การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด
โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

นายวิทยา สดับสาร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2557

HIGH-SPEED INVISCID COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS
USING QUADRILATERAL ELEMENTS AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE

Mr. Witthaya Sadubsarn

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering
Department of Mechanical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2014

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์
โดย	นายวิทยา สดับสาร
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

....ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เลิศนุวัฒน์)

....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ)

....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นิพนธ์ วรรณโสภาคย์)

....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ดร.ปริญญา บุญมาเลิศ)

วิทยา สดับสาร : การวิเคราะห์การไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดโดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (HIGH-SPEED INVISCID COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS USING QUADRILATERAL ELEMENTS AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ศ. ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ, 123 หน้า.

วิทยานิพนธ์เล่มนี้ได้เสนอการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ปรากฏในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ จึงช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ ในขณะที่สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลนี้ประดิษฐ์มาจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งประกอบไปด้วย สมการเชิงอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน แล้วต่อด้วยการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และตรวจสอบความถูกต้องด้วยการนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีผลเฉลยแม่นตรง

เพื่อเป็นการเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณ จึงได้ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ด้วยการปรับเอลิเมนต์ให้มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มาก และปรับเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อย

ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ได้แสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อน

ภาควิชา	วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อนิสิต	....
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล	ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก	....
ปีการศึกษา	2557		

5570373421 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING
KEYWORDS: Taylor-Galerkin method / Quadrilateral element / Adaptive meshing technique / Compressible flow

WITTHAYA SADUBSARN: HIGH-SPEED INVISCID COMPRESSIBLE FLOW ANALYSIS USING QUADRILATERAL ELEMENTS AND ADAPTIVE MESHING TECHNIQUE. ADVISOR: PROF. PRAMOTE DECHAUMPHAI, Ph.D., 123 pp.

In this thesis, a finite element method for inviscid high-speed compressible flow using Taylor-Galerkin algorithm is presented. The algorithm has been developed using the four nodes quadrilateral element so that their closed-form finite element matrices can be derived. Such matrices with closed form expressions significantly reduce the analysis computational time as well as the required computer memory. The finite element equations corresponding to these flow problems were derived from the governing Navier-Stokes partial differential equations that consist of the conservation of mass, momentums, and energy. A corresponding of finite element computer program was developed and verified by solving problems that have exact solutions.

To further improve the analysis solution accuracy, an adaptive meshing technique was also cooperated. A new mesh consists of small elements in the regions with large changes of the solution gradients and large elements in the other regions where the changes of solution gradients are small.

Several problems were tested to demonstrate the capability of the Taylor-Galerkin finite element algorithm with adaptive meshing technique that can predict detailed high-speed flow behaviors past complex geometries.

Department:	Mechanical Engineering	Student's Signature	....
Field of Study:	Mechanical Engineering	Advisor's Signature	....
Academic Year:	2014		

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ เดชะอำไพ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่ท่านได้ให้ความรู้ คำแนะนำ และแนวทางในการทำงานวิจัย รวมทั้งยังเป็นแบบอย่างที่ดีในการทำงานวิจัย และการดำเนินชีวิตของผู้วิจัย

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.บุญชัย เลิศนุวัฒน์ ประธานกรรมการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิพนธ์ วรรณโสภาคย์ และ ดร.ปริญญา บุญมาเลิศ กรรมการ ที่ได้ให้คำแนะนำที่มีค่าต่อการทำงานวิจัย ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ ดร. ซินหวู ม่า (Dr.Xinwu Ma) มหาวิทยาลัยซานตง (Shandong university) ประเทศจีน ที่กรุณาอนุเคราะห์โปรแกรม AUTOMESH-2D และการสนับสนุนที่ดียิ่ง

ขอขอบนักวิจัยทุกท่านในห้องปฏิบัติการวิจัยทางด้านกลศาสตร์การคำนวณ ที่ช่วยสอนให้คำแนะนำ และให้ความช่วยเหลือผู้วิจัยตั้งแต่เริ่มทำงานวิจัย จนงานวิจัยสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ท้ายสุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาอันเป็นที่รักยิ่ง ที่สนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัย และคอยให้กำลังใจในการทำงานวิจัยมาโดยตลอด อนึ่ง ประโยชน์และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญุตาบูชาแด่บิดามารดา ครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย....ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ....จ

กิตติกรรมประกาศ....ฉ

สารบัญ....ช

สารบัญรูป....ญ

สารบัญตาราง....ณ

คำอธิบายสัญลักษณ์....ด

บทที่ 1 บทนำ....1

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์....1

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์....3

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์....3

1.4 วิธีการดำเนินงานวิทยานิพนธ์....3

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ....4

บทที่ 2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์....5

2.1 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์....5

2.2 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้โดยใช้วิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน....6

2.3 บทสรุปแนวทางการทำวิทยานิพนธ์....7

บทที่ 3 ทฤษฎีพื้นฐานของการไหล....8

3.1 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์....8

3.2 สมการเชิงอนุรักษ์มวล....10

3.3 สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม....11

3.4 สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน....14

หน้า

3.5 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุรักษ์....................................17

3.6 เงื่อนไขขอบเขต 18

บทที่ 4 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 20

4.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ 20

4.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ 25

บทที่ 5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ 29

5.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม TGHIFLOW...29

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม TGHIFLOW 32

5.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม TGHIFLOW 32

5.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ สำหรับโปรแกรม TGHIFLOW 34

บทที่ 6 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์..35

6.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ....................................35

6.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°....................................40

6.3 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ 43

บทที่ 7 การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัว
ได้...46

7.1 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ 46

7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสอง 48

7.2.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม DOUBLEGRADIENT.....................................48

7.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม DOUBLEGRADIENT 49

7.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม DOUBLEGRADIENT 49

7.2.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ สำหรับโปรแกรม DOUBLEGRADIENT 50

7.3 การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ 51

หน้า

7.3.1 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ 51

7.3.2 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 58

7.3.3 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ....63

บทที่ 8 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ลักษณะต่าง ๆ....66

8.1 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20° 66

8.2 ปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย 69

8.3 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม....72

8.4 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก....74

8.5 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 78

8.6 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56° 81

บทที่ 9 บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ 84

9.1 บทสรุป 84

9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์....86

9.3 ข้อเสนอแนะ 87

รายการอ้างอิง 88

ภาคผนวก ก รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TGHIFLOW....93

ภาคผนวก ข รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DOUBLEGRADIENT 112

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 123

สารบัญรูป

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมระหว่างระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม 2

รูปที่ 3.1 เส้นทางการเคลื่อนที่ของของไหลก้อนเล็ก ๆ จากตำแหน่ง 1 ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง 2 ที่เวลา t_2 8

รูปที่ 3.2 แสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล....................10

รูปที่ 3.3 แสดงแรงต่าง ๆ ที่กระทำในแนวแกน x บนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับของไหล....11

รูปที่ 3.4 แสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในแนวแกน x ที่ไหลผ่านก้อนของไหล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล....................14

รูปที่ 3.5 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด...........19

รูปที่ 4.1 การแปลงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อไปเป็นเอลิเมนต์จัตุรัส 25

รูปที่ 4.2 แสดงเอลิเมนต์ที่อยู่ติดขอบของโดเมนของการไหล....................28

รูปที่ 5.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรม TGHIFLOW 31

รูปที่ 6.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ....................36

รูปที่ 6.2 ลักษณะของการไหลตกกระทบพื้นราบ....................36

รูปที่ 6.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ....................38

รูปที่ 6.4 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ 39

รูปที่ 6.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ....................39

รูปที่ 6.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ....................40

รูปที่ 6.7 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°....................41

รูปที่ 6.8 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 41

รูปที่ 6.9 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y = 0.4$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 42

รูปที่ 6.10 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง $y = 0.4$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 42

รูปที่ 6.11 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง $y = 0.4$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 43

รูปที่ 6.12 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ 44

รูปที่ 6.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น และความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ..44

รูปที่ 6.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ..45

รูปที่ 6.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ..45

รูปที่ 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ......................52

รูปที่ 7.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียงเท่าตกกระทบพื้นราบ..53

รูปที่ 7.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ 54

รูปที่ 7.4 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ 55

รูปที่ 7.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ......................55

รูปที่ 7.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ที่ตำแหน่ง y = **0.2** เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ.....................56

รูปที่ 7.7 เปรียบเทียบลักษณะเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ระหว่างเอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh...57

รูปที่ 7.8 เปรียบเทียบรายละเอียดของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ระหว่างเอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh...57

รูปที่ 7.9 เส้นชั้นของค่าความดันที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh..58

รูปที่ 7.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° ...59

รูปที่ 7.11 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 60

รูปที่ 7.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 61

รูปที่ 7.13 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = **0.4** เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°.......62

รูปที่ 7.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = **0.4** เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 62

รูปที่ 7.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง y = **0.4** เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°.......63

รูปที่ 7.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ 64

รูปที่ 7.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ......................................64

รูปที่ 7.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ 64

รูปที่ 7.19 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ....................................65

รูปที่ 7.20 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง $y = 0.25$ เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ....................................65

รูปที่ 8.1 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20° 66

รูปที่ 8.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20° 68

รูปที่ 8.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20° 68

รูปที่ 8.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20° 68

รูปที่ 8.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านบนสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบ ที่มีพื้นเอียงมุม 20° 69

รูปที่ 8.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบ ที่มีพื้นเอียงมุม 20° 69

รูปที่ 8.7 ปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย 70

รูปที่ 8.8 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย 71

รูปที่ 8.9 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย 71

รูปที่ 8.10 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันบริเวณผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย 71

รูปที่ 8.11 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม....................................72

รูปที่ 8.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม 73

รูปที่ 8.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม 73

รูปที่ 8.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านบนสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม 73

รูปที่ 8.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม 74

รูปที่ 8.16 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก....75

รูปที่ 8.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 76

รูปที่ 8.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 76

รูปที่ 8.19 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 77

รูปที่ 8.20 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกระบอกสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 77

รูปที่ 8.21 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกระบอกสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 78

รูปที่ 8.22 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 79

รูปที่ 8.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 80

รูปที่ 8.24 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 80

รูปที่ 8.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 81

รูปที่ 8.26 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันหลังจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน 81

รูปที่ 8.27 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56° 82

รูปที่ 8.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56° 83

รูปที่ 8.29 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56° 83

สารบัญตาราง

ตารางที่ 7.1 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ 52

ตารางที่ 7.2 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° 59

ตารางที่ 7.3 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ....................63

คำอธิบายสัญลักษณ์

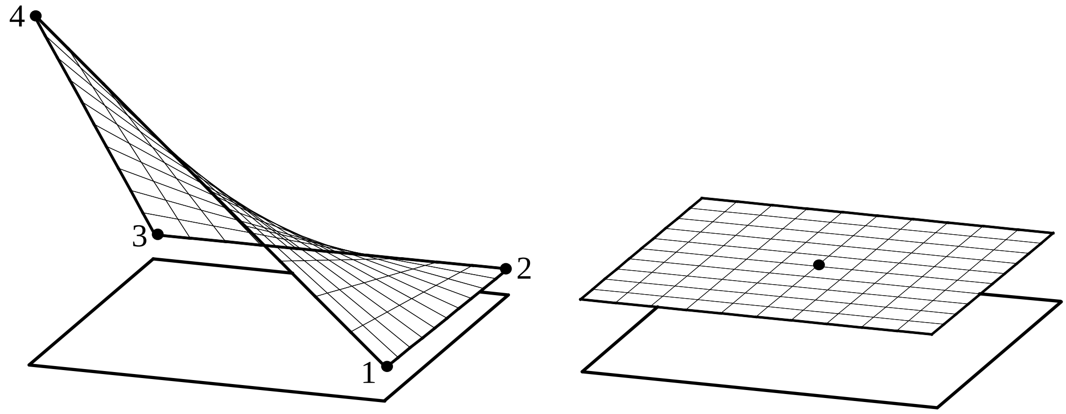
A	พื้นที่ของเอลิเมนต์
a	ความเร่ง
c_v	ความจุความร้อนจำเพาะที่ปริมาณคงที่
c_p	ความจุความร้อนจำเพาะที่ความดันคงที่
c	ความเร็วเสียง
$\dot{E}$	อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานในก้อนของไหล
e	พลังงานภายใน
F	แรง
F_I	ปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดในแนวแกน x
F_V	ปริมาณฟลักซ์แบบหนืดในแนวแกน x
f	แรงเนื่องมาจากน้ำหนักของของไหล
G_I	ปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืดในแนวแกน y
G_V	ปริมาณฟลักซ์แบบหนืดในแนวแกน y
$\hat{i}$	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน x ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
$[J]$	เมทริกซ์แบบยาโคบี
$\hat{j}$	ทิศทางโคซายน์ในแนวแกน y ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
k	สัมประสิทธิ์การนำความร้อน
L	ความยาวของเอลิเมนต์ตลอดขอบทางไหลออก
M	ค่ามัคนัมเบอร์
m	มวล
N	ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์
$\vec{n}$	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย
p	ความดัน
$\dot{Q}$	ปริมาณฟลักซ์ความร้อน
q	ปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อน
R	ค่าคงตัวสากลของแก๊ส
s	ขอบของเอลิเมนต์
T	อุณหภูมิ

t	เวลา
U	ตัวแปรอนุรักษ์
u	ความเร็วในแนวแกน x
V	ความเร็วรวม
v	ความเร็วในแนวแกน y
$\dot{W}$	อัตราของงาน
x	พิกัดในแนวราบ
y	พิกัดในแนวตั้ง
ρ	ความหนาแน่นของของไหล
σ	ความเค้นในแนวตั้งฉาก
τ	ความเค้นเฉือน
μ	ความหนืดเทียมพลศาสตร์
λ	ค่าความหนืดที่สอง
ε	พลังงานรวม
γ	อัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาณคงที่
α	ตัวประกอบความปลอดภัย
ξ	ระยะในแนวนอนของพิกัดธรรมชาติ
η	ระยะในแนวดิ่งของพิกัดธรรมชาติ
κ	ค่าคงที่ของแลปิดัส
θ	ค่ามุมของของไหลที่กระทบกับพื้น
β	ค่ามุมคลื่นช็อกเอียงกับทิศทางของการไหล

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์

ในปัจจุบันงานทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ(Computational Fluid Dynamics) ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในการออกแบบงานทางด้านวิศวกรรมหรือการศึกษางานทางด้านวิทยาศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับของไหลเป็นอย่างมาก เนื่องจากการออกแบบงานด้วยกระบวนการดังกล่าวได้ช่วยลดเวลาและค่าใช้จ่ายลงไปอย่างมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการทดลองแต่เพียงอย่างเดียวเหมือนในอดีตที่ผ่านมา ในขณะที่ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ (high-speed compressible flow) เป็นปัญหาหนึ่งที่นิยมใช้กระบวนการทางด้านพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลเพื่อคำนวณหาค่าความหนาแน่น ความดัน ความเร็ว อุณหภูมิ ฯลฯ ที่สภาวะการไหลต่าง ๆ ซึ่งปัญหาดังกล่าวจะมีค่าความหนาแน่นไม่คงที่โดยจะเปลี่ยนแปลงไปตามสภาวะการไหลของปัญหานั้น ๆ และมักจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันบริเวณคลื่นช็อก (shock wave) ทำให้เกิดความยากลำบากในการคำนวณหาผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงเป็นอย่างมาก โดยในช่วงเวลาที่ผ่านมาได้มีการนำเอาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (numerical method) มาใช้ในวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ โดยระเบียบวิธีที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากได้แก่ ระเบียบวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (finite difference method) [1] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ แต่อาจจะเกิดความยากลำบากในการนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนมาก ๆ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) [2] เป็นระเบียบวิธีที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้เป็นอย่างดี เช่น วิธีเพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin algorithm) วิธีกำลังสองต่ำสุด (least squares algorithm) วิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (Characteristic-based split algorithm) วิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (Taylor-Galerkin algorithm) เป็นต้น และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม (finite volume method) [3] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่สามารถวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้เช่นเดียวกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่ระเบียบวิธีการทั้งสองจะมีวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณที่แตกต่างกัน โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเป็นการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณที่ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อภายในโดเมนการไหล ในขณะที่ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุมจะเป็นการคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์ภายในโดเมนการไหล ซึ่งทำให้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะมีความเที่ยงตรงมากกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม ดังแสดงในรูปที่ 1.1



(ก) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

รูปที่ 1.1 เปรียบเทียบการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมระหว่าง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม

ในขณะที่การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยส่วนมากมักจะนิยมใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมในการวิเคราะห์ปัญหา เนื่องจากมีความสะดวกในการประยุกต์ใช้งานและสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนทั่วไปได้ ซึ่งมีลักษณะการกระจายของผลเฉลยเป็นแบบแผ่นเรียบ (flat plane) เมื่อเปรียบเทียบกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีการลักษณะการกระจายของผลเฉลยเป็นแบบเชิงเส้นคู่ (bilinear) จะพบว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะมีลักษณะการกระจายของผลเฉลยที่มีลักษณะสมจริงมากกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเนื่องจากปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้มักจะเกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันบริเวณคลื่นช็อก ซึ่งอาจจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเกิดการสั่น (oscillation) อันเนื่องมาจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินไป ส่งผลให้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความคลาดเคลื่อนไปจากผลลัพธ์ที่แท้จริง ดังนั้น เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำ จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณคลื่นช็อก เพื่อให้สามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ แต่ในทางปฏิบัตินั้นรูปร่างและตำแหน่งของคลื่นช็อกไม่สามารถทราบล่วงหน้าได้ หากใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมนการไหลจะส่งผลต่อเวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้ในการคำนวณมากขึ้น ดังนั้น เพื่อให้ได้มาซึ่งผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำรวมทั้งใช้เวลาและหน่วยความจำในการคำนวณให้น้อยลงจึงจำเป็นที่จะต้องเลือกใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มากและใช้เอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อย วิธีการหนึ่งที่ได้รับความนิยมในการแก้ปัญหานี้คือ การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive remeshing technique) [4] เข้ากับระเบียบวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหล

งานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอ ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัว โดยประดิษฐ์สมการไฟไนต์-

เอลิเมนต์จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในรูปแบบอนุรักษ์ (conservation form) โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ พร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ และช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

1.2.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

1.2.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

1.2.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

1.2.4 ศึกษาและประยุกต์ใช้เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

1.3 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

1.3.1 ศึกษาพฤติกรรมของไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียงใน 2 มิติ

1.3.2 พิจารณาลักษณะการไหลแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

1.3.3 พิจารณาการไหลภายใต้สภาวะอยู่ตัว

1.3.4 เลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

1.4 วิธีการดำเนินงานวิทยานิพนธ์

1.4.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์

1.4.2 ศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน

1.4.3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดใน 2 มิติ

1.4.4 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน

1.4.5 ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยการนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดที่มีผลเฉลยแม่นตรง

1.4.6 ประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน เพื่อเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์

1.4.7 นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้แก้ปัญหาการไหลที่มีลักษณะซับซ้อนมากขึ้น เพื่อแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน

1.4.8 สรุปผลที่เกิดขึ้นในการทำวิทยานิพนธ์และข้อเสนอแนะ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 มีความเข้าใจระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน โดยการใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ

1.5.2 มีความเข้าใจในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

1.5.3 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ที่มีรูปร่างซับซ้อนได้

1.5.4 สามารถนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นไปใช้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วๆ ไป

1.5.5 ลดเวลาและหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ในการคำนวณด้วยการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์

1.5.6 เป็นแนวทางการศึกษา วิจัย เกี่ยวกับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ต่อไปในอนาคต

บทที่ 2
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์

2.1 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ดังที่ได้กล่าวไว้มาแล้วว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่มีลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณที่มีความเที่ยงตรงมากกว่าระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุม และสามารถวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ดีกว่าระเบียบวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง ดังนั้นในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงเฉพาะระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้รับความนิยมนำมาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ โดยในอดีตได้มีผู้ศึกษาเป็นจำนวนมาก เช่น F. P. Brueckner et al. [5] ได้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพทรอฟ-กาเลอร์คิน (Petrov-Galerkin finite element method) สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ทั้งมีความหนืดและไม่มีความหนืด โดยใช้วิธีออยเลอร์แบบไปข้างหน้า (forward Euler method) และวิธีรุงเงอ-คุททาอันดับสอง (second-order Runge-Kutta method) ในการสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิดที่เกี่ยวข้องกับเวลา ซึ่งพบว่า เป็นระเบียบวิธีที่มีความแม่นยำในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ระเบียบวิธีหนึ่ง ในขณะที่ F. Taghaddosi et al. [6] ได้เสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองต่ำสุด (least-squares finite element method) สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดใน 2 มิติ โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้นหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์

O. C. Zienkiewicz et al. [7] ได้ประดิษฐ์ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหล โดยแบ่งการคำนวณออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ ใช้วิธีแคแร็กเทอร์ริสทิค-กาเลอร์คิน (characteristic Galerkin method) เพื่อทำการแบ่งย่อยช่วงเวลา (time discretization) และใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residual) เพื่อทำการแบ่งย่อยระยะทาง (spatial discretization) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสามารถแก้ปัญหาการไหลได้อย่างครอบคลุมทั้งปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้และอัดตัวไม่ได้ ทั้งแบบมีความหนืดและไม่มีความหนืด ต่อมา O. C. Zienkiewicz et al [8] ได้นำมาวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ด้วยวิธีแบบชัดแจ้ง (explicit algorithm) และเลือกใช้เอลิเมนต์อันดับหนึ่งและสองในการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์สามเหลี่ยม จากการศึกษาพบว่า ผลลัพธ์มีความแม่นยำมากขึ้นโดยที่ไม่ต้องเพิ่มความหนืดเทียม ถัดมา R. Codina et al. [9] ได้นำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ด้วยวิธีแบบกึ่งปริยาย (simi-implicit algorithm) จากนั้น P. Nithiarasu et al. [10] ได้นำไปศึกษาปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด โดยการสร้างสมการไฟไนต์-

