# บทที่ 2

# ทฤษฎีพื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการพัฒนาสมการทางคณิตศาสตร์เพื่อทำการจำลองการไหลของของไหล จากหลักการพื้นฐานของกฎการอนุรักษ์ทางกายภาพ นำไปสู่สมการควบคุมพื้นฐาน (Governing equations) ของการไหล โดยสามารถแสดงสมการทางคณิตศาสตร์ตามกฎการอนุรักษ์ทางกายภาพ (Conservation laws of physics) คือ

1) มวลของของไหลจะต้องคงที่เสมอ
2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมต้องเท่ากับ ผลรวมของแรงที่กระทำกับอนุภาคของของไหล

ของไหลถูกพิจารณาให้อยู่ในสภาพที่ต่อเนื่องกัน (Continuum) นั่นคือเรามองของไหลในระดับมหภาค ไม่มองในระดับอนุภาค ซึ่งการมองของไหลในระดับอนุภาคเป็นการมองอนุภาคระดับโครงสร้างของโมเลกุลแต่ละหน่วย แขนของอะตอม และช่องว่างระหว่างโมเลกุล ซึ่งการมองระดับนี้มีผลทำให้ค่าคุณสมบัติของของไหล ที่พิจารณามีค่าไม่ต่อเนื่อง ฉะนั้นเราจึงพิจารณาของไหลในระดับมหภาค ซึ่งคุณสมบัติที่พิจารณาได้แก่ ค่าความเร็ว ความดัน ความหนาแน่น และอุณหภูมิ เป็นต้น

## 2.1 การอนุรักษ์ของมวล (Continuity Equation)

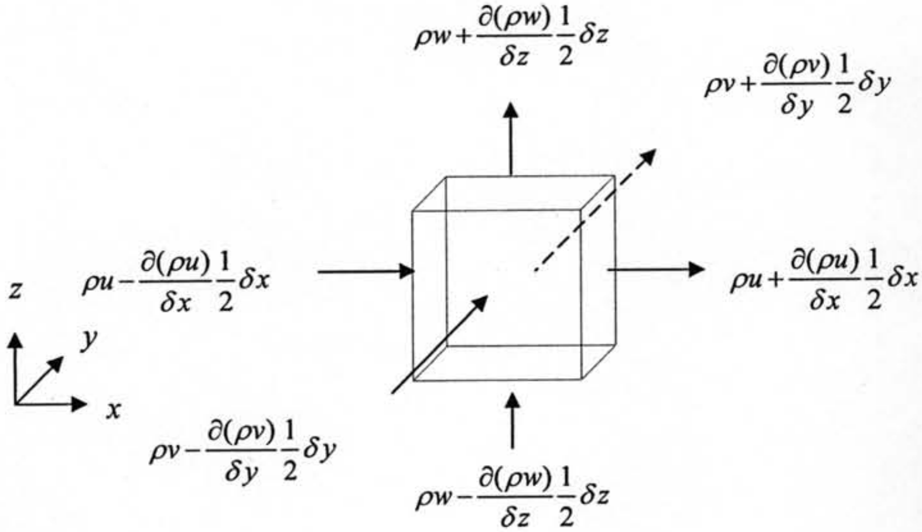
ขั้นแรกในการหาอนุพันธ์ของสมการอนุรักษ์มวล ก็คือการสมดุลมวลของของไหล ซึ่งเขียนได้ดังนี้ อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลของของไหลในปริมาตรควบคุม เท่ากับ อัตราของมวลทั้งหมดที่ไหลเข้าปริมาตรควบคุม

อัตราของมวลที่เพิ่มขึ้นของของไหล ก็คือ

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta x \delta y \delta z \tag{2.1}$$

โดย $\rho$ คือ ความหนาแน่น และ $t$ คือ เวลา ต่อมาเราพิจารณาการไหลผ่านปริมาตรควบคุมขนาดเล็กในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) ที่มีขนาด $dx$, $dy$ และ $dz$ ซึ่งตรึงอยู่กับที่บนโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 2.1 โดยกำหนดให้ $u$, $v$ และ $w$ แทนความเร็วในแนวแกน $x, y$ และ $z$ ตามลำดับ

โดยอัตราของมวลในทิศทางไหลเข้าอนุภาคของของไหลจะเป็นบวก และอัตราของมวลในทิศทางการไหลออกอนุภาคของของไหลจะเป็นลบ




