# การวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันสัมพรรคทางเดียว

นายประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2555

# MONOTONICALLY AFFINE FUNCTION GENERALIZATION

Mr.Prapeepat Uewichitrapochana

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Computer Engineering
Department of Computer Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2012

| | |
|---|---|
| หัวข้อวิทยานิพนธ์ | การวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันสัมพรรคทางเดียว |
| โดย | นายประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา |
| สาขาวิชา | วิศวกรรมคอมพิวเตอร์ |
| อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก | ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ |

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

........................................คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญสม เลิศหิรัญวงศ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

........................................ประธานกรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา)

........................................อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์)

........................................กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง)

**ประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา : การวางนัยทั่วไปของฟังก์ชันสัมพรรคทางเดียว.**
**(MONOTONICALLY AFFINE FUNCTION GENERALIZATION)**
**อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ.ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์, 47 หน้า.**

ระบบเลขคณิตแบบช่วง เป็นงานวิจัยหนึ่งในด้านระบบตรวจสอบตนเองอัตโนมัติ กล่าวคือ ระบบสามารถตรวจตามค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการปัดเศษและเอ่อล้นได้ระหว่างขั้นตอนการคำนวณ ปัญหาที่เกิดขึ้นของระบบเลขคณิตแบบช่วงคือ ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร ทำให้ช่วงจำนวนผลลัพธ์กว้างกว่าช่วงคำตอบจริง ส่งผลให้การนำเอาช่วงจำนวนที่แสดงถึงค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้นไปใช้ อาจทำให้เกิดการเตือนที่ผิดพลาดขึ้นได้ จึงมีงานวิจัยที่นำเอาแนวคิดของระบบเลขคณิตแบบช่วงมาพัฒนาต่อ และได้เสนอ ระบบเลขคณิตสัมพรรคขึ้น เพื่อแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร แต่ยังคงเกิดปัญหาการขยายกว้างเกินค่าจริงของช่วงอยู่

สาเหตุหลักหนึ่งของการขยายกว้างเกินค่าจริงของช่วงบนเลขคณิตสัมพรรค คือ การประมาณค่าเกินจริงของฟังก์ชันจำนวนจริงที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค กล่าวคือ การสร้างสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่โดยที่สัมประสิทธิ์ของสัญกรณ์ยังไม่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ผลลัพธ์ยังคงถูกต้อง งานวิจัยนี้ได้เสนอทฤษฎีและบทพิสูจน์ของการสร้างฟังก์ชันสัมพรรคที่ประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคที่ครอบคลุมถึงกรณียกเว้น กล่าวคือ ฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร ซึ่งด้วยทฤษฎีบทเดิมนั้นไม่เพียงพอในการสร้างฟังก์ชันสัมพรรคการประมาณที่ให้ผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่แทนช่วงที่แคบที่สุดได้ และจากผลของการสร้างทฤษฎีบทใหม่ทำให้สามารถคำนวณรูปสัมพรรคจากฟังก์ชันยกกำลังที่ช่วงผลลัพธ์แคบที่สุดบนเลขคณิตสัมพรรคได้

**ภาควิชา** **วิศวกรรมคอมพิวเตอร์** **ลายมือชื่อนิสิต**
**สาขาวิชา** **วิศวกรรมคอมพิวเตอร์** **ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก**
**ปีการศึกษา** **2555**

# # 5570492421 : MAJOR COMPUTER ENGINEERING

KEYWORDS : INTERVAL ARITHMETIC / AFFINE ARITHMETIC / CHEBYSHEV APPROXIMATION / LINEAR POLYNOMIAL APPROXIMATION / MINIMAX APPROXIMATION



PRAPEEPAT UEWICHITRAPOCHANA : MONOTONICALLY AFFINE FUNCTION GENERALIZATION. ADVISOR : ASST. PROF. ATHASIT SURARERKS, Ph.D., 47 pp.



Interval arithmetic is one branch of the researches in the field of automatic result verification, the system that can keep track of the overflow and round-off error along the computational chains. The interval arithmetic has the dependency problem; the computational result gets wider than the actual range. This effect sometimes causes false alarm when being used. Therefore, the extension of interval arithmetic was proposed, an affine arithmetic as a model without dependency problem but error explosion still occurs.

One major cause of the error explosion in the affine arithmetic is the overestimation of a non-affine function introducing a new noise symbol term with non-minimum coefficient. This thesis proposes theorems and its proofs to construct the best univariate affine approximation to a non-affine function in the exception case, Signed-symmetric function, that the existing theorem is not sufficient to determine the optimum one. We propose a novel theorem that describes the best univariate affine approximation to a signed-symmetric function together with an algorithm. As our result, it shows the use by evaluating the power function and approximating sine function.



**Department :** Computer Engineering **Student's Signature** ..............................

**Field of Study :** Computer Engineering **Advisor's Signature** ..............................

**Academic Year :** 2012

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้ข้อคิด ข้อเสนอแนะ คำปรึกษา ตลอดจนตรวจทานแก้ไขส่วนที่บกพร่องต่างๆ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาเป็นอย่างสูงที่ให้ความช่วยเหลือ เมตตา และโอกาสดีๆ แก่ผู้วิจัยเสมอมา

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ประภาส จงสถิตย์วัฒนา ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อานนท์ รุ่งสว่าง คณะวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำ แก้ไขวิทยานิพนธ์ให้มีคุณภาพยิ่งขึ้น รวมทั้งขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ประสิทธิประสาทวิชาความรู้อันมีค่ายิ่งแก่ผู้วิจัย

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจอันสำคัญยิ่ง และขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ทุกคน โดยเฉพาะสมาชิกห้องปฏิบัติการวิจัยทางด้านวิศวกรรมระบบนัดได้เชิงทฤษฎี (ELITE) ที่ได้คอยให้ความช่วยเหลือ ให้ข้อเสนอแนะ และแก้ไขเอกสาร จนสามารถทำให้วิทยานิพนธ์เสร็จสมบูรณ์ได้ ซึ่งผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่า งานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจ และหากมีข้อผิดพลาดประการใด ผู้วิจัยขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

# สารบัญ

หน้า

หน้า

# สารบัญตาราง

หน้า

# สารบัญรูป

หน้า

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การคำนวณอย่างละเอียดบนภาษาคอมพิวเตอร์ปัจจุบันใช้การแทนตัวเลขทศนิยมด้วยระบบเลขคณิตจุดลอยตัว (**floating point arithmetic**) [1] ซึ่งเป็นลักษณะการเก็บทศนิยมโดยแบ่งออกเป็นสองส่วนคือ ส่วนตัวเลขนัยสำคัญ ซึ่งมีจำนวนหลักในฐานสิบจำกัด และส่วนเลขยกกำลัง ซึ่งเป็นเลขยกกำลังของสิบ เนื่องจากการแทนจำนวนทศนิยมด้วยเลขนัยสำคัญที่จำกัดย่อมทำให้การคำนวณบนการแทนตัวเลขทศนิยมลักษณะนี้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้น และย่อมเกิดความคลาดเคลื่อนสะสมหากเป็นการคำนวณอย่างต่อเนื่อง ผู้ที่ใช้งานระบบเลขคณิตจุดลอยตัวจึงจำเป็นต้องระวังค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้เอง ซึ่งเป็นการยากหากถูกนำไปใช้ในขั้นตอนการคำนวณที่ซับซ้อน

ตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นได้ชัดเจนถึงปัญหาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจากการคำนวณอย่างต่อเนื่อง ดังรูปที่ 1 แสดงตัวอย่างเปรียบเทียบการคำนวณด้วยเลขคณิตจุดลอยตัวและเลขคณิตเศษส่วน โดยการคำนวณผลลัพธ์จากฟังก์ชันด้วยการแทนคำนวณเลขทศนิยมด้วยเลขคณิตที่แตกต่างกันสองรูปแบบคือ เลขคณิตจุดลอยตัวและเลขคณิตเศษส่วน (**rational arithmetic**) โดยระบบเลขคณิตทั้งสองต่างให้ผลลัพธ์จากการคำนวณที่มีค่าความคลาดเคลื่อนทั้งสิ้น

จากค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นโดยการคำนวณด้วยระบบเลขคณิตจึงเป็นแรงพลักดันให้เกิดการวิจัยในส่วนของตัวแบบการคำนวณที่สามารถตรวจสอบตัวเอง (**automatic result verification**) ซึ่งตัวแบบสามารถตามรอยค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณได้ทุกๆ ขั้นตอน โดยตัวแบบที่ง่ายและเป็นที่รู้จักกันมากได้แก่

ระบบเลขคณิตแบบช่วง (**interval arithmetic**) [2] ถูกเสนอขึ้นโดย มัวร์ (R.E. Moore) เมื่อปี ค.ศ.1966 โดยแทนจำนวนด้วยช่วงขอบเขตน้อยสุดและมากสุดของจำนวนโดยที่ค่ากลางของช่วงแสดงถึงจำนวนที่เราสนใจ ส่วนความกว้างของช่วงแสดงถึงค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นใน

ขณะนั้น ซึ่งการแทนจำนวนด้วยช่วงย่อมเพียงพอสำหรับความต้องการในการตามรอยค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นได้

```
x:=77617; y:=33096;
# evaluate in floating point
f:=333.75*y^6+x^2*(11*x^2*y^2-y^6-121*y^4-2)+5.5*y^8+x/(2*y);
                                f := 1.172603940
# evaluate in exact rational arithmetic
f:=33375/100*y^6+x^2*(11*x^2*y^2-y^6-121*y^4-2)+55/10*y^8+x/(2*y);
                                          54767
                                  f := - -----
                                          66192
# show decimal equivalent
evalf(f,10);
                                  -.8273960599
```

**รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างเปรียบเทียบการคำนวณด้วยเลขคณิตจุดลอยตัวและเลขคณิตเศษส่วน**

แต่ปัญหาสำหรับระบบเลขคณิตแบบช่วงนั้นคือ ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร (dependency problem) กล่าวคือ ตัวแปรแต่ละตัวถูกพิจารณาว่าเป็นอิสระต่อกันทั้งหมด ตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นชัดถึงเรื่องนี้คือ การลบกันของตัวแปรเดียวกัน (X– X) จะมีค่าช่วงคำตอบไม่เท่ากับศูนย์ทำให้เกิดการขยายกว้างของช่วงเกินความเป็นจริงขึ้น

ระบบเลขคณิตสัมพรรค (affine arithmetic) [3] จึงถูกเสนอขึ้น โดย สโตล์ฟี่ (Stolfi) เมื่อปี ค.ศ. 1997 เพื่อแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร โดยการแทนช่วงด้วยรูปสัมพรรค (affine form) ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนามกำลังหนึ่ง รูปสัมพรรคมีสัญลักษณ์ที่เรียกว่าสัญกรณ์รบกวน (noise symbol) ซึ่งแสดงถึงค่าความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นได้ ทั้งนี้เนื่องจากรูปสัมพรรคอยู่ในรูปของพหุนามกำลังหนึ่งทำให้เกิดปัญหาเรื่องสมบัติปิดของการดำเนินการ (non-affine operation) ขึ้น กล่าวคือการคำนวณบนจำนวนจริงไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคทั้งหมด ทำให้การคำนวณที่ไม่มีสมบัติปิดนั้นจำเป็นต้องทำการประมาณค่าและเกิดความคลาดเคลื่อนขึ้นโดยเพิ่มความคลาดเคลื่อนนี้อยู่ในรูปของสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่ในรูปสัมพรรคผลลัพธ์

ในงานวิจัยนี้ เราสนใจในส่วนของการประมาณค่าฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคให้เกิดค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด (minimax approximation) จากสมการนี้

$$err = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| \qquad (1)$$

บนช่วง $[a, b]$ ที่แทนโดยรูปสัมพรรค จากการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริง $(f(x))$ ด้วยฟังก์ชันเส้นตรง $(p(x))$ ซึ่งมีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค โดยค่าความคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุดนี้จะถูกเพิ่มในรูปสัมพรรคผลลัพธ์ในรูปของสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่ ซึ่งการประมาณนี้ $(1)$ จะส่งผลให้รูปสัมพรรคผลลัพธ์เกิดการขยายกว้างของช่วงที่แคบที่สุด

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1) เพื่อศึกษาการสร้างฟังก์ชันสัมพรรคจากทฤษฎีบทที่มีอยู่
2) เพื่อค้นคว้าวิธีการสร้างฟังก์ชันสัมพรรคสำหรับกรณีเฉพาะที่กล่าวข้างต้นเพื่อให้ผลลัพธ์การประมาณที่เกิดค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด
3) เพื่อเสนอทฤษฎีบทสำหรับการประมาณที่ครอบคลุมถึงกรณีเฉพาะที่กล่าวถึง

## 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1) พิจารณากลุ่มตัวอย่างของฟังก์ชันที่ทฤษฎีบทที่มีอยู่ไม่เพียงพอในการหาค่าสัมประสิทธิที่เหมาะสม
2) เขียนทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการประมาณฟังก์ชันตัวแปรเดียวเท่านั้น
3) พิสูจน์ทฤษฎีบทโดยวิธีทางคณิตศาสตร์

## 1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

1) ศึกษาถึงที่มาของทฤษฎีบทในการคำนวณค่าสัมประสิทธ์ที่เหมาะสมของฟังก์ชันเส้นตรงที่ใช้ในการประมาณที่เกิดค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดที่มีอยู่
2) ศึกษาถึงการนำทฤษฎีบทดังข้อหนึ่งมาใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน
3) ศึกษาวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีบทด้วยคณิตศาสตร์
4) เขียนและพิสูจน์ทฤษฎีบทในการคำนวณค่าสัมประสิทธ์
5) เปรียบเทียบประสิทธิภาพในการคำนวณฟังก์ชัน $x^n$ ด้วยการประมาณค่าฟังก์ชันเทียบกับการคูณพื้นฐาน
6) สรุปผลและเรียบเรียงวิทยานิพนธ์

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

เสนอทฤษฎีบทเพื่อใช้ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของเส้นตรงการประมาณใหม่ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันจำนวนจริงด้วยฟังก์ชันเส้นตรงที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณน้อยที่สุด