เอลิเมนต์ 4 วิธีตามรูปแบบของการเพิ่มความหนืดเทียม และได้ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ ถัดจากนั้น B. V. K. Satya Sai et al. [11] ได้นำไปศึกษาปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้เปรียบเทียบกับวิธี TVD และ MUSCL พบว่า วิธีดังกล่าวจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธี TVD และ MUSCL ต่อจากนั้น O. C. Zienkiewicz et al. [12] ได้นำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ด้วยวิธีแบบกึ่งปริยายพร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม และ ปริญญา บุญมาเลิศ [13] ได้นำมาวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดในสภาวะอยู่ตัวใน 2 มิติ โดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ (adaptive remeshing technique) พบว่า ระเบียบวิธีดังกล่าวมีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ที่มีลักษณะซับซ้อนมาก ๆ และช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ

2.2 การวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้โดยใช้วิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน

ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คินได้รับการพัฒนาจนได้ได้ว่าเป็นระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีประสิทธิภาพระเบียบวิธีหนึ่งในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ คิดค้นขึ้นครั้งแรกโดย Donea J. [14] สำหรับใช้วิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการพาของตัวแปรสเกลาร์โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Tayler series) ต่อมา Lohner R., Morkan K. และ Zienkiewicz O.C. [15, 16] ได้นำระเบียบวิธีดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ใน 2 มิติ โดยเลือกใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินแบบสองขั้น (two step) เนื่องจากมีประสิทธิภาพดีกว่าแบบขั้นเดียว (one step) พร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ จาการศึกษาพบว่า ระเบียบวิธีดังกล่าวมีประสิทธิภาพในด้านเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (CPU sec/grid point/time step) ดีกว่าระเบียบวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง ในขณะที่ K. S. Bey et al. [17] ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดเพื่อใช้ในการออกแบบยานอวกาศ โดยใช้ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คินร่วมกับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม จากการศึกษาพบว่าระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ปรากฏในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ให้อยู่ในรูปแบบปิด (closed-form) ซึ่งช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณได้มาก ต่อมา E. A. Thornton et al. [18] ได้นำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้และมีความหนืด

J. T. Oden et al. [19] ได้ศึกษาปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ด้วยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน เพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะไม่อยู่ตัว (unsteady state) โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมพร้อมทั้งปรับขนาดเอลิเมนต์ด้วยระเบียบวิธีแบบเอ็ช (*h* method) ต่อมา G. Bono and A. M. Awruch [20] ได้ใช้ระเบียบวิธีเทย์เลอร์-

กาเลอร์คินในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ใน 3 มิติ โดยใช้เอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งประกอบด้วย 8 จุดต่อ และได้ปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ โดยการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่อใหม่ (nodal re-allocation) แต่คงไว้ซึ่งจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์เท่าเดิม พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำมากขึ้น และ วิโรจน์ ลิ่มตระการ [21] ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ทั้งมีความหนืดและไม่มีความหนืด โดยใช้วิธีอัปวินด์เซลล์-เซนเตอร์ (Upwind cell-centered algorithm) และวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน สำหรับทำนายพฤติกรรมการไหลความเร็วสูงโดยใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมพร้อมทั้งทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ จากการศึกษาพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีดังกล่าวให้ค่าที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง และช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณ

2.3 บทสรุปแนวทางการทำวิทยานิพนธ์

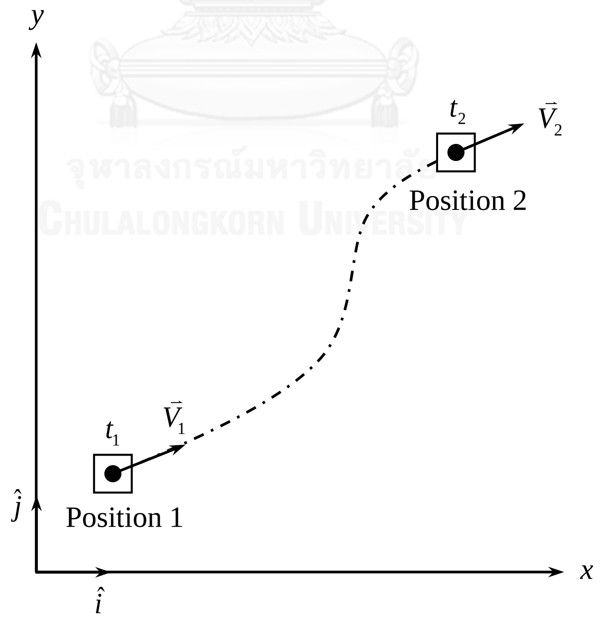
ในช่วงเวลาที่ผ่านมา งานวิจัยที่เกี่ยวกับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยส่วนมาก ได้มีความพยายามในการที่จะเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ และในขณะเดียวกันก็พยายามที่จะลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณลงด้วยวิธีการต่าง ๆ เช่น การหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลข การปรับขนาดเอลิเมนต์ เป็นต้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะนำเสนอระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน ซึ่งสามารถหลีกเลี่ยงการอินทิเกรตเชิงตัวเลขได้ เนื่องจากเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ปรากฏในระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปิดได้ทั้งหมด พร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์และช่วยลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

บทที่ 3
ทฤษฎีพื้นฐานของการไหล

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาการไหลใน 2 มิติ จะประกอบด้วยสมการเชิงอนุรักษ์มวล สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และสมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้จะเรียกว่า ระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ [3] ซึ่งมีความจำเป็นอย่างมากที่จะต้องมีความเข้าใจในความหมายทางกายภาพของแต่ละพจน์ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ และในหัวข้อต่อไปนี้จะอธิบายที่มาของพจน์ต่างๆ และขั้นตอนการประดิษฐ์สมการ ดังนี้

3.1 ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์

เพื่ออธิบายความหมายของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ รูปที่ 3.1 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของก้อนของไหลก้อนเล็ก ๆ จากตำแหน่ง 1 ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง 2 ที่เวลา t_2 บนพิกัด $x-y$ ในขณะที่ก้อนของไหลเคลื่อนที่ไปนั้น ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของก้อนของไหลจะเกิดการเปลี่ยนแปลงไปด้วย โดยขึ้นอยู่กับตำแหน่งและเวลา



รูปที่ 3.1 เส้นทางการเคลื่อนที่ของของไหลก้อนเล็ก ๆ จากตำแหน่ง 1 ที่เวลา t_1 ไปยังตำแหน่ง 2 ที่เวลา t_2

ยกตัวอย่างเช่น ค่าความหนาแน่น (density) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตำแหน่งและเวลาได้ดังนี้

$$\rho = \rho(x, y, t) \tag{3.1}$$

ทำให้สามารถเขียนค่าความหนาแน่นของก้อนของไหลที่ตำแหน่ง 1 ได้ดังนี้

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, t_1) \tag{3.2}$$

และเมื่อก้อนของไหลเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง 2 สามารถเขียนค่าความหนาแน่นได้ดังนี้

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, t_2) \tag{3.3}$$

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นเป็นไปอย่างต่อเนื่อง (continuous) ค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่ง 2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าความหนาแน่นที่ตำแหน่ง 1 โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ [22] ได้ดังนี้

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \Delta x + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \Delta y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 \Delta t + H.O.T. \tag{3.4}$$

โดย $H.O.T.$ แทนพจน์ต่าง ๆ ที่ประกอบด้วย Δx, Δy และ Δt ที่มีอันดับสูงขึ้นไป (higher order terms) หากย้าย ρ_1 มาทางด้านซ้ายของสมการ (3.4) แล้วทำการหารตลอดด้วย Δt จะได้

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 + H.O.T. \tag{3.5}$$

และเมื่อค่า $\Delta t \to 0$ กล่าวคือ ตำแหน่ง 2 นั้นจะเลื่อนเข้าสู่ตำแหน่ง 1 พจน์ต่าง ๆ ในสมการ (3.5) จะมีค่าดังต่อไปนี้

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta t} = \frac{D\rho}{Dt} \tag{3.6}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = u \tag{3.7}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = v \tag{3.8}$$

โดย u และ v แทนความเร็วย่อยในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ความเร็วย่อย u และ v นี้ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของพิกัด x, y และเวลา t ในขณะที่พจน์ $H.O.T.$ ซึ่งประกอบด้วย Δx, Δy และ Δt ที่ต่างลู่เข้าสู่ศูนย์ ดังนั้น สมการ (3.5) จึงกลายมาเป็น

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.9}$$

ความสัมพันธ์ดังแสดงในสมการ (3.9) สามารถประยุกต์เข้ากับค่าของคุณสมบัติอื่น ๆ ได้ ดังนั้น จึงสามารถเขียนสมการของความสัมพันธ์โดยทั่วไปได้ว่า

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.10}$$

หรือ

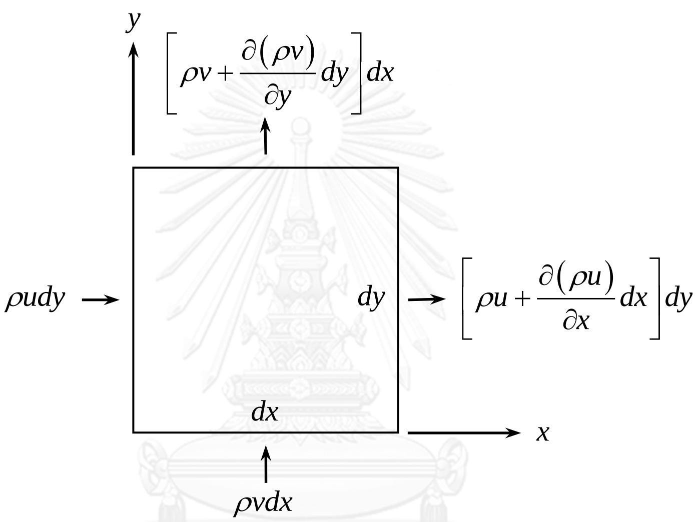
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right) \tag{3.11}$$

โดย $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j}$ (3.12)

$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$ (3.13)

3.2 สมการเชิงอนุรักษ์มวล

เริ่มจากการพิจารณาการไหลที่เกิดขึ้นให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก (cartesian coordinate system) โดยของไหลไหลผ่านเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ที่มีความกว้าง dx และ dy วางตัวอยู่ในโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงฟลักซ์ของมวลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล

เมื่อพิจารณาการไหลในแนวแกน x จะพบว่า ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ไหลผ่านกรอบขนาดเล็กที่ตรึงอยู่ในโดเมนของการไหล มีปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มในแนวแกน x คือ

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dy - \rho u dy = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdy \quad (3.14)$$

ปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มในแนวแกน y คือ

$$\left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right)dx - \rho v dx = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy \quad (3.15)$$

และเพื่อให้เป็นไปตามหลักการอนุรักษ์มวล คือ มวลไม่มีการสูญหายไป ดังนั้น จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงของมวลหรือปริมาณฟลักซ์ของมวลที่ลดลง คือ

$$\textit{mass rate reduction} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy \quad (3.16)$$

ดังนั้น จะได้ว่าปริมาณฟลักซ์ของมวลที่เพิ่มขึ้นจากการไหลผ่านขอบ dx และ dy จะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ของมวลในกรอบเล็ก ๆ ที่ลดลง ซึ่งจากสมการ (3.14)-(3.16) สามารถเขียนสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho x)}{\partial x}dxdy+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dxdy=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdy \tag{3.17}$$

และหารสมการ (3.17) ตลอดด้วย $dxdy$ แล้วย้ายข้างและจัดสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{3.18}$$

หรือเขียนในรูปแบบอนุรักษ์ ดังนี้

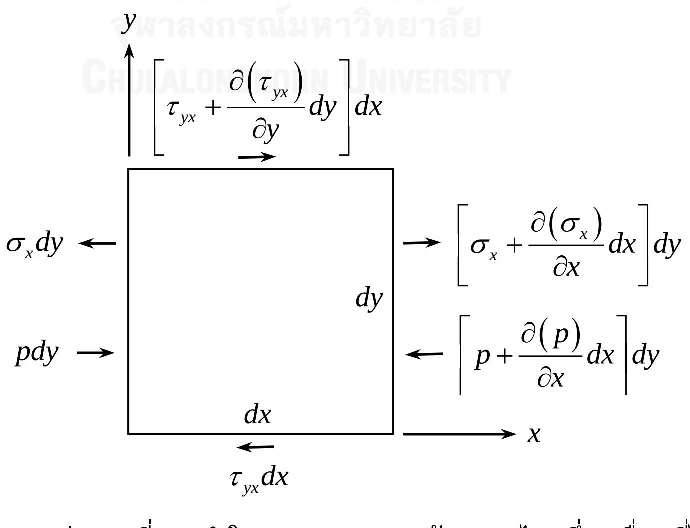
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0 \tag{3.19}$$

โดย
$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{3.20}$$

$$\vec{V}=u\hat{i}+v\hat{j} \tag{3.21}$$

3.3 สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม

เช่นเดียวกับสมการเชิงอนุรักษ์มวล เริ่มจากการพิจารณาเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ที่มีความกว้าง dx และ dy วางตัวอยู่ในโดเมนของการไหล ดังแสดงในรูปที่ 3.3 จากกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตัน มีนิยามว่า “แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคของของไหลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม” ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้



รูปที่ 3.3 แสดงแรงต่าง ๆ ที่กระทำในแนวแกน x บนก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับของไหล

กฎข้อที่สองของนิวตัน เมื่อพิจารณาแรงในแนวแกน x จะได้

$$F_x=ma_x \tag{3.22}$$

โดย F_x แทนแรงรวมในแนวแกน x, m แทนมวลของก้อนของไหล, a_x แทนความเร่งของก้อนของไหลในแนวแกน x และแรงรวมที่กระทำที่ผิวต่าง ๆ ในแนวแกน x ของก้อนของไหล คือ

$$\begin{aligned} \textit{surface force } &= \left[p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy+\left[\left(\sigma_x+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)-\sigma_x\right]dy \\ &\quad +\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)-\tau_{yx}\right]dx \end{aligned} \tag{3.23}$$

หรือ

$$\textit{surface force } = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdy+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dxdy \tag{3.24}$$

นอกจากนี้ยังมีแรงเนื่องมาจากน้ำหนักของของไหลเองในแนวแกน x คือ

$$\textit{body force } = \rho f_x dxdy \tag{3.25}$$

ในขณะที่มวลของก้อนของไหลสามารถเขียนได้ดังนี้

$$m=\rho dxdy \tag{3.26}$$

เนื่องจากมวลที่พิจารณากำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล ดังนั้น ความเร่ง a_x คือ ค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ (substantial derivative) ของ u ดังนี้

$$a_x=\frac{Du}{Dt} \tag{3.27}$$

แทนสมการ (3.24), (3.25), (3.26) และ (3.27) ลงในสมการ (3.22) จะได้

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdy+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dxdy+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dxdy+\rho f_x dxdy=\rho dxdy\frac{Du}{Dt} \tag{3.28}$$

หารสมการ (3.28) ตลอดด้วย $dxdy$ จะได้

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\rho f_x=\rho\frac{Du}{Dt} \tag{3.29}$$

พจน์ทางด้านขวาของสมการ (3.29) จะอยู่ในรูปแบบอนุพันธ์สัมบูรณ์ซึ่งสามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดาได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ในสมการ (3.10) ประยุกต์เข้ากับความหนาแน่น ρ และความเร็ว u ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\vec{V}\cdot\vec{\nabla}u \tag{3.30}$$

เมื่อแทนค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์จากสมการ (3.30) ลงในสมการ (3.29) แล้วจะทำให้ทุกพจน์ในสมการ (3.29) ล้วนอยู่ในรูปแบบของอนุพันธ์ธรรมดา สามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุรักษ์มวลได้ อย่างไรก็ตาม พจน์ทั้งสองทางด้านขวาของสมการ (3.30) ยังสามารถทำให้ง่ายขึ้นได้อีกโดยใช้ความสัมพันธ์ของสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=\rho\frac{\partial(u)}{\partial t}+u\frac{\partial(\rho)}{\partial t} \tag{3.31}$$

ดังนั้น

$$\rho\frac{\partial(u)}{\partial t}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\frac{\partial(\rho)}{\partial t} \tag{3.32}$$

และจากความสัมพันธ์

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right)=u\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right)+\left(\rho\vec{V}\right)\cdot\vec{\nabla}u \tag{3.33}$$

ดังนั้น

$$\rho\vec{V}\cdot\vec{\nabla}u=\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right)-u\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) \tag{3.34}$$

แทนสมการ (3.32) และ (3.34) ลงในสมการ (3.30) จะได้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right)-u\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right) \tag{3.35}$$

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}-u\left(\frac{\partial(\rho)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{V}\right)\right)+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) \tag{3.36}$$

จะพบว่าพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (3.36) เป็นสมการเชิงอนุรักษ์มวลทำให้สามารถจัดสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right) \tag{3.37}$$

เมื่อแทนสมการ (3.37) ลงในสมการ (3.29) จะได้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho u\vec{V}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\rho f_x \tag{3.38}$$

ในทำนองเดียว สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน y สามารถเขียนได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho v\vec{V}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\rho f_y \tag{3.39}$$

พจน์ทางด้านขวาของสมการ (3.38) และ (3.39) จะมีพจน์ที่เกี่ยวกับความเค้น ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปของตัวแปรต้นที่ประกอบด้วย ความหนาแน่น ความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และพลังงานรวมได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (velocity gradient) ซึ่งเสนอโดย ไอแซ็ก นิวตัน (Isaac Newton) ซึ่งเป็นของไหลแบบนิวโทเนียน (newtonian fluid) [3] ดังนี้

$$\sigma_x=\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.40ก}$$

$$\sigma_y=\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.40ข}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.40ค}$$

โดย μ แทนค่าความหนืดพลศาสตร์ (dynamic viscosity) หรือบางครั้งเรียกว่าค่าความหนืดที่หนึ่ง (first viscosity) และ λ แทนค่าความหนืดที่สอง (second viscosity) ซึ่งสโตกส์ได้ตั้งสมมุติฐาน

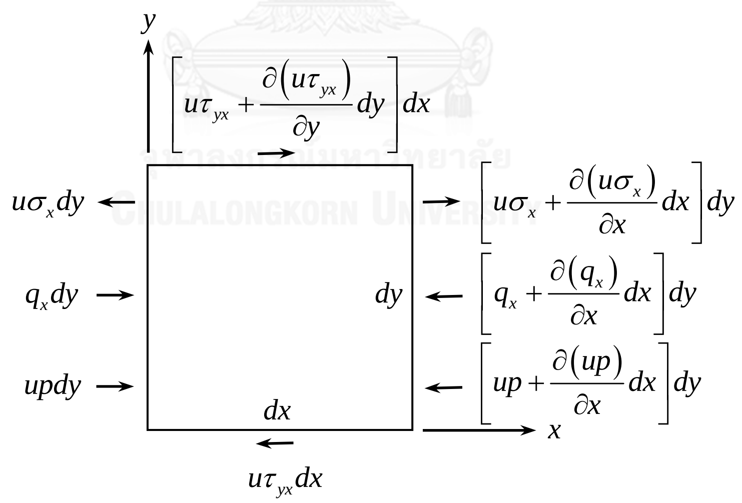
(Stokes's hypothesis) ไว้ว่า $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ และเมื่อแทนสมการ (3.40ก-ค) ในสมการ (3.38) และ (3.39) จะได้ สมการเชิงอนุรักษ์โมเมนตัม ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \rho f_x \tag{3.41ก}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \rho f_y \tag{3.41ข}$$

3.4 สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานสามารถสร้างขึ้นได้จากการใช้กฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งกล่าวไว้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหลจะเท่ากับปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหลบวกกับอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนของไหลนั้น รูปที่ 3.4 แสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในแนวแกน x ที่ไหลผ่านก้อนของไหลที่มีขนาดความกว้าง dx และ dy ที่กำลังเคลื่อนที่ไปกับการไหล



รูปที่ 3.4 แสดงงานที่เกิดขึ้นและปริมาณฟลักซ์ในแนวแกน x ที่ไหลผ่านก้อนของไหล ซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล

จากกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\dot{E} = \dot{Q} + \dot{W} \tag{3.42}$$

โดย $\dot{E}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหล

$\dot{Q}$ แทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหลและความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนของไหล

$\dot{W}$ แทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ บนก้อนของไหล

เริ่มพิจารณาจากพจน์ $\dot{E}$ ซึ่งแทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในก้อนของไหล ซึ่งประกอบไปด้วยพลังงานภายใน (internal energy) ซึ่งเกิดจากโมเลกุลภายในนั้นมีการเคลื่อนไหว และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ซึ่งเกิดจากของไหลนั้นมีการเคลื่อนที่ ดังนั้น จะได้พลังงานรวม (total energy) ในก้อนของไหลซึ่งเคลื่อนที่ไปกับการไหล คือ

$$\dot{E} = \rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2} \right) dxdy \tag{3.43}$$

จากนั้นพิจารณาพจน์ $\dot{Q}$ ซึ่งแทนปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ให้แก่ก้อนของไหลและความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนของไหลนั้น จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