รูปที่ 2.1 การไหลเข้าออกของอัตราของมวลผ่านก้อนอนุภาคของของไหล

จากรูปที่ 2.1 อัตราของมวลที่ไหลเข้าออกในแนวแกน $x$ คือ

$$\left(\rho u-\frac{\partial(\rho u)}{\delta x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z-\left(\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\delta x}\frac{1}{2}\delta x\right)\delta y\delta z \tag{2.2ก}$$

อัตราของมวลที่ไหลเข้าออกในแนวแกน $y$ คือ

$$\left(\rho v-\frac{\partial(\rho v)}{\delta y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z-\left(\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\delta y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z \tag{2.2ข}$$

และ อัตราของมวลที่ไหลเข้าออกในแนวแกน $z$ คือ

$$\left(\rho w-\frac{\partial(\rho w)}{\delta z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y-\left(\rho w+\frac{\partial(\rho w)}{\delta z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y \tag{2.2ค}$$

ดังนั้น จากผลรวมของสมการ 2.2ก ถึง 2.2ค จะได้

$$\partial(\rho u)\delta y\delta z+\partial(\rho v)\delta x\delta z+\partial(\rho w)\delta x\delta y$$

และจากอัตราการของมวลที่เพิ่มขึ้นของของไหล เท่ากับ อัตราของมวลทั้งหมดที่ไหลเข้าของของไหล จะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0 \tag{2.3}$$

สามารถเขียนได้อยู่ในรูป

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0 \tag{2.4}$$

หรือ

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right]=0 \tag{2.5}$$

ดังนั้นสมการที่ (2.3) สามารถเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0 \tag{2.6}$$

สมการ (2.6) เป็นสมการอนุรักษ์ของมวล (Mass conservation หรือ Continuity equation) ในสภาวะชั่วครู่สำหรับของไหลที่สามารถอัดตัวได้ในสามมิติ ซึ่งเทอมแรก คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นต่อเวลา และเทอมที่สอง คือ อัตราของมวลทั้งหมดที่เข้าออก หรือ เทอมการพา (Convective term) โดย $u_i$ คือ ความเร็วตามแนวแกน $x, y, z$

พิจารณาการไหลแบบหนืดแต่ไม่มีการอัดตัว (Viscous incompressible flow) ซึ่งความหนาแน่นของอนุภาคของของไหลจะไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา และตำแหน่งต่างๆ ขณะที่เคลื่อนที่ไป ดังนั้น

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.7}$$

หรือ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{2.8}$$

## 2.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของอนุภาคของไหล

คุณสมบัติต่างๆของอนุภาคของไหลนั้น จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันของตำแหน่ง คือ $x, y, z$ และเวลา $t$ หากกำหนดในคุณสมบัติต่างๆต่อ หน่วยมวล มีตัวแปรเป็น $\phi$ ดังนั้น อนุพันธ์รวม (Total derivative) ของ $\phi$ , $\frac{D\phi}{Dt}$ ก็คือ

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{2.9}$$

เมื่อ

$$\frac{dx}{dt}=u$$

$$\frac{dy}{dt}=v$$

$$\frac{dz}{dt}=w$$

ดังนั้นสมการอนุพันธ์จะได้เป็น

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{2.10}$$

$$\frac{D\phi}{Dt}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+u_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{2.11}$$

จาก $\frac{D\phi}{Dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติ $\phi$ ต่อหน่วยมวล หากเราพิจารณาสมการอนุรักษ์มวลในเทอมของ $\phi$ ต่อหน่วยปริมาตร

จาก

$$\rho=\frac{m}{V}$$

เมื่อ $\rho$ คือ ค่าความหนาแน่น

$m$ คือ น้ำหนัก

$V$ คือ ปริมาตร

ดังนั้น

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) \tag{2.12}$$

สมการอนุรักษ์ของมวลซึ่งมีหน่วยมวลต่อปริมาตรดังสมการที่ (2.12) นั้นเป็นการอนุรักษ์เชิงปริมาณ ดังนั้นเราจะทำการอนุรักษ์เชิงคุณสมบัติโดย จากสมการ (2.6) จะได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_i)}{\partial x_i} = 0 \tag{2.13}$$

