บทที่ 3

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

3.1 บทนำ

ในบทนี้ จะกล่าวถึงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (Finite volume method) กับสมการพื้นฐานของการไหลในบทที่แล้ว เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเหล่านั้น ซึ่งขั้นตอนของระเบียบวิธีการนี้ประกอบไปด้วยส่วนประกอบหลักคือ

1) สมการควบคุมพื้นฐานและการดิสครีไทซ์
2) การประมาณค่าที่บริเวณ Interface ด้วย Numerical scheme แบบต่างๆ
3) เงื่อนไขขอบแบบต่างๆตลอดจนกระบวนการหาผลเฉลยด้วยวิธี TDMA ร่วมกับการใช้ SIMPLE algorithm

3.2 สมการควบคุมพื้นฐาน (Governing Equations)

จากสมการพื้นฐานในบทที่ 2 สามารถแสดงในรูปทั่วไปของตัวแปร ϕ ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลได้ดังนี้

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{Rate of change term}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\phi u_i)}_{\text{Convection term}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_i})}_{\text{Diffusion term}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Source term}} \qquad (3.1)$$

เมื่อ ϕ คือ ตัวแปรหลักต่างๆของของไหล u, v, T เป็นต้น

Γ คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (Diffusion coefficient)

3.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมสำหรับปัญหาการพาและการแพร่กระจาย (The Finite Volume Method for Convection-Diffusion Problems)

สำหรับปัญหาที่การไหลมีบทบาทสำคัญ เราจะพิจารณาผลของเทอมการพา ซึ่งเทอมการแพร่กระจายจะเกิดควบคู่กันไปในสนามการไหลที่เกิดขึ้นได้ ถ้าเราทราบสนามการไหลที่เกิดขึ้นแล้ว เราสามารถหาค่าตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงของการไหลได้ จากสมการ (3.1) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปตัวแปร ϕ เมื่อนำมาใช้วิเคราะห์หาผลเฉลย เราสามารถใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมทำ

การเปลี่ยนรูปแบบของสมการที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตด้วยการอินทิเกรตตลอดปริมาตรควบคุม (Control volume) ได้ดังนี้

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\, dV + \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\phi u_i)\, dV = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i})\, dV + \int_{CV} S_\phi dV \qquad (3.2)$$

ในกรณีที่พิจารณาของไหลในสถานะอยู่ตัว (Steady state) นั่นคือ กรณีที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ ϕ เทียบกับเวลา เราสามารถตัดเทอมที่ 1 ทางด้านซ้ายของสมการ (3.2) ออกได้ ทำให้สมการ (3.2) ถูกลดรูปกลายเป็น

$$\int_{CV} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\phi u_i)\, dV = \int_{CV} \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i})\, dV + \int_{CV} S_\phi dV \qquad (3.3)$$

ซึ่งสมการนี้ก็คือ สมการพื้นฐานในรูปทั่วไปที่เขียนอยู่ในรูปของอินทิกรัลนั่นเอง

แต่เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาการแพร่กระจายและการพาใน 2 มิติในสถานะอยู่ตัว สมการจะกลายเป็น

$$\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi \qquad (3.4)$$

ในการเปลี่ยนรูปสมการ เริ่มจากการจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ซึ่งสามารถทำได้โดยทำการอินทิเกรตสมการเริ่มต้นตลอดปริมาตรควบคุม

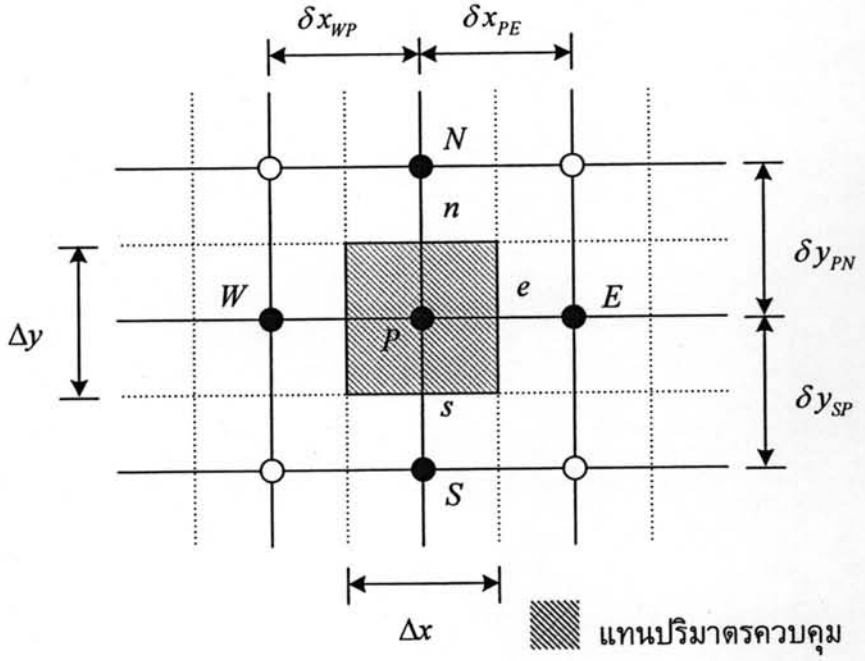
$$\int_{\Delta v}\left[\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}\right] dV = \int_{\Delta v}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + S_\phi\right] dV \qquad (3.5)$$

พิจารณาปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ ซึ่งเป็นแบบ Cell-centred ดังแสดงในรูปที่ 3.1

$$\int_{\Delta v} \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} dxdy + \int_{\Delta v} \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial x} dxdy = \int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dxdy + \int_{\Delta v} \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dxdy$$

$$+ \int_{\Delta v} S_\phi dV \qquad (3.6)$$

จากการแยกพิจารณาทีละเทอม โดยกำหนดให้ $A_e = A_w = 1\times\Delta y$ และ $A_n = A_s = 1\times\Delta x$ เราสามารถอธิบายถึงรายละเอียดของเทอมต่างๆ ในสมการ (3.6) ได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 การวางตัวของปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ

3.3.1 เทอมการพา

เมื่อพิจารณาใน 2 แนวแกน เทอมการพาคือ

$$\int_{\Delta v}\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}\,dxdy + \int_{\Delta v}\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}\,dxdy = [(\rho uA)_e\phi_e - (\rho uA)_w\phi_w] + [(\rho vA)_n\phi_n - (\rho vA)_s\phi_s] \quad (3.7)$$

จากสมการ (3.7) สามารถแสดงฟลักซ์ที่ไหลผ่านปริมาตรควบคุมได้ดังนี้

ฟลักซ์ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ซึ่งไหลผ่านปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันออก *(E)*

$$(\rho uA)_e\phi_e = F_e\phi_e \quad (3.8ก)$$

ฟลักซ์ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ซึ่งไหลผ่านปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันตก *(W)*

$$(\rho uA)_w\phi_w = F_w\phi_w \quad (3.8ข)$$

ฟลักซ์ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ซึ่งไหลผ่านปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันเหนือ *(N)*

$$(\rho vA)_n\phi_n = F_n\phi_n \quad (3.8ค)$$

ฟลักซ์ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ซึ่งไหลผ่านปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันใต้ *(S)*

$$(\rho vA)_s\phi_s = F_s\phi_s \quad (3.8ง)$$

เมื่อ F คือ สัมประสิทธิ์การพา ซึ่งมีค่าเท่ากับ ρuA

3.3.2 เทอมการแพร่กระจาย

เทอมการแพร่กระจายสามการทำการดิสครีไทซ์ ได้ดังนี้

$$\int_{\Delta v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy + \int_{\Delta v}\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy = \left[\Gamma_e A_e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w A_w\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right] + \left[\Gamma_n A_n\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n - \Gamma_s A_s\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right] \quad (3.9)$$