## 1.6 ผลงานที่ตีพิมพ์จากวิทยานิพนธ์

ส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์นี้ได้รับการตีพิมพ์เป็นผลงานวิชาการในหัวข้อเรื่องดังต่อไปนี้

1)"Signed-symmetric Function Approximation Algorithm in Affine Arithmetic" โดย ประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา, อรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ และ อานนท์ รุ่งสว่าง ในงานประชุมวิชาการ The 17th International Annual Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE 17)

2)"Signed-symmetric Function Approximation in Affine Arithmetic" โดย ประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา และอรรถสิทธิ์ สุรฤกษ์ ในงานประชุมวิชาการ The 10th annual international Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology conference (ECTI-CON 2013)

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

## 2.1 เลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic)

เพื่อที่จะประมาณค่าคลาดเคลื่อนจากการล้นและการปัดเศษจากการดำเนินการทางเลขคณิต มีเลขคณิตอยู่ด้วยกัน สองแบบคือ เลขคณิตแบบช่วง และเลขคณิตสัมพรรค ในที่นี้ขอกล่าวถึงเลขคณิตแบบช่วงก่อน

เลขคณิตแบบช่วงของตัวแปร $x$ สามารถแทนด้วย $\bar{x} = [x_l, x_h]$ โดยที่ $x_l, x_h \in \mathbb{R}$ และ $x_l \leq x \leq x_h$ โดยที่เซ็ตของช่วงจำนวนแทนด้วย $\overline{\mathbb{R}}$

## 2.2 การดำเนินการทางเลขคณิตพื้นฐานบนเลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic operation)

การดำเนินการทางเลขคณิตแบบช่วงประกอบไปด้วยการดำเนินการพื้นฐานอยู่ 4 ตัวดำเนินการคือ การบวก ลบ คูณ และหาร

$$[x_l, x_h] \mathbin{\overline{+}} [y_l, y_h] = [x_l + y_l, x_h + y_h]$$

$$[x_l, x_h] \mathbin{\overline{-}} [y_l, y_h] = [x_l - y_h, x_h - y_l]$$

$$\begin{aligned}[x_l, x_h] \mathbin{\overline{\times}} [y_l, y_h] = [&\min(x_l y_l, x_h y_l, x_l y_h, x_h y_h),\\ &\max(x_l y_l, x_h y_l, x_l y_h, x_h y_h)]\end{aligned}$$

$$[x_l, x_h] \mathbin{\overline{\div}} [y_l, y_h] = [x_l, x_h] \mathbin{\overline{\times}} \left[\frac{1}{y_h}, \frac{1}{y_l}\right] \text{ if } 0 \notin [y_l, y_h]$$

**ตัวอย่างที่ 2.1** *กำหนดให้จำนวนจริง* $x \in \bar{\mathrm{x}} = [-3,1]$ *และจำนวนจริง* $y \in \bar{\mathrm{y}} = [-5, 11]$ *จงหาผลลัพธ์* $z$ *จากการคำนวณ* $z = x * y$ *โดยที่ ตัวดำเนินการ* $* \in \{+, -, \times, \div\}$

**วิธีทำ**

การบวก $\bar{z} = \bar{x} \mathbin{\bar{+}} \bar{y}$

$$= [-3,1] \mathbin{\bar{+}} [-5,11]$$
$$= [-3-5, 1+11]$$
$$= [-8, 12]$$

การลบ $\bar{z} = \bar{x} \mathbin{\bar{-}} \bar{y}$

$$= [-3,1] \mathbin{\bar{-}} [-5,11]$$
$$= [-3-11, 1-(-5)]$$
$$= [-14, 6]$$

การคูณ $\bar{z} = \bar{x} \mathbin{\bar{\times}} \bar{y}$

$$= [-3,1] \mathbin{\bar{\times}} [-5,11]$$
$$= [\min(15, -33, -5, 11), \max(15, -33, -5, 11)]$$
$$= [-33, 15]$$

การหาร $\bar{z} = \bar{x} \mathbin{\bar{\div}} \bar{y}$

$$= [-3,1] \mathbin{\bar{\div}} [-5,11]$$

เนื่องจาก $0 \in [-5,11]$ จึงทำให้เราไม่สามารถคำนวณค่าผลลัพธ์ได้ และการเตือนว่าถูกหารด้วยศูนย์จะถูกเตือนขึ้น □

เนื่องจากเลขคณิตแบบช่วงได้สมมุติให้ทุกๆ ช่วงจำนวนเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงปัญหาดังกล่าว

กำหนดให้ $x \in \bar{x} = [-3,1]$ จะเห็นได้ว่า

$$\bar{x} \mathbin{\bar{-}} \bar{x} = [-3,1] \mathbin{\bar{-}} [-3,1]$$
$$= [-4,4]$$

เลขคณิตแบบช่วงสมมุติให้ตัวถูกดำเนินการแรกและตัวถูกดำเนินการที่สองเป็นอิสระต่อกัน ซึ่งในความเป็นจริงแล้วทั้งสองตัวได้แทนค่าจำนวนจำนวนเดียวกันและผลลัพธ์ที่แท้จริงจะต้องเป็น $[0,0]$ ปัญหานี้เรียกว่า ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร (dependency problem) ซึ่งทำให้เกิดการสูญเสียความแม่นยำในการคำนวณที่ยาวต่อๆ ไป การเสียความแม่นยำในการคำนวณนี้เรียกว่า การขยายกว้างเกินจริงของช่วงจำนวน (error explosion)

## 2.3 รูปสัมพรรค (affine form)

ในระบบเลขคณิตสัมพรรคช่วงจำนวนจะถูกแทนด้วยค่ากลางและผลรวมของสัญกรณ์รบกวน (noise symbol) ซึ่งสัญกรณ์รบกวนแต่ละตัวจะแสดงถึงความไม่แน่นอนที่เป็นอิสระต่อกัน

**นิยามที่ 2.1** *จำนวนจริง $x$ ใดๆ สามารถเขียนในรูปแบบของ* รูปสัมพรรค *ของ $x$ เขียนแทนด้วย $\hat{x}$ ได้ดังนี้*

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{x_1}\boldsymbol{\varepsilon_1} + \boldsymbol{x_2}\boldsymbol{\varepsilon_2} + \cdots + \boldsymbol{x_n}\boldsymbol{\varepsilon_n}$$

*โดยที่ $x_0$ เป็นค่ากลางของช่วง และ $x_i$ เป็นจำนวนจริงที่เป็นสัมประสิทธิ์ของสัญกรณ์รบกวนที่ $i$ และสัญกรณ์รบกวน $\varepsilon_i \in [-1,1]$ คือเป็นสัญกรณ์รบกวนลำดับที่ $i$ โดยที่ $1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}$ และเอกภพของรูปสัมพรรคแทนด้วย $\hat{\mathbb{R}}$.*

## 2.4 การดำเนินการทางเลขคณิตพื้นฐานบนเลขคณิตสัมพรรค (affine arithmetic operation)

การดำเนินการทางเลขคณิตสัมพรรคประกอบไปด้วยการดำเนินการพื้นฐานอยู่ 4 ตัวดำเนินการคือ $\ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}$ และ $\ddot{\div}$

**นิยามที่ 2.2** *ตัวดำเนินการเลขคณิตพื้นฐานบนระบบเลขคณิตสัมพรรค*

$$\hat{x} \ddot{+} \hat{y} = (x_0 + y_0) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\varepsilon_i,$$

$$\hat{x} \ddot{-} \hat{y} = (x_0 - y_0) + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)\varepsilon_i,$$

$$\hat{x} \ddot{\times} \hat{y} = x_0 y_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_0 y_i + x_i y_0)\varepsilon_i + B\varepsilon_{n+1},$$

$$\hat{x} \ddot{\div} \hat{y} = \hat{x} \ddot{\times} \frac{1}{\hat{y}}, \text{if } 0 \notin \left[x_0 - \textstyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|, x_0 + \sum_{i=1}^{n}|x_i|\right],$$

*โดย $\varepsilon_{n+1} \in [-1, 1]$ เป็นสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่ และ $B$ คือค่าสูงสุดที่เป็นไปได้จาก* $(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i)$, และการคำนวณ $\frac{1}{\hat{y}} = \hat{z}$ สามารถทำได้ดัง [4].

เลขคณิตสัมพรรคถูกเสนอขึ้นเพื่อแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกิดขึ้นบนเลขคณิตแบบช่วง ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงถึงการแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร

$\hat{x} = -1 + 2\varepsilon_1$ ซึ่งแทนช่วงปิด $[-3,1]$ ดังตัวอย่างในเลขคณิตแบบช่วงที่กล่าวมาแล้ว

$$\hat{z} = \hat{x} \ddot{-} \hat{x} = 0$$

จะเห็นได้ว่าการออกแบบตัวถูกดำเนินการด้วยรูปสัมพรรคสามารถแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปรได้

## 2.5 การดำเนินการที่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค (affine operations)

การดำเนินการที่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค คือ การดำเนินการที่กระทำกับรูปผลลัพธ์แล้วได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นรูปสัมพรรค มีด้วยกัน 3 ตัวดำเนินการ คือ

การบวก/ลบด้วยค่าคงที่ หรือ ค่ากลาง

$$\hat{z} = \hat{x} + c$$

โดยการบวก/ลบด้วยค่าคงที่จะเปลี่ยนแปลงค่ากลางของรูปสัมพรรค

การคูณด้วยค่าคงที่

$$\hat{z} = c\hat{x}$$

โดยการคูณด้วยค่าคงที่จะเปลี่ยนแปลงค่ากลางและสัมประสิทธิ์ทุกตัวของสัญกรณ์รบกวนที่รูปสัมพรรคนั้นมีอยู่

การเพิ่มสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่

$$\hat{z} = \hat{x} + x_k\varepsilon_k$$

ซึ่งสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่นี้จะส่งผลให้ช่วงจำนวนที่รูปสัมพรรคนั้นๆ ขยายกว้างขึ้น

## 2.6 การดำเนินการที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค (non-affine operations)

มีฟังก์ชันจำนวนจริงบางฟังก์ชันเท่านั้นที่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคสำหรับฟังก์ชันจำนวนจริงที่ไม่มีสมบัติปิด เราสามารถใช้วิธีการประมาณฟังก์ชันนั้นด้วยฟังก์ชันเส้นตรง ซึ่งฟังก์ชันเส้นตรงมีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค การประมาณนี้ได้จาก [3] โดยจะแสดงให้ดูดังต่อไปนี้

หากพิจารณาฟังก์ชันทั่วไป $z = f(x, y)$ โดย $x, y$ ถูกแทนด้วยรูปสัมพรรค $\hat{x}, \hat{y}$ แล้ว $z$ จะมีค่าดังนี้

$$z = f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n, y_0 + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n)$$

$$= f^*(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n),$$

โดยที่ $f^*$ เป็นฟังก์ชันจาก $U^n$ ถึง $R$ ( $U = [-1, 1]$) ถ้าหากว่า $f^*$ ไม่อยู่ในรูปสัมพรรค $z$ ก็จะไม่สามารถเขียนแทนด้วยรูปสัมพรรคเพื่อแสดงผลลัพธ์ของฟังก์ชันอย่างถูกต้องได้ ในกรณีนี้จึงจำต้องเลือกฟังก์ชันสัมพรรคใหม่

$$f^a(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n) = z_0 + z_1\varepsilon_1 + z_2\varepsilon_2 + \cdots + z_n\varepsilon_n$$

ซึ่งประมาณค่าฟังก์ชัน $f^*$ จาก $U^n$ถึง $R$ และเพิ่มพจน์ $z_k\varepsilon_k$ ใหม่เพื่อแทนค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณ จะได้

$$\hat{z} = f^a(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n) + z_k\varepsilon_k$$

$$= z_0 + z_1\varepsilon_1 + \ldots + z_n\varepsilon_n + z_k\varepsilon_k$$

โดยที่พจน์ $z_k\varepsilon_k$ แทนค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณ

$$e^*(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, .. \varepsilon_n) - f^a(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n)$$

$\varepsilon_k$ จะเป็นสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่ที่แตกต่างจากสัญกรณ์รบกวนตัวอื่นๆ และ $z_k$ จะเป็นขอบเขตบนของ

$$|z| \geq max\ \{|e^*(\varepsilon_1, .. \varepsilon_n)| :\ \varepsilon_1, .. \varepsilon_n \in U^n\}.$$

จากการประมาณข้างต้น พจน์ใหม่ $z_k \varepsilon_k$ ที่ถูกเพิ่มเข้าไปนั้นเป็นการสูญเสียความสัมพันธ์ โดย $\varepsilon_k$ จะถูกพิจารณาเป็นอิสระต่อ $\varepsilon_1, .. \varepsilon_n$ ซึ่งที่จริงแล้ว $\varepsilon_k$ เป็นฟังก์ชันของ $\varepsilon_1, .. \varepsilon_n$ ดังนั้น ในระหว่างการคำนวณจริงๆ หากมีการใช้ผลลัพธ์ $\hat{z}$ เพื่อคำนวณต่อ จะไม่มีการระวังถึงข้อจำกัดในเรื่องความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร่ $\varepsilon_k$ และ $\varepsilon_1, .. \varepsilon_n$ อีกต่อไป ซึ่งให้ผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่มีความแม่นยำน้อยลงกว่าที่ต้องการได้

## 2.7 ทฤษฎีการประมาณของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass approximation theorem)

ถ้ามีฟังก์ชัน $f$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันนิยามบนจำนวนจริงและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $a, b \in R$ และ $a \leq b$ และสำหรับทุกค่า $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีพหุนาม $P$ บนช่วงปิด $[a, b]$ ที่ทำให้

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุกๆ ค่า $x$ ในช่วงปิด $[a, b]$

## 2.8 การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค (univariate Chebyshev affine approximation)

การประมาณค่าเพื่อทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มีค่าน้อยที่สุดเป็นจุดประสงค์หนึ่งของทฤษฎีการประมาณของชิบีเชฟ (Chebyshev) ซึ่ง สโตล์ฟี่ [3] ได้เสนอวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันตัวแปรเดียวโดยมีทฤษฎีการประมาณค่า 2 ทฤษฎีบทดังนี้