ปริมาณความร้อนที่เกิดขึ้นบนปริมาตรของก้อนของไหล

$$\textit{volumetric heating} = \rho \bar{Q} dxdy \tag{3.44}$$

และปริมาณฟลักซ์สุทธิอันเนื่องมาจากการถ่ายเทความร้อนในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

$$\left[q_x - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdy \tag{3.45ก}$$

$$\left[q_y - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dxdy \tag{3.45ข}$$

ดังนั้น จะได้ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนของไหล คือ

$$\dot{Q} = \left[\rho \bar{Q} - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} \right] dxdy \tag{3.46}$$

แต่จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) [3] ปริมาณฟลักซ์ความร้อน q_x และ q_y นั้นขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ดังนี้

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3.47}$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3.48}$$

โดย k แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) ของของไหล ดังนั้น ปริมาณความร้อนทั้งหมดที่เกิดขึ้นบนก้อนของไหล คือ

$$\dot{Q} = \left[\rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dxdy \tag{3.49}$$

และพจน์สุดท้ายพจน์ $\dot{W}$ ซึ่งแทนอัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่างๆ ที่กระทำบนก้อนของไหล ได้แก่ แรงอันเนื่องมาจากน้ำหนักของก้อนของไหลเอง คือ

$$\textit{work done by body force } = \rho \bar{f} \cdot \bar{V} dxdy \tag{3.50}$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความดัน p ที่กระทำบนด้าน dy ในแนวแกน x คือ

$$\left[up - \left(up + \frac{\partial(up)}{\partial x} dx \right) \right] dy = -\frac{\partial(up)}{\partial x} dxdy \tag{3.51}$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนด้าน dy ในแนวแกน x คือ

$$\left[\left(u\sigma_x + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dx \right) - u\sigma_x \right] dy = \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} dxdy \tag{3.52ก}$$

อัตราของงานที่เกิดขึ้นจากความเค้นเฉือน τ_{yx} ที่กระทำบนด้าน dx ในแนวแกน x คือ

$$\left[\left(u\tau_{yx} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dy \right) - u\tau_{yx} \right] dx = \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} dxdy \tag{3.52ข}$$

ในทำนองเดียวกัน อัตราของงานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ ที่กระทำบนก้อนของไหลในแนวแกน y ก็สามารถสร้างได้ในลักษณะเดียวกัน ดังนั้น จะได้อัตรางานทั้งหมดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงต่าง ๆ บนก้อนของไหล ดังนี้

$$\dot{W} = \left[-\left(\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} \right) + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} \right] dxdy + \rho \bar{f} \cdot \bar{V} dxdy \tag{3.53}$$

แทนค่าสมการ (3.43), (3.49) และ (3.53) ลงในสมการ (3.42) และหารสมการตลอดด้วย $dxdy$ จะได้

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \rho \bar{Q} + \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} + \frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} \tag{3.54}$$

สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานที่สร้างขึ้นมาได้นี้ ยังอยู่ในรูปของค่าอนุพันธ์สัมบูรณ์ ซึ่งจำเป็นจะต้องเปลี่ยนให้มาอยู่ในรูปอนุพันธ์ธรรมดา จึงจะสามารถนำไปใช้ร่วมกับสมการเชิงอนุรักษ์มวลและโมเมนตัมได้

เมื่อแทน u ด้วย $e + \frac{V^2}{2}$ ลงในสมการ (3.10) จะได้สมการเชิงอนุรักษ์พลังงานที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ธรรมดา ดังนี้

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] \tag{3.55}$$

แทนสมการ (3.55) ลงในสมการ (3.54) จะได้ สมการเชิงอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\vec{\nabla}\cdot\left[\rho\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\right]=\rho\bar{Q}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial(up)}{\partial x}-\frac{\partial(vp)}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial(u\sigma_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y}+\frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x}+\frac{\partial(v\sigma_y)}{\partial y}+\rho\vec{f}\cdot\vec{V} \qquad (3.56)$$

3.5 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับการไหลในรูปแบบอนุรักษ์

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ได้ ซึ่งจะละพจน์เนื่องจากน้ำหนักในตัวของของไหลเอง และพจน์ของการผลิตความร้อนได้เอง จะได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ในรูปแบบอนุรักษ์ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}\{U\}+\frac{\partial}{\partial x}\{F_I-F_V\}+\frac{\partial}{\partial y}\{G_I-G_V\}=0 \qquad (3.57)$$

โดย $\{U\}$ แทนเวกเตอร์ของตัวแปรอนุรักษ์ (conservation variables) ดังนี้

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho\varepsilon\end{Bmatrix} \qquad (3.58)$$

โดย $\{F_I\}$ และ $\{G_I\}$ แทนเวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบไม่หนืด (inviscid flux) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\{F_I\}=\begin{Bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho u\varepsilon+pu\end{Bmatrix} \quad ;\{G_I\}=\begin{Bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho v\varepsilon+pv\end{Bmatrix} \qquad (3.59)$$

โดย $\{F_V\}$ และ $\{G_V\}$ แทนเวกเตอร์ของปริมาณฟลักซ์แบบหนืด (viscous flux) ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\{F_V\}=\begin{Bmatrix}0\\ \sigma_x\\ \tau_{xy}\\ u\sigma_x+v\tau_{xy}-q_x\end{Bmatrix} \quad ;\{G_V\}=\begin{Bmatrix}0\\ \tau_{xy}\\ \sigma_y\\ u\tau_{xy}+v\sigma_y-q_y\end{Bmatrix} \qquad (3.60)$$

โดย ε แทนพลังงานรวม (total energy) ซึ่งประกอบด้วยพลังงานภายใน e (internal energy) และพลังงานจลน์ (kinetic energy) ดังนี้

$$\varepsilon=e+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right) \qquad (3.61)$$

โดย $$e=c_vT \qquad (3.62)$$

หากการไหลนั้นเป็นแก๊สอุดมคติ (ideal gas) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและอุณหภูมิดังนี้

$$p = \rho RT \tag{3.63}$$

โดย R แทนค่าคงตัวสากลของแก๊ส (universal gas constant) ซึ่งมีความสัมพันธ์กับค่าความร้อนจำเพาะเมื่อความดันและปริมาณคงที่ ดังนี้

$$R = \left(c_p - c_v\right) = \left(\gamma - 1\right)c_v \tag{3.64}$$

โดย γ แทนอัตราส่วนของค่าความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาณคงที่ จะได้ความสัมพันธ์ของค่าความหนาแน่น ρ ค่าความเร็ว u, v และค่าพลังงานรวม ε กับค่าความดัน p สำหรับแก๊สอุดมคติ ดังนี้

$$p = \left(\gamma - 1\right)\rho\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right) \tag{3.65}$$

3.6 เงื่อนไขขอบเขต

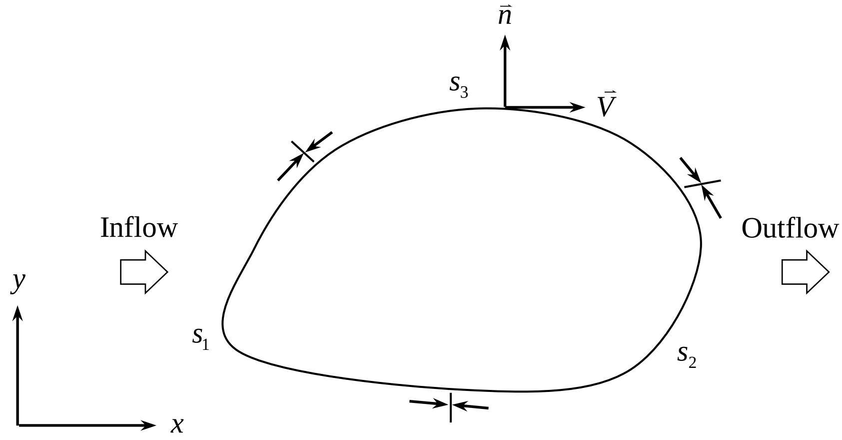
ในการวิเคราะห์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจำเป็นต้องมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) และเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ที่เหมาะสมกับปัญหาการไหล โดยเงื่อนไขขอบเขตสำหรับการไหลด้วยความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ดังแสดงในรูปที่ 3.5 ประกอบด้วย

1. เงื่อนไขขอบเขตของการไหลเข้าด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic inflow) ตลอดขอบ s_1 จะกำหนดให้ค่าตัวแปรทั้งหมดมีค่าเท่ากับค่าเริ่มต้น (initial values) ดังนี้

$$\rho = \rho_0 \ , \ u = u_0 \ , \ v = v_0 \ , \ \varepsilon = \varepsilon_0 \tag{3.66}$$

2. เงื่อนไขขอบเขตการไหลออกด้วยความเร็วมากกว่าเสียง (supersonic outflow) ตลอดขอบ s_2 จะไม่มีการกำหนดคุณสมบัติใดๆ

3. เงื่อนไขขอบเขตการไหลในทิศทางขนานกับผนัง (solid wall) ตลอดขอบ s_3 ภายใต้สมมุติฐานของการไหลแบบไร้ความหนืด ดังนั้น จะกำหนดความเร็วให้อยู่ในทิศทางที่สัมผัส (tangent) กับผนังตลอดแนว ส่วนความเร็วในแนวตั้งฉากกับผนังตลอดแนวจะมีค่าเท่ากับศูนย์เสมอ $\left(\vec{V} \cdot \vec{n} = 0\right)$



รูปที่ 3.5 โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด

บทที่ 4
การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับปัญหาการไหลแบบอัดตัวได้ใน 2 มิติ เป็นระบบสมการที่แต่ละสมการจะขึ้นอยู่แก่กันและกัน (coupled equations) นอกจากนั้นสมการย่อยเหล่านี้ยังเป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear equations) และขึ้นอยู่กับเวลา (time-dependent) อีกด้วย ซึ่งจะทำให้เกิดความซับซ้อนในการคำนวณเป็นอย่างมาก สำหรับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน จัดเป็นระเบียบวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหลแบบอัดตัวได้ หลักการพื้นฐานของระเบียบวิธีนี้คือ การใช้อนุกรมเทย์เลอร์สร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิด (recurrence relations) ที่เกี่ยวข้องกับเวลา และในขณะเดียวกันก็ใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวข้องกับระยะ [3] ในโดเมนของการไหล ซึ่งจะแสดงรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

4.1 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

เพื่อให้เกิดความสะดวกในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์-เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินมากขึ้น จะทำการจัดสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ดังแสดงในสมการ (3.57) ให้อยู่ในรูปแบบสมการแบบอย่าง (typical equation) ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=0 \tag{4.1}$$

หรือ

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\right) \tag{4.2}$$

โดย $F=F_I-F_V$ และ $G=G_I-G_V$ สำหรับงานวิจัยนี้จะศึกษาเฉพาะการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ดังนั้น พจน์ที่เกี่ยวกับความหนืด (F_V,G_V) จะไม่ถูกนำมาพิจารณาในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน จะแบ่งการคำนวณจากช่วงเวลา t_n ไปยังเวลา t_{n+1} ออกเป็น 2 ช่วงเวลา คือการคำนวณหาค่าเฉลี่ยบนเอลิเมนต์ที่เวลา $t_{n+1/2}$ และการคำนวณหาค่าตัวแปรที่จุดต่อที่เวลา t_{n+1} ดังต่อไปนี้

การคำนวณที่เวลา $t_{n+1/2}$

เริ่มด้วยการประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์แบบผลต่างสืบเนื่องไปข้างหน้า (Forward difference) กับตัวแปรอนุรักษ์ (U) โดยกำหนดให้เปลี่ยนแปลงตามเวลา ดังนี้

$$U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)=U\left(x,y,t_n\right)+\frac{\partial U\left(x,y,t_n\right)}{\partial t_n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)+\frac{\partial^2 U\left(x,y,t_n\right)}{2!\partial t_n{}^2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2+\frac{\partial^3 U\left(x,y,t_n\right)}{3!\partial t_n{}^3}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3+\ldots \quad (4.3)$$

โดยใช้เพียงสองพจน์แรกของสมการ (4.3) เท่านั้น จะได้

$$U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)=U\left(x,y,t_n\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial U\left(x,y,t_n\right)}{\partial t} \quad (4.4)$$

แทนสมการ (4.2) ที่เวลา t_n ลงในสมการ (4.4) จะได้

$$U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)=U\left(x,y,t_n\right)-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial F\left(x,y,t_n\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(Gx,y,t_n\right)}{\partial y}\right) \quad (4.5)$$

หลังจากนั้นทำการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวกับระยะภายในโดเมนการไหลด้วยการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ดังนี้

$$\int_A W_i R dA=0 \quad (4.6)$$

โดยกำหนดฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) ให้มีค่าเท่ากับหนึ่ง $\left(W_i=1\right)$ และค่าความคลาดเคลื่อน (R) ที่เกิดขึ้นหรือเศษตกค้าง (Residual) มีค่าดังนี้

$$R=U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)-U\left(x,y,t_n\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial F\left(x,y,t_n\right)}{\partial x}+\frac{\partial G\left(x,y,t_n\right)}{\partial y}\right) \quad (4.7)$$

จากนั้นแทนค่า $W_i=1$ และสมการ (4.7) ลงในสมการ (4.6) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_A (1)\left[U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)-U\left(x,y,t_n\right)+\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial F\left(x,y,t_n\right)}{\partial x}+\frac{\partial G\left(x,y,t_n\right)}{\partial y}\right)\right]dA=0 \quad (4.8)$$

แล้วทำการจัดรูปสมการ (4.8) ใหม่จะได้

$$\int_A U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)dA=\int_A U\left(x,y,t_n\right)dA-\frac{\Delta t}{2}\int_A\frac{\partial F\left(x,y,t_n\right)}{\partial x}dA-\frac{\Delta t}{2}\int_A\frac{\partial G\left(x,y,t_n\right)}{\partial y}dA \quad (4.9)$$

โดยกำหนดลักษณะการกระจายของตัวแปร U และฟลักซ์ F และ G บนเอลิเมนต์ใดๆ ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ $\left(N_i\right)$ แต่ลักษณะการกระจายของตัวแปร U ที่เวลา $t_{n+1/2}$ จะสมมุติให้เป็นค่าคงที่ ดังนี้

$$U\left(x,y,t_{n+1/2}\right)=U_D{}^{n+1/2} \quad (4.10ก)$$

$$U\left(x,y,t_n\right)=\lfloor N(x,y)\rfloor\{U\}^n=\lfloor N\rfloor\{U\}^n \quad (4.10ข)$$

$$F\left(x,y,t_n\right)=\lfloor N(x,y)\rfloor\{F\}^n=\lfloor N\rfloor\{F\}^n \quad (4.10ค)$$

$$G\left(x,y,t_n\right)=\lfloor N(x,y)\rfloor\{G\}^n=\lfloor N\rfloor\{G\}^n \quad (4.10ง)$$

และเมื่อทำการอินทิเกรตสมการ (4.9) หลังจากแทนด้วยสมการ (4.10ก-ง) ลงไป จะได้สมการไฟไนต์-เอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยบนเอลิเมนต์ทุก ๆ เอลิเมนต์ภายในโดเมนการไหลดังนี้

$$AU_D^{n+1/2}=\int_A\lfloor N\rfloor dA\{U\}^n-\frac{\Delta t}{2}\int_A\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor dA\{F\}^n-\frac{\Delta t}{2}\int_A\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor dA\{G\}^n \tag{4.11}$$

สำหรับการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่ติดกับขอบของการไหลออกสามารถสร้างได้ในทำนองเดียวกันกับสมการ (4.11) โดยกำหนดให้ลักษณะการกระจายของตัวแปร U และฟลักซ์ F และ G ที่ขอบการไหลออกมีลักษณะเป็นเส้นตรง แต่ลักษณะการกระจายของตัวแปร U ที่ขอบการไหลออกที่เวลา $t_{n+1/2}$ จะสมมุติให้เป็นค่าคงที่ ดังนี้

$$U(x,y,t_{n+1/2})=U_s^{\,n+1/2} \qquad (4.12\text{ก})$$

$$U(x,y,t_n)=\lfloor N(s)\rfloor\{U\}^n=\lfloor N\rfloor\{U\}^n \qquad (4.12\text{ข})$$

$$F(x,y,t_n)=\lfloor N(s)\rfloor\{F\}^n=\lfloor N\rfloor\{F\}^n \qquad (4.12\text{ค})$$

$$G(x,y,t_n)=\lfloor N(s)\rfloor\{G\}^n=\lfloor N\rfloor\{G\}^n \qquad (4.12\text{ง})$$

เมื่อแทนสมการ (4.12ก-ง) ลงในสมการ 4.9 แล้วอินทิเกรตจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของด้านที่อยู่ติดกับขอบการไหลออก เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยที่ขอบการไหลออก ดังนี้

$$LU_s^{n+1/2}=\int_L\lfloor N\rfloor ds\{U\}^n-\frac{\Delta t}{2}\int_L\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial x}\right\rfloor ds\{F\}^n-\frac{\Delta t}{2}\int_L\left\lfloor\frac{\partial N}{\partial y}\right\rfloor ds\{G\}^n \tag{4.13}$$

การคำนวณที่เวลา t_{n+1}

สำหรับการคำนวณที่ช่วงเวลานี้เป็นการคำนวณหาค่าตัวแปรที่ตำแหน่งจุดต่อภายในโดเมนการไหล โดยจะทำการประยุกต์อนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้ง แต่จะเป็นอนุกรมเทย์เลอร์แบบผลต่างสืบเนื่องไปข้างหน้าและย้อนหลัง (Forward and Backward difference) ที่เวลา $t_{n+1/2}$ ซึ่งจะใช้เพียงสองพจน์แรกเช่นเดียวกับการคำนวณที่ช่วงเวลา $t_{n+1/2}$ ดังนี้

$$U(x,y,t_{n+1})=U(x,y,t_n)+\Delta t\frac{\partial U(x,y,t_{n+1/2})}{\partial t} \tag{4.14}$$

แทนสมการ (4.2) ที่เวลา $t_{n+1/2}$ ลงในสมการ (4.14) จะได้

$$U(x,y,t_{n+1})=U(x,y,t_n)-\Delta t\left(\frac{\partial F(x,y,t_{n+1/2})}{\partial x}+\frac{\partial G(x,y,t_{n+1/2})}{\partial y}\right) \tag{4.15}$$

หลังจากนั้นทำการประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรที่จุดต่อทุก ๆ จุดต่อภายในโดเมนการไหล โดยกำหนดฟังก์ชันน้ำหนักให้มีค่าเท่ากับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ $(W_i=N_i)$ และกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นดังนี้

$$R=U(x,y,t_{n+1})-U(x,y,t_n)+\Delta t\left(\frac{\partial F(x,y,t_{n+1/2})}{\partial x}+\frac{\partial G(x,y,t_{n+1/2})}{\partial y}\right) \tag{4.16}$$

จากนั้นแทนค่า $W_i=N_i$ และสมการ (4.16) ลงในสมการ (4.6) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังนี้

$$\int_A\{N\}\left[U(x,y,t_{n+1})-U(x,y,t_n)+\Delta t\left(\frac{\partial F(x,y,t_{n+1/2})}{\partial x}+\frac{\partial G(x,y,t_{n+1/2})}{\partial y}\right)\right]dA=0 \tag{4.17}$$

จัดรูปสมการ (4.17) ใหม่จะได้

$$\int_A \{N\} U(x,y,t_{n+1})\,dA = \int_A \{N\} U(x,y,t_n)\,dA - \Delta t \int_A \{N\}\left(\frac{\partial F(x,y,t_{n+1/2})}{\partial x} + \frac{\partial G(x,y,t_{n+1/2})}{\partial y}\right) dA \tag{4.18}$$

โดยกำหนดลักษณะการกระจายของตัวแปร U ที่เวลา t_{n+1} ดังนี้

$$U(x,y,t_{n+1}) = \lfloor N(x,y) \rfloor \{U\}^{n+1} = \lfloor N \rfloor \{U\}^{n+1} \tag{4.19}$$

เมื่อแทนสมการ (4.10ข) และ (4.19) ลงในสมการ (4.18) จะได้

$$\int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \{U\}^{n+1} = \int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \{U\}^{n} - \Delta t \int_A \{N\}\left(\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+1/2}}{\partial y}\right) dA \tag{4.20}$$

หลังจากนั้นจะทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) [2] ดังแสดงในสมการ (4.21) เข้ากับสมการ (4.20) ดังนี้

$$\int_A u\left(\nabla \cdot \vec{V}\right) dA = \int_s u\left(\vec{V} \cdot \vec{n}\right) ds - \int_A \left(\nabla u \cdot \vec{V}\right) dA \tag{4.21}$$

โดยเปรียบเทียบพจน์ที่สองทางด้านขวาของสมการ (4.20) กับสมการ (4.21) จะพบว่า

$$u = \{N\} \tag{4.22ก}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \tag{4.22ข}$$

$$\vec{V} = F^{n+1/2}\hat{i} + G^{n+1/2}\hat{j} \tag{4.22ค}$$

และ $$\vec{n} = \ell\hat{i} + m\hat{j} \tag{4.22ง}$$

เมื่อแทนสมการ (4.22ก-ง) ลงในสมการ (4.21) จะได้

$$\int_A \{N\}\left(\frac{\partial F^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial G^{n+1/2}}{\partial y}\right) dA = \int_L \{N\}\left(\ell F^{n+1/2} + m G^{n+1/2}\right) ds - \int_A \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} F^{n+1/2} + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} G^{n+1/2}\right) dA \tag{4.23}$$

และเมื่อแทนสมการ (4.23) ลงในสมการ (4.20) จะได้

$$\int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \{U\}^{n+1} = \int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \{U\}^{n} - \Delta t \int_L \{N\}\left(\ell F^{n+1/2} + m G^{n+1/2}\right) ds + \Delta t \int_A \left(\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} F^{n+1/2} + \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} G^{n+1/2}\right) dA \tag{4.24}$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$[M]\{U\}^{n+1} = [M]\{U\}^{n} + \{R_1\}^{n+1/2} + \{R_2\}^{n+1/2} \tag{4.25}$$