การแพร่กระจายผิวของปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันออก

$$\Gamma_e A_e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e = \Gamma_e A_e\frac{(\phi_E-\phi_P)}{\delta x_{PE}} = D_e(\phi_E-\phi_P) \quad (3.10\text{ก})$$

การแพร่กระจายผิวของปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันตก

$$\Gamma_w A_w\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w = \Gamma_w A_w\frac{(\phi_P-\phi_W)}{\delta x_{WP}} = D_w(\phi_P-\phi_W) \quad (3.10\text{ข})$$

การแพร่กระจายผิวของปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันเหนือ

$$\Gamma_n A_n\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n = \Gamma_n A_n\frac{(\phi_N-\phi_P)}{\delta y_{PN}} = D_n(\phi_N-\phi_P) \quad (3.10\text{ค})$$

การแพร่กระจายผิวของปริมาตรควบคุมทางทิศตะวันใต้

$$\Gamma_s A_s\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s = \Gamma_s A_s\frac{(\phi_P-\phi_S)}{\delta y_{SP}} = D_s(\phi_P-\phi_S) \quad (3.10\text{ง})$$

เมื่อ D คือ สัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\Gamma A}{\delta}$

3.3.3 Source term เราสามารถประมาณค่า Source term ในรูปของความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear relation) เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ ดังนี้

$$S_\phi = S_u + S_P\phi_P \quad (3.11)$$

เมื่อ S_u คือ เทอมค่าคงที่

S_P คือ เทอมสัมประสิทธิ์ของ ϕ_P

จากทำการอินทิเกรตสมการ (3.11) จะได้

$$\int_{\Delta v} S_\phi dxdy = S_u \Delta V + S_P \phi_P \Delta V \tag{3.12}$$

3.4 การประมาณค่าโดยใช้ Numerical scheme

เมื่อพิจารณาถึงค่า ϕ บนผิวปริมาตรควบคุมในเทอมการพาซึ่งแสดงในสมการ (3.8) เราสามารถประมาณค่า ϕ ที่บริเวณ Interface ได้ด้วยการใช้ Numerical scheme แบบต่างๆ เช่น Central differencing scheme, Upwind differencing scheme, Hybrid differencing scheme หรือ Power-law differencing scheme เป็นต้น

3.4.1 Central differencing scheme ใช้ในการประมาณค่า ϕ ที่บริเวณ Interface ของปริมาตรควบคุมโดยอาศัยค่าจากจุดข้างเคียง ซึ่งมีความสัมพันธ์กันแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) \tag{3.16ก}$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \tag{3.16ข}$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \tag{3.16ค}$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \tag{3.16ง}$$

เมื่อนำสมการ (3.8), (3.10), (3.12) และนำค่าเฉลี่ยของ ϕ ที่ Interface ต่างๆ ตามสมการ (3.16) แทนลงในสมการ (3.6) และสามารถเขียนในรูปพีชคณิต ได้ดังนี้

$$\frac{1}{2}F_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}F_w(\phi_P + \phi_W) + \frac{1}{2}F_n(\phi_N + \phi_P) - \frac{1}{2}F_s(\phi_S + \phi_P) - S_P\phi_P\Delta V =$$

$$D_e(\phi_E + \phi_P) - D_w(\phi_P + \phi_W) + D_n(\phi_N + \phi_P) - D_s(\phi_S + \phi_P) - S_u\Delta V \tag{3.17}$$

จัดรูปใหม่ จะได้

$$\left(D_e-\frac{F_e}{2}+D_w+\frac{F_w}{2}+D_n-\frac{F_n}{2}+D_s+\frac{F_s}{2}+F_e-F_w+F_n-F_s-S_P\Delta V\right)\phi_P =$$

$$\left(D_e-\frac{F_e}{2}\right)\phi_E+\left(D_w+\frac{F_w}{2}\right)\phi_W+\left(D_n-\frac{F_n}{2}\right)\phi_N+\left(D_s+\frac{F_s}{2}\right)\phi_S+S_u\Delta V \qquad (3.18)$$

ดังนั้นสมการ (3.17) สามารถเขียนอยู่ในรูปสมการพีชคณิต ได้ดังนี้

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_u\Delta V \qquad (3.19)$$

เมื่อ $a_E = D_e - \frac{F_e}{2}$

$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$

$a_N = D_n - \frac{F_n}{2}$

$a_S = D_s + \frac{F_s}{2}$

และ $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_p\Delta V$

3.4.2 Upwind differencing scheme ถูกเสนอครั้งแรกโดย Courant et al. (1952) ซึ่งพวกเขามีวัตถุประสงค์ที่จะแก้ไขจุดอ่อนของการประมาณค่า ϕ_e ที่ Interface ซึ่งแบบเดิมนั้นหาจากค่าเฉลี่ยของ ϕ_E และ ϕ_P โดยเสนอแนวคิดใหม่ว่า เทอมการพาถูกคำนวณจากข้อสมมติที่ว่าค่า ϕ ที่ Interface มีค่าเท่ากับ ค่า ϕ ที่ Grid point ทางด้านต้นกระแสการไหล (Upwind) ดังนั้น เราจะได้

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{เมื่อ} \quad F_e > 0$$
$$\phi_e = \phi_E \quad \text{เมื่อ} \quad F_e < 0 \qquad (3.20ก)$$

และ

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{เมื่อ} \quad F_w > 0$$
$$\phi_w = \phi_P \quad \text{เมื่อ} \quad F_w < 0 \qquad (3.20ข)$$

สำหรับค่า ϕ_n และ ϕ_s สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_u\Delta V$$

เมื่อ $a_E = \max[-F_e, 0]$

$a_W = \max[F_w, 0]$

$a_N = \max[-F_n, 0]$

$a_S = \max[F_s, 0]$

และ $a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s)$

โดย max $[A, B]$ คือ ค่าสูงสุดที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าระหว่าง A และ B

3.4.3 Hybrid differencing scheme ได้รับการพัฒนาโดย Patankar and Spalding (1972) โดยเป็นการรวมข้อดีของ Central differencing scheme และ Upwind differencing scheme เข้าด้วยกัน โดยใช้แนวคิดว่าในการประมาณค่าปริมาณฟลักซ์ที่ผ่านผิวปริมาตรควบคุม สามารถหาโดยใช้ค่าเพกเลตนัมเบอร์ (Peclet number, Pe) เป็นตัวกำหนดเงื่อนไขในการประมาณค่า ซึ่ง Pe หาได้จาก

$$\text{Pe} = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x} \tag{3.21}$$