**ทฤษฎีบทที่ 2.1** *ถ้าฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนจำนวนจริงและมีขอบเขตและต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a\ , b]$ และ $h$ เป็นฟังก์ชันสัมพรรคที่ประมาณฟังก์ชัน $f$ ได้ดีที่สุดในช่วงปิด $I$ ภายใต้เงื่อนไขมินิแมกซ์ (minimax) แล้ว จะมีจุดที่แตกต่างกันกัน 3 จุดคือ $u, v$ และ $w$ ที่ค่าความ*

*คลาดเคลื่อน* ($f(x) - h(x)$) *มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดภายในช่วงปิด I และเครื่องหมายของค่าความคลาดเคลื่อนเปลี่ยนเมื่อพิจารณาทั้ง 3 จุดเรียงจากน้อยไปมาก*

**ทฤษฎีบทที่ 2.2** *ถ้าฟังก์ชัน* $f$ *เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่สองได้บนช่วงปิด* $I = [a , b]$ *โดยที่ค่าของอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน* $f$ *ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายบนช่วงปิด I แล้ว* $f^{a}(x) = \alpha\, x + \zeta$ *จะเป็นฟังก์ชันสัมพรรคที่ให้ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่เป็นไปได้น้อยที่สุดบนช่วงปิด I โดยที่*

*สัมประสิทธิ์* $\alpha$ *คำนวณได้จาก*

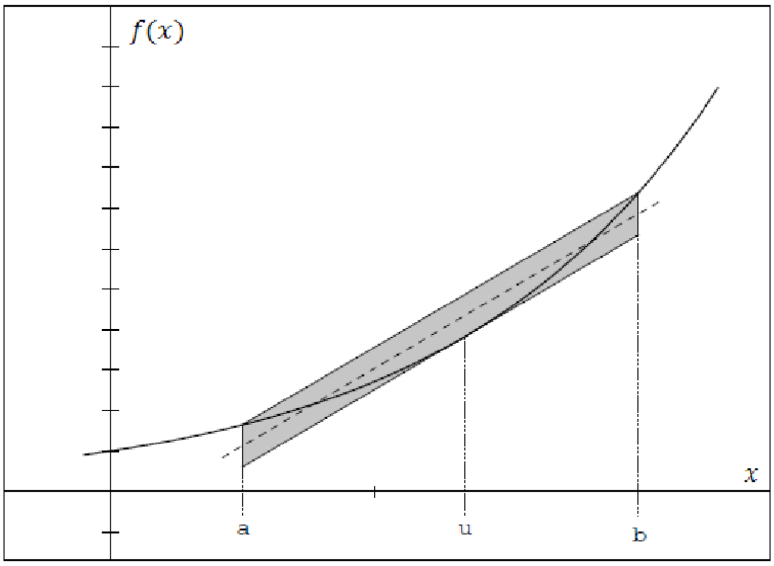
$$\alpha = (f(b) - f(a))/(b - a)$$

*ซึ่งเป็นความชันของเส้นตรง* $r(x)$ *ที่ได้จากการสร้างเส้นตรงจากจุด* $(a, f(a))$ *และ* $(b, f(b))$

*ค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์สูงสุดในช่วงปิด I จะมีเครื่องหมายเหมือนกันบนจุดขอบของช่วง* $a$ *และ* $b$ *และเปลี่ยนเครื่องหมายที่จุด* $u$ *โดยที่* $f'(u) = \alpha$

*พจน์อิสระ* $\zeta$ *สามารถคำนวณได้จากสมบัติ*

$$h(u) = (f(u) + r(u))/2$$




**รูปที่ 2 ตัวอย่าง การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค**

$$\zeta = \frac{f(u) + r(u)}{2} - \alpha u$$

*และค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์มากที่สุดบนช่วงปิด $I$ สามารถคำนวณได้จาก*

$$\delta = |f(u) - r(u)|/2$$

จากรูปที่ 2 ตัวอย่าง การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค รูปสัมพรรคที่ได้จากการประมาณฟังก์ชันบนช่วง $[a, b]$ จะแทนจำนวนในบริเวณพื้นที่แรเงาดังภาพ โดยฟังก์ชัน $f^a(x) = \alpha x + \zeta$ จะเป็นสมการเส้นตรงที่แทนด้วยเส้นประ และ $\delta$ หรือความคลาดเคลื่อนจากการประมาณจะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของด้านกว้างของสี่เหลี่ยมด้านขนาน หรือระยะห่างระหว่างขอบบนหรือล่างของด้านยาวของสี่เหลี่ยมด้านขนานกับเส้นประนั่นเอง

จากทฤษฎีบทที่สโตร์ฟีได้เสนอมานั้นสามารถนำไปประมาณค่าฟังก์ชันตัวแปรเดียวได้หลายฟังก์ชัน เช่น $\sqrt{x}, e^x$และ $\frac{1}{x}$เป็นต้น

จากการศึกษาวิธีการประมาณค่าฟังก์ชันตัวแปรเดียว ผู้ทำวิจัยจึงมีความสนใจในการนำเอาทฤษฎีที่กล่าวมานี้ไปประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x) = x^n$

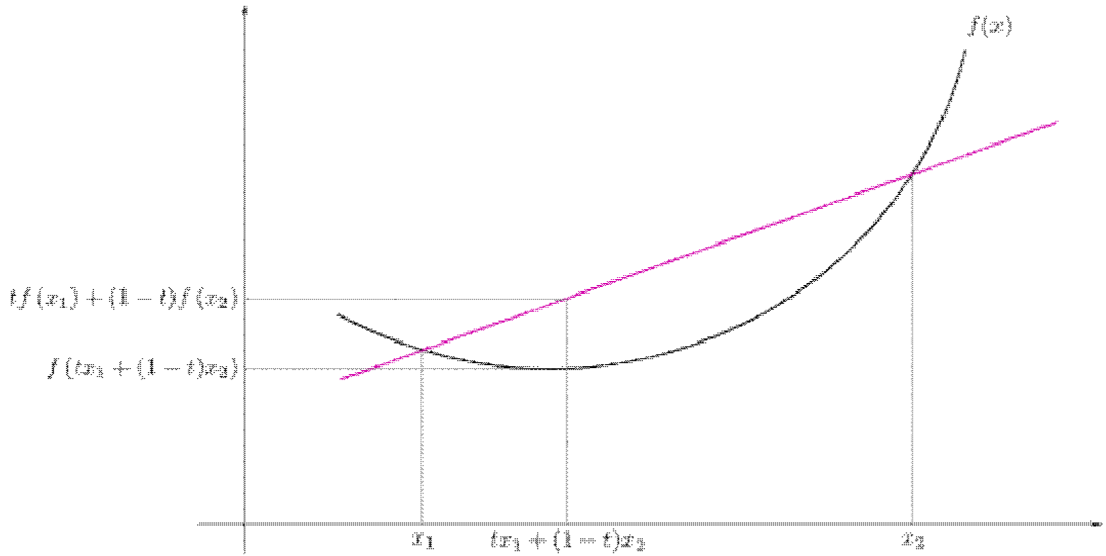
## 2.9 ฟังก์ชันนูน (convex function)

กำหนดให้ $I$ เป็นช่วงเปิดช่วงหนึ่งของ $R$ เราเรียกฟังก์ชัน $f: I \rightarrow R$ ว่าเป็นฟังก์ชันนูนในช่วง $I$ นั้น ถ้าสำหรับทุก $x, y \in I$ ฟังก์ชัน $f$ สอดคล้องกับอสมการ

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

ถ้า $-f$ เป็นฟังก์ชันนูน แล้วเรียก $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันเว้า (concave function)

ดังรูปที่ 3 เมื่อเราพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของฟังก์ชันนูน จะได้ว่าจุดกึ่งกลางของคอร์ดของเส้นโค้ง $y = f(x)$ อยู่เหนือ หรืออยู่บนเส้นโค้ง ดังนิยามไว้ใน [5]




**รูปที่ 3 ตัวอย่างฟังก์ชันนูน**

## 2.10 ทฤษฎีการแกว่งอย่างสมมาตรของชิบีเชฟ (Chebyshev equioscillation theorem)

สำหรับทุกๆ ฟังก์ชัน $f$ ที่ต่อเนื่องภายในช่วงปิด $[a, b]$ พหุนามการประมาณที่เป็น ค่าคลาดเคลื่อนมากที่สุดที่เกิดขึ้นภายในช่วงมีค่าน้อยที่สุดในปริภูมิของพหุนามกำลัง $n$ มีอยู่และมี

ลักษณะเฉพาะคือ คุณสมบัติการแกว่งหรือสันอย่างสมมาตร คือ จะมีจำนวนจุดอย่างน้อย $n+2$ จุดที่ทำให้ค่าคลาดเคลื่อนที่คำนวณจาก $f(x)-p(x)$ มีค่าเท่ากับค่าสูงสุดสัมบูรณ์โดยสลับเครื่องหมาย [6]

## 2.11 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการคำนวณทั่วๆ ไปบนเครื่องคอมพิวเตอร์จำนวนจริงซึ่งมีขนาดเป็นอนันต์ถูกแทนอยู่ในรูปของสิ่งที่มีจำนวนจำกัด กล่าวคือ ระบบเลขคณิตจุดลอยตัวซึ่งลักษณะการแทนที่ก่อให้เกิดค่าที่มากเกินเก็บและความคาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Overflow and Round-off Error, ORE) [7] ตัวอย่างหนึ่งที่ได้รับผลกระทบจากค่าความคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษคือ การทำงานผิดพลาดของจรวดสกัดขีปนาวุธแพทริออต (The Patriot Missile Failure) เมื่อปีค.ศ.1991 ที่ประเทศซาอุดิอาราเบีย จรวดขัดขวางขีปนาวุธทำงานผิดพลาด หลังจากที่ถูกยิงออกไปเพื่อสกัดขีปนาวุธที่ยิ่งโดยประเทศอิรัก ทำให้มีทหารตาย 28 คน และผู้คนบาดเจ็บราว 100 คน โดยความผิดพลาดเกิดจากการแทนตัวเลขด้วยจำนวนจำกัดที่มีความละเอียดน้อยเกินไป

ระบบเลขคณิตแบบช่วง (interval arithmetic) [2] ถูกเสนอขึ้นครั้งแรกโดย มัวร์ เมื่อปี ค.ศ.1966 เพื่อเป็นเครื่องมือในการวัดผลความคลาดเคลื่อนจากขั้นตอนการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์ โดยแทนการคำนวณตัวแปรเดียว ด้วยตัวแปรสองตัวเพื่อแสดงถึงช่วงจำนวน โดยการดำเนินการพื้นฐาน (บวก, ลบ, คูณ, หาร) ของตัวเลขจำนวนจริงถูกนำไปปรับใช้กับการคำนวณบนระบบเลขคณิตแบบช่วง มีงานวิจัยที่ทำการลดพื้นที่ของการแทนจำนวนด้วยค่ามากสุดและน้อยสุด และเวลาในการดำเนินการพื้นฐาน โดยการใช้แนวคิดของระบบจำนวนซ้ำซ้อน ซึ่งเรียกว่า ระบบแทนช่วงจำนวนแบบยืดหยุ่น (flexible interval representation system) [8] ซึ่งแทนช่วงจำนวนด้วยสายอักขระของตัวเลขเพียงสายเดียว

งานวิจัยหนึ่งที่นำแนวคิดของระบบเลขคณิตแบบช่วงไปใช้คือการพัฒนาระบบจำนวนอนาล็อค [9],[10] ซึ่งระบบจำนวนอนาล็อคนั้นมีข้อดีคือความเร็วในการดำเนินการพื้นฐานเป็นค่าคงที่ไม่ขึ้นกับขนาดของข้อมูล แต่ปัญหาของระบบจำนวนอนาล็อคคือการเกิดความคลาดเคลื่อนจากกระแสแทรกซ้อนในวงจร จึงมีการวิจัยในการพัฒนารระบบจำนวนอนาล็อคแบบช่วง [11] เพื่อเพิ่มความแม่นยำที่ระบบรองรับความคลาดเคลื่อนได้มากขึ้น

ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปร (dependency problem) ในระบบเลขคณิตแบบช่วงเป็นที่รู้จักกันดี กล่าวคือระบบเลขคณิตแบบช่วงจะพิจารณตัวแปรแต่ละตัวเป็นตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกันเสมอ หากเกิดการคำนวณเช่นการคูณตัวแปรเดียวกัน ระบบเลขคณิตแบบช่วงจะพิจารณาว่าเป็นการคูณของตัวแปรคนละตัวกัน ซึ่งส่งผลให้ช่วงผลลัพธ์จากการคูณขยายกว้างขึ้น เช่น การคูณของตัวแปรเดียวกันที่ตัวแปรแทนช่วงปิดที่อยู่ระหว่างค่าศูนย์ หากพิจารณาเป็นตัวแปรตัวเดียวกันช่วงผลลัพธ์จะต้องได้ค่าบวกและศูนย์เท่านั้น แต่หากพิจารณาเป็นตัวแปรคนละตัวกันจะได้ผลลัพธ์ทั้งบวกและลบซึ่งกว้างกว่า การขยายกว้างของช่วงที่มากกว่าช่วงจริงนี้ เรียกว่า การขยายกว้างเกินจริงของค่าความคลาดเคลื่อน (error explosion)

ระบบเลขคณิตสัมพรรค (affine arithmetic) [3] ถูกคิดค้นขึ้น เพื่อแก้ปัญหาความสัมพันธ์ตัวแปรบนระบบเลขคณิตแบบช่วงโดยใช้ รูปสัมพรรค (affine form) ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนามกำลังหนึ่ง เพื่อแทนช่วงจำนวน และได้ใช้สัญกรณ์รบกวนเพื่อแสดงถึงความสัมพันธ์ของช่วงความคลาดเคลื่อนภายในตัวแปรหนึ่ง นอกจากนี้ยังมีตัวแบบที่คล้ายกับระบบเลขคณิตสัมพรรคคือ ระบบเลขคณิตแบบช่วงอย่างง่าย (generalized interval arithmetic) ก็ถูกเสนอขึ้นเพื่อแก้ปัญหาความสัมพันธ์ของตัวแปรด้วยเช่นกัน

ระบบเลขคณิตสัมพรรคเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่ใช้รูปสัมพรรคเพื่อแทนช่วงจำนวน ทำให้เกิดขั้นตอนการคำนวณที่มีและไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคขึ้น สำหรับขั้นตอนที่ได้ผลลัพธ์เป็นรูปสัมพรรคจะไม่เกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณ แต่ขั้นตอนที่ได้ผลลัพธ์ที่ไม่อยู่ในรูปสัมพรรคจะต้องทำการประมาณฟังก์ชันการคำนวณให้ได้ผลลัพธ์อยู่ในรูปสัมพรรคโดยการประมาณฟังก์ชันนี้จะก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณ

แนวทางหนึ่งในงานวิจัยในส่วนของระบบเลขคณิตสัมพรรคคือ การพัฒนาวิธีการคำนวณรูปสัมพรรคเพื่อหาช่วงคำตอบที่แคบที่สุดสำหรับขั้นตอนการคำนวณที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคโดยขั้นตอนพื้นฐานที่ไม่มีคุณสมบัตินี้คือ การคูณ และการหาร ได้มีผู้วิจัยพัฒนาวิธีการคำนวณสำหรับตัวดำเนินการพื้นฐานเพื่อหาค่าที่แคบสุด การดำเนินการสามารถแบ่งตามจำนวนตัวแปรของฟังก์ชันนั้น เช่น ตัวแปรเดียว หรือ สองตัวแปร จากงานวิจัย [12] และ [13] โดยชินยะ มิยาจิมา งานวิจัยของเขาได้คิดค้นวิธีการคูณและหารที่สามารถคำนวณหาช่วงผลลัพธ์ที่แคบที่สุดบนรูปสัมพรรคได้ แต่การได้มาซึ่งคำตอบที่ดีที่สุดย่อมต้องแลกกับเวลาในการคำนวณที่มากด้วย

เช่นกัน จึงทำให้มีผู้คิดค้นวิธีการในการดำเนินการคูณ โดยวิธีการที่เสนอมานี้สามารถปรับเปลี่ยนความละเอียดของผลลัพธ์เพื่อแลกกลับเวลาในการคำนวณได้ [14]

นอกจากการพัฒนาโดยมุ่งเน้นในเรื่องความแม่นยำแล้วระบบเลขคณิตสัมพรรคถูกนำไปใช้กับงานวิจัยในสาขาอื่นอีกมาก โดยดั้งเดิมแล้วระบบเลขคณิตสัมพรรคถูกนำไปประยุกต์ใช้กับงานในด้านของคอมพิวเตอร์กราฟฟิกส์ [16] และการคำนวณของการตัดกันของพื้นผิว [17] และมากไปกว่านั้นระบบเลขคณิตสัมพรรคถูกนำไปใช้ในการหาค่ามากสุดต่ำสุดของฟังก์ชันด้วยอัลกอลิทึมการขยายและจำกัดเขต (branch and bound) [17]โดยการนำไปใช้จะอยู่ในรูปของพหุนาม $P(x)$ และล่าสุดถูกนำไปใช่ในงานโดเมนนามธรรมเชิงตัวเลข (numerical abstract domain) ซึ่งใช้รูปสัมพรรค [18] ในการแทนช่วงจำนวนและเก็บความสัมพันธ์ของตัวแปรในการวิเคราะห์สถิต (static analysis)

จะเห็นได้ว่าเลขคณิตสัมพรรคถูกนำไปใช้โดยเขียนในรูปพหุนาม กระบวนการคำนวณค่าในรูปของพหุนามนอกเหนือจากการคำนวณหาค่ายกกำลังแล้ว การคูณรูปสัมพรรคด้วยค่าคงที่และการบวกพื้นฐาน เป็นขั้นตอนการคำนวณที่ไม่เกิดความคลาดเคลื่อนของช่วง หากการคำนวณค่ายกกำลังได้ผลลัพธ์ที่มีค่าที่แคบลง การคำนวณค่ารวมทั้งพหุนามย่อมได้ค่าที่แคบลงด้วยเช่นกัน การประมาณค่าฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนระบบเลขคณิตสัมพรรคด้วยทฤษฎีบทเดิมไม่เพียงพอสำหรับการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวในทุกๆ ฟังก์ชัน

# บทที่ 3

# การประมาณค่าฟังก์ชันตัวแปรเดียวและกรณียกเว้นจากทฤษฎีบทที่มีอยู่

ในบทนี้จะอธิบายการใช้ทฤษฎีบทการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคด้วยฟังก์ชันสัมพรรคเพื่อให้ได้ผลลัพธ์เป็นช่วงที่แคบที่สุดในรูปสัมพรรคที่ครอบคลุมคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยจะอธิบายโดยใช้รูปทั่วไปของฟังก์ชันเพื่อความครอบคลุม

## 3.1 การประมาณฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ในหัวข้อนี้จะแสดงการนำทฤษฎีบทในหัวข้อ 2.8 การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค (univariate Chebyshev affine approximation) ไปใช้ ซึ่งสามารถอธิบายการประมาณค่าฟังก์ชันต่อเนื่อง $f$ ได้ดังนี้

$$f(\hat{x}) = f(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n)$$

โดยที่ $x_i \in R$ และ $\varepsilon_i \in [-1,1]$ และ $0 \leq i \leq n$ และ $i \in I$

ต่อไปจะต้องเลือกการประมาณแบบสัมพรรค หรือการประมาณฟังก์ชันด้วยเส้นตรงสำหรับฟังก์ชันที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคนั้นๆ

$$\alpha\hat{x} + \zeta = \alpha(x_0 + x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) + \zeta$$

กำหนดให้ฟังก์ชันนิยามบนจำนวนจริง $f$ เป็นฟังก์ชันเว้าหรือฟังก์ชันนูน ซึ่งมีสมบัติของฟังก์ชัน กล่าวคือ ทุกค่า $x$ ใดๆ ภายในช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่าค่าอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน $f$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $0$ หรือ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $0$ เท่านั้น

$$(\forall x \in [a, b] \rightarrow f''(x) \geq 0) \vee (\forall x \in [a, b] \rightarrow f''(x) \leq 0) \quad (2)$$

ซึ่งเราสามารถใช้ทฤษฎีบทที่ 2.8 การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค (univariate Chebyshev affine approximation)ได้โดยค่า $\alpha$ ซึ่งก็คือความชันของเส้นตรงที่ตัดผ่านจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ เป็นดังนี้

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

จุด $u$ ซึ่งกราฟของฟังก์ชัน $f$ มีค่าความชัน $\alpha$ ซึ่งได้จากความสัมพันธ์

$$f'(u) = \alpha$$

ค่าคงที่ของฟังก์ชันเส้นตรง $\zeta$ ได้จาก

$$\zeta = \frac{f(u) + r(u)}{2} - \alpha u$$

และค่าคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุด $\delta$ จากการประมาณ $f$ ด้วยฟังก์ชันเส้นตรงภายในช่วงปิด $[a, b]$

$$\delta = \frac{|f(u) - r(u)|}{2}$$

โดยผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่แคบที่สุดจะอยู่ในรูป $\hat{z}$

$$\hat{z} = \alpha\hat{x} + \zeta + \delta\varepsilon_k$$

โดยที่ $\varepsilon_k$ เป็นสัญกรณ์รบกวนตัวใหม่ที่ควบคุมความไม่แน่นอนของพจน์ค่าความคลาดเคลื่อน

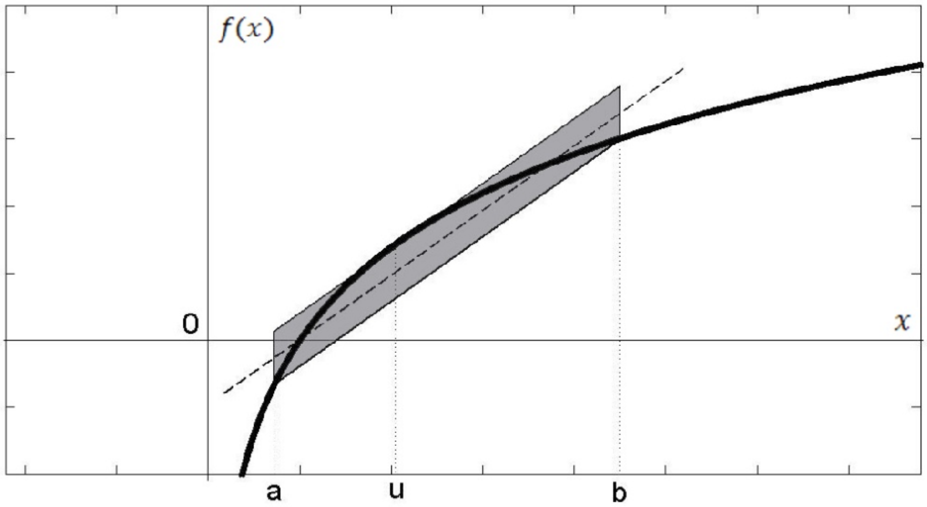
ดังรูปที่ 4 หากเราต้องการประมาณค่าฟังก์ชัน $log\ (x)$ ภายในช่วงปิด $[a, b]$ ที่ $a > 0$ แล้วโดยการแทน $f(x) = log\ (x)$ จะได้ว่า

$$\alpha = \frac{log(b/a)}{b - a}$$

$$1/_{u} = \alpha$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left[\log(b-a) - \log\log(\frac{b}{a}) + \frac{\log\,(\frac{a^b}{b^a})}{b-a} - 1\right]$$

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\log(b-a) - \log\log\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\log\left(\frac{a^b}{b^a}\right)}{b-a} - 1\right]$$




**รูปที่ 4 การประมาณค่าฟังก์ชันลอกกาลิทึม**

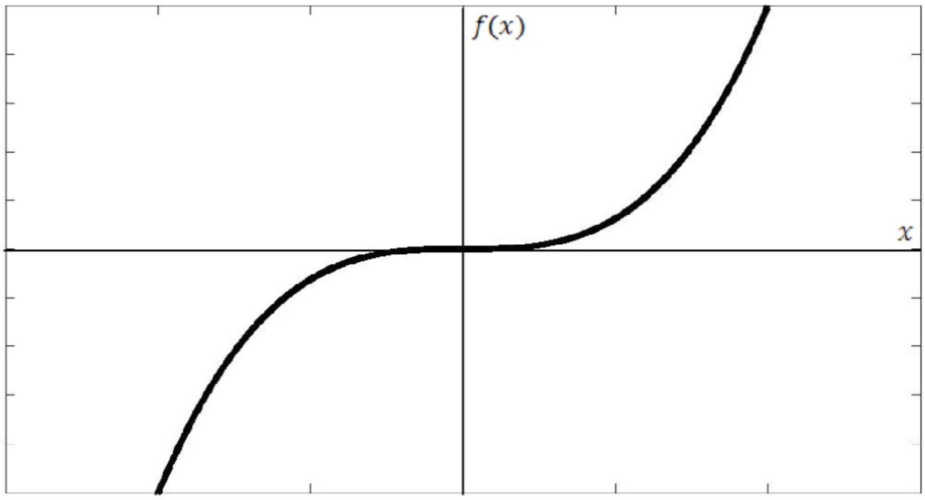
ซึ่งสามารถคำนวณค่าในรูปสัมพรรคออกมาได้ถ้าหาก $(2)$ เป็นจริง

## 3.2 ฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร (Signed-symmetric function)

จากการศึกษาของผู้วิจัยพบว่ามีฟังก์ชันบางกลุ่มที่มีกรณีที่ประพจน์ $(2)$ ไม่เป็นจริงทุกๆ ค่า $x$ ภายในช่วงปิด $[a, b]$ กล่าวคือ ค่าอนุพันธ์อันดับสองมีการเปลี่ยนเครื่องหมายเกิดขึ้น ตัวอย่างที่สำคัญหนึ่งคือ ฟังก์ชันยกกำลังโดยที่เลขยกกำลังเป็นเลขคี่ (ดังแสดงในรูปที่ 5) หากเราพิจารณาฟังก์ชันยกกำลังคี่ $f(x) = x^{2k+1}$ โดยที่ $k \in I$ เราจะได้อนุพันธ์อันดับสองของ $f$ เป็น

$$f''(x) = (2k+1)(2k)\, x^{2k-1}$$

ซึ่งยังคงเป็นฟังก์ชันยกกำลังคี่เช่นเดิม แต่เลขชี้กำลังลดลงและมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวก หากเราพิจารณาช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $0 \in [a, b]$ แล้วจะทำให้เมื่อเราแทนค่า $f''(a)$ เราจะได้ค่าลบ และแทนค่า $f''(b)$ เราจะได้ค่าบวก ซึ่งไม่สอดคล้องกับกรณีที่ประพจน์ $(2)$ สมมุติให้เป็นจริงโดยเราสามารถให้คำจำกัดความของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรได้ดังนี้



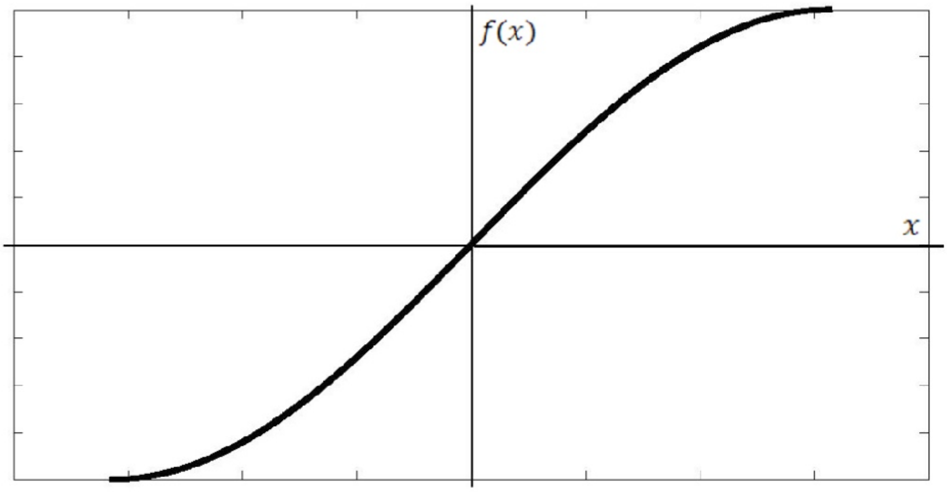

**รูปที่ 5 กราฟฟังก์ชันเลขยกกำลังคี่**

**คำจำกัดความ** ฟังก์ชันตัวแปรเดียวจะเป็นฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรก็ต่อเมื่อภายในโดเมนของฟังก์ชันนั้นจะมีจุดสมมาตร $c$ ที่ทำให้ค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจากจุด $c$ ไปในทิศทางซ้ายและขวามีขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายแตกต่างกันดั่งสมการเชิงฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$f(c - x) = -f(c + x), c \in R$$