โดย $$[M] = \int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \tag{4.26}$$

$$\{R_1\}^{n+1/2} = \Delta t \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} dA F^{n+1/2} + \Delta t \int_A \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} dA G^{n+1/2} \tag{4.27}$$

$$\{R_2\}^{n+1/2} = -\Delta t \int_L \{N\} ds \left(\ell F^{n+1/2} + m G^{n+1/2} \right) \tag{4.28}$$

โดย $[M]$ แทนเมทริกซ์มวลแบบแนบนัย (consistent mass matrix) ซึ่งเมทริกซ์ดังกล่าวจะทำให้สมการในระบบสมการใหญ่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กัน ส่งผลให้ต้องใช้เวลาและหน่วยความจำในการคำนวณมาก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้เมทริกซ์มวลแบบรวมตัวที่จุดต่อ (lumped mass matrix) ซึ่งทำให้สมการในระบบสมการใหญ่จะไม่มีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กันทำให้ช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณ ส่วน ℓ และ m แทนทิศทางโคไซน์ (direction cosines) ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ที่ตั้งฉากกับขอบของการไหลออก

ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยทั่วไปมักเกิดการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันบริเวณคลื่นช็อก อาจเกิดการสั่นของผลลัพธ์ได้หากใช้ขนาดเอลิเมนต์ที่ใหญ่เกินไปในบริเวณดังกล่าว เพื่อลดระดับของการสั่นของผลลัพธ์จึงได้เพิ่มความหนืดเทียม (artificial viscosity) [3] เข้าไปในการคำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ซึ่งความหนืดเทียมจะอยู่ในรูปแบบของปริมาณฟลักซ์ความหนืดในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ดังนี้

$$\bar{F} = \kappa A \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \frac{\partial U}{\partial x} \tag{4.29ก}$$

$$\bar{G} = \kappa A \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4.29ข}$$

โดย κ แทนค่าคงที่มีค่าระหว่าง 1 ถึง 2 หรือเรียกว่าเป็นค่าคงที่ของแลปิดัส (Lapidus constant) [23] การเพิ่มความหนืดเทียมจะกระทำในขั้นตอนสุดท้ายของการคำนวณของแต่ละช่วงเวลา โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$[M_L]\{\Delta U\} = -\Delta t \int_A \left(\bar{F}^{n+1} \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \bar{G}^{n+1} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \right) dA \tag{4.30}$$

โดย $[M_L]$ แทนเมทริกซ์มวลแบบรวมตัวที่จุดต่อ ส่วน $\bar{F}^{n+1}$ และ $\bar{G}^{n+1}$ แทนฟลักซ์ความหนืดเทียม

ในระหว่างการคำนวณ ผลลัพธ์อาจเกิดการลู่ออก (diverged) หากใช้ช่วงเวลา (time step) Δt ที่สูงเกินไป สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่ต้องการผลลัพธ์ภายใต้สภาวะอยู่ตัว (steady-state solution) สามารถคำนวณหาช่วงเวลาได้จากสมการ [3] ดังนี้

$$(\Delta t)_e = \alpha \Delta t_{CFL} \tag{4.31}$$

โดย

$$\Delta t_{CFL} = \left(\frac{|\bar{u}|}{\Delta \bar{x}} + \frac{|\bar{v}|}{\Delta \bar{y}} + c \sqrt{\frac{1}{(\Delta \bar{x})^2} + \frac{1}{(\Delta \bar{y})^2}} \right)^{-1} \tag{4.32}$$

โดย α แทนตัวประกอบความปลอดภัย (safety factor) ซึ่งมีค่าระหว่าง 0 ถึง 1, c แทนความเร็วเสียง, $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แทนความเร็วเฉลี่ยของการไหลของเอลิเมนต์ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ส่วน $\Delta\bar{x}$ และ $\Delta\bar{y}$ แทนความยาวเฉลี่ยของเอลิเมนต์ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ

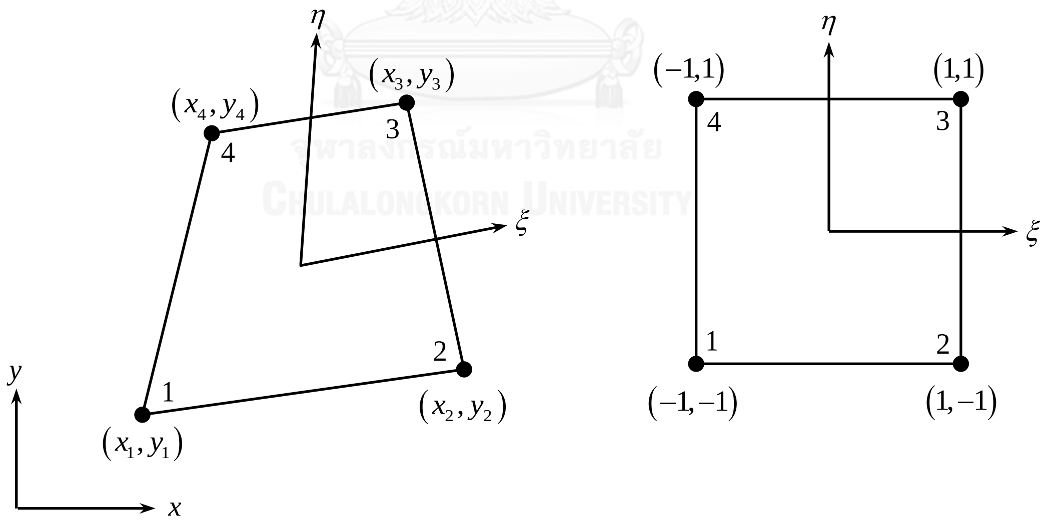
4.2 ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทเลอร์-กาเลอร์คินล้วนแล้วแต่อยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรตบนพื้นที่ A ของเอลิเมนต์และตลอดขอบความยาว L สำหรับด้านของเอลิเมนต์ที่อยู่ติดกับขอบโดเมนการไหลออก ซึ่งประกอบไปด้วยเอลิเมนต์เมทริกซ์ ดังต่อไปนี้

$$\{P_x\} = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} dA \qquad ; \{P_y\} = \int_A \left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} dA \tag{4.33ก}$$

$$[M_L] = M_{ii} = \int_A N_i \, dA \tag{4.33ข}$$

สำหรับกระบวนการอินทิเกรตสามารถทำได้โดยสะดวกโดยเริ่มจากการพิจารณาฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (quadrilateral element) แบบสี่จุดต่อ ซึ่งมีลักษณะการกระจายของผลลัพธ์เป็นแบบเชิงเส้นคู่ รูปที่ 4.1 แสดงการแปลงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อไปเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจัตุรัส



รูปที่ 4.1 การแปลงเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อไปเป็นเอลิเมนต์จัตุรัส

เพื่อให้เกิดความสะดวกในการอินทิเกรตเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าที่วางตัวอยู่ในพิกัด $x-y$ ให้สามารถอินทิเกรตอยู่ในรูปแบบปิดได้ โดยการแปลง (transform) พิกัดให้ไปอยู่ในรูปแบบพิกัดธรรมชาติ (natural coordinate) ส่วนลักษณะการกระจายของตัวแปรอนุรักษ์จะมีลักษณะดังนี้

$$U = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \underset{(1\times4)}{\lfloor N \rfloor} \underset{(4\times1)}{\{U\}} \tag{4.34}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ แทนเมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในรูปแบบของพิกัดธรรมชาติ ดังนี้

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad ; N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{4.35ก}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad ; N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{4.35ข}$$

เนื่องจากไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์บางเมทริกซ์อยู่ในรูปอนุพันธ์ของพิกัด $x-y$ ในขณะที่ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์อยู่ในรูปแบบของพิกัด $\xi-\eta$ ดังนั้น จึงต้องประยุกต์กฎลูกโซ่ (chain rule) [3] ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial N}{\partial \xi} = \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{4.36ก}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \eta} = \frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \tag{4.36ข}$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

โดย
$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

โดย $[J]$ แทนเมทริกซ์แบบยาโคบี (Jacobian matrix) ซึ่งขึ้นอยู่กับตำแหน่งของจุดต่อ ดังนี้

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i x_i\right) & \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i y_i\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i x_i\right) & \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_{i=1}^{4} N_i y_i\right) \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

โดย
$$J_{11} = -\frac{1}{4}(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)x_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_4 \tag{4.40ก}$$

$$J_{12} = -\frac{1}{4}(1-\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1+\eta)y_3 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_4 \tag{4.40ข}$$

$$J_{21} = -\frac{1}{4}(1-\xi)x_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)x_4 \tag{4.40ค}$$

$$J_{22} = -\frac{1}{4}(1-\xi)y_1 - \frac{1}{4}(1+\xi)y_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)y_4 \tag{4.40ง}$$

แทนสมการ (4.39) ลงในสมการ (4.37) แล้วสลับข้างกัน จะได้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \left[J \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left[J \right]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{4.41}$$

จากสมการ (4.41) จะได้

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \tag{4.42ก}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \tag{4.42ข}$$

โดย $$|J| = N_1 A_1 + N_2 A_2 + N_3 A_3 + N_4 A_4 \tag{4.43}$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \left(\left(x_2 - x_1 \right) y_4 + \left(x_1 - x_4 \right) y_2 + \left(x_4 - x_2 \right) y_1 \right) \tag{4.44ก}$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \left(\left(x_2 - x_1 \right) y_3 + \left(x_1 - x_3 \right) y_2 + \left(x_3 - x_2 \right) y_1 \right) \tag{4.44ข}$$

$$A_3 = \frac{1}{4} \left(\left(x_3 - x_2 \right) y_4 + \left(x_2 - x_4 \right) y_3 + \left(x_4 - x_3 \right) y_2 \right) \tag{4.44ค}$$

$$A_4 = \frac{1}{4} \left(\left(x_3 - x_1 \right) y_4 + \left(x_1 - x_4 \right) y_3 + \left(x_4 - x_3 \right) y_1 \right) \tag{4.44ง}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ในสมการ (4.33ก) สามารถอินทิเกรตได้ดังนี้

$$\left\{ P_x \right\} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{|J|} \left(J_{22} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} - J_{12} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \right) |J| \, d\xi d\eta \tag{4.45ก}$$

โดย $dA = |J| d\xi d\eta$ [24]

$$\left\{ P_x \right\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_2 - y_4 \\ y_3 - y_1 \\ y_4 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{Bmatrix} \tag{4.45ข}$$

และ

$$\left\{ P_y \right\} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{|J|} \left(-J_{21} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\} + J_{11} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} \right) |J| \, d\xi d\eta \tag{4.46ก}$$

$$\left\{ P_y \right\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_4 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_1 \end{Bmatrix} \tag{4.46ข}$$

สำหรับเมทริกซ์มวลแบบรวมตัวที่จุด สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบพิกัดธรรมชาติ ได้ดังนี้

$$\left[M_L \right] = M_{ii} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} N_i |J| \, d\xi d\eta \tag{4.47ก}$$

$$\left[M_L\right]=\begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix} \tag{4.47ข}$$

โดย
$$M_{11}=\frac{1}{9}\left(2A_4+A_3+2A_2+4A_1\right)\ ;\ M_{22}=\frac{1}{9}\left(A_4+2A_3+4A_2+2A_1\right) \tag{4.48ก}$$

$$M_{33}=\frac{1}{9}\left(2A_4+4A_3+2A_2+A_1\right)\ ;\ M_{44}=\frac{1}{9}\left(4A_4+2A_3+A_2+2A_1\right) \tag{4.48ข}$$

สำหรับเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกี่ยวกับขอบการไหล ให้พิจารณาเอลิเมนต์ที่มีด้านติดกับขอบของโดเมนการไหล ดังแสดงในรูปที่ 4.2 ซึ่งฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่มีด้านติดกับขอบของโดเมนการไหล จะพิจารณาในลักษณะเชิงเส้นตรง ดังนี้

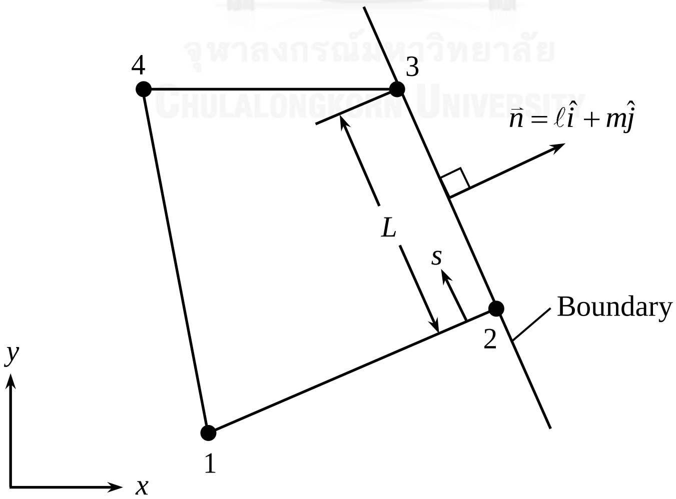
$$\left\lfloor N(s)\right\rfloor=\left\lfloor 1-\frac{s}{L} \quad \frac{s}{L}\right\rfloor \tag{4.49}$$

$$\left\lfloor \frac{\partial N}{\partial s}\right\rfloor=\left\lfloor -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right\rfloor \tag{4.50}$$

$$\int_L \left\lfloor N\right\rfloor ds=\left\lfloor \frac{L}{2} \quad \frac{L}{2}\right\rfloor \tag{4.51}$$

$$\int_L \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial s}\right\rfloor ds=\left\lfloor -1 \quad 1\right\rfloor \tag{4.52}$$

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่างๆ สำหรับเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อ ดังที่ได้กล่าวมาทั้งหมดขั้นต้นนี้ สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง



รูปที่ 4.2 แสดงเอลิเมนต์ที่อยู่ติดขอบของโดเมนของการไหล

บทที่ 5
โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

ในบทนี้จะเป็นการนำเอาสมการไฟไนต์เอลิเมนต์และเอลิเมนต์เมทริกซ์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 4 มาประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ โดยใช้ภาษาฟอร์แทรน (FORTRAN) ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายและสะดวกในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวสามารถทำงานบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลทั่วไปได้ โดยรายละเอียดต่าง ๆ ของโปรแกรมจะแสดงในหัวข้อต่อไป

5.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม TGHIFLOW

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจะใช้ชื่อว่า TGHIFLOW ซึ่งจะประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine) จำนวน 17 โปรแกรม โดยภาพรวมการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถอธิบายได้ด้วยแผนภูมิการทำงาน (flow chart) ดังแสดงในรูปที่ 5.1 ซึ่งสามารถอธิบายโดยสรุปได้ดังนี้

1. เริ่มต้นโปรแกรมด้วยการอ่านไฟล์ข้อมูลนำเข้าของปัญหาการไหล (input file) ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจุดต่อทั้งหมด จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมด จำนวนขอบทั้งหมด คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล จำนวนรอบการคำนวณ ค่าความผิดพลาด พิกัดของจุดต่อ เงื่อนไขเริ่มต้นของการไหลในแต่ละจุดซึ่งประกอบไปด้วย ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และค่าพลังงานรวม หมายเลขจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [READINPUT]
2. คำนวณค่าเริ่มต้นของตัวแปรของของไหลแต่ละจุดต่อให้อยู่ในรูปแบบตัวแปรอนุรักษ์ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [TRANSFORM]
3. เรียกโปรแกรมย่อย [GAUSS] เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแต่ละเอลิเมนต์
4. เรียกโปรแกรมย่อย [LUMASS] เพื่อคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ ดังแสดงในสมการ (4.45ข), (4.46ข) และ (4.47ข)
5. เรียกโปรแกรมย่อย [GETLM] เพื่อคำนวณหาขนาดของทิศทางโคไซน์ (direction cosines)

6. เข้าสู่กระบวนการทำซ้ำ โดยเริ่มจากการคำนวณหาช่วงเวลาสำหรับแต่ละเอลิเมนต์และแต่ละตำแหน่งจุดต่อซึ่งจะมีค่าไม่เท่ากันด้วยการเรียกโปรแกรมย่อย [TIMESTEP]

7. เรียกโปรแกรมย่อย [GETFG] เพื่อคำนวณหาฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของแต่ละจุดต่อ

8. เรียกโปรแกรมย่อย [UDHALF] และ [USSIDE] เพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรอนุรักษ์ของแต่ละเอลิเมนต์และขอบของเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่ติดกับขอบของโดเมนการไหล ตามลำดับ

9. เรียกโปรแกรมย่อย [GETFG] เพื่อคำนวณหาฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของแต่ละเอลิเมนต์

10. เรียกโปรแกรมย่อย [GETRHS1] เพื่อคำนวณหาค่าฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของเอลิเมนต์ภายในโดเมนการไหล

11. เรียกโปรแกรมย่อย [GETFG] เพื่อคำนวณหาค่าฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของแต่ละขอบเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่ติดกับขอบของโดเมนการไหล

12. เรียกโปรแกรมย่อย [GETRHS2] เพื่อคำนวณหาค่าฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของขอบเอลิเมนต์ที่มีด้านอยู่ติดกับขอบของโดเมนการไหลออก

13. เรียกโปรแกรมย่อย [SUMRHS] เพื่อรวมค่าฟลักซ์แบบไม่มีความหนืดของจุดต่อทั้งหมดภายในโดเมนกับจุดต่อที่ขอบการไหลออก

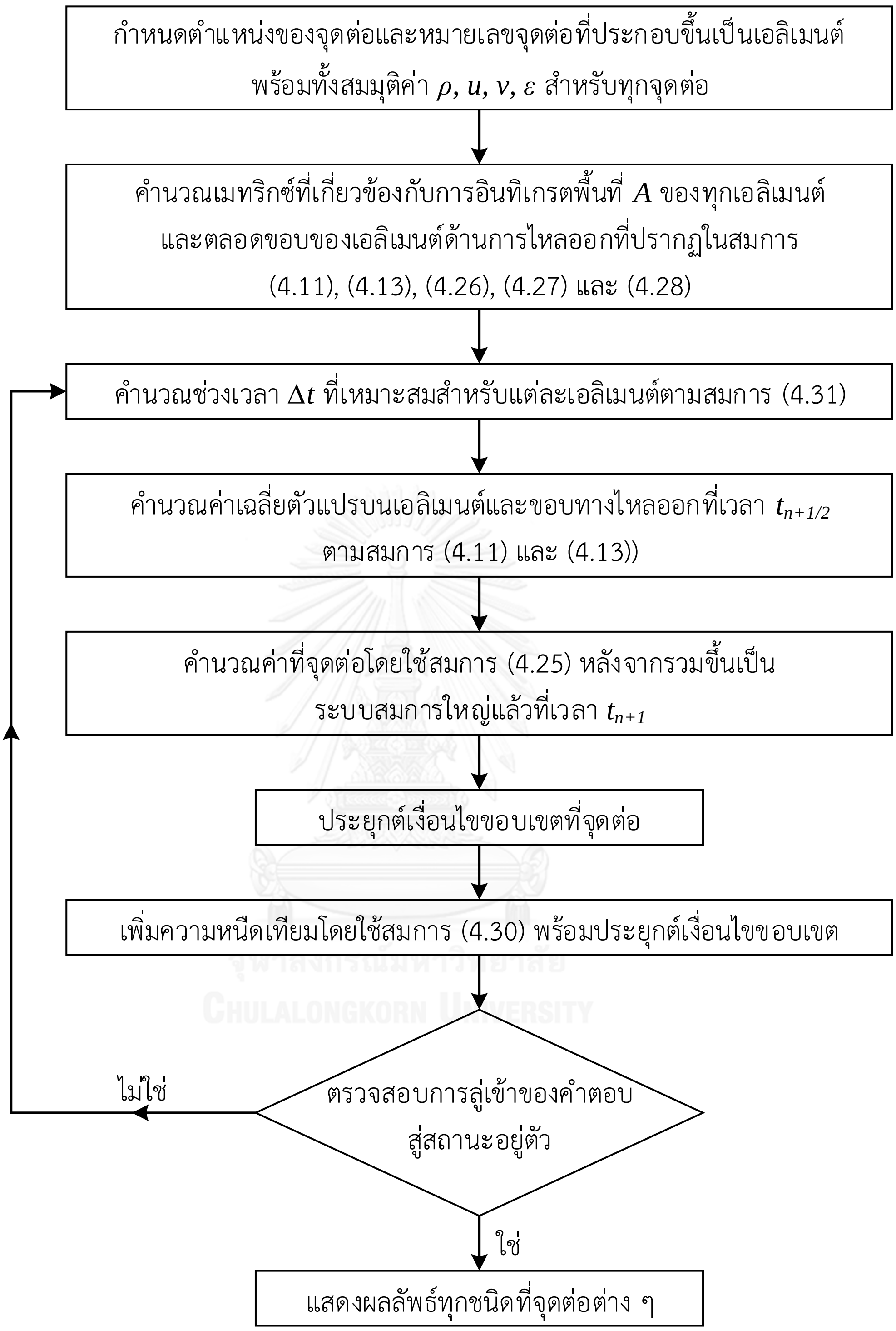
14. เรียกโปรแกรม [SOLVE] เพื่อคำนวณหาค่าตัวแปรแต่ละจุดต่อ พร้อมทั้งประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของการไหล

15. เรียกโปรแกรมย่อย [INVWALL] เพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของผนังการไหล

16. เรียกโปรแกรมย่อย [LAPIDUSOLD] เพื่อคำนวณหาค่าความหนืดเทียม

17. เรียกโปรแกรมย่อย [INVWALL] เพื่อประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของผนังการไหลอีกครั้งหลังจากเพิ่มความหนืดเทียมแล้ว