ด้วยแนวคิดที่เสนอไปแล้วข้างต้น การประมาณค่า ϕ ที่ Interface เมื่อ Pe มีค่า น้อย ($|\text{Pe}| < 2$) สามารถประมาณค่าโดยใช้ Central differencing scheme และ เมื่อ Pe มีค่ามากกว่า ($|\text{Pe}| > 2$) ให้ใช้ Upwind differencing scheme ในการประมาณค่า โดยที่แสดงเป็นความสัมพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & ; \quad \text{Pe} > 2 \\ \dfrac{\phi_E + \phi_P}{2} & ; \quad -2 \le \text{Pe} \le 2 \\ \phi_P & ; \quad \text{Pe} < 2 \end{cases} \tag{3.22}$$

ค่า ϕ_w, ϕ_n และ ϕ_s สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_u\Delta V$$

เมื่อ $a_E = \max\left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0\right]$

$$a_W = \max\left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2}\right), 0\right]$$

$$a_N = \max\left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2}\right), 0\right]$$

$$a_S = \max\left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2}\right), 0\right]$$

และ $$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_P \Delta V$$

โดย max [*A, B,C*] คือ ค่าสูงสุดที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าระหว่าง *A, B* และ *C*

3.4.4 Power-law differencing scheme (Patankar, 1980) เป็นการประมาณค่า ϕ ที่ Interface ซึ่งมีความแม่นยำและให้ผลที่ดีกว่า Hybrid differencing scheme โดยใช้การประมาณค่าแบบ Exponential ดังต่อไปนี้ เมื่อ Pe มีค่าน้อยกว่าศูนย์กำหนดให้ค่าการนำมีค่าเท่ากับศูนย์ และเมื่อ Pe > 0 สามารถประมาณค่า ϕ ที่ Interface ได้ดังนี้

$$\phi_e = \begin{cases} F_e[\phi_P - \beta_e(\phi_E - \phi_W)] & ; \quad 0 < \text{Pe} < 10 \\ F_E \phi_E & ; \quad \text{Pe} > 10 \end{cases} \tag{3.23}$$

เมื่อ $$\beta_e = (1 - 0.1\text{Pe}_e)^5 / \text{Pe}_e$$

ค่า ϕ_w, ϕ_n และ ϕ_s สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้นสามารถเขียนสมการพีชคณิตของสมการทั่วไปได้เป็น

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + S_u \Delta V$$

เมื่อ $$a_E = D_e \max\left[0, (1 - 0.1|\text{Pe}_e|)^5\right] + \max\left[-F_e, 0\right]$$

$$a_W = D_w \max\left[0, (1 - 0.1|\text{Pe}_w|)^5\right] + \max\left[F_w, 0\right]$$

$$a_N = D_n \max\left[0, (1 - 0.1|\text{Pe}_n|)^5\right] + \max\left[-F_n, 0\right]$$

$$a_S = D_s \max\left[0, (1 - 0.1|\text{Pe}_s|)^5\right] + \max\left[F_s, 0\right]$$

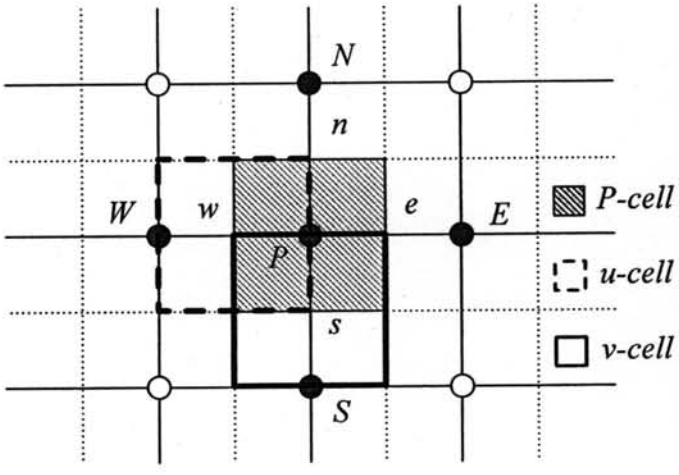
และ $$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_P \Delta V$$

โดย max [*A, B*] คือ ค่าสูงสุดที่ได้จากการเปรียบเทียบค่าระหว่าง *A* และ *B*

3.5 การแบ่งกริดแบบเยื้อง (Staggered Grid)

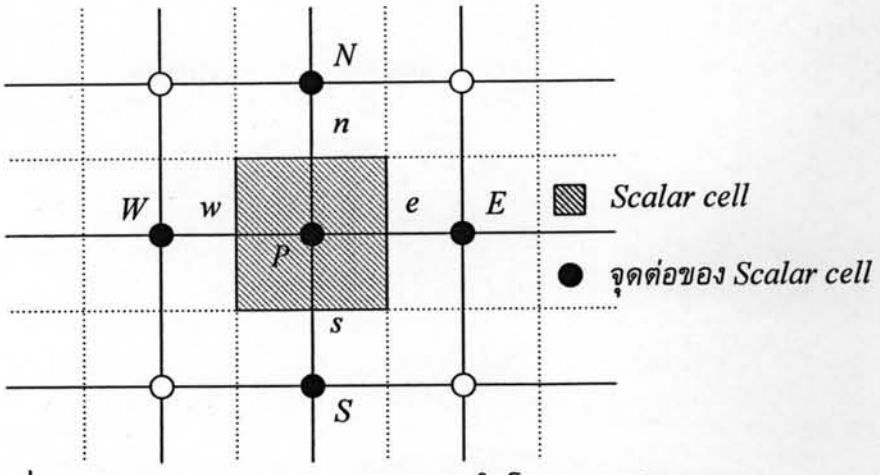
เมื่อเราพิจารณาเทอมการพาในสมการอนุรักษ์โมเมนตัม (เช่น เทอม ρu^2 ในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมตามแนวแกน x ซึ่งมีเทอมไม่เชิงเส้น) และเทอมของความดัน จะเห็นได้ว่าเทอมดังกล่าวทำให้สมการความต่อเนื่อง สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน (Coupled equations) ดังนั้นในการหาค่าความเร็วและความดันจะต้องหาโดยแก้ระบบสมการทั้งสามข้างต้นให้สอดคล้องกัน โดยเริ่มต้นจากการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วทั้งปริมาตรควบคุม แล้วทำการแบ่งแยกค่าสัมประสิทธ์ต่างๆ ที่พิจารณาลงบนจุดต่อ (Node) ต่างๆ โดยจะแยกเทอมของความเร็วตามแนวแกนกับความดันเป็น u-cell, v-cell และ Scalar cell ทั้งนี้เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงปัญหาการเกิด Checker-board effect (Patankar, 1980) ซึ่งเป็นพฤติกรรมที่ไม่เกิดขึ้นจริง ซึ่งอาจเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ใช้ Non-staggered grid แล้วทำการ Interpolated ค่าที่ Interface ไม่ถูกวิธีเป็นผลให้เกิดการสั่นของค่าความดันและส่งผลถึงการเกิดความผิดพลาดในการคำนวณตามมาได้

รูปที่ 3.2 แสดงการวาง Cell แบบเยื้องในโดเมนการคำนวณที่ประกอบด้วย u-cell, v-cell และ Scalar cell ซึ่งวางเยื้องกัน