จากการศึกษาของผู้วิจัยพบว่ากลุ่มของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรนี้ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทในหัวข้อ 2.8 การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค (**univariate** Chebyshev affine approximation) เพื่อสร้างฟังก์ชันสัมพรรคที่ให้ผลลัพธ์ที่แคบที่สุดได้ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจในการสร้างฟังก์ชันการประมาณสัมพรรคที่ให้ผลลัพธ์ที่แคบที่สุดนี้สำหรับกลุ่มของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร

นอกจากฟังก์ชันยกกำลังโดยที่เลขยกกำลังเป็นเลขคี่แล้วยังมีฟังก์ชันที่ไม่มีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรคที่จัดอยู่ในกลุ่มของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรอีกคือ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น ฟังก์ชันไซน์ (Sine) ฟังก์ชันโคไซน์ (Cosine) ดังรูปที่ 6




**รูปที่ 6 กราฟฟังก์ชันไซน์**

ซึ่งถ้าหากว่าเราสามารถสร้างฟังก์ชันการประมาณสัมพรรคสำหรับกลุ่มของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรนี้ได้เราจะสามารถคำนวณรูปสัมพรรคจากฟังก์ชันตรีโกณมิติได้อีกด้วย

# บทที่ 4

# การสร้างทฤษฎีบทในการประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค

ในบทนี้เรากล่าวถึงการสร้างทฤษฎีบทใหม่เพื่อช่วยในการสร้างเส้นตรงการประมาณที่ดีที่สุดภายในช่วงปิดสำหรับฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียว และรวมไปถึงกรณียกเว้นของทฤษฎีบทในหัวข้อ 2.8 การประมาณค่าของฟังก์ชันตัวแปรเดียวบนเลขคณิตสัมพรรค (univariate Chebyshev affine approximation) ฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร

## 4.1 จุดวิกฤต (critical point)

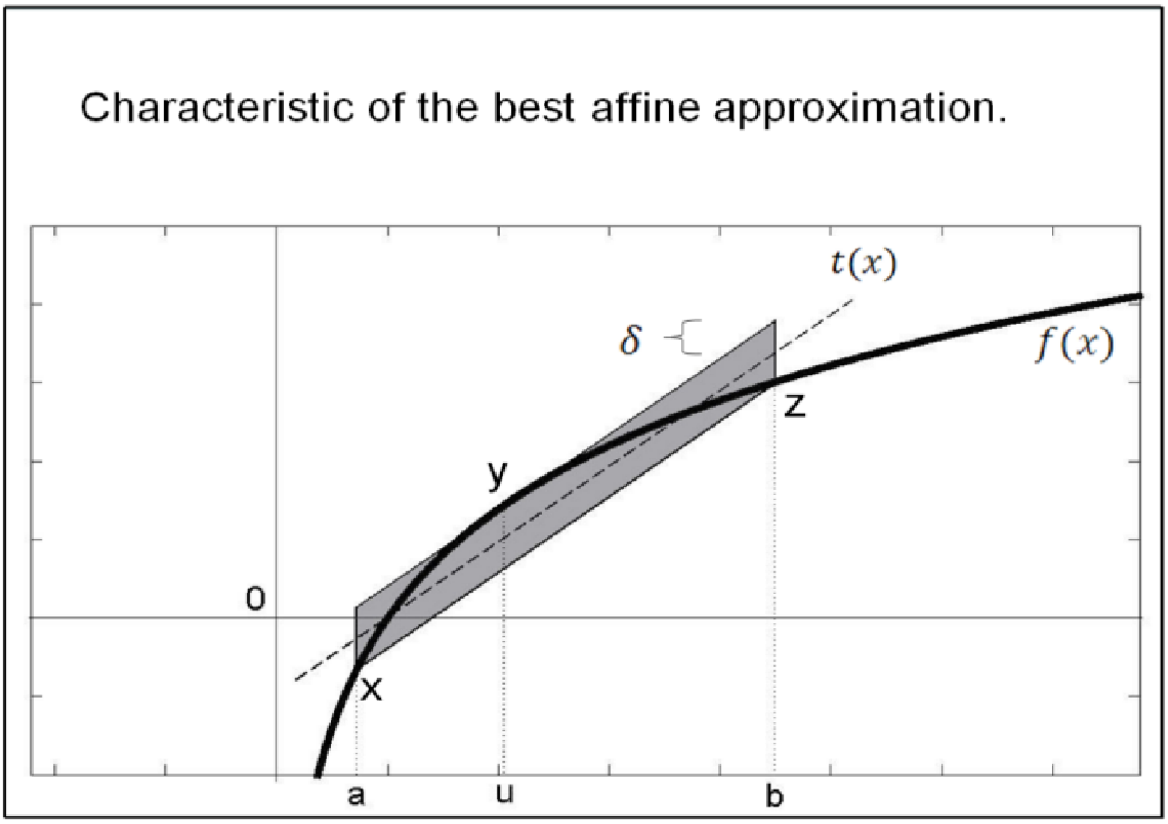
จากทฤษฎีบทในหัวข้อ 2.10 ทฤษฎีการแกว่งอย่างสมมาตรของชิบีเชฟ (Chebyshev equioscillation theorem) กล่าวถึงลักษณะเฉพาะของกราฟของพหุนามในการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงต่อเนื่องที่ดีที่สุดในช่วงปิดที่กำหนด ในที่นี้เราสนใจเฉพาะในกรณีที่ดีกรีของพหุนามเป็น 1 หรือฟังก์ชันเส้นตรง เนื่องจากการดำเนินการเชิงเส้นมีสมบัติปิดบนรูปสัมพรรค

ลักษณะของเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงที่ดีที่สุดในช่วงปิดที่กำหนดจะมีจุด 3 จุดที่แตกต่างกันภายในช่วงปิดนั้นที่ผลต่างระหว่างค่าของฟังก์ชันที่ต้องการประมาณและฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณมีค่าสูงสุดเมื่อเทียบกับจุดอื่นๆ บนช่วงปิดนั้นและมีเครื่องหมายแตกต่างกัน (+,-,+ หรือ -,+,-) เมื่อพิจารณาจุด 3 จุดตามลำดับดังรูปที่ 7

**นิยามที่ 4.1** จุดวิกฤต *คือ จุดที่มีผลต่างระหว่างค่าของฟังก์ชันที่ต้องการประมาณ* $f^*$ *และฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณ* $f^a$ *มีค่าสูงที่สุดเมื่อเทียบกับจุดอื่นๆ ภายในช่วงปิด* $[a,b]$ *และสลับเครื่องหมายเมื่อพิจารณาจุดสามจุดตามลำดับ และกำหนดให้* crit *เป็นฟังก์ชันเพื่อหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันการประมาณภายในช่วงปิด* $[a,b]$

$$crit(f,g,[a,b]) = (x_0, x_1, x_2)$$

โดยที่ $x_0 < x_1 < x_2$




**รูปที่ 7 จุดวิกฤต $x, y, z$ ของการประมาณฟังก์ชัน $f$ ด้วยฟังก์ชันเส้นตรง $t$**

## 4.2 ทฤษฎีในการสร้างเส้นตรงการประมาณที่ดีที่สุดจากฟังก์ชันจำนวนจริงและจุดวิกฤต

**ทฤษฎีบทที่ 4.1** ถ้าฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนจำนวนจริงและต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $p$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$ ได้ดีที่สุดภายใต้เงื่อนไขมินิแมกซ์ และให้จุด $x_0, x_1$ และ $x_2$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณ $p$ แล้ว $p(x) = \alpha x + \zeta$ โดยมีค่าคลาดเคลื่อนเป็น $\delta$ โดยที่

$$\alpha = [f(x_0) - f(x_2)]/[x_0 - x_2]$$
$$r(x) = \alpha x + d\ , d \in R$$
$$d = [x_0 f(x_2) - x_2 f(x_0)]/[x_0 - x_2]$$
$$\zeta = [f(x_1) + r(x_1)]/2 - \alpha x_1$$
$$\delta = |f(x_1) - r(x_1)|/2$$

**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ใช้การพิสูจน์ตรง โดยเริ่มจากคุณสมบัติของจุดวิกฤตดังต่อไปนี้

$$p(x_0) - f(x_0) = f(x_1) - p(x_1) = p(x_2) - f(x_2) \qquad (3)$$

จาก $(3)$ เราได้

$$p(x_0) - f(x_0) = p(x_2) - f(x_2)$$

$$p(x_0) - p(x_2) = f(x_0) - f(x_2) \tag{4}$$

เนื่องจาก $p$ อยู่ในรูปพหุนามกำลังหนึ่งดังนั้นจะอยู่ในรูป $p(x) = mx + c$ โดยที่ $c \in R$ ดังนั้นจาก $(4)$ เราได้

$$m(x_0 - x_2) = f(x_0) - f(x_2)$$

$$m = [f(x_0) - f(x_2)]/[x_0 - x_2] = \alpha$$

จาก $(3)$ เราได้

$$p(x_0) - f(x_0) = f(x_1) - p(x_1)$$

$$p(x_0) + p(x_1) = f(x_0) + f(x_1)$$

$$\alpha(x_0 + x_1) + 2c = f(x_0) + f(x_1)$$

จัดให้อยู่ในรูปของค่าคงที่ $c$

$$c = \frac{1}{2}\{f(x_1) - \alpha x_1 - \alpha x_0 + f(x_0)\}$$

$$c = \frac{1}{2}\left\{f(x_1) + \alpha x_1 - (x_0)\frac{[f(x_0) - f(x_2)]}{[x_0 - x_2]} + f(x_0)\right\} - \alpha x_1$$

$$c = [f(x_1) + r(x_1)]/2 - \alpha x_1 = \zeta$$

ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดจากการประมาณที่จุด $x_1$ คือ

$$|p(x_1) - f(x_1)| = |\alpha x_1 + \zeta - f(x_1)|$$

$$= |\alpha x_1 + [f(x_1) + r(x_1)]/2 - \alpha x_1 - f(x_1)|$$

$$= |[-f(x_1) + r(x_1)]/2| = \delta \qquad \blacksquare$$

### 4.3 ทฤษฎีในการหาจุดวิกฤตจากคุณสมบัติของฟังก์ชันจำนวนจริงที่ต้องการประมาณ

**ทฤษฎีบทที่ 4.2** ถ้าฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนจำนวนจริงและต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ ฟังก์ชัน $g$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$ และค่าของอนุพันธ์อันดับสองของ $f$ ในช่วงปิด $[a, b]$ ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย แล้ว จุด $a, u$ และ $b$ จะเป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณ $g$ โดยที่

$$f'(u) = [f(a) - f(b)]/[a - b]$$

**บทพิสูจน์** ด้วยคุณสมบัติของฟังก์ชันนูนที่ว่า

ถ้าฟังก์ชัน $f$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับสองภายในช่วงปิด $[a, b]$ ได้แล้ว ฟังก์ชัน $f$ จะเป็นฟังก์ชันนูน ก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์อันดับสองของ $f$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์สำหรับทุกค่า $x$ ภายในช่วงปิด $[a, b]$

หรือในเชิงกลับกันถ้าหากอนุพันธ์อันดับสองของ $f$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์สำหรับทุกค่า $x$ ภายในช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จะเป็นกรณีที่ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันเว้าแทนได้เช่นกัน

ด้วยคุณสมบัติของฟังก์ชันนูนนี้ทำให้เราสามารถได้ว่าจุด $a$ และ $b$ จะเป็นจุดแรกและสุดสุดท้ายของจุดวิกฤตทั้งสามจุด

ส่วนสำหรับจุด $u$ นั้น เราสามารถบอกถึงการมีอยู่ของจุด $u$ ได้ด้วยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Value theorem) โดยที่จุด $u$ สามารถคำนวณหาค่าได้จากคุณสมบัติ

$$f'(u) = [f(a) - f(b)]/[a - b]$$

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันนูน หรือฟังก์ชันเว้า จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) \geq r(x) \vee f(x) \leq r(x), \forall x \in [a, b]$$

ให้ $r$ เป็นเส้นตรงที่เกิดจากจุด $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$

$$r(x) = mx + d, d \in R$$

$$m = f'(u)$$

$$d = [af(b) - bf(a)]/(a - b)$$

ให้ $h$ เป็นเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$

$$h(x) = mx + \zeta, \quad \zeta \in R$$

เราสามารถคำนวณพจน์ $\zeta$ ได้จากครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่าง $f$ และ $r$ ที่จุด $u$

$$\zeta = \frac{f(u)+r(u)}{2} - mu \tag{5}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{f(a) - f(b)}{(a - b)}(a - b) + \zeta - \zeta$$

$$= [m(a) + \zeta] - [m(b) + \zeta]$$

$$= h(a) - h(b)$$

$$f(a) - h(a) = f(b) - h(b) \tag{6}$$

$$f(a) + f(u) = \frac{a-b}{a-b} f(a) + f(u)$$

$$= \frac{af(a)-bf(a)+[af(b)-af(b)]}{a-b} + f(u)$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{(a-b)} a + f(u) + [af(b) - bf(a)]/(a - b)$$

$$= ma + f(u) + d$$

$$= m(u + a) + f(u) + ru - 2mu$$

จาก $(5)$

$$= (m(u + a) + 2\zeta)$$

$$= [m(u) + \zeta] + [m(a) + \zeta]$$

$$= h(u) + h(a)$$

$$f(a) - h(a) = h(u) - f(u) \tag{7}$$

จาก (6) และ (7) จะได้

$$f(a) - h(a) = h(u) - f(u) = f(b) - h(b)$$

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าจุด $a, u$ และ $b$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณ $g$ ■

