แทนด้วยฟลักซ์ ซึ่งเกิดจากความเร็วในทิศทาง x และ $G_i(x,y,t)$ แทนด้วยฟลักซ์ ซึ่งเกิดจากความเร็วในทิศทาง y

เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป ผลรวมของปริมาณที่สนใจบนบริเวณที่พิจารณานี้จะเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากฟลักซ์ (flux) ซึ่งเกิดจากความเร็วในทิศทาง x และ y ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} q(x,y,t)dxdy = \int_{y_1}^{y_2}\{F_1(t)-F_2(t)\}dy + \int_{x_1}^{x_2}\{G_1(t)-G_2(t)\}dx \tag{2.2}$$

สมการ (2.2) คือรูปแบบกฎการอนุรักษ์ปริมาณพื้นฐาน (conservation law) ซึ่งฟลักซ์ที่เกิดจากความเร็วนี้จะสัมพันธ์กับฟังก์ชันบอกปริมาณของสิ่งที่สนใจ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} q(x,y,t)dxdy &= \int_{y_1}^{y_2}\left\{f(q)\big|_{x_1} - f(q)\big|_{x_2}\right\}dy + \int_{x_1}^{x_2}\left\{g(q)\big|_{y_1} - g(q)\big|_{y_2}\right\}dx \\ &= -\int_{y_1}^{y_2} f(q)\big|_{x_1}^{x_2} dy - \int_{x_1}^{x_2} g(q)\big|_{y_1}^{y_2} dx \end{aligned} \tag{2.3}$$

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งจะสามารถเขียน (2.3) ใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} q(x,y,t)dxdy = -\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}f(q)dxdy - \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}g(q)dydx$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t)dxdy = -\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}f(q)dxdy - \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial y}g(q)dxdy$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t)dxdy + \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}f(q)dxdy + \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial y}g(q)dxdy = 0$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(q) + \frac{\partial}{\partial y}g(q)\right\}dxdy = 0$$

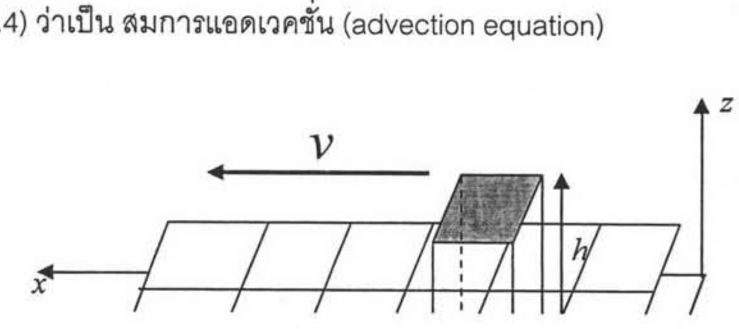
และจะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x,y,t) + \frac{\partial}{\partial x}f(q) + \frac{\partial}{\partial y}g(q) = 0$$

หรือเขียนในรูปย่อได้ดังนี้

$$q_t + f(q)_x + g(q)_y = 0 \tag{2.4}$$

เรียกสมการ (2.4) ว่าเป็น สมการแอดเวคชั่น (advection equation)



รูปที่ 2.2 แสดงบริเวณที่ควบคุมปริมาตร (control volume)

2.1 **กฎทรงมวล** (conservation of mass)

ถ้าปริมาณที่สนใจหรือ $q(x,y,t)$ คือมวล (mass) จะสามารถหาค่ามวลได้จาก $q(x,y,t)=\rho h(x,y,t)$ เมื่อ ρ คือความหนาแน่นซึ่งมีค่าคงที่และ h คือระดับความสูงที่ตำแหน่งนั้น ๆ เพราะฉะนั้นฟลักซ์หรือในที่นี้คือ มวลฟลักซ์ (mass flux) จะสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$f(q)=qu=\rho hu \text{ และ } g(q)=qv=\rho hv$$

เมื่อ u และ v คือความเร็วในทิศทางของ x และ y ตามลำดับ

จากสมการแอดเวคชั่น (2.4) เมื่อแทนค่ามวลฟลักซ์ในทิศทางของ x และ y แล้วจะได้สมการแอดเวคชั่นเป็น

$$(\rho h)_t+(\rho hu)_x+(\rho hv)_y=0$$
$$(h)_t+(hu)_x+(hv)_y=0 \tag{2.5}$$

ซึ่งจะเรียกสมการ (2.5) ว่า สมการภาวะต่อเนื่อง (continuity equation)

2.2 **กฎทรงโมเมนตัม** (conservation of momentum)

ถ้าปริมาณที่สนใจหรือ $q(x,y,t)$ คือโมเมนตัม (momentum) และพิจารณาโมเมนตัมในทิศทางของ x เป็นอันดับแรก จะได้ว่าที่ตำแหน่ง (x,y,t) ใด ๆ จะสามารถหาค่าโมเมนตัมได้จาก $q(x,y,t)=\rho h(x,y,t)u(x,y,t)$ เพราะฉะนั้นฟลักซ์หรือในที่นี้คือ โมเมนตัมฟลักซ์ (momentum flux) ในทิศทางของ x สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$f(q)=qu+P=\rho hu^2+P \text{ และ } g(q)=qv=\rho huv\,.$$

เมื่อ P คือความดัน

จากเงื่อนไขความดันอุทกสถิตจะได้ว่า

$$P = \int_{z_0}^{z_0+h} \rho g_w z dz$$

เมื่อ g_w คือ แรงโน้มถ่วง (gravity force)

z คือ ตัวแปรของการหาปริพันธ์ในแนวความสูง และ

z_0 คือ ฟังก์ชันพื้นผิว (bottom function)