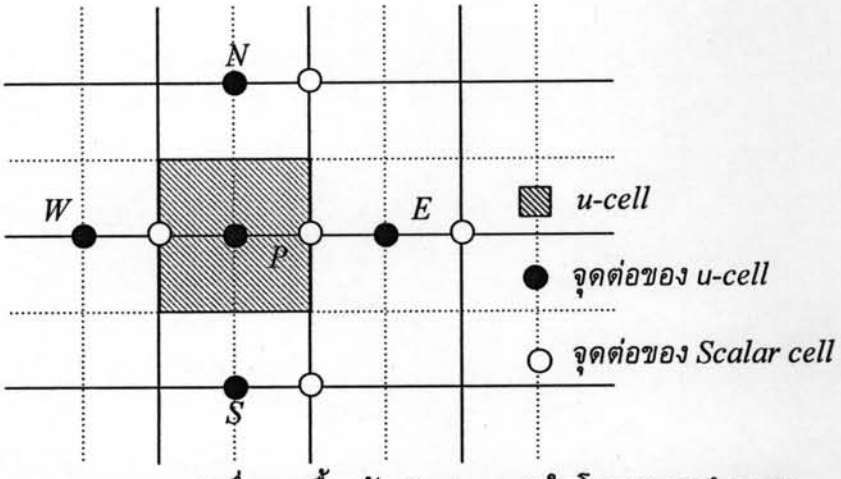


รูปที่ 3.2 ลักษณะการวางกริดแบบเยื้อง (Staggered grid)

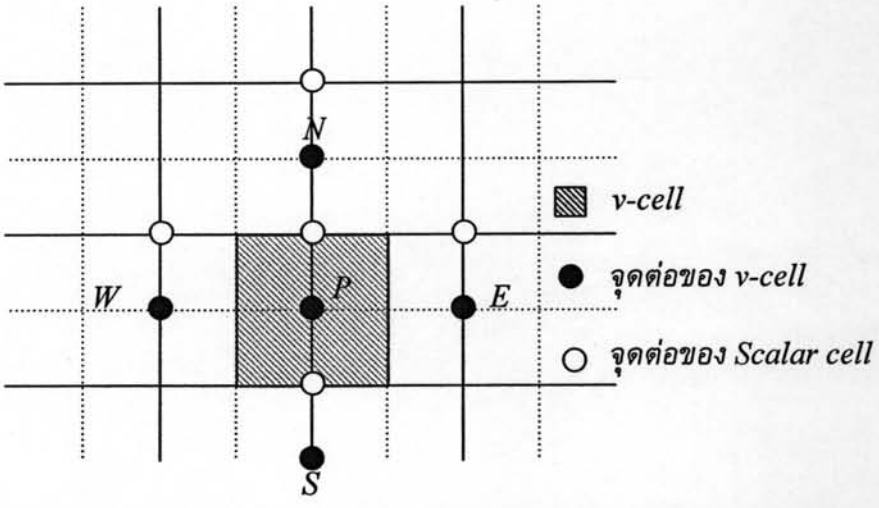
รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะการวางของ Scalar-cell และตำแหน่งการวางจุดต่อ ส่วนรูปที่ 3.4 แสดงลักษณะการวางของ u-cell ซึ่งวางเยื้องมาทางด้านหลังเมื่อเทียบกับ Scalar-cell และรูปที่ 3.5 แสดงลักษณะการวางของ v-cell ซึ่งวางเยื้องมาทางด้านล่างเมื่อเทียบกับ Scalar-cell



รูปที่ 3.3 ลักษณะการวางของ Scalar cell ในโดเมนการคำนวณ



รูปที่ 3.4 ลักษณะการวางของ *u*-cell ซึ่งวางเยื้องกับ Scalar cell ในโดเมนการคำนวณ

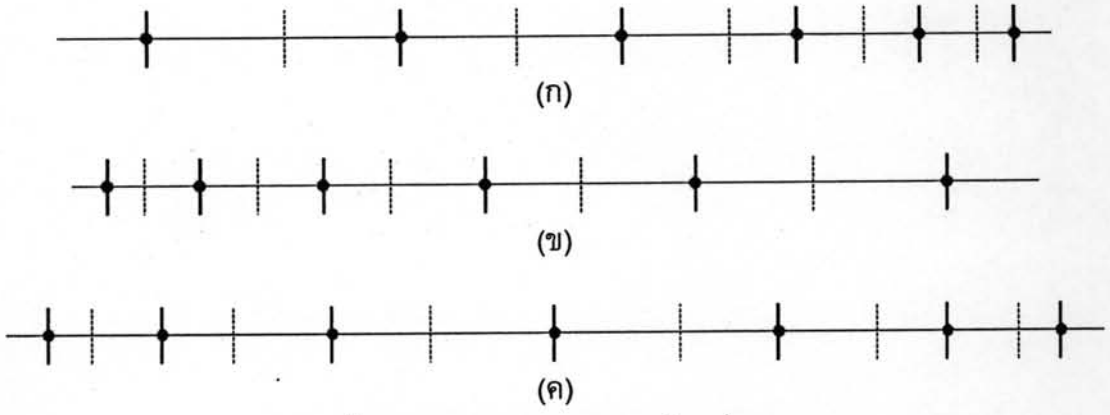


รูปที่ 3.5 ลักษณะการวางของ *v*-cell ซึ่งวางเยื้องกับ Scalar cell ในโดเมนการคำนวณ

3.6 กริดแบบไม่สม่ำเสมอ (Non-Uniform Grid)

โดยทั่วไป ในการคำนวณบางบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยไม่มากนัก ถ้าเราใช้กริดแบบสม่ำเสมอจะเป็นการสิ้นเปลืองหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์โดยไม่จำเป็น ดังนั้นเพื่อเป็นการลดหน่วยความจำที่ใช้และประหยัดเวลาในการคำนวณ เราจึงควรเลือกใช้กริดแบบไม่สม่ำเสมอในบริเวณดังกล่าวข้างต้น ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงค่าผลเฉลยมาก

ลักษณะของกริดแบบไม่สม่ำเสมอนี้ อาจมีได้หลายรูปแบบ (ยกตัวอย่างใน 1 มิติ และการเลือกใช้อ้างอิงกับปัญหาที่มีสิ่งกีดขวาง) เช่นรูปที่ 3.6 แสดงลักษณะของกริดแบบไม่สม่ำเสมอ 3 แบบ โดยรูปที่ 3.6 (ก) แสดงกริดที่มีขนาดเล็กทางด้านขวา ซึ่งกริดแบบนี้เหมาะสำหรับบริเวณทางเข้าก่อนถึงสิ่งกีดขวาง รูปที่ 3.6 (ข) แสดงกริดที่มีขนาดเล็กทางด้านซ้ายเลือกใช้ในบริเวณทางออกของการไหลหลังผ่านสิ่งกีดขวางสุดท้ายมาแล้วและรูปที่ 3.6 (ค) แสดงกริดที่มีขนาดเล็กทั้งทางด้านซ้ายและขวา ซึ่งกริดแบบนี้เหมาะที่จะใช้ในบริเวณการไหลระหว่างสิ่งกีดขวางสองแห่ง