## 4.4 ทฤษฎีในการหาจุดวิกฤตจากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร

**ทฤษฎีบทที่ 4.3** ถ้าฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร $f$ โดยที่มีจุดสมมาตรที่จุด $c$ ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์อันดับสองภายในช่วงปิด $[a, b]$ ได้และ $a < c < b$ และ ฟังก์ชัน $g$ เป็นฟังก์ชันเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$ ได้ดีที่สุดภายในช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จุดวิกฤตของฟังก์ชัน $g$ เป็นไปตามสมการดังนี้

$$crit(f, g, [a, b]) = \begin{cases} symCrit_{-}(f, g, [a, b]), if |a - c| \geq |b - c| \\ symCrit_{+}(f, g, [a, b]), if |a - c| < |b - c| \end{cases}$$

โดยที่

$$symCrit_{-}(f, g, [a, b]) = \begin{cases} (a, u_{-}, u_{+}) & , if\ a < u_{-} < u_{+} < b \\ (a, u_{-}, b) & , if\ a < u_{-} < b < u_{+} \end{cases}$$

โดยที่ $f'(u_{+}) = [f(a) - f(u_{+})]/[a - u_{+}] = f'(u_{-})$

$$symCrit_{+}(f, g, [a, b]) = \begin{cases} (u_{-}, u_{+}, b) & , if\ a < u_{-} < u_{+} < b \\ (a, u_{+}, b) & , if\ u_{-} < a < u_{+} < b \end{cases}$$

โดยที่ $f'(u_{-}) = [f(u_{-}) - f(b)]/[u_{-} - b] = f'(u_{+})$

**บทพิสูจน์** การพิสูจน์ใช้การพิสูจน์โดยแยกกรณี ได้ 4 กรณี ดังนี้

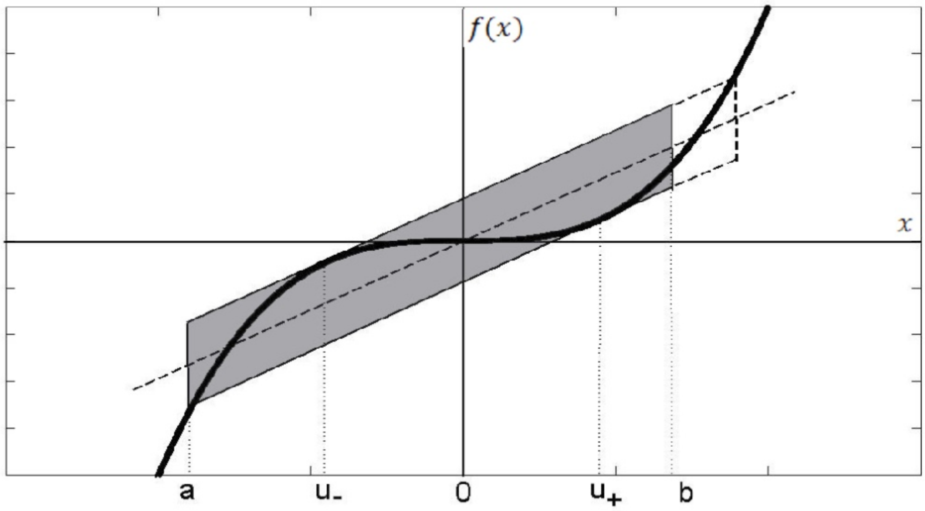
1.กรณี $|a - c| \geq |b - c|$ และ $a < u_{-} < u_{+} < b$

2.กรณี $|a - c| < |b - c|$ และ $a < u_{-} < u_{+} < b$

3.กรณี $|a - c| \geq |b - c|$ และ $a < u_{-} < b < u_{+}$

4.กรณี $|a - c| < |b - c|$ และ $u_{-} < a < u_{+} < b$

กรณีที่ 1




**รูปที่ 8 ตัวอย่างจุดวิกฤษจากการประมาณฟังก์ชันยกกำลังคี่ ในกรณีที่ 1**

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรและเงื่อนไขที่ว่า $f$ สามารถหาอนุพันธ์อันดับสองภายในช่วงปิด$[a, b]$ ได้ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$f'(c - x) = f'(c + x) \tag{8}$$

สมมุติให้

$$u_+ = c + x_1 \,, x_1 \in R$$

$$u_- = c - x_1$$

$$u_+ + u_- = 2c \tag{9}$$

จาก $(8)$ เราได้

$$f'(u_-) = f'(u_+)$$

และกำหนดให้

$$m = [f(a) - f(u_+)]/(a - u_+)$$

ให้ $h$ เป็นเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$

$$h(x) = mx + \zeta, \quad \zeta \in R$$

$$f(a) - f(u_+) = \frac{f(a)-f(u_+)}{(a-u_+)}(a - u_+) + \zeta - \zeta$$

$$= [m(a) + \zeta] - [m(u_+) + \zeta]$$

$$= h(a) - h(u_+)$$

$$f(a) - h(a) = f(u_+) - h(u_+) \qquad (10)$$

จากสมการเชิงฟังก์ชันของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร ที่ $x = c$

$$f(c) = -f(c)$$

เราสามารถสรุปได้ว่า

$$f(c) = 0$$

และหากเราพิจารณาว่าช่วงปิดมีจุดสมมาตรเป็นจุดกึ่งกลางช่วง เราจะได้ว่า

$$f(c) = 0 \; = h(c) = m(c) + \zeta$$

$$\zeta = -mc$$

หากเราพิจารณาฟังก์ชันในกลุ่มตรีโกณมิติโดยให้จุดสมมาตรเป็น $2\pi$ เส้นตรงการประมาณจะต้องมีพจน์เพื่อเคลื่อนเส้นตรงการประมาณไปยังจุดสมมาตรนั้น

$$f(a) - f(u_+) = \frac{f(a)-f(u_+)}{(a-u_+)}(a - u_+)$$

$$= m(a - u_+)$$

จาก $(9)$

$$= m(a + u_- - 2c)$$

$$= m(a) - mc + m(u_-) - mc$$

$$= h(a) + h(u_-)$$

$$f(a) - h(a) = h(u_-) + f(u_+) \qquad (11)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรเราได้ว่า

$$f(u_+) = -f(u_-)$$

จาก $(11)$ เราได้ว่า

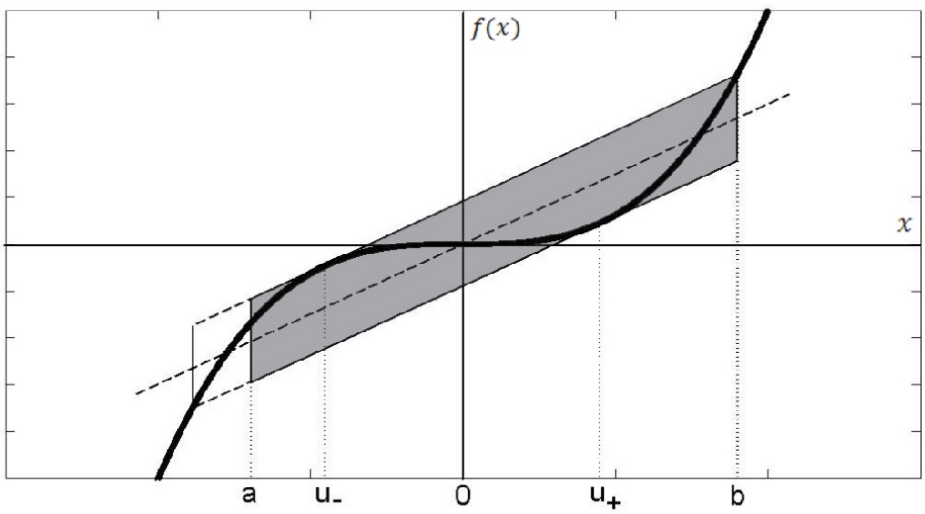
$$f(a) - h(a) = h(u_-) - f(u_-) \qquad (12)$$

จาก $(10)$ และ $(12)$ จะได้

$$f(a) - h(a) = h(u_-) - f(u_-) = f(u_+) - h(u_+)$$

จึงสรุปได้ว่า จุดทั้งสามจุด $a, u_-$ และ $u_+$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $g$ ดังรูปที่ 8

กรณีที่ 2




**รูปที่ 9 ตัวอย่างจุดวิกฤษจากการประมาณฟังก์ชันยกกำลังคี่ ในกรณีที่ 2**

กำหนดให้

$$m = [f(u_-) - f(b)]/(u_- - b)$$

ให้ $h$ เป็นเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$

$$h(x) = mx + \zeta, \quad \zeta \in R$$

$$f(u_-) - f(\mathrm{b}) = \frac{f(u_-)-f(\mathrm{b})}{(u_- - \mathrm{b})}(u_- - \mathrm{b}) + \zeta - \zeta$$

$$= [m(u_-) + \zeta] - [m(\mathrm{b}) + \zeta]$$

$$= h(u_-) - h(\mathrm{b})$$

$$f(u_-) - h(u_-) = f(\mathrm{b}) - h(\mathrm{b}) \qquad (13)$$

$$f(u_-) - f(\mathrm{b}) = \frac{f(u_-)-f(\mathrm{b})}{(u_- - \mathrm{b})}(u_- - \mathrm{b})$$

$$= m(u_- - \mathrm{b})$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร

$$= m(2c - u_+ - \mathrm{b})$$

$$= -m(u_+) + mc - m(\mathrm{b}) + mc$$

$$= -h(u_+) - h(\mathrm{b})$$

$$f(u_-) + h(u_+) = f(\mathrm{b}) - h(\mathrm{b}) \qquad (14)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรเราได้ว่า

$$f(u_+) = -f(u_-)$$

จาก $(14)$ เราได้ว่า

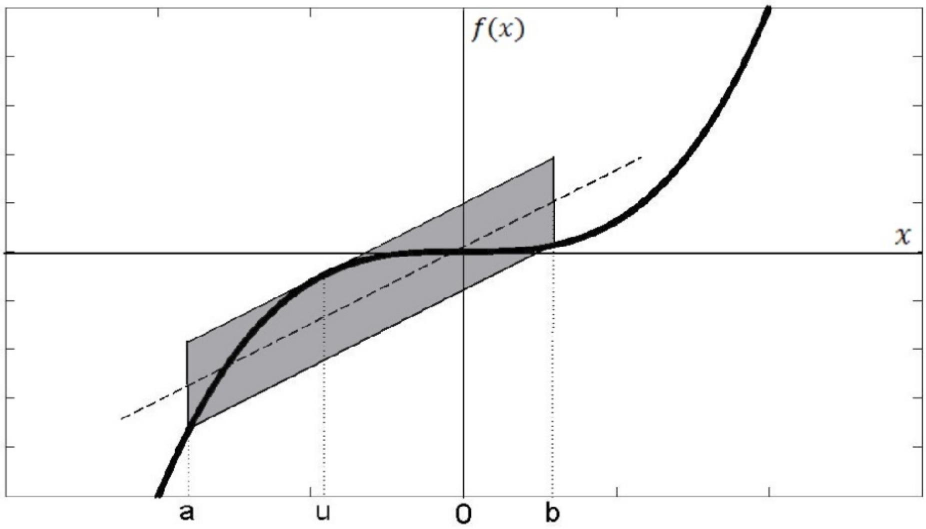
$$h(u_+) - \mathrm{f}(u_+) = f(\mathrm{b}) - h(\mathrm{b}) \qquad (15)$$

จาก $(13)$ และ $(15)$ จะได้

$$f(u_-) - h(u_-) = h(u_+) - f(u_+) = f(\mathrm{b}) - h(\mathrm{b})$$

จึงสรุปได้ว่า จุดทั้งสามจุด $u_-, u_+$ และ $b$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $g$ ดังรูปที่ 9

กรณีที่ 3




**รูปที่ 10 ตัวอย่างจุดวิกฤษจากการประมาณฟังก์ชันยกกำลังคี่ ในกรณีที่ 3**

$$m = [f(a) - f(b)]/(a - b)$$

คำนวณหาจุด $u_-$ จาก

$$f'(u_-) = m$$

คำนวณหาจุด $u_+$ จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรเราได้ว่า

$$f(u_+) = -f(u_-)$$

เราทราบว่า

$$a < u_- < b < u_+$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) \geq r(x) \vee f(x) \leq r(x), \forall x \in [a, b]$$