สมการที่ (2.13) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $\phi$ ต่อหน่วยปริมาตร รวมกับการไหลออกของ $\phi$ ต่อหน่วยปริมาตร ซึ่งสามารถเขียนอธิบายความสัมพันธ์ของอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_i)}{\partial x_i} = \rho\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right] + \phi\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}\right] \tag{2.14}$$

ซึ่งเทอมที่สองในวงเล็บด้านขวามือ คือ สมการอนุรักษ์ของมวล ซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_i)}{\partial x_i} = \rho\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right] = \rho \frac{D\phi}{Dt} \tag{2.15}$$

หรือ

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_i)}{\partial x_i} = \rho \frac{D\phi}{Dt} \tag{2.16}$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (2.16) สามารถเขียนอธิบายได้ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของ $\phi$ ของเอลิเมนต์ของไหล รวมกับอัตราการไหลออกของ $\phi$ ของเอลิเมนต์ของไหล เท่ากับอัตราการเพิ่มขึ้นของ $\phi$ ของอนุภาคของของไหล

สมการที่ (2.16) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุรักษ์ของโมเมนตัม และสมการอนุรักษ์ของพลังงาน โดยใช้ความสัมพันธ์ของคุณสมบัติของ $\phi$ ซึ่งอธิบายดังในสมการที่ (2.12) และ (2.16) ได้ดังนี้

| | | | |
|---|---|---|---|
| โมเมนตัมแนวแกน $x$ | $u$ | $\rho\frac{Du}{Dt}$ | $=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u u_i)}{\partial x_i}$ |
| โมเมนตัมแนวแกน $y$ | $v$ | $\rho\frac{Dv}{Dt}$ | $=\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v u_i)}{\partial x_i}$ |
| โมเมนตัมแนวแกน $z$ | $w$ | $\rho\frac{Dw}{Dt}$ | $=\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho w u_i)}{\partial x_i}$ |
| พลังงาน | $E$ | $\rho\frac{DE}{Dt}$ | $=\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho E u_i)}{\partial x_i}$ |

## 2.3 การอนุรักษ์ของโมเมนตัม (Conservation of Momentum Equation)

จากกฎข้อที่สองของนิวตัน ซึ่งเขียนไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคของของไหล เท่ากับผลรวมของแรงที่กระทำกับอนุภาคนั้น สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.17}$$

จากความสัมพันธ์แบบเวคเตอร์ในสมการ (2.17) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์แบบสเกลาร์ (Scalar) ในแนวแกนต่างๆได้

อัตราการเพิ่มขึ้นของโมเมนตัมแนวแกน $x$, $y$ และ $z$ ต่อหน่วยปริมาตรของอนุภาคของไหลเขียนได้เป็น

$$\rho\frac{Du}{Dt} \quad , \quad \rho\frac{Dv}{Dt} \quad , \quad \rho\frac{Dw}{Dt}$$

เราสามารถจำแนกแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลได้สองประเภท คือ Surface force และ Body force โดยแจกแจงได้ดังนี้

Surface force คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อผิวด้านนอกของปริมาตรควบคุมของของไหลที่ถูกพิจารณา ซึ่งประกอบไปด้วยแรงเนื่องจากความดันในแนวตั้งฉาก (Normal force) และแรงเนื่องจากความเค้นเฉือนในแนวสัมผัส (Shear force) เช่น แรงจากความดัน (Pressure forces) และแรงจากความหนืด (Viscous forces)

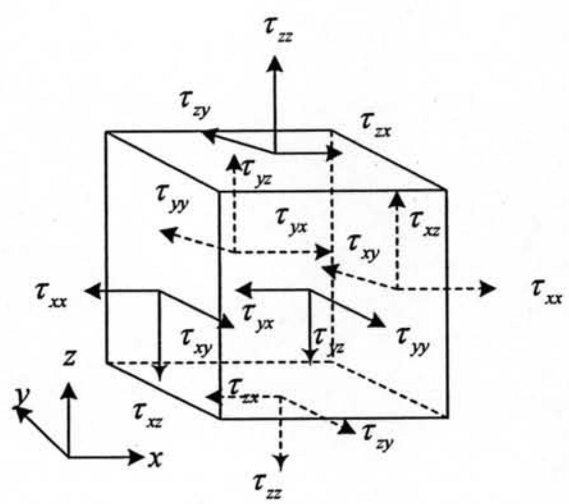
Body force คือ แรงภายนอกที่มากระทำต่ออนุภาคของของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาพ (Physical contact) เช่น แรงจากแรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity forces), Centrifugal force, Coriolis force และแรงจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic force) ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะผลเนื่องจากแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว