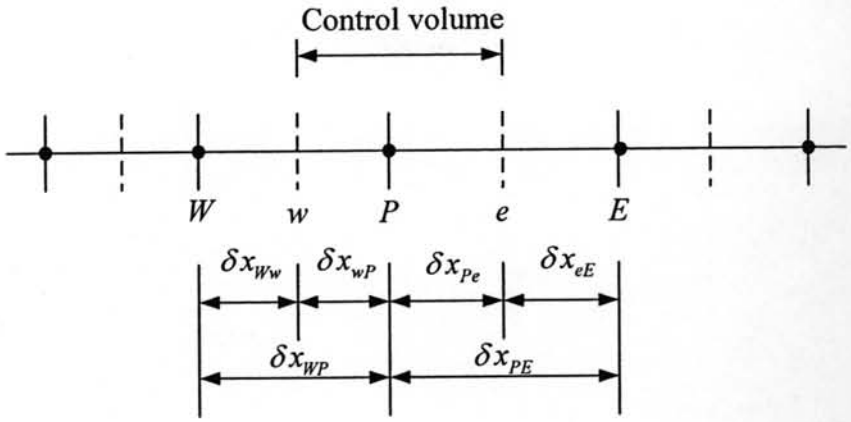
รูปที่ 3.6 ลักษณะของกริดแบบไม่สม่ำเสมอ

(ก) กริดที่มีขนาดเล็กทางด้านขวา

(ข) กริดที่มีขนาดเล็กทางด้านซ้าย

(ค) กริดที่มีขนาดเล็กทั้งทางด้านซ้ายและขวา

การนำกริดแบบนี้ไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณ ซึ่งจากเดิมใช้เป็นแบบสม่ำเสมอสามารถทำได้โดยเปลี่ยนการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การแพร่กระจาย (Γ) ที่บริเวณ Interface ให้คำนวณตามความสัมพันธ์ดังนี้ (รูปประกอบตัวแปรที่ใช้ในความสัมพันธ์แสดงในรูปที่ 3.7)



รูปที่ 3.7 การคำนวณกริดแบบไม่สม่ำเสมอ

$$\Gamma_w = (1-f_W)\Gamma_W + f_W\Gamma_P \tag{3.24}$$

เมื่อ f_W คือ Interpolation factor ซึ่งหาได้จาก

$$f_W = \frac{\delta x_{Ww}}{\delta x_{Ww} + \delta x_{wP}}$$

และ
$$\Gamma_e = (1-f_P)\Gamma_P + f_P\Gamma_E \tag{3.25}$$

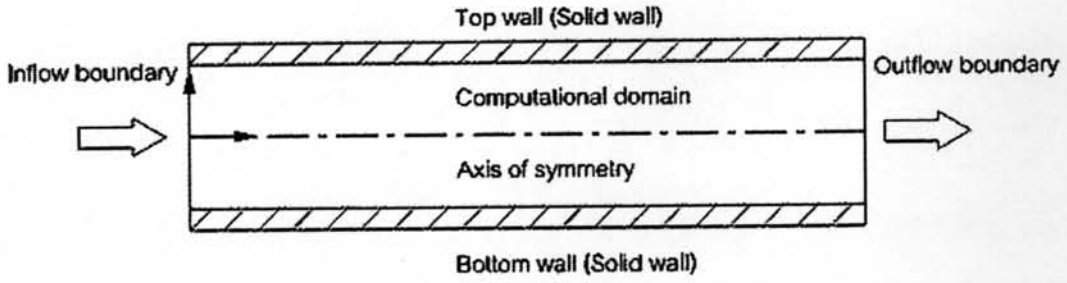
เมื่อ
$$f_P = \frac{\delta x_{Pe}}{\delta x_{Pe} + \delta x_{eE}}$$

(สำหรับกริดแบบสม่ำเสมอค่า f_W และ f_P จะมีค่าเท่ากับ 0.5 ทั้งสองค่า)

3.7 เงื่อนไขขอบ (Boundary Conditions)

ในการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของปัญหาการคำนวณต่างๆนั้น จำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ เนื่องจากสภาพทางกายภาพของปัญหาที่จำลองนั้นจะขึ้นกับการกำหนดเงื่อนไขเหล่านั้น ในหัวข้อนี้จะนำเสนอเงื่อนไขขอบทั่วไปที่ใช้ในระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

รูปที่ 3.8 แสดงเงื่อนไขขอบที่ใช้ในโดเมนการคำนวณ ซึ่งประกอบด้วย เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary), เงื่อนไขขอบที่ทางเข้า (Inter boundary condition), เงื่อนไขขอบที่ทางออก (Outlet boundary condition) และเงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetry)

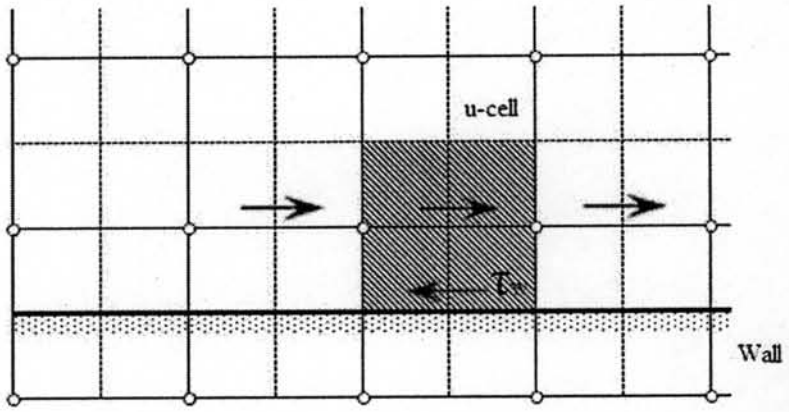


รูปที่ 3.8 เงื่อนไขขอบสำหรับโดเมนการคำนวณ

3.7.1 เงื่อนไขขอบที่ผนัง (Wall boundary condition)

ผนังเป็นเงื่อนไขขอบที่พบในปัญหาการไหลทั่วไป โดยอาจแบ่งเงื่อนไขขอบชนิดนี้เป็นเงื่อนไขย่อยหลายประเภท ซึ่งในที่นี้จะใช้ผนังที่ขนานกับแนวแกน x ดังแสดงในรูปที่ 3.9 ในการพิจารณา

เงื่อนไขที่ไม่มีการลื่นไถล (No-slip condition; $u = 0$, $v = 0$) เป็นเงื่อนไขการประมาณค่าความเร็วที่ผิวของแข็ง (Solid wall) โดยความเร็วที่ขอบเขต ($J = 1$) มีค่าเท่ากับศูนย์และปริมาตรควบคุมที่อยู่ติดผนังมีค่า $a_S = 0$ เนื่องจากไม่มีการคำนวณที่ตำแหน่งนี้



รูปที่ 3.9 ปริมาตรควบคุมที่ผนัง

เงื่อนไขที่มีการลื่นไถล (No-slip condition; $u \neq 0$, $v = 0$) เป็นเงื่อนไขที่ใช้สำหรับของไหลที่ถูกสมมติว่าไม่มีความเสียดทาน ($u = 0$) จัดเป็นการไหลที่เรียกกันโดยทั่วไปว่า การไหลแบบไม่หนืด (Inviscid flow)

3.7.2 เงื่อนไขขอบที่ทางเข้า (Inter boundary condition) ค่าของตัวแปรทุกตัวในการไหล (u, v และ P) จะต้องถูกระบุค่าที่บริเวณทางเข้า

3.7.3 เงื่อนไขขอบที่ทางออก (Outlet boundary condition)

โดยปกติการพิจารณาเงื่อนไขขอบที่ทางออกในโดเมนการไหลจะไม่ทราบค่าของตัวแปรต่างๆ แต่ถ้าพิจารณาตำแหน่งทางออกที่อยู่ไกลจากรูปทรงที่รบกวนการไหลแล้ว จะได้ว่าการไหลเป็นแบบ Fully-developed flow ซึ่งเป็นสภาวะที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปแบบการไหลในทิศทางการไหลนั้นๆ จึงสามารถกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ได้ว่าไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่า (Zero gradient)