18. ตรวจสอบการลู่เข้าของผลลัพธ์ โดยเปรียบเทียบค่าที่คำนวณได้กับค่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนด ดังนี้ ถ้ามีค่าต่ำกว่าค่าที่กำหนดสั่งให้พิมพ์ค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ลงในไฟล์ข้อมูลที่ต้องการเพื่อนำไปแสดงผลต่อไป โดยเรียกโปรแกรมย่อย [PLOTOUTPUT] แต่ถ้ามีค่าสูงกว่าให้กลับไปทำการคำนวณในขั้นตอนที่ 6 ใหม่จนกระทั่งค่าความคลาดเคลื่อนต่ำกว่าค่าที่กำหนดหรือจำนวนรอบการทำซ้ำครบตามที่กำหนดไว้



รูปที่ 5.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรม TGHIFLOW

5.2 รายละเอียดของโปรแกรม TGHIFLOW

รายละเอียดของโปรแกรม TGHIFLOW ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ก

5.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม TGHIFLOW

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรม TGHIFLOW มีดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดที่สอง แสดงคำอธิบายลักษณะของปัญหาโดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

```
2
FINITE ELEMENT MODEL FOR MACH 6 FLOW PAST A CYLINDER
MODEL WITH 4990 QUADRILATERAL ELEMENTS AND 5140 NODES
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายถึงจำนวนเอลิเมนต์ จำนวนจุดต่อ จำนวนเงื่อนไขขอบเขตที่มีด้านติดกับขอบของโดเมนการไหล จำนวนเงื่อนไขขอบเขตของจุดต่อที่ผนังการไหลจำนวนรอบการคำนวณ และจำนวนรอบการแสดงค่าความคลาดเคลื่อน

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

```
NELEM  NPOIN   NBOUN  NWALL  NTIME   NSHOW
4990   5140    298    76     10000   10
```

ส่วนที่ 3 ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล

บรรทัดแรก ค่าอัตราส่วนความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่ ค่าความปลอดภัย ค่าคงที่ของแลปิดัส ค่าช่วงเวลาในการคำนวณ และค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