จากสมการ (2.18) และความสัมพันธ์ของ $\frac{Du_i}{Dt} = a_i$ และ $\rho = \frac{m}{V}$ เขียนได้เป็น

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = f_i = f_{body} + f_{surface} \tag{2.18}$$

ซึ่ง $f_i$ เป็นแรงต่อหน่วยปริมาตรของอนุภาคของของไหล และแบ่งออกเป็น $f_{body}$ เป็นแรงที่เกิดจากแรงภายนอกมากระทำต่ออนุภาคของไหล โดยไม่มีการสัมผัสทางกายภาค ในที่นี้จะพิจารณา $f_{body}$ จากแรงแรงโน้มถ่วงเพียงอย่างเดียว และจะทำการแยกไว้รวมกับ Source term ส่วน $f_{surface}$ เป็นแรงที่เกิดจากแรงภายนอกมากระทำต่อผิวด้านนอกของก้อนของไหล ซึ่งก็คือส่วนประกอบของความเค้นนั่นเอง

พิจารณาองค์ประกอบของความเค้นของอนุภาคของของไหล ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.2




รูปที่ 2.2 องค์ประกอบความเค้นของอนุภาคของของไหล

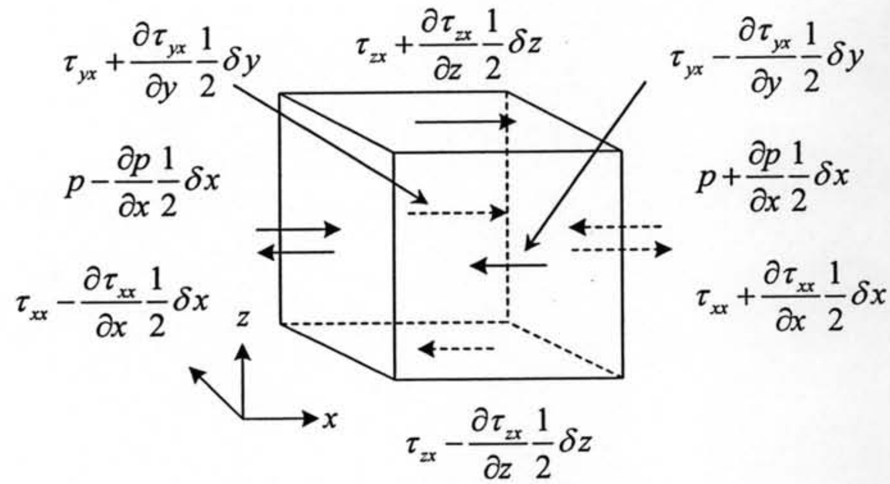
พิจารณาแรงที่เกิดในวแนวแกน $x$ เนื่องจากความดัน และความเค้น $\tau_{xx}$, $\tau_{yx}$ และ $\tau_{zx}$ โดยแรงที่มีทิศทางตามแกน $x$ เป็นบวก และทิศทางตรงข้ามเป็นลบดังแสดงในรูปที่ 2.3

พิจารณาความเค้นแนวแกน $x$ ที่ผิวด้านซ้ายและขวา ($E, W$)

$$\left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y \delta z$$

$$+\left[-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\frac{1}{2}\delta x\right)\right]\delta y \delta z$$

$$=\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}\right)\delta x\delta y\delta z \qquad (2.19ก)$$




รูปที่ 2.3 ความเค้นในแนวแกน $x$

พิจารณาความเค้นแนวแกน $x$ ที่ผิวด้านหน้าและด้านหลัง ($N$, $S$)

$$-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{1}{2}\delta y\right)\delta x\delta z$$

$$=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x\delta y\delta z \qquad (2.19ข)$$

พิจารณาความเค้นแนวแกน $x$ ที่ผิวด้านบนและด้านล่าง ($T$, $B$)

$$-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{1}{2}\delta z\right)\delta x\delta y$$

$$=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta x\delta y\delta z \qquad (2.19ค)$$

ดังนั้น Surface force ทั้งหมดที่กระทำกับอนุภาคของของไหล เท่ากับ การรวมของสมการ (2.19ก), (2.19ข) และ (2.19ค) หารด้วย $\delta x\delta y\delta z$