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{outlet} = 0 \tag{3.26}$$

3.7.4 เงื่อนไขขอบแบบสมมาตร (Symmetry)

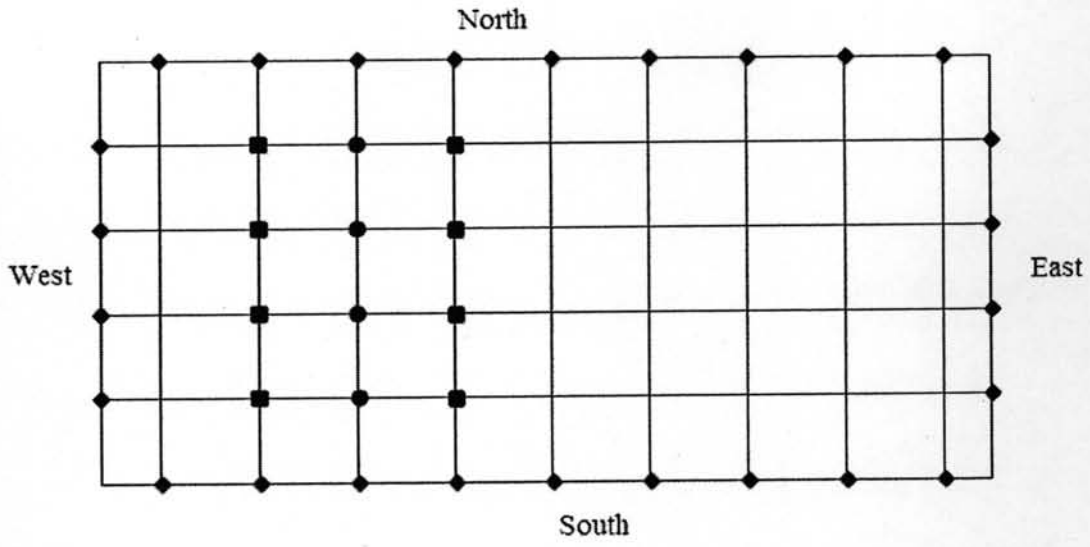
สำหรับกรณีเงื่อนไขแบบสมมาตร เราสามารถพิจารณาโดเมนการคำนวณเพียงครึ่งเดียวเท่านั้น และตัวแปรต่างๆทุกตัว ถูกกำหนดให้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงค่าที่แกนสมมาตร (Zero gradient)

3.8 กระบวนการหาผลเฉลย (Solution Procedure)

เราจะใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมในการเปลี่ยนแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปสมการพีชคณิตที่แต่ละจุดต่อ ซึ่งการหาผลเฉลยจะใช้เทคนิควิธี Tri-diagonal matrix algorithm TDMA) แบบ Line-by-line ในการแก้ระบบสมการ และเพื่อให้สมการอนุรักษ์โมเมนตัมและสมการความต่อเนื่องมีความสอดคล้องกัน จึงใช้กระบวนการหาคำตอบที่เรียกว่าขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ซึ่งถูกพัฒนาโดย Patankar (1980)

3.8.1 การหาผลเฉลยสมการดิสครีไทซ์ด้วยวิธี TDMA

เมื่อพิจารณาโดเมนการคำนวณดังรูปที่ 3.10 พบว่ามีลักษณะเป็นเส้นๆ ประกอบกันและในแต่ละเส้นถูกหาผลเฉลยโดยใช้วิธี TDMA ด้วยการสมมติว่าทราบค่าของจุดต่อบริเวณข้างเคียง จากนั้นใช้วิธีการคำนวณซ้ำ (Iterative method) จนได้ผลลัพธ์ที่ลู่เข้า



● จุดที่ค่าถูกคำนวณ ■ จุดที่ค่าถูกพิจารณาว่ารู้ค่า ◆ จุดบริเวณขอบที่รู้ค่า

รูปที่ 3.10 โดเมนการคำนวณ (Computational domain) ที่ใช้วิธี TDMA ในการคำนวณ

จากสมการพีชคณิต สำหรับจุดหนึ่งบนเส้นตัวอย่างในรูปที่ 3.10 สามารถจัดสมการใหม่ได้เป็น

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + (a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_C) \tag{3.27}$$

กำหนดให้ $a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_C$ มีค่าเท่ากับ ค่าคงที่ (C) ดังนั้นจึงจัดสมการ (3.27) ให้อยู่ในรูปทั่วไปได้เป็น

$$D_i\phi_i = A_i\phi_{i+1} + B_i\phi_{i-1} + C_i \tag{3.28}$$

เมื่อ i คือ ตำแหน่งของจดต่อบน Grid ในแนวแกน x หรือแกน y

ตัวอย่างเช่น ในแนวแกน x

$$A_i = a_E$$

$$B_i = a_W$$

$$C_i = (a_N\phi_N + a_S\phi_S + S_C)$$

$$D_i = \sum a_{nb} - S_P \quad \text{(nb คือ จุดต่อที่อยู่ข้างเคียง)}$$

จากกระบวนการทำซ้ำโดยการแทนไปข้างหน้าแล้วจัดรูปจะได้

$$\phi_i = A_i'\phi_{i+1} + C_i' \tag{3.29}$$

ซึ่ง A_i' และ C_i' หาได้จากกระบวนการทำซ้ำโดยการแทนไปข้างหน้า

$$A_i' = \frac{A_i}{D_i - B_i A_{i-1}'} \tag{3.30}$$

$$C_i' = \frac{C_i + C_{i-1}' B_i}{D_i - B_i A_{i-1}'} \tag{3.31}$$

เนื่องจากเราทราบเงื่อนไขขอบของโดเมนการคำนวณ คือ ที่จุด $i = 1$ และ $i = n+1$ ดังนั้นจะได้ว่าค่าของ A_i' และ C_i' ที่จุดเหล่านี้คือ

$$A_{i=1}' = 0 \quad , \quad C_{i=1}' = \phi_1$$

$$A_{i=n}' = 0 \quad , \quad C_{i=n}' = \phi_{n+1}$$

จากค่าที่ทราบข้างต้นจะทำให้เราสามารถหาค่า A_i' และ C_i' สำหรับทุกๆ ตำแหน่ง i ได้หลังจากนั้นเราสามารถหาค่า ϕ_i โดยวิธีแทนย้อนกลับ (Backward substitution)

3.8.2 ค่า Under-relaxation

ในกระบวนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีการใช้ค่า Under-relaxation เพื่อควบคุมการลู่เข้าของกระบวนการหาผลเฉลย อีกทั้งยังช่วยลดระดับการเปลี่ยนแปลงค่าก่อนการคำนวณได้หลายระดับ ทำให้เกิดเสถียรภาพ (Stability) และความแม่นยำในการคำนวณ โดยเมื่อประยุกต์ใช้ค่า Under-relaxation กับตัวแปรทั่วไป ϕ ที่จุดต่อ P ใดๆ สามารถเขียนสามารถ ได้ดังนี้

$$\phi_P = \alpha \phi_P^{new} + (1-\alpha)\phi_P^{old} \tag{3.32}$$

เมื่อ ϕ^{old} คือ ϕ ที่ได้จากการคำนวณซ้ำรอบที่แล้ว

ϕ^{new} คือ ϕ ที่คำนวณได้โดยตรงจากสมการดิสครีไทซ์

และ α คือ ค่า Under-relaxation factor โดย α มีค่าอยู่ในช่วง 0 ถึง 1 และเมื่อประยุกต์ใช้ค่า Under-relaxation กับสมการดิสครีไทซ์สำหรับ ϕ_P จะได้

$$\frac{a_P}{\alpha} = \sum a_{NB}\phi_{NB} + S_u + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} a_P \phi_P^{old} \tag{3.33}$$