```
GAMMA           CSAFE  ALAP   DT      ERROR
1.38            1      1      0.01     1E-5
```

ส่วนที่ 4 ข้อมูลของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อทั้งสี่ของเอลิเมนต์

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

IE	I	J	K	L
1	2	3	13	12

ส่วนที่ 5 ข้อมูลของจุดต่อ และเงื่อนไขเริ่มต้น

บรรทัดแรก หมายเลขจุดต่อ ตำแหน่งจุดต่อในแนวแกน x และ y ตามลำดับ เงื่อนไขเริ่มต้นที่จุดต่อ ได้แก่ ค่าความหนาแน่น ความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และค่าพลังงานรวม

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

NODE	X	Y	RHO	U	V	TE
1	-3	0	1	1	0	0.54555

ส่วนที่ 6 ข้อมูลของเงื่อนไขขอบเขต

บรรทัดแรก หมายเลขเงื่อนไขขอบเขต หมายเลขจุดต่อทั้งสองที่ขอบของเอลิเมนต์ หมายเลขเอลิเมนต์ที่ขอบนั้น และเงื่อนไขขอบเขต ได้แก่ 1 คือ ด้านที่มีการไหลเข้า, 2 คือ ด้านที่มีการไหลออก และ 3 คือ ด้านที่เป็นผนังการไหลหรือมีความสมมาตร

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

I	II	JJ	IE	IBC
1	1116	1187	73	2

ส่วนที่ 7 ข้อมูลเงื่อนไขขอบเขตที่ผนังการไหล

บรรทัดแรก หมายเลขเงื่อนไขขอบเขต หมายเลขของจุดต่อ และรูปแบบของผนังการไหลของจุดต่อ ได้แก่ 0 คือ จุดต่ออยู่บนผนังเรียบ และ 1 คือ จุดต่ออยู่บนมุมของผนังการไหล

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

I	II	IC
1	1	0

5.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ สำหรับโปรแกรม TGHIFLOW

หลังจากโปรแกรมได้ทำการคำนวณสิ้นสุดลง โปรแกรมจะสั่งให้พิมพ์ชื่อไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์เพื่อบรรจุค่าของความหนาแน่น ความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และพลังงานรวมที่คำนวณได้ โดยไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ มีลักษณะดังต่อไปนี้

บรรทัดแรก หมายเลขจุดต่อ ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็วในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และค่าพลังงานรวม

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

NODE	RHO	U	V	TE
1	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
2	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
3	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
4	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
5	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
6	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
7	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
8	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
9	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01
10	1.00E+00	1.00E+00	0.00E+00	5.46E-01

บทที่ 6

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

เพื่อแสดงศักยภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คิน สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ภายใต้สภาวะอยู่ตัว และตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยการนำโปรแกรม TGHIFLOW ไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากนักและมีผลเฉลยแม่นตรง สำหรับปัญหาที่มีผลเฉลยแม่นตรง ได้แก่ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° และปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ เพื่อความสะดวกในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็นตัวแปรไร้หน่วย (dimensionless)

6.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ [25] เป็นปัญหาพื้นฐานที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากเป็นปัญหาที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนมากและมีผลเฉลยแม่นตรง โดยของไหลจะตกกระทบกับพื้นราบในทิศทำมุม 10.94° กับพื้นราบก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงขึ้น แสดงดังในรูปที่ 6.1 โดยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีดังนี้ กำหนดให้ขอบด้านซ้ายและขอบด้านบนเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก และขอบด้านล่างเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.6997$ ค่าความเร็ว $u = 2.6913$, $v = -0.5063$ และค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 5.8059$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$ สำหรับผลเฉลยแม่นตรงของปัญหานี้ สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการของฟังก์ชันอดิศัย (transcendental function) [26] ดังแสดงในสมการ (6.1) เริ่มจากการพิจารณาหามุมของคลื่นช็อก ดังแสดงในรูปที่ 6.2

$$\tan\theta = 2\cot\beta\left[\frac{M^2\sin^2\beta - 1}{M^2\left(\gamma + \cos 2\beta\right) + 2}\right] \tag{6.1}$$

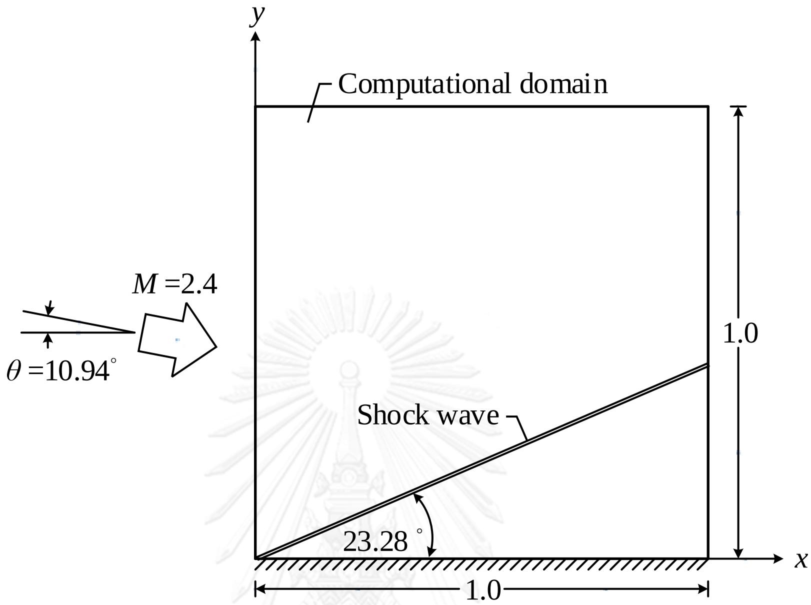
โดย M แทนค่ามัคนัมเบอร์, γ แทนอัตราส่วนความร้อนจำเพาะที่ความดันและปริมาตรคงที่, θ แทนค่ามุมของของไหลที่กระทบพื้น และ β แทนค่ามุมระหว่างคลื่นช็อกเอียงกับทิศทางของการไหล

สำหรับความสัมพันธ์ของความหนาแน่น ความดันและมัคนัมเบอร์ ซึ่งเกิดการเปลี่ยนแปลงสภาวะอย่างกะทันหันบริเวณคลื่นช็อก [27] สามารถคำนวณได้จากสมการ (6.2)-(6.4) ดังนี้

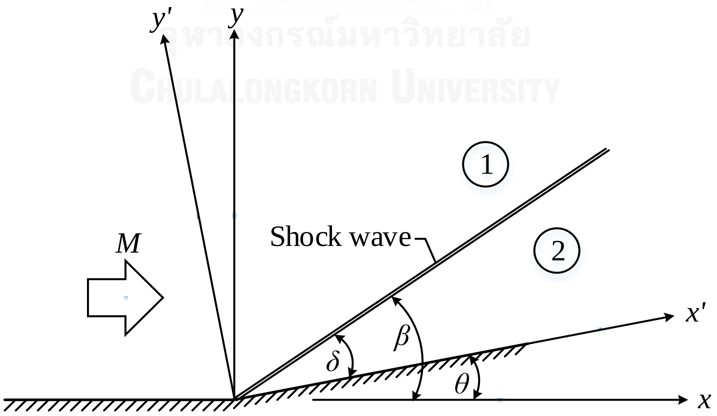
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\left(\gamma + 1\right)M_1^2\sin^2\beta}{\left(\gamma - 1\right)M_1^2\sin^2\beta + 2} \tag{6.2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\beta - 1\right) \tag{6.3}$$

$$M_2^2 \sin^2(\beta-\theta) = \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2\beta + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2\beta - (\gamma-1)} \tag{6.4}$$



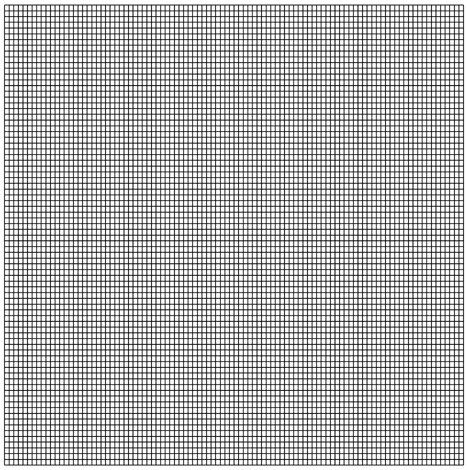
รูปที่ 6.1 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



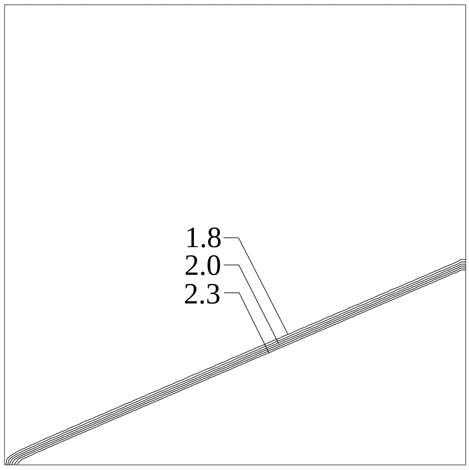
รูปที่ 6.2 ลักษณะของการไหลตกกระทบพื้นราบ

โดยตัวห้อย 1 และ 2 แสดงค่าก่อนและหลังแนวคลื่นช็อก ตามลำดับ เมื่อแทนค่า $\beta = 34.22^\circ$, $\theta = 10.94^\circ$, $M_1 = 2.4$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (6.2)-(6.4) จะได้ผลลัพธ์บริเวณหลังคลื่นช็อกดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho_2 = 2.6868$ ความดัน $p_2 = 2.9334$ และค่ามัคนัมเบอร์ $M_2 = 1.9425$

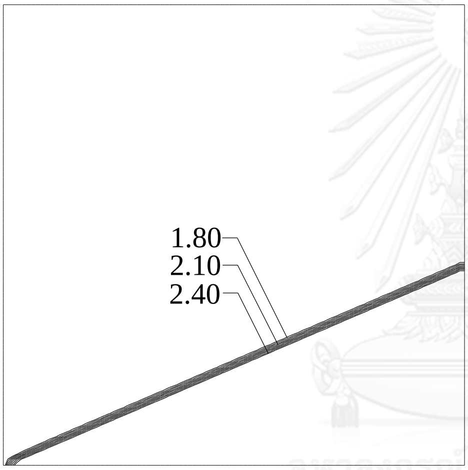
ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ เริ่มต้นด้วยการใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ประดิษฐ์โดย ดร.ซินหวู ม่า (Dr.inwu Ma) และทีมวิจัยในมหาวิทยาลัยซานตง (Shandong university) สาธารณรัฐประชาชนจีน [28] เพื่อใช้ในการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหล โดยเริ่มจากการสร้างรูปร่างของปัญหาการไหล หลังจากนั้นแบ่งรูปร่างของปัญหาการไหลออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าแบบสี่จุดต่อที่มีขนาดสม่ำเสมอกัน ดังแสดงในรูปที่ 6.3(ก) ซึ่งในปัญหานี้จะแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 8,000 เอลิเมนต์ และ 8,181 จุดต่อ โดยที่มีจำนวนเอลิเมนต์วางตัวในแนวแกน x จำนวน 100 เอลิเมนต์ และในแนวแกน y จำนวน 80 เอลิเมนต์ สำหรับเหตุผลที่กำหนดจำนวนเอลิเมนต์ 8,000 เอลิเมนต์ในการคำนวณครั้งแรกก็เพื่อที่จะนำรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวไปปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ในกระบวนการต่อไป ซึ่งถ้ากำหนดจำนวนเอลิเมนต์มากเกินไปจะทำให้ไม่สามารถนำรูปแบบไฟไนต์-เอลิเมนต์ดังกล่าวไปปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ ซึ่งทางผู้ประดิษฐ์โปรแกรม AUTOMESH-2D ได้จำกัดจำนวนเอลิเมนต์ที่จะสามารถปรับขนาดเอลิเมนต์ได้ไม่เกินจำนวน 10,300 เอลิเมนต์ แต่การปรับขนาดเอลิเมนต์ในครั้งสุดท้ายสามารถกำหนดจำนวนเอลิเมนต์เกิน 10,300 เอลิเมนต์ได้ หลังจากนั้นนำรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากโปรแกรม AUTOMESH-2D ไปคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาการไหลภายใต้สภาวะอยู่ตัวด้วยโปรแกรม TGHIFLOW ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นในบทที่ 5 รูปที่ 6.3(ข)-(ง) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ ซึ่งพบว่า เมื่อของไหลไหลมากระทบกับพื้นเอียงที่ทำมุม 10.94° กับพื้นราบจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงพุ่งขึ้นด้านบนในลักษณะเป็นเส้นตรง เมื่อเปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์กับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ บนโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 6.4-6.6 พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรม TGHIFLOW ให้ค่าที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง แต่อาจจะเกิดการสั่นของผลลัพธ์และความคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงอยู่บ้าง อันเนื่องมาจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณมีขนาดใหญ่เกินไป ดังนั้นในกระบวนการถัดไปในการวิเคราะห์ปัญหานี้จะทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ ซึ่งจะแสดงในบทที่ 7



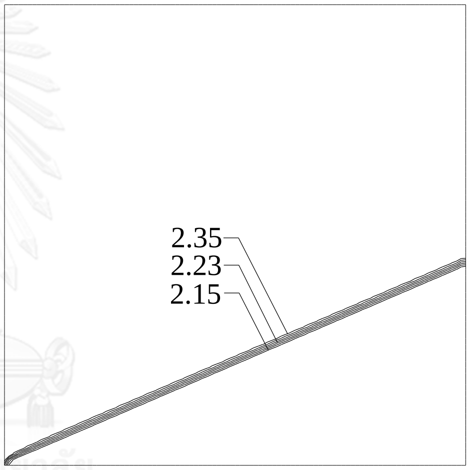
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

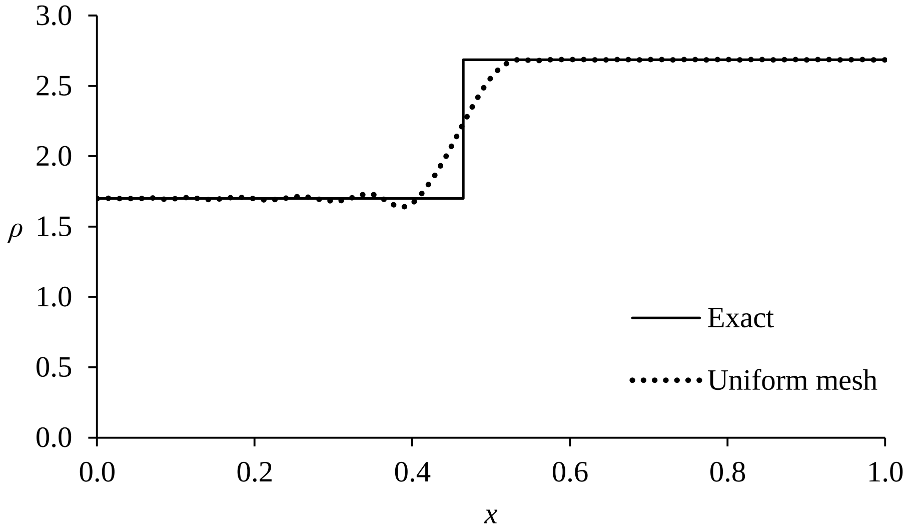


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

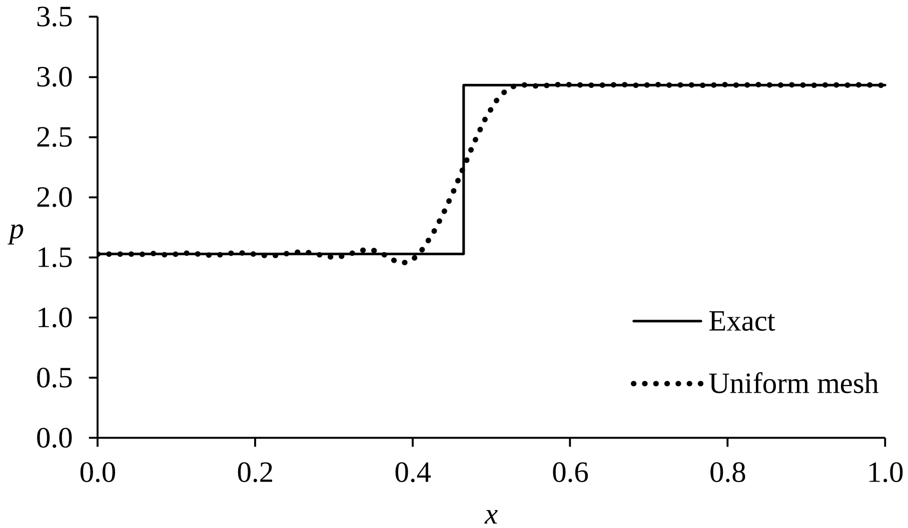


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

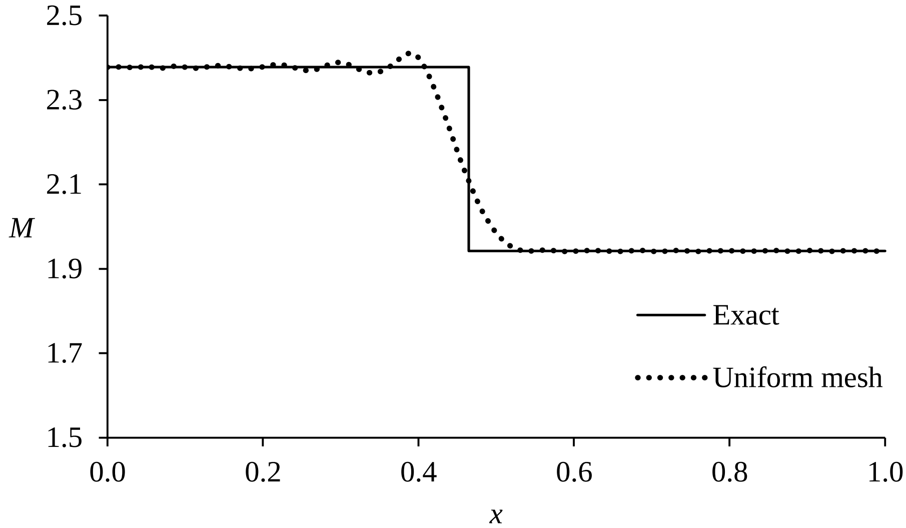
รูปที่ 6.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



รูปที่ 6.4 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.2 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



รูปที่ 6.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.2 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

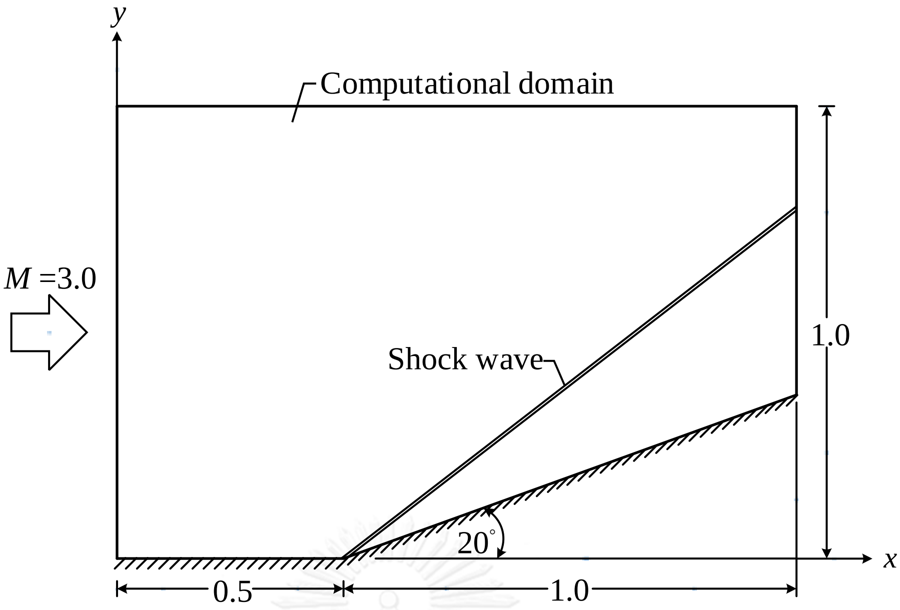


รูปที่ 6.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

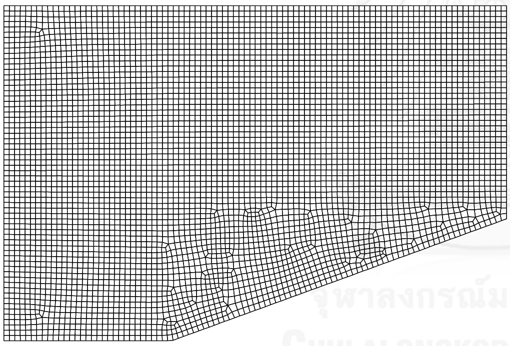
6.2 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

ลักษณะของปัญหานี้ เป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ซึ่งไหลมากระทบกับพื้นเอียงที่ทำมุม 20° กับพื้นราบ จากนั้นก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงในลักษณะพุ่งขึ้นด้านบนคล้ายกับปัญหาการไหลก่อนหน้านี้ [29] ดังแสดงในรูปที่ 6.7 สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีดังนี้ กำหนดให้ขอบด้านซ้ายและด้านบนเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบด้านล่างและพื้นเอียงเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และขอบด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นมีดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ และค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.6984$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$ สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยแม่นตรงสำหรับปัญหาการไหลนี้ทำได้เช่นเดียวกับปัญหาการไหลก่อนหน้านี้ โดยแทนค่า $M = 3.0$, $\theta = 20^\circ$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (6.1) จะได้ค่ามุมของคลื่นช็อกเอียงเท่ากับ $\beta = 37.76$ และแทนค่า $\beta = 37.76$, $\theta = 20^\circ$, $M_1 = 3.0$ และ $\gamma = 1.4$ ลงในสมการ (6.2)-(6.4) จะได้ค่าคุณสมบัติหลังคลื่นช็อกดังนี้ $\rho_2 = 2.4178$, $p_2 = 0.2993$ และ $M_2 = 1.9946$

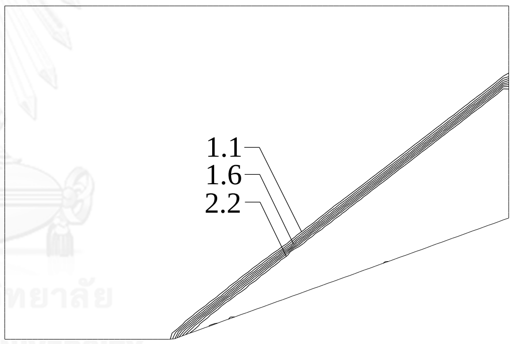
ในการวิเคราะห์ปัญหานี้ เริ่มต้นด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 5,017 เอลิเมนต์ และ 5,163 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 6.8(ก) ส่วนรูปที่ 6.9(ข)-(ง) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ และเมื่อตรวจสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณกับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง $y = 0.4$ บนโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 6.9-6.11 พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม TGHIFLOW มีค่าที่สอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรง



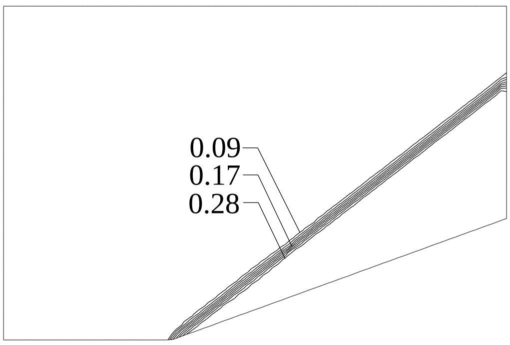
รูปที่ 6.7 ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



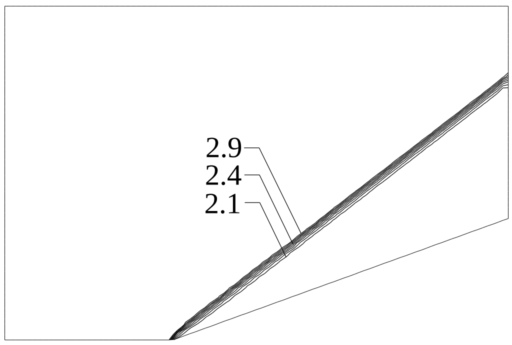
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

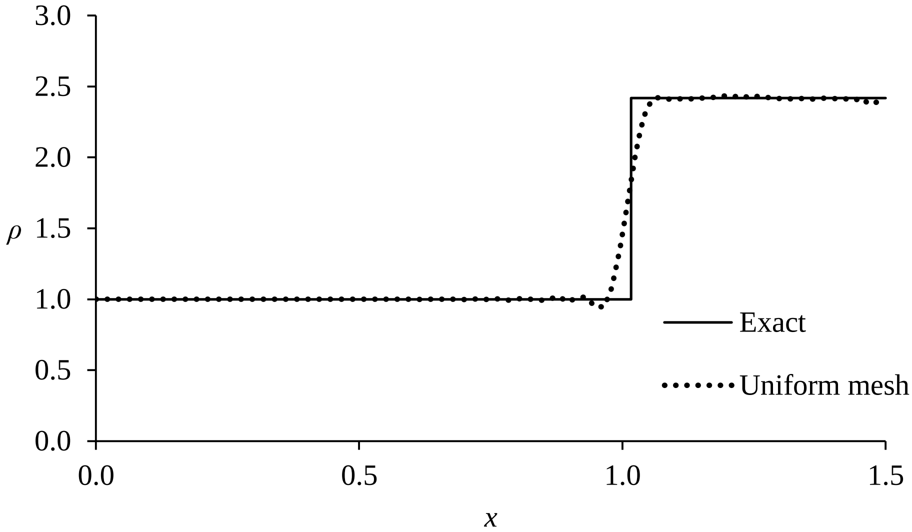


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

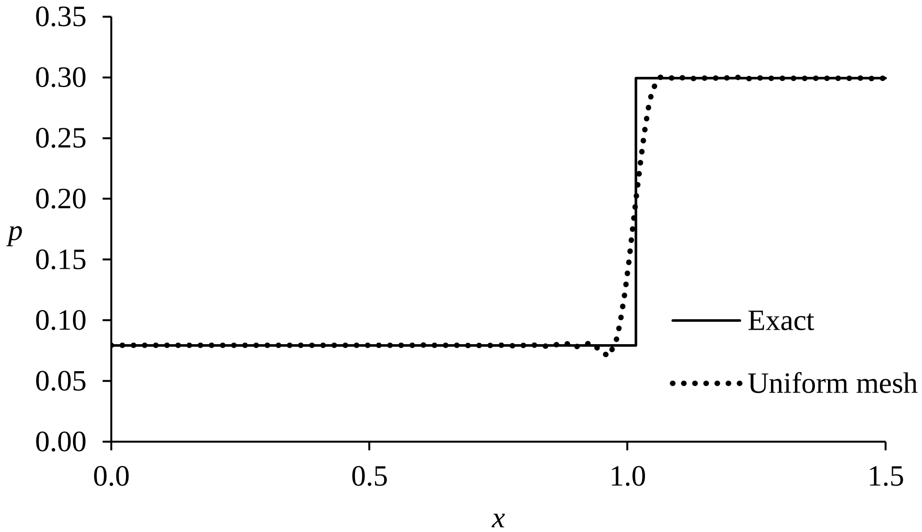


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

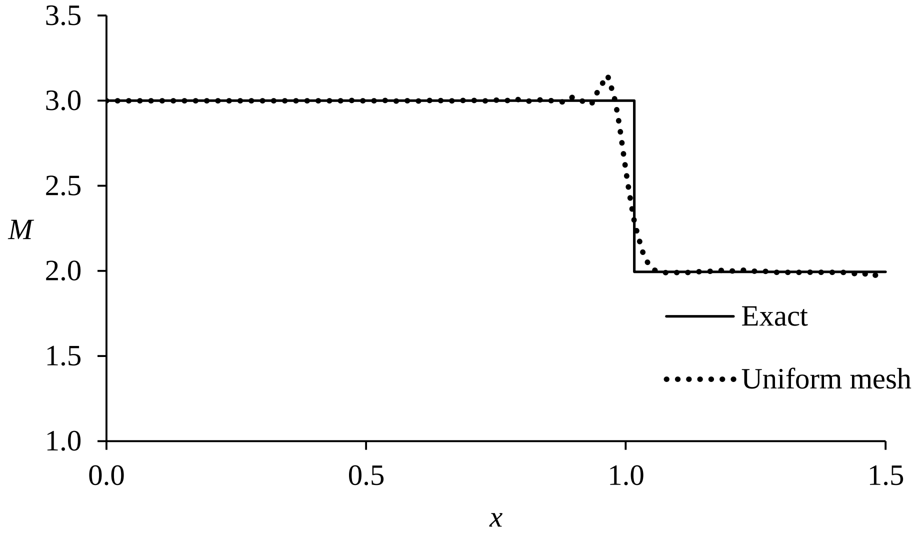
รูปที่ 6.8 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 6.9 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.4 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 6.10 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.4 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



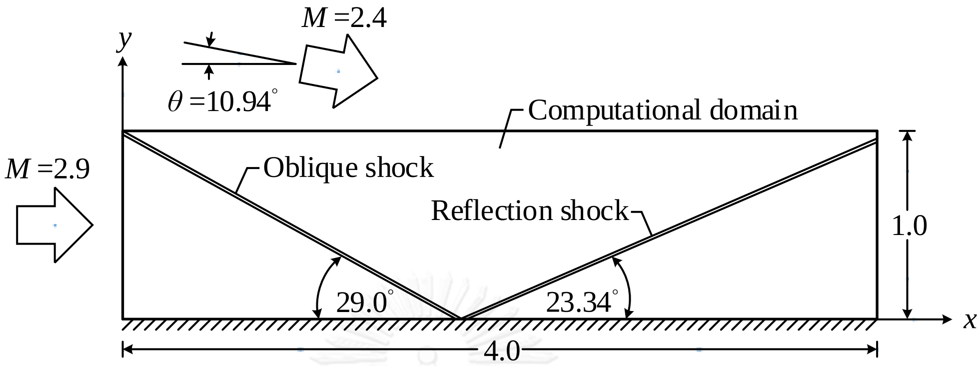
รูปที่ 6.11 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง y = 0.4 สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

6.3 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

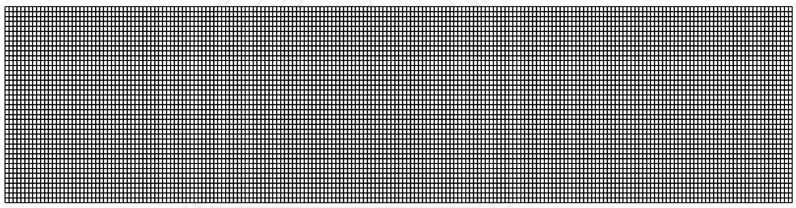
ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ [30] เป็นอีกปัญหาพื้นฐานที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ลักษณะของปัญหาเป็นการไหลความเร็วมากกว่าเสียง 2.9 เท่า ไหลเข้าขอบด้านซ้ายของโดเมนและมีของไหลความเร็วมากกว่าเสียง 2.4 เท่า ไหลเข้าขอบด้านบนของโดเมนในทิศทางทำมุม 10.94° กับพื้นราบ ดังแสดงในรูปที่ 6.12 การกระทบของการไหลทั้งสองแนวก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียง (oblique shock wave) ขึ้นซึ่งทำมุมตกกระทบ 29° กับพื้นราบ และเมื่อของไหลที่ไหลเข้าทางด้านบนของโดเมนตกกระทบพื้นราบจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกสะท้อน (reflection shock wave) ขึ้นซึ่งทำมุม 23.34° กับพื้นราบ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลมีดังนี้ กำหนดให้ขอบด้านซ้ายและขอบด้านบนเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก และขอบด้านล่างเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ขอบด้านบน ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.6997$ ค่าความเร็ว $u = 2.6913$, $v = -0.5063$ และค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 5.8059$ และขอบด้านซ้าย ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 2.9$, $v = 0$ ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 5.9907$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลจะทำการแบ่งโดเมนของปัญหานี้ออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 8,000 เอลิเมนต์ และ 8,241 จุดต่อ โดยที่มีจำนวนเอลิเมนต์วางตัวในแนวแกน x จำนวน 200 เอลิเมนต์ และในแนวแกน y จำนวน 40 เอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 6.13(ก) ส่วนรูปที่ 6.13(ข)-(ค) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์-

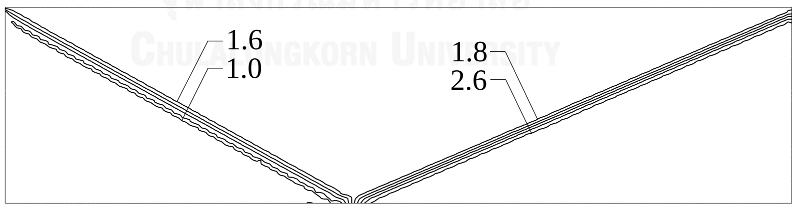
เอลิเมนต์ดังกล่าว และเมื่อเปรียบเทียบลักษณะการกระจายของค่าความหนาแน่นและความดันกับผลเฉลยแม่นตรง [30] ที่ตำแหน่ง $y=0.25$ บนโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 6.14-6.15 จะพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟ-ไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้เป็นอย่างดี



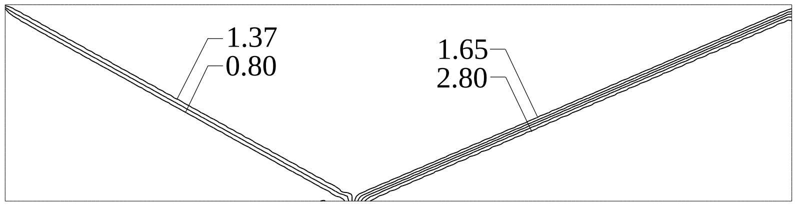
รูปที่ 6.12 ปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

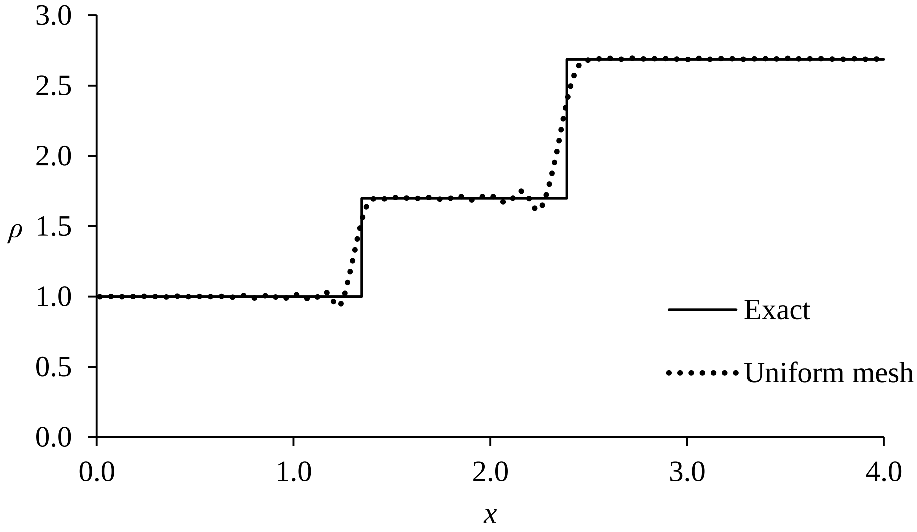


(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

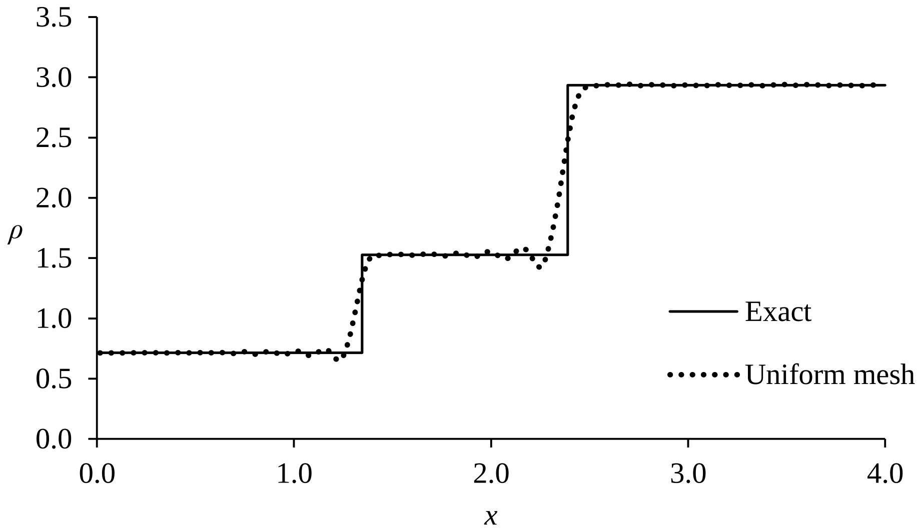


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 6.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น และความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



รูปที่ 6.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.25 สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



รูปที่ 6.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.25 สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

จากปัญหาการไหลลักษณะต่าง ๆ ที่ได้ทำการวิเคราะห์มาแล้ว จะพบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าความคลาดเคลื่อนไปจากค่าที่แท้จริงโดยเฉพาะในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก อันเนื่องเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้ไม่สามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ ดังนั้น เพื่อเป็นการเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ ในบทถัดไปจะเป็นการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

บทที่ 7
การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

จากที่ได้ทำการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่มีขนาดสม่ำเสมอกันทั่วทั้งโดเมนการไหล ดังที่ได้แสดงในบทที่ 6 จะพบว่า บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันจะเกิดการสั่นและความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในคำนวณมีขนาดใหญ่เกินไป หากใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงทั่วทั้งโดเมนการไหลเพื่อลดข้อผิดพลาดดังกล่าว จะพบว่าจะต้องใช้เวลาและหน่วยความจำในการคำนวณมากขึ้น ดังนั้น ในบทนี้จะนำเสนอเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์และในขณะเดียวก็ช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณ โดยการวางเอลิเมนต์ขนาดเล็กบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มาก และวางเอลิเมนต์ขนาดใหญ่บริเวณอื่นที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อย โดยการใช้หลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก (principle stress) ในวิชากลศาสตร์ของแข็ง [4] ในการปรับขนาดเอลิเมนต์

7.1 เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

เริ่มจากการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของผลลัพธ์ที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ เช่น ความหนาแน่น ความดัน มัคนัมเบอร์ เป็นต้น สำหรับปัญหาการไหลใน 2 มิติค่าอนุพันธ์อันดับสองของผลลัพธ์มี 3 ค่า คือ $\partial^2\phi/\partial x^2$,$\partial^2\phi/\partial y^2$ และ $\partial^2\phi/\partial x\partial y$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

โดย ϕ แทนผลลัพธ์ของปัญหาที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ ในงานวิจัยนี้จะเลือกใช้ค่าความหนาแน่น $(\phi = \rho)$ เนื่องจากสามารถใช้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ [13, 29] จากนั้นนำค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นไปคำนวณหาค่าความเค้นในแนวแกนหลัก ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\rho}{\partial X^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\rho}{\partial Y^2} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

โดย
$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}\right)^2} \tag{7.3ก}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y}\right)^2} \tag{7.3ข}$$

และเลือกค่าที่มากที่สุดในแนวแกนหลัก เพื่อใช้ในการหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมของตำแหน่งแต่ละจุดต่อ ดังนี้

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \rho}{\partial Y^2}\right|\right) \tag{7.4}$$

ในขณะที่การหาค่าอนุพันธ์อันดับสองของความหนาแน่นทั้ง 3 ค่า คือ $\partial^2 \rho / \partial x^2$, $\partial^2 \rho / \partial y^2$, $\partial^2 \rho / \partial x \partial y$ สามารถหาได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้ ซึ่งในที่นี้จะแสดงการคำนวณหา $\partial^2 \rho / \partial x^2$ เพียงค่าเดียว ซึ่งจะมีลักษณะการกระจายของค่าความหนาแน่นบนเอลิเมนต์ ดังนี้

$$\rho^{(e)} = \lfloor N \rfloor \{\rho\} \tag{7.5}$$

ดังนั้น
$$\frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \{\rho\} \tag{7.6}$$

ซึ่งเป็นค่าคงที่และรู้ค่าสำหรับเอลิเมนต์นั้น ในขณะเดียวกันหากมองโดเมนของการไหลในภาพรวมแล้วสมมุติเอลิเมนต์นั้นมีลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบซึ่งขึ้นอยู่กับค่าความชันที่จุดต่อดังนี้

$$\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x} = \lfloor N \rfloor \left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} \tag{7.7}$$

จากนั้นลบสมการ (7.7) ด้วยสมการ (7.6) แล้วประยุกต์ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง จะได้

$$\int_A \{N\}\left(\frac{\partial \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x^2} - \frac{\partial \rho^{(e)}}{\partial x^2}\right) dA = 0 \tag{7.8}$$

แทนสมการ (7.6) และสมการ (7.7) ลงในสมการ (7.8) จะได้

$$\int_A \{N\} \lfloor N \rfloor dA \left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} = \int_A \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \{\rho\} \tag{7.9}$$

หรือ
$$[M]\left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} = \int_A \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \{\rho\} \tag{7.10}$$

โดย $[M]$ แทนเมทริกซ์มวลแบบแนบนัย ซึ่งสามารถคำนวณได้จากสมการ (4.26) ส่วนการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองก็สามารถดำเนินการไปได้ในทำนองเดียวกัน คือ

$$\frac{\partial^2 \rho^{(e)}}{\partial x^2} = \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor \left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} \tag{7.11}$$

และ
$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}^{(e)}}{\partial x^2} = \lfloor N \rfloor \left\{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right\} \tag{7.12}$$

จากนั้นค่าอนุพันธ์อันดับสองของค่าความหนาแน่นที่จุดต่อสามารถคำนวณได้จาก

$$\int_A \{N\}\lfloor N \rfloor dA \left\{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right\} = \int_A \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} \tag{7.13}$$

หรือ

$$[M]\left\{\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right\} = \int_A \{N\} \left\lfloor \frac{\partial N}{\partial x} \right\rfloor dA \left\{\frac{\partial \rho}{\partial x}\right\} \tag{7.14}$$

ค่าอนุพันธ์ที่เหลือทั้งสองคือ $\partial^2 \rho / \partial y^2$, $\partial^2 \rho / \partial x \partial y$ สามารถคำนวณได้ในทำนองเดียวกันกับ $\partial^2 \rho / \partial x^2$

7.2 โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับสอง

โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองเพื่อที่จะนำไปใช้ปรับขนาดเอลิเมนต์สามารถประดิษฐ์ได้จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ 7.1 โดยเริ่มจากการคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งจากสมการ (7.10) เพื่อหาค่าอนุพันธ์ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ แล้วนำค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งไปคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (7.14) จะทำให้ได้ค่าอนุพันธ์อันดับสองทั้งหมด 4 ค่า คือ $\partial^2 \rho / \partial x^2$,$\partial^2 \rho / \partial y^2$, $\partial^2 \rho / \partial x \partial y$ และ $\partial^2 \rho / \partial y \partial x$ จากนั้นนำค่าอนุพันธ์อันดับสองไปคำนวณหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักจากสมการ (7.3ก-ข) และเลือกค่าที่มากที่สุดจากสมการ (7.4) เพื่อนำไปใช้ปรับขนาดเอลิเมนต์ต่อไป โดยใช้ภาษาฟอร์แทรนในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งให้ชื่อว่า DOUBLEGRADIENT ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

7.2.1 ขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม DOUBLEGRADIENT

โปรแกรม DOUBLEGRADIENT ประกอบด้วยโปรแกรมหลัก (main program) และโปรแกรมย่อย (subroutine program) 9 โปรแกรม ใน 2 มอดูล (modules) ซึ่งสามารถอธิบายดังนี้

1. เริ่มต้นโปรแกรมด้วยการอ่านแฟ้มข้อมูลนำเข้าของปัญหา (input file) ซึ่งประกอบด้วยจำนวนจุดต่อและเอลิเมนต์ทั้งหมด ตำแหน่งในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ตัวแปรที่ใช้เป็นตัวบ่งชี้ และหมายเลขจุดต่อของแต่ละเอลิเมนต์ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย [READINPUT]
2. คำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเรียกโปรแกรมย่อย [GRID] แล้วประกอบเข้าเป็นระบบสมการขนาดใหญ่ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [ASSEMBLE] จากนั้นทำการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งตามจุดต่อ ด้วยระเบียบวิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ (Conjugate gradient method) โดยเรียกโปรแกรมย่อย [CGNEW]
3. คำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสองที่จุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SECONDGRID] ซึ่งจะคล้ายกับการคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยเรียกโปรแกรมย่อย [SECONDASSEMBLE] เพื่อ

รวมสมการเป็นระบบสมการขนาดใหญ่ แล้วเรียกโปรแกรมย่อย [CGNEW] เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง

4. คำนวณหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักและหาค่าอนุพันธ์ที่มากที่สุดที่ตำแหน่งของจุดต่อ โดยเรียกโปรแกรมย่อย [MAGRADIENT]

5. พิมพ์ค่าของผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณในรูปแบบ Tecplot binary data file โดยเรียกโปรแกรมย่อย [PLOTOUTPUT]

7.2.2 รายละเอียดของโปรแกรม DOUBLEGRADIENT

รายละเอียดของโปรแกรม DOUBLEGRADIENT ได้แสดงไว้ในภาคผนวก ข

7.2.3 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าสำหรับโปรแกรม DOUBLEGRADIENT

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรม DOUBLEGRADIENT มีดังนี้

ส่วนที่ 1 ประโยคอธิบายกำกับลักษณะของไฟล์

บรรทัดแรก ตัวเลขระบุจำนวนบรรทัดที่เป็นตัวอักษร

บรรทัดที่สอง ประโยคอธิบายลักษณะของปัญหาโดยมีจำนวนบรรทัดเท่ากับที่ระบุไว้ในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