ให้ $r$ เป็นเส้นตรงที่เกิดจากจุด $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$

$$r(x) = mx + d, d \in R$$

$$d = [af(b) - bf(a)]/(a - b)$$

ให้ $h$ เป็นเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$

$$h(x) = mx + \zeta, \;\; \zeta \in R$$

เราสามารถคำนวณพจน์ $\zeta$ ได้จากครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่าง $f$ และ $r$ ที่จุด $u_-$

$$\zeta = \frac{f(u_-)+r(u_-)}{2} - mu_- \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \frac{f(a)-f(b)}{(a-b)}(a - b) + \zeta - \zeta \\ &= [m(a) + \zeta] - [m(b) + \zeta] \\ &= h(a) - h(b) \end{aligned}$$

$$f(a) - h(a) = f(b) - h(b) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} f(a) + f(u_-) &= \frac{a-b}{a-b} f(a) + f(u_-) \\ &= \frac{af(a)-bf(a)+[af(b)-af(b)]}{a-b} + f(u_-) \\ &= \frac{f(a)-f(b)}{(a-b)} a + f(u_-) + [af(b) - bf(a)]/(a - b) \\ &= ma + f(u_-) + d \end{aligned}$$

$$= m(u_- + a) + f(u_-) + r(u_-) - 2mu_-$$

จาก $(16)$

$$= (m(u_- + a) + 2\zeta)$$

$$= [m(u_-) + \zeta] + [m(a) + \zeta]$$

$$= h(u_-) + h(a)$$

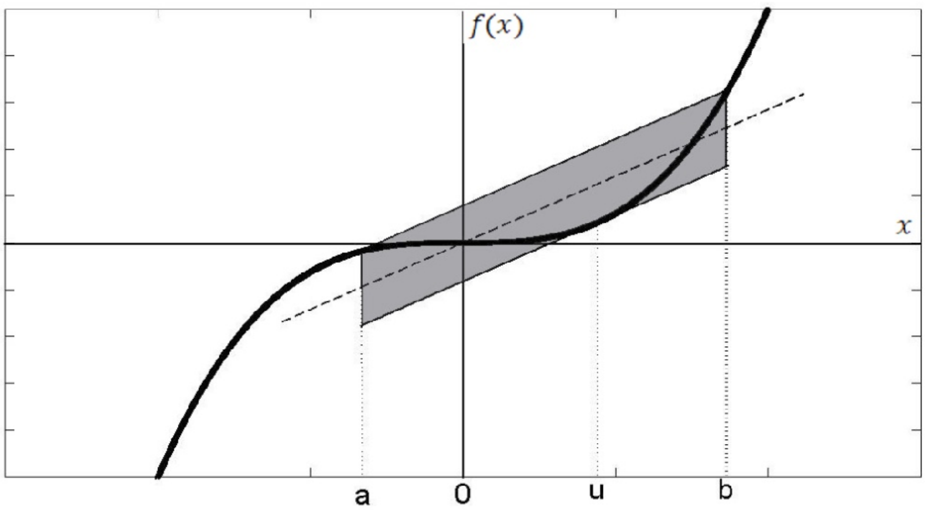
$$f(a) - h(a) = h(u_-) - f(u_-) \tag{18}$$

จาก $(17)$ และ $(18)$ จะได้

$$f(a) - h(a) = h(u_-) - f(u_-) = f(b) - h(b)$$

จึงสรุปได้ว่า จุดทั้งสามจุด $a, u_-$ และ $b$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $g$ ดังรูปที่ 10

กรณีที่ 4




**รูปที่ 11 ตัวอย่างจุดวิกฤษจากการประมาณฟังก์ชันยกกำลังคี่ ในกรณีที่ 4**

$$m = [f(a) - f(b)]/(a - b)$$

คำนวณหาจุด $u_+$ จาก

$$f'(u_+) = m$$

คำนวณหาจุด $u_-$ จากคุณสมบัติของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรเราได้ว่า

$$f(u_+) = -f(u_-)$$

เราทราบว่า

$$u_- < a < u_+ < b$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) \geq r(x) \vee f(x) \leq r(x), \forall x \in [a, b]$$

ให้ $r$ เป็นเส้นตรงที่เกิดจากจุด $\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)$

$$r(x) = mx + d, d \in R$$

$$d = [af(b) - bf(a)]/(a - b)$$

ให้ $h$ เป็นเส้นตรงที่ประมาณฟังก์ชัน $f$

$$h(x) = mx + \zeta, \quad \zeta \in R$$

เราสามารถคำนวณพจน์ $\zeta$ ได้จากครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่าง $f$ และ $r$ ที่จุด $u_+$

$$\zeta = \frac{f(u_+) + r(u_+)}{2} - mu_+ \tag{19}$$

$$f(a) - f(b) = \frac{f(a) - f(b)}{(a - b)}(a - b) + \zeta - \zeta$$

$$= [m(a) + \zeta] - [m(b) + \zeta]$$

$$= h(a) - h(b)$$

$$f(a) - h(a) = f(b) - h(b) \tag{20}$$

$$f(a)+f(u_+)=\frac{a-b}{a-b}f(a)+f(u_+)$$

$$=\frac{af(a)+bf(a)+[af(b)-af(b)]}{a-b}+f(u_+)$$

$$=\frac{f(a)-f(b)}{(a-b)}a+f(u_+)+[af(b)-bf(a)]/(a-b)$$

$$=ma+f(u_+)+d$$

$$=m(u_++a)+f(u_+)+r(u_+)-2mu_+$$

จาก $(19)$

$$=(m(u_++a)+2\zeta)$$

$$=[m(u_+)+\zeta]+[m(a)+\zeta]$$

$$=h(u_+)+h(a)$$

$$f(a)-h(a)=h(u_+)-f(u_+) \qquad (21)$$

จาก $(20)$ และ $(21)$ จะได้

$$f(a)-h(a)=h(u_+)-f(u_+)=f(b)-h(b)$$

จึงสรุปได้ว่า จุดทั้งสามจุด $a, u_+$ และ $b$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $g$ ดังรูปที่ 11

จากการพิสูจน์โดยแยกกรณีสามารถระบุจุดวิกฤตของเส้นตรงการประมาณสำหรับฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรได้ตามลักษณะของช่วงปิดดังทฤษฎีบท ■

# บทที่ 5

# การวัดประสิทธิภาพของการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงด้วยฟังก์ชันเส้นตรง

ในบทนี้เรากล่าวถึงการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวที่ดีที่สุดภายในช่วงปิดที่กำหนดสำหรับฟังก์ชันยกกำลัง และการคำนวณผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์

## 5.1 การวัดประสิทธิภาพสำหรับฟังก์ชันยกกำลัง

ในการวัดประสิทธิภาพสำหรับฟังก์ชันยกกำลัง เราได้นำการคูณพื้นฐานจากหัวข้อ 2.4 การดำเนินการทางเลขคณิตพื้นฐานบนเลขคณิตสัมพรรค (affine arithmetic operation) มาคำนวณเพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคกับวิธีการประมาณฟังก์ชันตัวแปรเดียว โดยเปรียบเทียบผลจากการคำนวณจาก 2 อัลกอริทึม ดังนี้

1. อัลกอริทึมการคูณพื้นฐาน (fundamental multiplication) โดยขั้นตอนการคำนวณฟังก์ชันยกกำลัง สมมุติให้เลขชี้กำลังมีค่า $n$ อัลกอริทึมนี้จะใช้การดำเนินการคูณพื้นฐานจำนวน $n-1$ ครั้งเพื่อคำนวณหารูปสัมพรรคผลลัพธ์ และวัดค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณ $\delta_{FUND}$ ตามสมการต่อไปนี้

$$\delta_{FUND} = \sum_{i=k+1}^{k+n-1} |x_i|$$

โดยที่ รูปสัมพรรคตั้งต้นมีจำนวนสัญกรณ์รบกวนจำนวน $k$ ตัว หรืออาจกล่าวได้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณด้วยอัลกอริทึมการคูณพื้นฐานได้จากผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของสัญกรณ์รบกวนใหม่ที่เกิดจากการคูณพื้นฐานนั่นเอง

2. อัลกอริทึมการประมาณค่าที่ดีที่สุด (minimax approximation) โดยขั้นตอนการคำนวณฟังก์ชันยกกำลังได้ใช้ ทฤษฎีบทในบทที่ **4** ช่วยในการคำนวณ ส่วนค่าคลาดเคลื่อนจากการคำนวณ $\delta_{APRX}$ นั้นคือค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณฟังก์ชันยกกำลังด้วยฟังก์ชันเส้นตรง

การเปรียบเทียบผลลัพธ์จากอัลกอริทึมทั้งสองเปรียบเทียบด้วยอัตราส่วน $R$ ดังต่อไปนี้

$$R = \frac{\delta_{APRX}}{\delta_{FUND}}$$

**5.1.1 การประมาณค่าฟังก์ชันยกกำลังจากกลุ่มตัวอย่างที่กำหนด**

ในการประมาณแรกนี้เราทำการประมาณโดยการกำหนดรูปสัมพรรคจำนวน 4 รูป พร้อมทั้งระบุเลขชี้กำลังของฟังก์ชันยกกำลังในแต่ละตัวอย่างทดสอบด้วย เพื่อเพิ่มความเข้าใจจึงขอยกตัวอย่างการคำนวณสำหรับตัวอย่างทดสอบแรกดังนี้

กำหนดรูปสัมพรรค $\hat{x} = 1 + 5\varepsilon_1$ ซึ่งแทนช่วง $[-4, 6]$ และเลขชี้กำลังเป็น $5$ อัลกอริทึมการคูณพื้นฐานดำเนินการคูณ $4$ ครั้ง ได้ผลลัพธ์จากการคูณ $4$ ครั้งเป็น

$$\hat{z}_{FUND} = (\hat{x})^5 = 1 + 25\varepsilon_1 + 25\varepsilon_2 + 175\varepsilon_3 + 1075\varepsilon_4 + 6475\varepsilon_5$$

ซึ่งรูปสัมพรรคผลลัพธ์นี้แทนช่วงปิด $[-7774, 7776]$ และค่าคลาดเคลื่อนจากอัลกอริทึมการคูณพื้นฐานสามารถคำนวณได้คือ

$$\delta_{FUND} = 25 + 175 + 1075 + 6475 = 7750$$

ส่วนอัลกอริทึมการประมาณค่าที่ดีที่สุด สามารถคำนวณฟังก์ชันเส้นตรงการประมาณ $h$ ได้ดังนี้

$$h(x) = 872.9250x + 0$$

โดยมีค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ

$$\delta_{APRX} = 2538.450$$

ซึ่งผลลัพธ์รูปสัมพรรคจากอัลกอริทึมการประมาณที่ดีที่สุดสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{z}_{APRX} &= h(\hat{x}) + \delta_{APRX}\varepsilon_2 \\ &= 872.9250(1 + 5\varepsilon_1) + 0 + 2538.450\varepsilon_2 \\ &= 872.9250 + 4364.625\varepsilon_1 + 2538.450\varepsilon_2\end{aligned}$$

ซึ่งแทนช่วงปิด $[-6030.15, 7776]$ และอัตราส่วน $R$ สามารถคำนวณคือ

$$R = \frac{2538.450}{7750} = 0.3275420$$

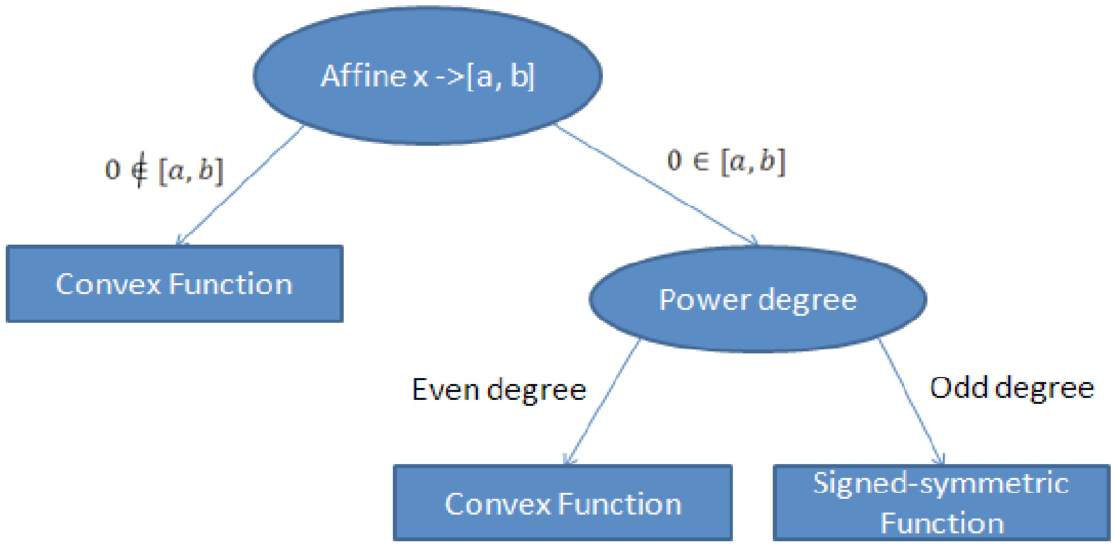
โดยผลลัพธ์จากการคำนวณตัวอย่างทดสอบมีดังนี้

**ตารางที่ 1 ผลการเปรียบเทียบการคำนวณฟังก์ชันยกกำลังโดยใช้ตัวอย่างที่กำหนด**

| Input affine form | Function | Fundamental result range | Approximation result range |
|---|---|---|---|
| $\hat{x} = 1 + 5\varepsilon_1$ | $x^5$ | [-7774, 7776] | [-6030.150, 7776] |
| $\hat{x} = 0.5 + 2\varepsilon_1 + 1.5\varepsilon_2$ | $x^4$ | [-255.875, 256] | [-109.538, 256] |
| $\hat{x} = -5 + 0.5\varepsilon_1 + 1.5\varepsilon_2$ | $x^3$ | [-343, 93] | [-343, 33.26434] |
| $\hat{x} = 1.5 + 2.5\varepsilon_1$ | $x^5$ | [-1008.8125, 1024] | [-619.9920, 1024 ] |

| Input affine form | Function | $\delta_{FUND}$ | $\delta_{APRX}$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{x} = 1 + 5\varepsilon_1$ | $x^5$ | 7750.000 | 2538.450 | 0.3275420 |
| $\hat{x} = 0.5 + 2\varepsilon_1 + 1.5\varepsilon_2$ | $x^4$ | 254.1875 | 95.26890 | 0.3747977 |
| $\hat{x} = -5 + 0.5\varepsilon_1 + 1.5\varepsilon_2$ | $x^3$ | 68 | 30.13217 | 0.4431202 |
| $\hat{x} = 1.5 + 2.5\varepsilon_1$ | $x^5$ | 953.125 | 309.4960 | 0.3247172 |

จากกลุ่มตัวอย่างที่ผู้วิจัยเป็นคนกำหนดขึ้นนั้น สำหรับตัวอย่างแรกเป็นตัวอย่างสำหรับการประมาณด้วยทฤษฎีบทใหม่ในส่วนของฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร ส่วนตัวอย่างที่สองเป็นตัวอย่างที่ทฤษฎีบทเดิมนั้นครอบคลุมถึง การกำหนดตัวอย่างในการทดสอบเป็นความตั้งใจของผู้วิจัยเพื่อที่จะสามารถทดสอบรหัสต้นฉบับในการจำแนกกรณีในการใช้ทฤษฎีการประมาณอย่างถูกต้อง โดยตรรกะการตัดสินใจของรหัสต้นฉบับสามารถอธิบายได้ด้วยต้นไม้การตัดสินใจดังรูปที่ 12 ตรรกะการตัดสินใจของรหัสต้นฉบับในการแยกแยะตัวอย่างสำหรับฟังก์ชันยกกำลัง