สำหรับการเลือกใช้ค่า Under-relaxation ที่เหมาะสมนั้น จะขึ้นอยู่กับปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ ข้อแนะนำทั่วไปในการใช้ค่า Under-relaxation กับปัญหาใดๆ คือ ควรใช้

ค่า Under-relaxation ที่มีค่าน้อย (มีค่าใกล้ 0) สำหรับกระบวนการทำซ้ำครั้งแรกๆ และค่อยๆ เพิ่มขึ้น (มีค่าใกล้ 1) เมื่อผลการคำนวณลู่เข้า

3.8.3 SIMPLE algorithm

การใช้ SIMPLE algorithm ในงานวิจัยนี้ ได้ดำเนินการตาม Patankar and Spalding (1972) ซึ่งรายละเอียด SIMPLE algorithm สามารถหาได้จาก Patankar (1980) และ Versteeg and Malalasekera (1995) โดยที่กระบวนการหาผลเฉลย SIMPLE เป็นวิธีการที่มีพื้นฐานจากการเริ่มแก้สมการอนุรักษ์โมเมนตัม โดยการเดาค่าความดัน p^* และความเร็ว u^*, v^* จากนั้นแทนค่าที่เดาลงในสมการนาเวียร์-สโตกส์และสมการความต่อเนื่องเพื่อให้ได้สมการแก้ไขความดันและความเร็ว โดยคำตอบที่ได้จะถูกนำมาปรับค่าจนกว่าคำตอบจะลู่เข้า

สมการดิสครีไทซ์ของสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในปริมาตรควบคุม (รูปที่ 3.2) สมการเขียนได้ดังนี้

ในแกน x

$$a_W u_W = \sum_{\text{nb}} a_{nb} u_{nb} + (p_W - p_P)A + S_u \Delta V \tag{3.34}$$

ในแกน y

$$a_S v_S = \sum_{\text{nb}} a_{nb} v_{nb} + (p_S - p_P)A + S_v \Delta V \tag{3.35}$$

โดย

$$\sum_{\text{nb}} a_{nb} u_{nb} = a_E u_E + a_W u_W + a_N u_N + a_S u_S - S_P$$

$$\sum_{\text{nb}} a_{nb} v_{nb} = a_E v_E + a_W v_W + a_N v_N + a_S v_S - S_P$$

หาผลเฉลยเริ่มต้นจากการเดาค่า p^*, u^* และ v^* แล้วแทนลงในสมการ (3.34) และ (3.35) ซึ่งจะได้

$$a_w u_w^* = \sum_{\text{nb}} a_{nb} u_{nb}^* + (p_W^* - p_P^*)A_w + S_u \Delta V \tag{3.36}$$

$$a_s v_s^* = \sum_{\text{nb}} a_{nb} v_{nb}^* + (p_S^* - p_P^*)A_s + S_v \Delta V \tag{3.37}$$

หลังจากแทนค่าที่เดา p^*, u^* และ v^* เราจึงนิยามค่าแก้ไขความดัน (Pressure correction) p' ซึ่งก็คือ ความแตกต่างระหว่างความดันที่ถูกต้อง (Correct pressure) p กับความดันที่เดาขึ้น (Guessed Pressure) p^* ได้จากสมการ

$$p = p^* + p' \tag{3.38ก}$$

และสำหรับค่าแก้ไขความเร็วสามารถนิยามได้ในลักษณะเดียวกัน คือ

$$u = u^* + u' \tag{3.38ข}$$

$$v = v^* + v' \tag{3.38ค}$$

โดย u,v คือ ความเร็วที่ถูกต้อง (Correct velocity)

u^*,v^* คือ ความเร็วที่คำนวณจากสมการดิสครีไทซ์ของสมการโมเมนตัม

u',v' คือ ค่าแก้ไขความเร็ว (Velocity correction)

นำสมการ (3.38) แทนในสมการ (3.34) และ (3.35) แล้วลบสมการดังกล่าวด้วยสมการ (3.36) และ (3.37) ตามลำดับ ได้เป็น

$$a_w u'_w = \sum_{\text{nb}} a_{nb} u'_{nb} + (p'_W - p'_P) A_w \tag{3.39}$$

$$a_s v'_s = \sum_{\text{nb}} a_{nb} v'_{nb} + (p'_S - p'_P) A_s \tag{3.40}$$

เราจะกำหนดให้ $\sum_{\text{nb}} a_{nb} u'_{nb}$ และ $\sum_{\text{nb}} a_{nb} v'_{nb}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เพื่อลดความยุ่งยากของสมการในการหาคำตอบ (Patankar, 1980) เมื่อการไหลมีความสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง จะได้สมการของค่าแก้ไขความเร็วของ u_w คือ

$$a_w u'_w = (p'_W - p'_P) A_w$$

หรือ
$$u'_w = d_w (p'_W - p'_P) \tag{3.41}$$

เมื่อ
$$d_w = \frac{A_w}{a_w}$$

จากสมการ (3.38) และสมการ (3.41) จะได้

$$u_w = u^*_w + d_w (p'_W - p'_P) \tag{3.42ก}$$

พิจารณาทำนองเดียวกันกับ u_w สำหรับ u_e,u_n และ u_s จะได้

$$u_e = u_e^* + d_e(p'_E - p'_P) \quad \text{เมื่อ} \quad d_e = \frac{A_e}{a_E} \tag{3.42ข}$$

$$v_n = v_n^* + d_n(p'_N - p'_P) \quad \text{เมื่อ} \quad d_n = \frac{A_n}{a_N} \tag{3.42ค}$$

$$v_s = v_s^* + d_s(p'_S - p'_P) \quad \text{เมื่อ} \quad d_s = \frac{A_s}{a_S} \tag{3.42ง}$$

จากสมการความต่อเนื่องที่เขียนอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

อินทิเกรตสมการความต่อเนื่องตลอดปริมาตรควบคุมในรูปที่ 3.2 ได้เป็น

$$\int_{\Delta v}\left[\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}\right]dv = 0$$

$$[(\rho uA)_e - (\rho uA)_w] + [(\rho vA)_n - (\rho vA)_s] = 0 \tag{3.43}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทนค่าความเร็วจากสมการ (3.57) ลงในสมการ (3.58) จะได้สมการของความดันแก้ไขเป็นดังนี้