```
2
DOUBLEGRADIENT FOR MACH 6 FLOW PAST A CYLINDER
CRUDE MESH WITH 5140 NODES AND 4990 ELEMENTS.
```

ส่วนที่ 2 ขนาดของรูปแบบอนุพันธ์

บรรทัดแรก คำอธิบายถึงจำนวนจุดต่อและจำนวนเอลิเมนต์

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

```
NPOIN   NELEM
9243    9042
```

ส่วนที่ 3 ข้อมูลของจุดต่อ และค่าของตัวบ่งชี้

บรรทัดแรก หมายเลขจุดต่อ ตำแหน่งจุดต่อในแนวแกน x และ y ตามลำดับ และค่าของตัวบ่งชี้

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

I	X	Y	Z
1	-3	0	1.00E+00

ส่วนที่ 4 ข้อมูลของเอลิเมนต์

บรรทัดแรก หมายเลขเอลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อทั้งสี่ของเอลิเมนต์

บรรทัดที่สอง ตัวเลขที่สอดคล้องกับคำอธิบายในบรรทัดแรก

ตัวอย่างเช่น

IE	I	J	K	L
1	2	3	13	12

7.2.4 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลผลลัพธ์ สำหรับโปรแกรม DOUBLEGRADIENT

หลังจากการคำนวณเสร็จสิ้นลง โปรแกรมจะพิมพ์ผลลัพธ์ในรูปแบบ Tecplot binary data file ตามชื่อของไฟล์ข้อมูลนำเข้าและตามด้วยนามสกุล “GRADIENT.PLT” ซึ่งมีลักษณะดังต่อไปนี้