**รูปที่ 12 ตรรกะการตัดสินใจของรหัสต้นฉบับในการแยกแยะตัวอย่างสำหรับฟังก์ชันยกกำลัง**

### 5.1.2 การประมาณค่าฟังก์ชันยกกำลังจากกลุ่มตัวอย่างสุ่ม

ในการประมาณที่สองเราทำการประมาณโดยการสร้างตัวอย่างรูปสัมพรรคแบบสุ่มเพื่อที่สามารถสร้างตัวอย่างรูปสัมพรรคได้ในจำนวนมาก โดยการสุ่มสร้างทำโดยการสุ่มค่า $x_0$ หรือค่ากลางของรูปสัมพรรคในช่วงปิด $[-10, 10]$ และทำการสุ่มค่า $x_i$ หรือสัมประสิทธิ์ของสัญกรณ์รบกวนในตามเงื่อนไขที่ต้องการดังระบุในตารางแสดงผล และสุ่มเลขยกกำลังของฟังก์ชันยกกำลังระหว่างกำลัง 3 ถึง 7 โดยในแต่ละเงื่อนไขเราทำการสุ่มตัวอย่างรูปสัมพรรคจำนวน 10,000 ตัวอย่างเพื่อคำนวณค่าเฉลี่ยของอัตราส่วน $R$ ซึ่งผลลัพธ์จากการคำนวณตัวอย่างทดสอบมีดังนี้

**ตารางที่ 2 ผลการเปรียบเทียบการคำนวณฟังก์ชันยกกำลังโดยใช้ตัวอย่างสุ่ม**

| Condition of coefficient of $\varepsilon_i$ | Number of $\varepsilon_i$ | Mean value of $R$ |
|---|---|---|
| $-0.1 \le x_i \le 0.1$ | 4 | 0.468359 |
| $-0.1 \le x_i \le 0.1$ | 11 | 0.436956 |
| $-0.01 \le x_i \le 0.01$ | 4 | 0.494488 |
| $-0.01 \le x_i \le 0.01$ | 11 | 0.487393 |
| $-0.001 \le x_i \le 0.001$ | 4 | 0.499201 |
| $-0.001 \le x_i \le 0.001$ | 11 | 0.498075 |

และนอกจากค่าเฉลี่ยของ $R$ ที่ได้จากการประมาณแล้ว ผู้วิจัยได้สังเกตุถึงการไม่เปลี่ยนแปลงของค่าคลาดเคลื่อน $\delta_{FUND}$ ที่เกิดขึ้นเมื่อผู้วิจัยคงไว้ซึ่งขนาดความกว้างของช่วงจากรูปสัมพรรคหรือผลรวมทั้งหมดของค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์หน้าสัญกรณ์รบกวนภายในรูปสัมพรรคที่ใช้ในการประมาณนี้ แต่เปลี่ยนจำนวนสัญกรณ์รบกวนและเพิ่มขนาดของสัมประสิทธิ์ของสัญกรณ์รบกวนแทน

ซึ่งโดยสรุป ความกว้างและจุดกึ่งกลางของช่วงผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ $\hat{z}_{FUND}$ ด้วยอัลกอริทึมแรกจะไม่เปลี่ยนแปลง หากคงไว้ซึ่ง ความกว้างและจุดกึ่งกลางของช่วงจากรูปสัมพรรคที่ใช้ในการคำนวณ

### 5.1.3 วิเคราะห์และสรุปผลการประมาณ

ผลการประมาณเพื่อคำนวณฟังก์ชันยกกำลังด้วยวิธีการประมาณและวิธีการคูณพื้นฐานได้ผลที่สมเหตุสมผลเนื่องจากอัลกอริทึมที่สองเป็นอัลกอริทึมในการประมาณค่าที่ดีที่สุดบนรูปสัมพรรค ช่วงผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่ได้จะเป็นรูปสัมพรรคที่ให้ค่าแคบที่สุดสำหรับฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวและช่วงที่กำหนด จะไม่มีการคำนวณอื่นที่ได้ผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่แคบกว่าวิธีการประมาณนี้ การเปรียบเทียบนี้มีจุดประสงค์เพื่อแสดงถึงประสิทธิภาพของการคูณพื้นฐานหากนำมาใช้ในการคำนวณฟังก์ชันยกกำลังเมื่อเทียบกับกรณีที่ดีที่สุด

ผลการประมาณได้ข้อสรุปว่า การคำนวณฟังก์ชันยกกำลังบนเลขคณิตสัมพรรค วิธีการคูณพื้นฐานมีอัตราส่วนของค่าคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเป็น 2 เท่าของวิธีการประมาณที่ดีที่สุด

## 5.2 การคำนวณผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์

นอกจากฟังก์ชันยกกำลังแล้วฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ก็เป็นอีกฟังก์ชันที่เราสามารถใช้ทฤษฎีบทในการประมาณค่าฟังก์ชันที่ดีที่สุดในรูปสัมพรรคได้ เราจึงได้ทำการประมาณโดยการกำหนดตัวอย่างขึ้น และคำนวณเพื่อดูผลลัพธ์ในรูปสัมพรรคที่ได้

### 5.2.1 การคำนวณค่าฟังก์ชันไซน์จากกลุ่มตัวอย่างที่กำหนด

**ตารางที่ 3 ผลการคำนวณฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์โดยใช้ตัวอย่างที่กำหนด**

| Input affine form | Actual result range | Approximation result range | $\delta_{APRX}$ |
|---|---|---|---|
| $\hat{x} = \frac{p_\pi}{3} + \frac{p_\pi}{2}\varepsilon_1$ | [-0.5, 1] | [-0.5, 1.38443] | 0.442217 |
| $\hat{x} = \frac{p_\pi}{12} + \frac{p_\pi}{4}\varepsilon_1$ | [-0.5, 0.866025] | [-0.50001, 0.955359] | 0.0446670 |
| $\hat{x} = -\frac{p_\pi}{3} + \frac{p_\pi}{9}\varepsilon_1 + \frac{p_\pi}{18}\varepsilon_2$ | [-1, -0.5] | [-1.1163, -0.49999] | 0.0581585 |
| $\hat{x} = \frac{3p_\pi}{8} + \frac{p_\pi}{12}\varepsilon_1 + \frac{p_\pi}{24}\varepsilon_2$ | [0.707106, 1] | [0.707106, 1.070377] | 0.0351888 |

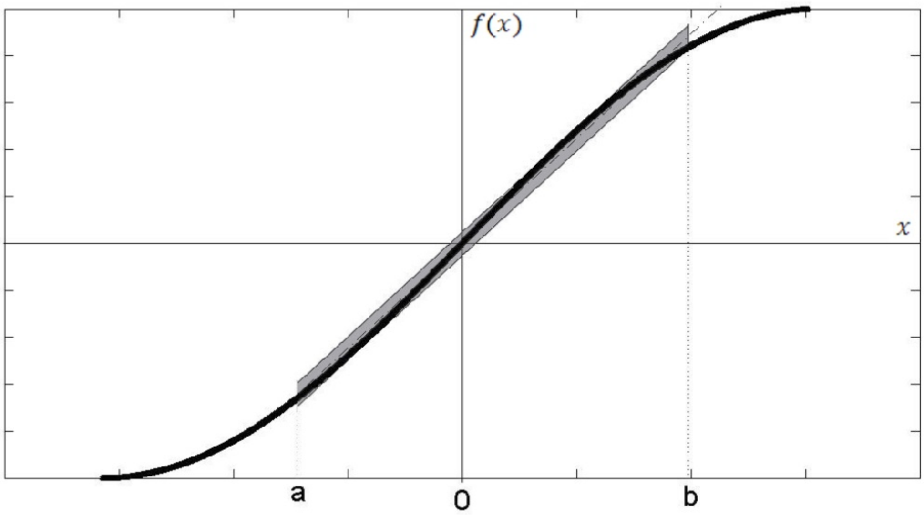
โดยที่ $p_\pi$ เป็นค่าคงที่ที่กำหนดขึ้นในการคำนวณด้วยโปรแกรม $p_\pi = 3.141592$

### 5.2.2 วิเคราะห์และสรุปผลการประมาณ

ผลการคำนวณที่ได้เป็นการประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ที่ดีที่สุดในรูปสัมพรรค โดยจากตัวอย่างที่กำหนดขึ้น ตัวอย่างที่ 1 เป็นตัวอย่างที่แสดงอย่างเด่นชัดถึงการหาค่าเหมาะที่สุดของฟังก์ชันไซน์โดยผลลัพธ์การคำนวณสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 13

## 5.3 สรุปภาพรวมงานวิจัย

เราได้ค้นพบกรณียกเว้นของทฤษฎีบทการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวเพื่อสร้างฟังก์ชันสัมพรรคที่ให้ผลลัพธ์สัมพรรคที่แคบที่สุดในช่วงที่กำหนด คือ ฟังก์ชันสัญญาณสมมาตรและเราแรกเริ่มได้เสนออัลกอริทึมในการคำนวณผลลัพธ์ที่แคบที่สุดจากกรณียกเว้นนั้นและหลังจากนั้นได้สร้างทฤษฎีบทการประมาณฟังก์ชันจำนวนจริงตัวแปรเดียวใหม่ที่ครอบคลุมถึงฟังก์ชันสัญญาณสมมาตร พร้อมบทพิสูจน์




**รูปที่ 13 การประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ที่ดีที่สุดบนรูปสัมพรรคโดยใช้ตัวอย่างที่กำหนด**

มากไปกว่านั้น มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่สร้างรูปสัมพรรคในรูปพหุนามกำลังสอง หรือมากกว่า [19] โดยการออกแบบเช่นนั้นส่งผลให้ได้ผลลัพธ์ในการคำนวณที่แคบลงอีก แต่แลกกลับระยะเวลาที่มากขึ้นในการคำนวณแต่ละการดำเนินการ

# รายการอ้างอิง


[1] IEEE Std 754(TM)-2008. *IEEE Standard for Floating- Point Arithmetic*. IEEE Computer Society, Aug. 2008.

[2] R. E. Moore. Interval Analysis. Prentice-Hall, 1966.

[3] Stolfi, J.: *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. Doctoral dissertation, Computer Science Department, Stanford University , 1997.

[4] Shinya, M., Takatomi M., and Masahide K., *A New Dividing Method in Affine Arithmetic*, IEICE Trans. Fundamentals, E86-A, 9 (September 2003) : 2192-2196.

[5] สอวน., อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน, พิมพ์ครั้งที่ 3, บริษัทด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด, 2553.

[6] Mayans, R., *The Chebyshev equioscillation theorem*, Journal of Online Mathematics and its Applications , 1316 (2006).

[7] D.T.B. Ngoc and M. Ogawa. *Combining Testing and Static Analysis to Overflow and Roundoff Error Detection*. JAIST Tech. Reports IS-RR-2010-004, (2010).

[8] Thienprapasith, P. and Surarerks, A. *A Flexible Interval Representation System and Its Fundamental Arithmetic Operations.*, Proceeding of the 5th International Conference on Information Technology and Applications (ICITA). Cairns. (2008).

[9] Srivanasont, S. and Surarerks, A. *Redundant Analog Number System*. IEEE TENCON 2004, IEEE Region 10 Conf., B-2, (2004) : 179-182.

[10] Srivanasont, S. and Surarerks, A. *Modified Continuous Valued Number System.* Proceedings of the International Conference on Modeling, Simulation & Visualization Methods (MSV) '04 & Proceedings of the International Conference on Algorithmic Mathematics & Computer Science (AMCS) '04, Las Vegas. (21-24 june 2004) : 340-344.

[11] Srimanotham, N. and Surarerks, A. *Interval Redundant Analog Number System.* IADIS International Conference Applied Computing (2006).

[12] Shinya, M., Takatomi M. and Masahide K., *On The Best Multiplication of the affine arithmetic*, IEICE Trans. Fundamentals, J86-A,2 (in Japanese) (February 2003) : 150-159.

[13] Shinya, M., and Masahide K., *A Dividing Method utilizing the Best Multiplication in Affine Arithmetic*, IEICE Electronics Express, 1,7,( 2004) : 176-181.

[14] Linsheng, Z., Yan, Z., and Wenbiao, Z., *Tradeoff between Approximation Accuracy and Complexity for Range Analysis using Affine Arithmetic.* Journal of Signal Processing Systems, 61,3 (2010) : 279-291.

[15] J.L.D. Comba and J. Stolfi, *Affine Arithmetic and its Applications to Computer Graphics*, Sibgrapi'93, Recife, Brazil, (October 1993).

[16] L.H. De Figueiredo, *Surface Intersection using Affine Arithmetic*, Proceedings of Graphics Interface'96, (1996) : 168-175.

[17] L.H. De Figueiredo, R. Van Iwaarden and J. Stolfi, *Fast Interval Branch and Bound Methods for Unconstrained Global Optimization with Affine Arithmetic*, SIAM Journal of Optimization, (1997).

[18] Eric, G., Tristan Le, G. and Sylvie, P., *An Accurate Join for Zonotopes, Preserving Affine Input/Output Relations.* Journal of Electronic Notes in Theoretical Computer Science (ENTCS), 287, (2012).

[19] Messine, F. ,*Extensions of Affine Arithmetic: Application to Unconstrained Global Optimization.* Journal of Universal Computer Science, 8, 11 (2002) : 992-1015.

# ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายประพีร์พัฒน์ เอื้อวิจิตรพจนา เกิดเมื่อวันที่ 18 พฤษภาคม พ.ศ. 2531 เรียนจบการศึกษาระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจากโรงเรียนพิษณุโลกพิทยาคม และระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจากโรงเรียนมหิดลวิทยานุสรณ์ เข้ารับการศึกษาต่อในระดับปริญญาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จนสำเร็จการศึกษาในปี พ.ศ. 2555