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \tag{3.44}$$

เมื่อ

$$a_E = \rho_e d_e A_e$$

$$a_W = \rho_w d_w A_w$$

$$a_N = \rho_n d_n A_n$$

$$a_S = \rho_s d_s A_s$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P$$

และ $$b = (\rho u^* A)_e - (\rho u^* A)_w + (\rho v^* A)_n - (\rho v^* A)_s$$

ซึ่งในการปรับค่าของความดันและความเร็วนั้น บางครั้งจะมีการใส่ค่า Under-relaxation (รายละเอียดแสดงในหัวข้อ 3.8.2) เพื่อให้การคำนวณซ้ำมีผลลัพธ์ลู่เข้าอย่างมีเสถียรภาพ ดังนี้

$$p = p^{*} + \alpha_P p' \tag{3.45ก}$$

$$u = u^{*} + \alpha_u u' \tag{3.45ข}$$

$$v = v^{*} + \alpha_v v' \tag{3.45ค}$$

เมื่อ α_P คือ Under-relaxation factor สำหรับความดัน p

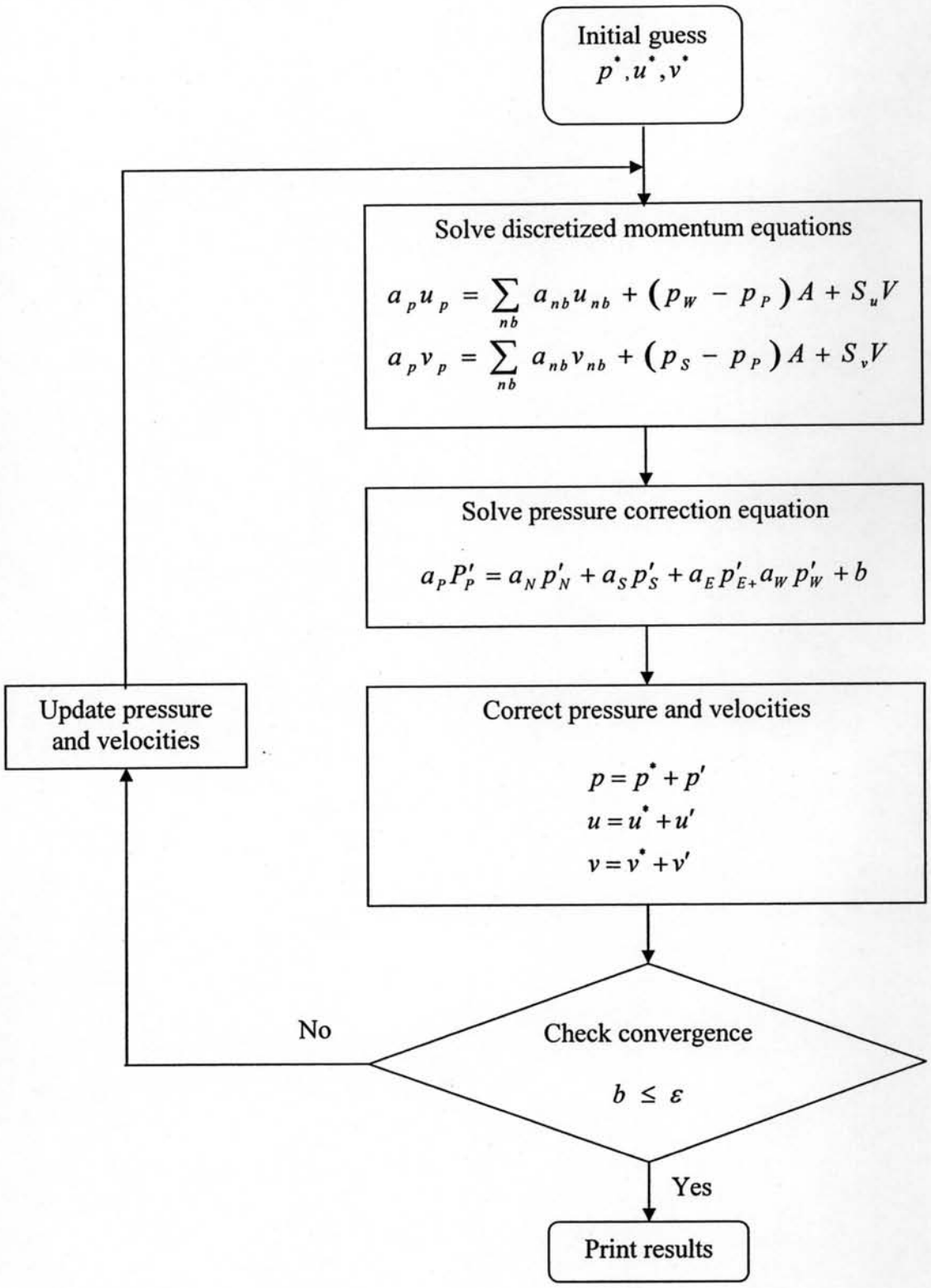
α_u คือ Under-relaxation factor สำหรับความเร็ว u

α_v คือ Under-relaxation factor สำหรับความเร็ว v

จากวิธีการที่กล่าวมาในหัวข้อนี้ข้างต้น สามารถสรุปขั้นตอนของกระบวนการหาผลเฉลยด้วย SIMPLE algorithm ได้ดังนี้

1) เริ่มต้นโดยการเดาค่า p^*, u^* และ v^*
2) คำนวณค่า u^* และ v^* จากสมการ (3.36) และ (3.37)
3) หาค่า p' จากสมการ (3.44)
4) คำนวณค่า p จากสมการ (3.45) แล้วแทนค่า p ที่คำนวณได้มาแทนเป็น p^* ค่าใหม่
5) คำนวณค่า u และ v จากสมการ (3.41) และ (3.42) โดยใช้ค่า p' ที่หาได้จากขั้นตอนที่ 4 จากนั้นจึงกำหนดค่า u และ v ที่ได้เป็น u^* และ v^* ค่าใหม่ในการเริ่มต้น
6) ดำเนินการตามขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 ซ้ำจนกระทั่งค่า p^*, u^* และ v^* มีค่าลู่เข้าสู่ค่าที่ถูกต้อง โดยตรวจสอบการลู่เข้าใกล้ศูนย์ของเทอม b (Mass source term) ในสมการ (3.44) ซึ่งแสดงว่าค่า p^*, u^* และ v^* ที่คำนวณได้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง

ขั้นตอนของกระบวนการข้างต้น สามารถแสดงเป็นแผนภาพได้ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 ขั้นตอนของ SIMPLE algorithm

3.9 สรุป

ในบทนี้เป็นการแสดงขั้นตอนในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์วอลุมกับสมการควบคุมพื้นฐาน ด้วยการอินทิเกรตสมการเชิงอนุพันธ์ตลอดปริมาตรควบคุม แล้วดิสครีไทซ์ (Discretize) ลงบนจุดต่างๆ บนปริมาตรควบคุมเพื่อเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์ไปเป็นสมการพีชคณิต รวมทั้งใช้ Numerical scheme ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆที่บริเวณ Interface หลังจากนั้นใช้วิธี TDMA (Tri-Diagonal Matrix algorithm) เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการในการแก้ปัญหาสนามการไหลนั้น ซึ่งสมมติว่าทราบค่าบริเวณจุดต่อข้างเคียงและใช้วิธีการคำนวณซ้ำ จนได้ผลลัพธ์ลู่เข้า และใช้ขั้นตอนการคำนวณของวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-linked Equation) ร่วมกับการวางกริดแบบเยื้อง (Staggered grid) ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้คำนวณความเร็วและความดัน เพื่อทำให้ค่า u และ v ที่ได้จากสมการโมเมนตัมนั้นสอดคล้องกับสมการอนุรักษ์มวล