จากกฎของนิวตันข้อที่สองหรือ $\sum F = ma$ เมื่อ F คือแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาเพียงสองแรงคือ แรงเสียดทานที่เกิดจากพื้นผิวและแรงที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกซึ่งจะได้ว่า แรงเสียดทานที่เกิดจากพื้นผิวคือ $\tau(x, y)$ และแรงที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกคือ $\rho g_w h \frac{\partial}{\partial x} z_0$

จากสมการแอดเวคชั่นเมื่อแทนค่าโมเมนตัมฟลักซ์ในทิศทางของ x และพิจารณาแรงภายนอกที่เกิดขึ้นแล้ว จะสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$(\rho hu)_t + \left(\rho hu^2 + \int_{z_0}^{z_0+h} \rho g_w z dz \right)_x + (\rho huv)_y = \rho g_w h \frac{\partial}{\partial x} z_0 + \tau$$

$$(\rho hu)_t + \left(\rho hu^2 + \rho g_w \frac{h^2}{2} \right)_x + (\rho huv)_y = \rho g_w h \left(z_0 - \frac{\tau}{\rho g_w h} \right)_x$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + g_w \frac{h^2}{2} \right)_x + (huv)_y = g_w h \left(z_0 - \frac{\tau}{\rho g_w h} \right)_x$$

$$(hu)_t + \left(hu^2 + g_w \frac{h^2}{2} \right)_x + (huv)_y = g_w h \left(S_{0x} - S_{fx} \right) \qquad (2.6)$$

เมื่อ $S_{0x} = \frac{\partial}{\partial x} z_0$ คือความชันของฟังก์ชันพื้นผิวในทิศทางของ x และ $S_{fx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{\rho g_w h} \right)$ คือแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในทิศทางของ x ณ ตำแหน่ง (x, y) ใด ๆ

ในทำนองเดียวกันหากพิจารณาโมเมนตัมในทิศทางของ y จะสามารถหาค่าโมเมนตัม ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้จาก $q(x,y,t) = \rho h(x,y,t) v(x,y,t)$ เพราะฉะนั้นโมเมนตัมฟลักซ์ในทิศทางของ y สามารถกำหนดได้ดังนี้

$$f(q) = qu = \rho hvu \text{ และ } g(q) = qv + P = \rho hv^2 + P$$

ซึ่งจะได้สมการแอดเวคชั่นเป็น

$$(hu)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + g_w \frac{h^2}{2} \right)_y = g_w h \left(S_{0y} - S_{fy} \right) \qquad (2.7)$$

เมื่อ $S_{0y} = \dfrac{\partial}{\partial y} z_0$ คือความชันของฟังก์ชันพื้นผิวในทิศทางของ y และ $S_{fy} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\tau}{\rho g_w h}\right)$ คือแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นในทิศทางของ y ณ ตำแหน่ง (x, y) ใด ๆ

สำหรับแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นจะสามารถประมาณได้โดยใช้กฎของแมนนิ่ง (Manning resistance law) คือ $S_{fx} = \dfrac{un^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}}$ และ $S_{fy} = \dfrac{vn^2\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}}$, โดยที่ n คือค่าสัมประสิทธิ์ของแมนนิ่ง (manning coefficient)

สมการ (2.5), (2.6) และ (2.7) ประกอบกันเป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เรียกว่าระบบสมการน้ำตื้นแบบสองมิติ (two-dimensional shallow water equations) นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
(h)_t + (hu)_x + (hv)_y &= 0 \\
(hu)_t + \left(hu^2 + g_w \frac{h^2}{2}\right)_x + (huv)_y &= g_w h\left(S_{0x} - S_{fx}\right) \\
(hu)_t + (huv)_x + \left(hv^2 + g_w \frac{h^2}{2}\right)_y &= g_w h\left(S_{0y} - S_{fy}\right)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$
\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x + \mathbf{g}(\mathbf{q})_y = \mathbf{S} \tag{2.9}
$$

โดยที่

$$
\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix},\ \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g_w \dfrac{h^2}{2} \\ huv \end{bmatrix},\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g_w \dfrac{h^2}{2} \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_w h\left(S_{0x} - S_{fx}\right) \\ g_w h\left(S_{0y} - S_{fy}\right) \end{bmatrix}
$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป ควอซิลิเนียร์ (quasilinear) ได้ดังนี้

$$
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{q} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{f}(\mathbf{q}) + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}
$$

$$
\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = \mathbf{S}
$$

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}'(\mathbf{q})\mathbf{q}_x + \mathbf{g}'(\mathbf{q})\mathbf{q}_y = \mathbf{S} \tag{2.10}$$

โดยที่ $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ และ $\mathbf{g}'(\mathbf{q})$ คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ (Jacobian matrix)

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + g_w h & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix}, \ \mathbf{g}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + g_w h & 0 & 2v \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

เมื่อกำหนดให้ $c = \sqrt{g_w h}$ ซึ่งเป็นความเร็วคลื่นภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก (gravity waves) จะได้ว่าเมทริกซ์ $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ มีค่าเฉพาะ (eigenvalues) เป็น

$$\lambda_x^{(1)} = u - c\,, \quad \lambda_x^{(2)} = u\,, \quad \lambda_x^{(3)} = u + c$$

และเวกเตอร์เฉพาะ (eigenvectors) เป็น

$$\mathbf{w}_x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u-c \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u+c \\ v \end{bmatrix}$$

ส่วนเมทริกซ์ $\mathbf{g}'(\mathbf{q})$ จะมีค่าเฉพาะเป็น

$$\lambda_y^{(1)} = v - c\,, \quad \lambda_y^{(2)} = v\,, \quad \lambda_y^{(3)} = v + c$$

และเวกเตอร์เฉพาะเป็น

$$\mathbf{w}_y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v-c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_y^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v+c \end{bmatrix}$$