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

สมการโมเมนตัมแนวแกน $x$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมของอนุภาค เท่ากับ แรงทั้งหมดที่เกิดจาก Surface force รวมกับ Body force ซึ่งรวมเข้าไว้ใน Source term $S_{Mx}$ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+S_{Mx} \tag{2.20ก}$$

สมการโมเมนตัมแนวแกน $y$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial(-p+\tau_{yy})}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+S_{My} \tag{2.20ข}$$

และสมการโมเมนตัมแนวแกน $z$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial(-p+\tau_{zz})}{\partial z}+S_{Mz} \tag{2.20ค}$$

ความดันมีค่าตรงข้ามกับค่าความเค้น เนื่องจากความเค้นถูกมองเป็น Tensile stress จึงมีค่าเป็นบวก ดังนั้นความดันนี้มีค่าเป็นลบ เพราะเป็นแบบ Compressive stress

## 2.4 สมการนาเวียร์-สโตกส์สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียน (Navier-Stokes Equation for a Newtonian Fluid)

ของไหลแบบนิวโตเนียน ค่าความเค้นที่เกิดจากผลของความหนืดจนแปรผันเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราความเครียดเชิงมุม ซึ่งค่าความเครียดประกอบด้วย อัตราการเปลี่ยนรูปเชิงเส้น (Linear deformation rate) และอัตราการเปลี่ยนรูปเชิงปริมาตร (Volumetric deformation rate)

อัตราการเปลี่ยนรูป (Rate of linear deformation) ในแนวแกน

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.21ก}$$

และ Shearing linear deformation

$$e_{xy}=e_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad , \quad e_{xz}=e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$e_{yz}=e_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.21ข}$$

Volumetric deformation สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{2.21ค}$$

ค่าความเค้นเหล่านี้จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของความแตกต่างของความเร็ว และมีค่าคงที่สองตัว คือ ความหนืดพลวัต (Dynamic viscosity, $\mu$) ซึ่งมีความแปรผันกับ Linear deformation และ $\lambda$ ซึ่งแปรผันกับ Volumetric deformation ดังนี้

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ ,\ \tau_{yy}=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ ,\ \tau_{zz}=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\ ,\ \tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.22}$$

ซึ่งของเหลวจะเป็นของไหลชนิดอัดตัวไม่ได้ ดังนั้นสมการอนุรักษ์มวล $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$ และนำสมการ (2.22) ลงใน (2.21ก-ค) ซึ่งจะได้สมการนาเวียร์-สโตกส์

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+S_{Mx} \tag{2.23ก}$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+S_{My} \tag{2.23ข}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]+S_{Mz} \tag{2.23ค}$$

เมื่อพิจารณาความเค้นในสมการ (2.23ก) มาจัดเรียงใหม่ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+S_{Mx}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+S_{Mx} \tag{2.24}$$

เมื่อ

$$S_{Mx}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \tag{2.25}$$

โดยสามารถเขียนสมการความเค้นในแนวแกน $y$ และ $z$ ได้ในลักษณะเดียวกัน และให้ Momentum source term เป็น $S_{Mx}=S_M+s_{Mx}$

ดังนั้นสมการนาเวียร์-สโตกส์ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+S_{Mx} \tag{2.26ก}$$

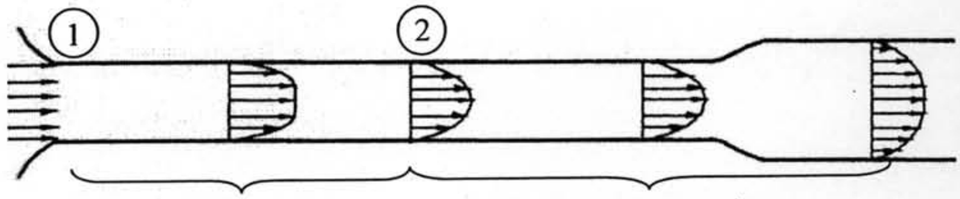
$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)+S_{My} \tag{2.26ข}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)+S_{Mz} \tag{2.26ค}$$

## 2.5 การไหลแบบภายใน (Internal Flow)

การไหลแบบภายใน (Internal flow) คือ การไหลที่ถูกกักและล้อมรอบทั้งหมดด้วยผนังของของแข็ง การไหลภายในที่สำคัญ ได้แก่ การไหลในท่อ การไหลผ่านข้อต่อแบบต่างๆ ในระบบท่อ รวมทั้งการไหลผ่านอุปกรณ์วาล์วแบบต่างๆ

การไหลแบบภายในจะมีสภาพการไหลแบ่งเป็นสองสภาวะ คือ การไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent flow) ซึ่งสภาวะการไหลทั้งสองแบบจะมีผลต่อรูปร่างของความเร็ว ความเสียดทาน การไหลในช่วงต่อระหว่างการไหลสภาวะแบบราบเรียบกับสภาวะการไหลแบบปั่นป่วนจะเรียกว่า การไหลแบบช่วงต่อ (Transition) และตัวแปรไร้มิติที่เป็นตัวกำหนดสภาวะการไหลคือ ตัวเลขเรย์โนลด์ (Reynolds number) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น $\mathrm{Re} = \rho\bar{u}D/\mu$




รูปที่ 2.4 การไหลย่านขาเข้า การไหลที่กำลังพัฒนา และการไหลแบบพัฒนาเต็มที่

ในช่วงเริ่มต้นก่อนที่ของไหลจะไหลเข้าสู่ท่อนั้น ของไหลมีรูปร่างความเร็วอยู่ในลักษณะสม่ำเสมอ และจากเงื่อนไขไม่ลื่นไถล (No slip condition) จะทำให้ของไหลที่ไหลเข้าสู่ท่อต้องลดความเร็วลงมาเท่ากับศูนย์ที่ผนังของท่อก่อให้เกิดเป็นรูปร่างของความเร็วขึ้น และรูปร่างความเร็วจะพัฒนาขึ้นตามความหนาของชั้นขอบเขต (Boundary layer) ที่เกิดขึ้นบนผนังท่อจนกระทั่งเมื่อชั้นขอบเขตนี้โตขึ้นจนเบียดชนกันที่ตำแหน่งที่ 2 ในรูปที่ 2.4 ช่วงของการไหลจากตำแหน่งที่ 1 ถึง 2 จะเรียกว่า ช่วงการไหลในย่านขาเข้า (Entrance region) และเรียกความยาวของท่อในการไหลช่วงนี้ว่า ความยาวขาเข้า (Entrance length) และการไหลในช่วงจากตำแหน่งที่ 2 ถึง 3 จะเรียกว่า การไหลที่พัฒนาเต็มที่ (Fully-developed flow) ซึ่งรูปร่างความเร็วจะมีค่าคงที่ เมื่อมีการเปลี่ยนทิศทางของท่อ หรือเปลี่ยนขนาดของท่อ หรือเมื่อของไหลไหลผ่านอุปกรณ์วาล์ว รูปร่างของความเร็วของการไหลจะเปลี่ยนจากรูปร่างความเร็วของการไหลที่พัฒนาเต็มที่ไป และต้องใช้ระยะของท่อช่วงหนึ่งที่จะทำให้รูปร่างของความเร็วที่เปลี่ยนไปกลับสู่สภาวะการไหลแบบพัฒนาเต็มที่อีกครั้งตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.4

ค่าความยาวของย่านขาเข้าอาจกำหนดโดยความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{L_e}{D} = 0.006\frac{\rho\bar{u}D}{\mu} \qquad \text{สำหรับการไหลแบบราบเรียบ} \qquad (2.27)$$

$$\frac{L_e}{D} = 4.4\left(\frac{\rho\bar{u}D}{\mu}\right)^{1/6} \qquad \text{สำหรับการไหลแบบปั่นป่วน} \qquad (2.28)$$

โดยที่ค่า $L_e$ คือ ค่าความยาวขาเข้า $\bar{u}$ เป็นค่าความเร็วเฉลี่ยของการไหลในท่อ

## 2.6 สรุป

ในบทนี้ได้แสดงถึงระบบสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาการไหลไว้อย่างละเอียด โดยประกอบไปด้วย สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน $x$ และแกน $y$ และ $z$ สมการนาเวียร์-สโตกส์สำหรับของไหลแบบนิวโตเนียน การไหลแบภายในซึ่งอธิบายลักษณะการไหลในช่วงการไหลแบบราบเรียบและการไหลแบบปั่นป่วน ซึ่งในงานวิจัยนี้เป็นการไหลแบบราบเรียบ และในบทต่อไปจะอธิบายถึงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมกับสมการพื้นฐานต่างๆในบทนี้