```
TITLE = BOW6M1.DAT
 VARIABLES = "X", "Y", "Z", "DX", "DY", "DXX",
 "DYY", "DXY", "DYX", "DMA", "DDXX",
 "DDYY", "DDMA"
ZONE N = 9243, E =   9042, F = FEPOINT, ET = QUADRILATERAL
-3.000000    0.000000    0.100000E+01  -0.655740E-15   0.203367E-12   0.189961E-05
 0.242312E-07   0.303311E-07   0.213323E-07   0.189961E-05   0.938045E-06
-0.938041E-06   0.938045E-06
-2.961538    0.000000    0.100000E+01   0.124953E-14  -0.652031E-13  -0.209838E-06
 0.182083E-06   0.276062E-06   0.277379E-06   0.277379E-06   0.339080E-06
-0.339080E-06   0.339080E-06
-2.923077    0.000000    0.100000E+01  -0.142559E-10   0.505839E-13  -0.218762E-04
 0.194625E-07  -0.150482E-06  -0.151521E-06   0.194625E-07   0.109297E-04
-0.109292E-04   0.109297E-04
            .              .              .              .              .              .
            .              .              .              .              .              .
            .              .              .              .              .              .
-2.923077    5.000000    0.100000E+01   0.116816E-12  -0.787266E-14  -0.811838E-11
 0.391342E-11  -0.495322E-11   0.100085E-10   0.100085E-10   0.652533E-11
-0.652533E-11   0.652533E-11
-2.961538    5.000000    0.100000E+01  -0.869752E-13   0.409247E-13   0.260354E-11
 0.780933E-12   0.264754E-11  -0.934527E-11   0.264754E-11   0.347065E-11
-0.347065E-11   0.347065E-11
-3.000000    5.000000    0.100000E+01   0.368697E-13  -0.303890E-12  -0.633390E-11
-0.205161E-10   0.118799E-10   0.511828E-11   0.118799E-10   0.110688E-10
-0.110688E-10   0.110688E-10
    2    3    12    11
    3    4    13    12
```

7.3 การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้

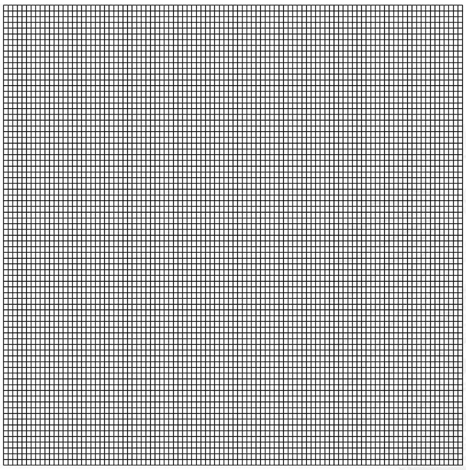
ในหัวข้อที่ 7.1-7.2 ได้อธิบายถึงเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ ส่วนในหัวข้อนี้จะเป็นการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ที่ได้วิเคราะห์ไปแล้วในบทที่ 6 เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ โดยใช้โปรแกรม DOUBLE GRADIENT คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ ภายในโดเมนการไหลเพื่อสร้างรูปแบบไฟไนต์-เอลิเมนต์ใหม่ หลังจากนั้นนำข้อมูลที่ได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้วมาคำนวณหาผลลัพธ์ด้วยโปรแกรม HITGFLOW

7.3.1 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

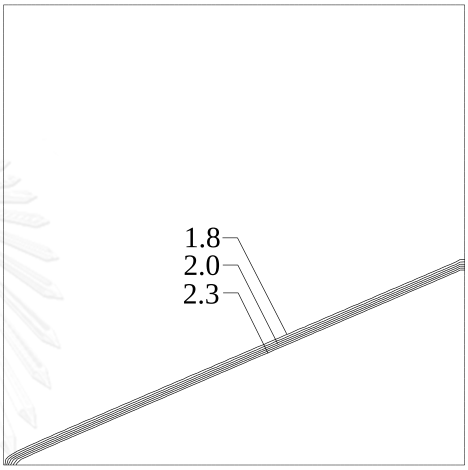
การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหานี้ เริ่มด้วยการใช้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นดังแสดงในรูปที่ 7.1(ก)-(ง) โดยนำค่าความหนาแน่นมาคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งจุดต่อต่าง ๆ ภายในโดเมนการไหลโดยใช้โปรแกรม DOUBLE GRADIENT หลังจากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรม DOUBLE GRADIENT ไปสร้างรูปแบบไฟไนต์-เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 โดยใช้โปรแกรม AUTOMESH-2D จะพบว่ามีเอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวตามแนวคลื่นช็อก แสดงในรูปที่ 7.2(ก) ต่อมานำข้อมูลรูปแบบไฟไนต์-เอลิเมนต์ที่ได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ไปคำนวณหาผลลัพธ์ โดยการทำเช่นเดียวกับการคำนวณหาผลลัพธ์ของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ซึ่งแสดงในรูปที่ 7.2(ข)-(ง) เป็นรูปเส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ พบว่า บริเวณที่เกิดคลื่นช็อกจะมีขนาดที่แคบลง หลังจากนั้นก็ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้ง เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้น รูปที่ 7.3(ก)-(ง) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งพบว่า คลื่นช็อกจะมีขนาดที่แคบลงและมีความคมชัดมากขึ้นกว่าครั้งก่อนหน้า แม้ว่าจะใช้จำนวนเอลิเมนต์ในการคำนวณที่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในตารางที่ 7.1 และเมื่อพิจารณาความแม่นยำของผลลัพธ์ หลังจากปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 กับผลเฉลยแม่นตรงที่ตำแหน่ง $y = 0.2$ บนโดเมน ดังแสดงในรูปที่ 7.4-7.6 พบว่าผลลัพธ์ที่ได้หลังจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 มีความแม่นยำมากขึ้น

ตารางที่ 7.1 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

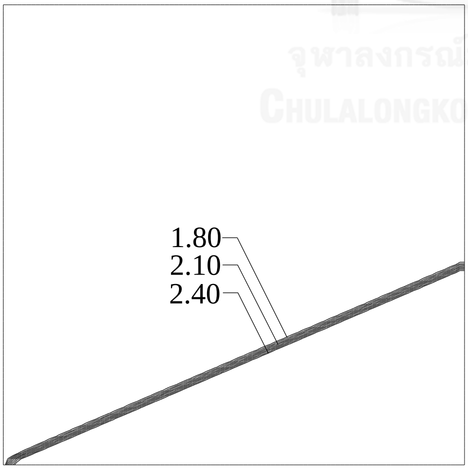
การปรับขนาดเอลิเมนต์	จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนจุดต่อ
เอลิเมนต์เริ่มต้น	8,000	8,181
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	8,173	8,331
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	9,470	9,618



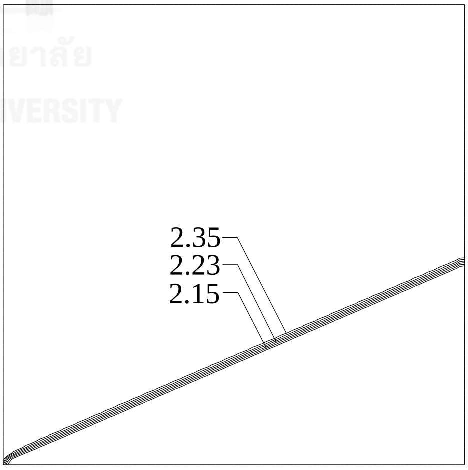
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

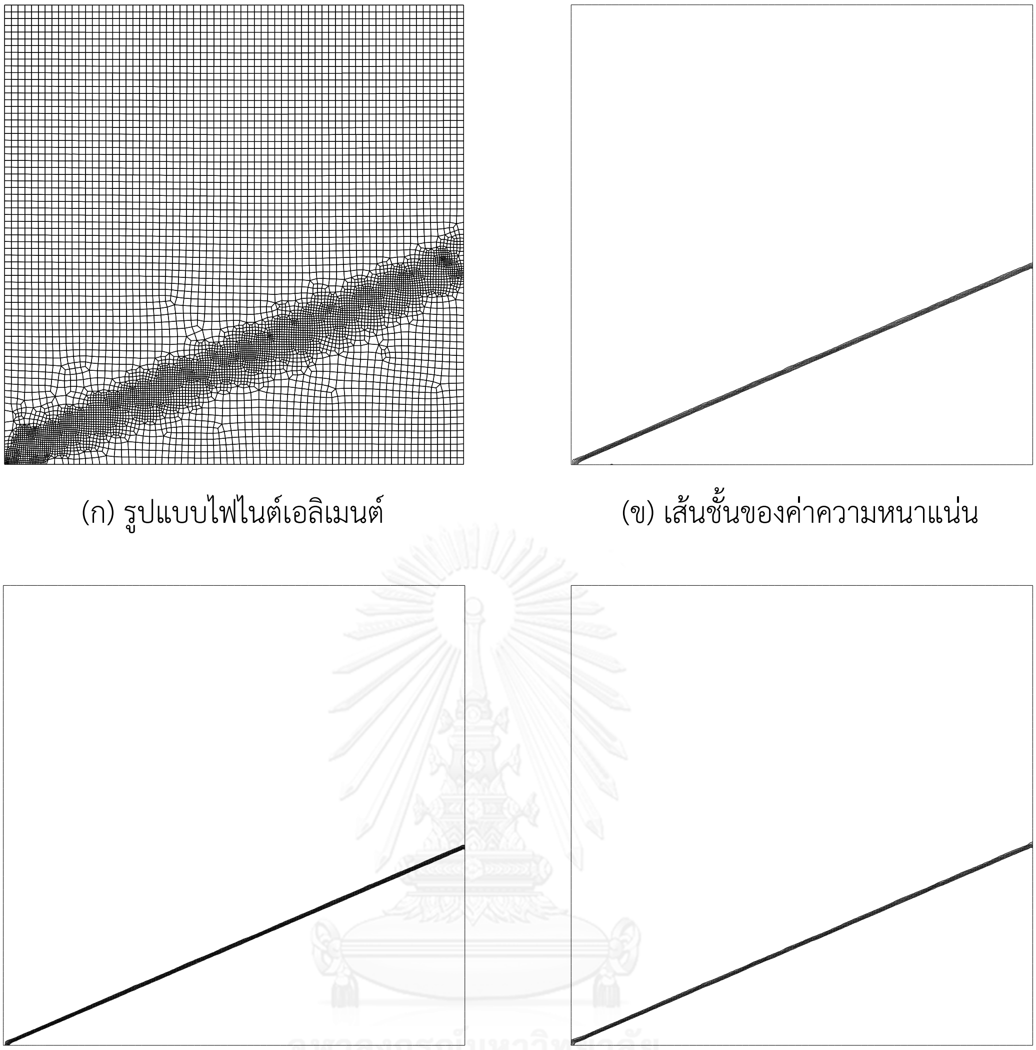


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน



(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

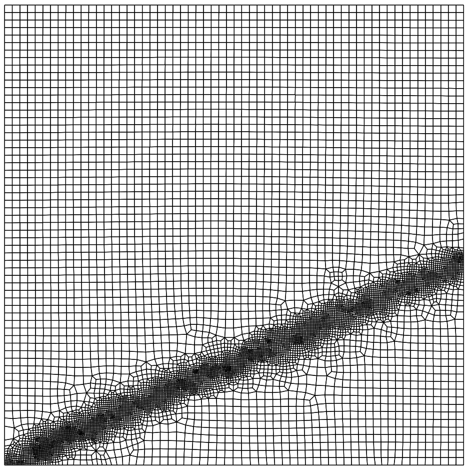
รูปที่ 7.1 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



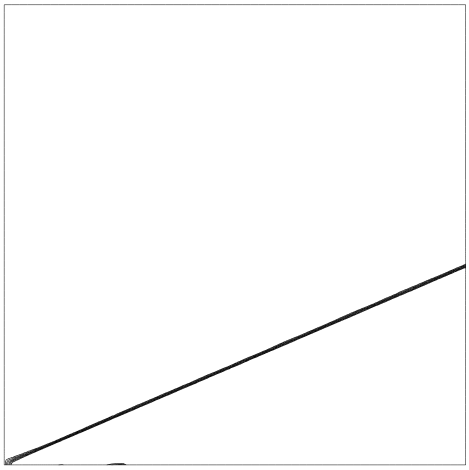
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน (ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

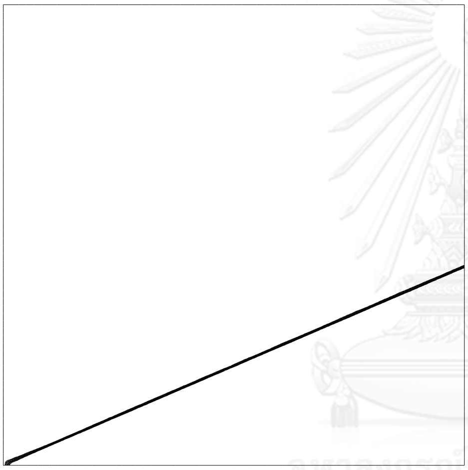
รูปที่ 7.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียงเท่าตกกระทบพื้นราบ



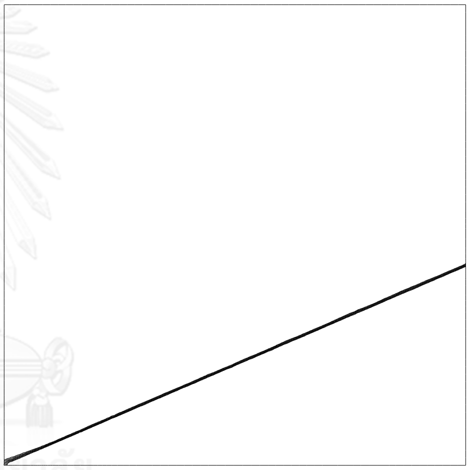
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

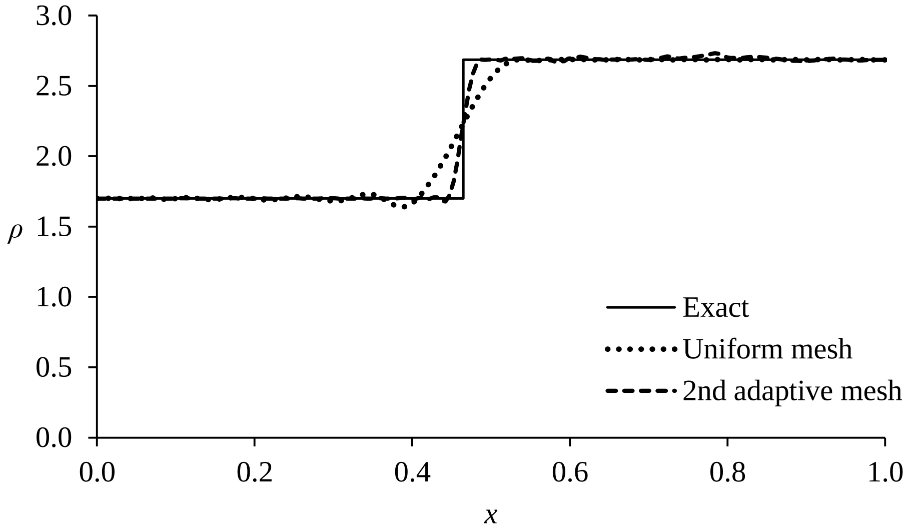


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

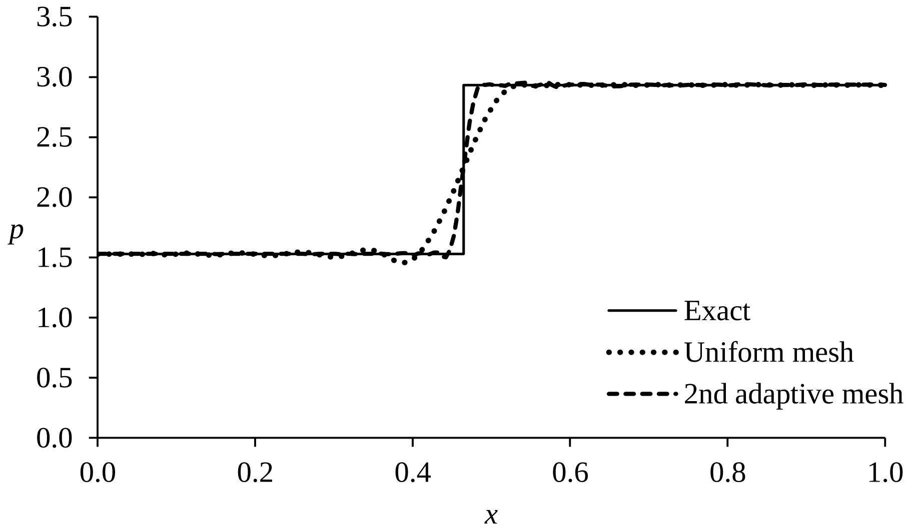


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

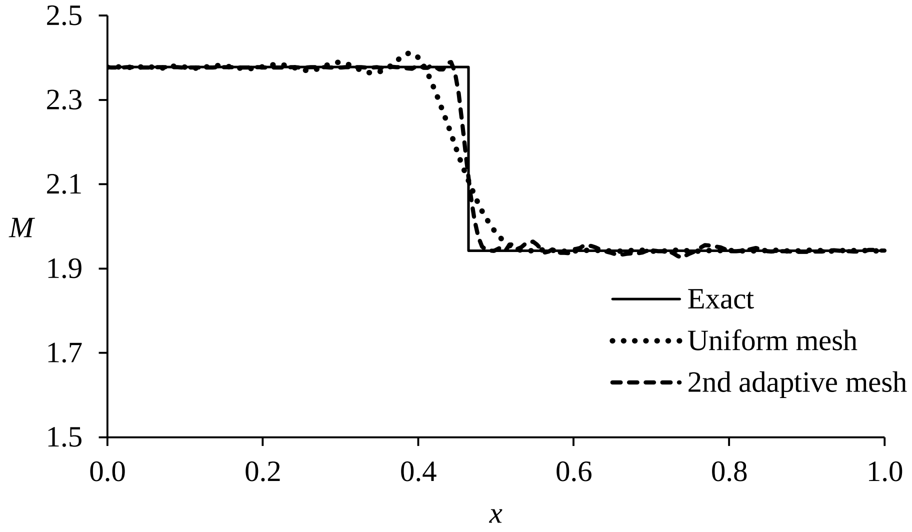
รูปที่ 7.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



รูปที่ 7.4 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.2 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

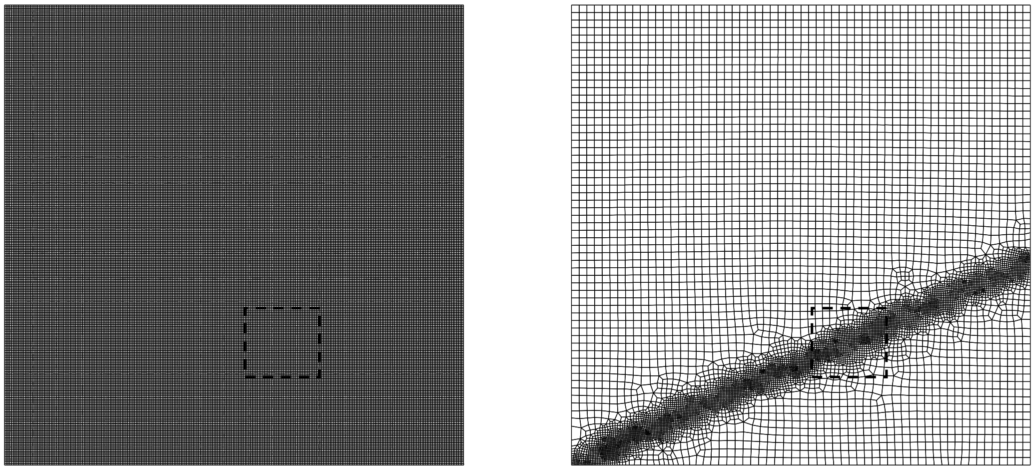


รูปที่ 7.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.2 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ



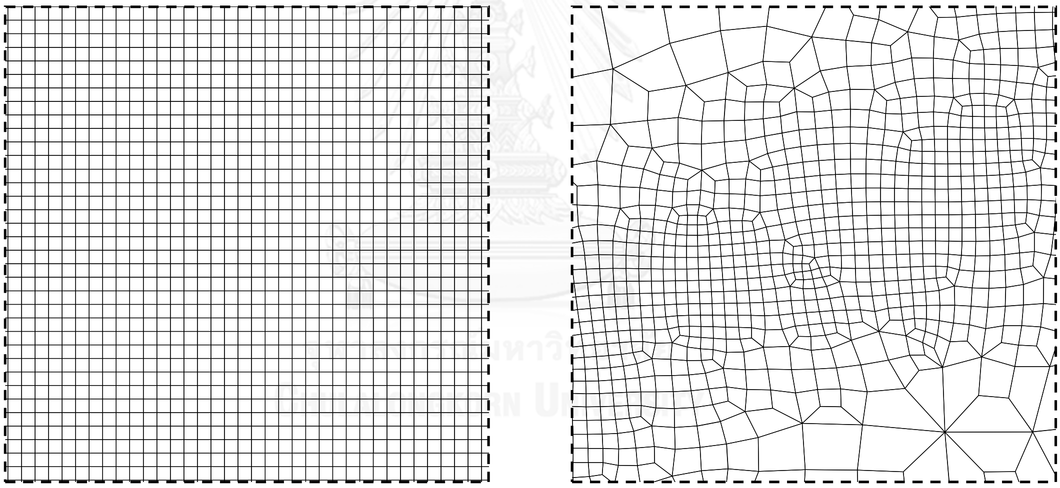
รูปที่ 7.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ที่ตำแหน่ง y = 0.2 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ

เมื่อทำการเปรียบเทียบจำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกันระหว่างเอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh ดังแสดงในรูปที่ 7.7-7.8 พบว่า หากใช้เอลิเมนต์แบบ Structured mesh จะต้องใช้จำนวนเอลิเมนต์เป็นจำนวนมากถึง 94,864 เอลิเมนต์ และ 95,481 จุดต่อ ในการคำนวณหาผลลัพธ์ แต่ในขณะเดียวกันถ้าใช้เอลิเมนต์แบบ Unstructured mesh จะใช้จำนวนเอลิเมนต์เพียง 9,470 เอลิเมนต์ และ 9,618 จุดต่อ ซึ่งมีจำนวนน้อยกว่าจำนวนเอลิเมนต์แบบ Structured mesh ประมาณ 10 เท่า เพื่อให้การคำนวณได้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูป 7.9 พบว่าขนาดของคลื่นช็อกที่คำนวณได้จากเอลิเมนต์ทั้งสองแบบมีขนาดที่ใกล้เคียงกัน ซึ่งจะพบว่าการเปรียบเทียบดังกล่าวได้แสดงถึงประสิทธิภาพของการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่นอกจากจะช่วยเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณแล้ว ยังช่วยลดเวลาและหน่วยความจำในการคำนวณอีกด้วย



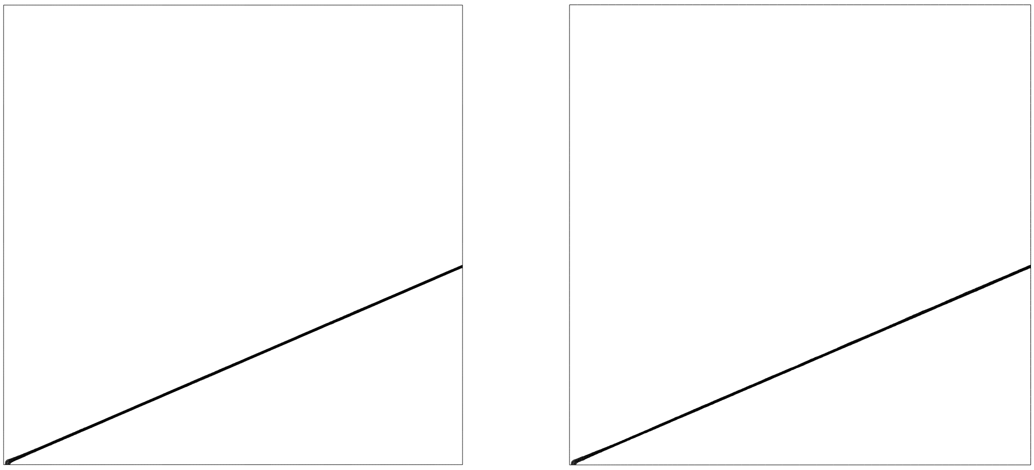
(ก) เอลิเมนต์แบบ Structured mesh (ข) เอลิเมนต์แบบ Unstructured mesh

รูปที่ 7.7 เปรียบเทียบลักษณะเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ระหว่างเอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh



(ก) เอลิเมนต์แบบ Structured mesh (ข) เอลิเมนต์แบบ Unstructured mesh

รูปที่ 7.8 เปรียบเทียบรายละเอียดของเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ระหว่างเอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh



(ก) เอลิเมนต์แบบ Structured mesh (ข) เอลิเมนต์แบบ Unstructured mesh

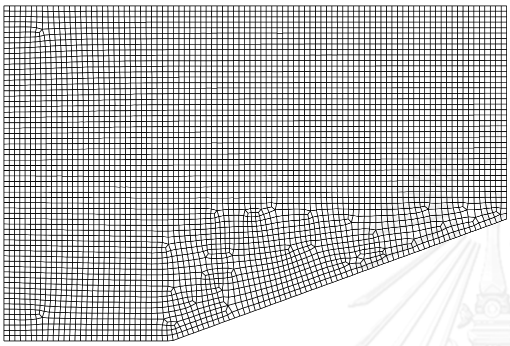
รูปที่ 7.9 เส้นชั้นของค่าความดันที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ Structured mesh และ Unstructured mesh

7.3.2 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

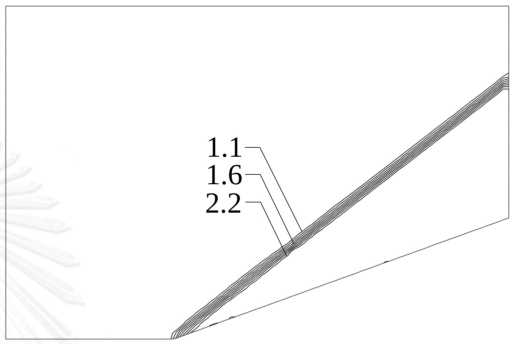
ในการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหานี้ จะทำเช่นเดียวกันกับปัญหาการไหลในหัวข้อ 7.3.1 โดยการนำเอาค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นมาเป็นตังบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ โดยการใช้โปรแกรม DOUBLE GRADIENT คำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะตามตำแหน่งต่าง ๆ บนโดเมนการไหล จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ไปสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ซึ่งจะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งหมดจำนวน 2 ครั้ง รูปที่ 7.10-7.12 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น และความดันสำหรับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ จะพบว่า คลื่นช็อกจะค่อยๆ แคบลงเมื่อขนาดเอลิเมนต์ในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกมีขนาดเล็กลง ตารางที่ 7.2 แสดงจำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อที่ใช้ในการคำนวณ และเมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความหนาแน่น ความดันและมัคนัมเบอร์ที่ได้จากการคำนวณหลังจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 กับผลเฉลยแม่นตรงแสดงในรูปที่ 7.13-7.15 พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้ดังกล่าวมีค่าเข้าใกล้ผลเฉลยแม่นตรงมากขึ้นหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์

ตารางที่ 7.2 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

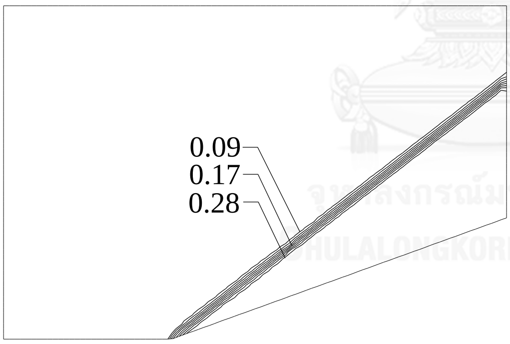
การปรับขนาดเอลิเมนต์	จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนจุดต่อ
เอลิเมนต์เริ่มต้น	5,017	5,163
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	5,208	5,317
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	8,473	8,607



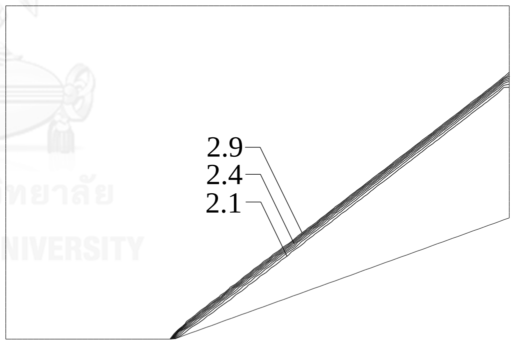
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

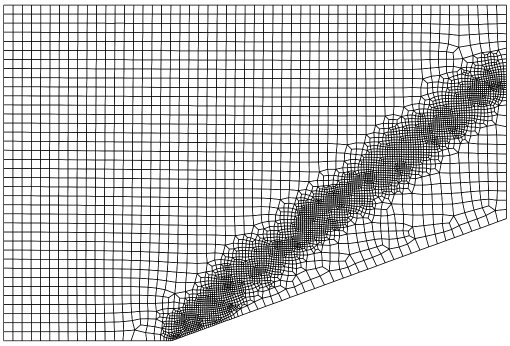


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

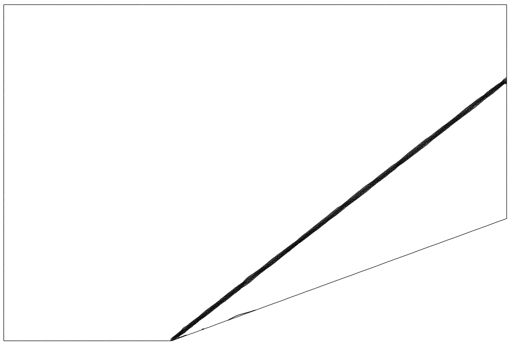


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

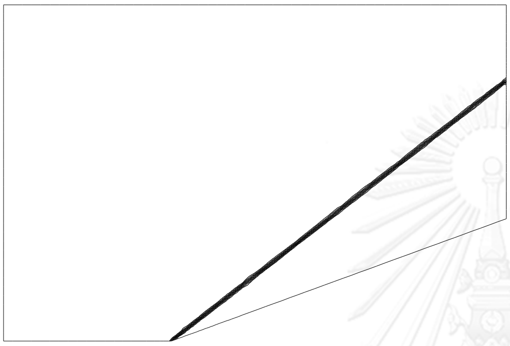
รูปที่ 7.10 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์ สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



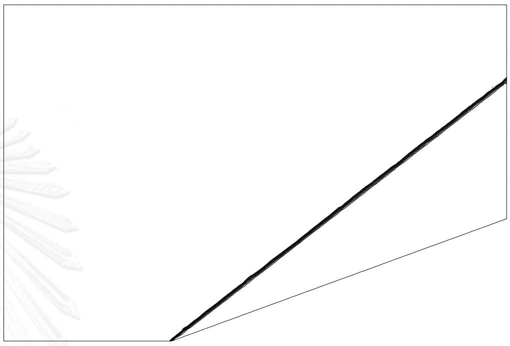
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

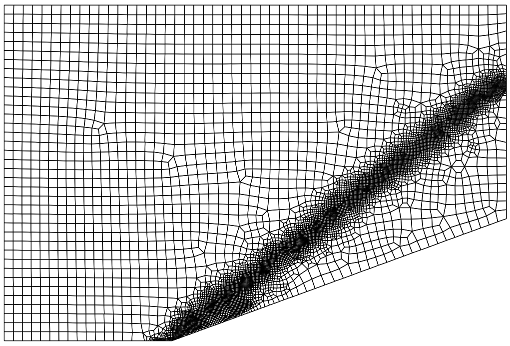


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

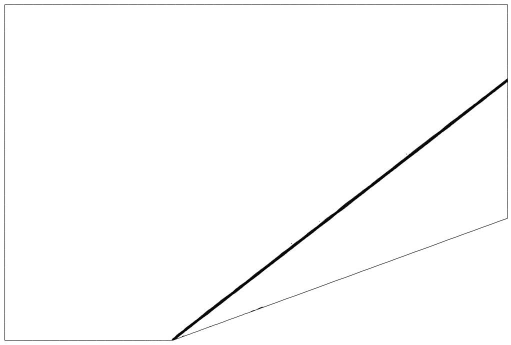


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

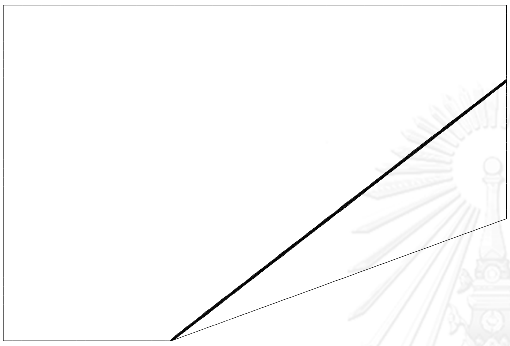
รูปที่ 7.11 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



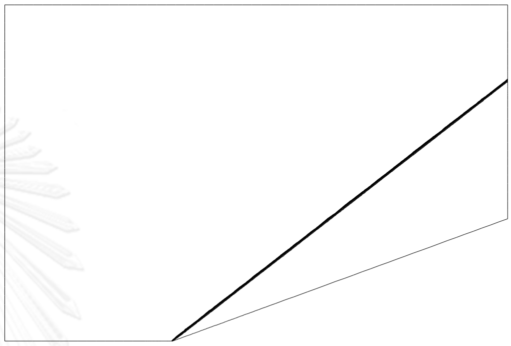
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น

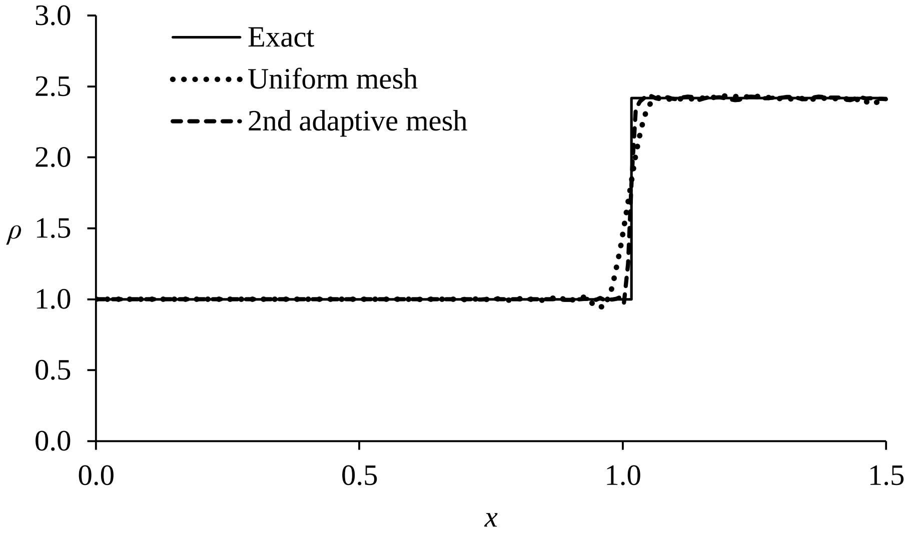


(ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

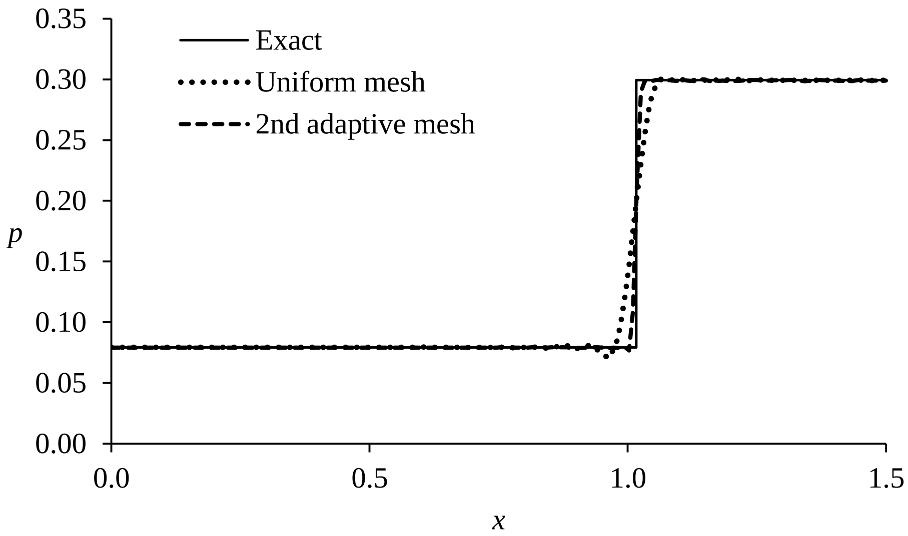


(ง) เส้นชั้นของค่ามัคนัมเบอร์

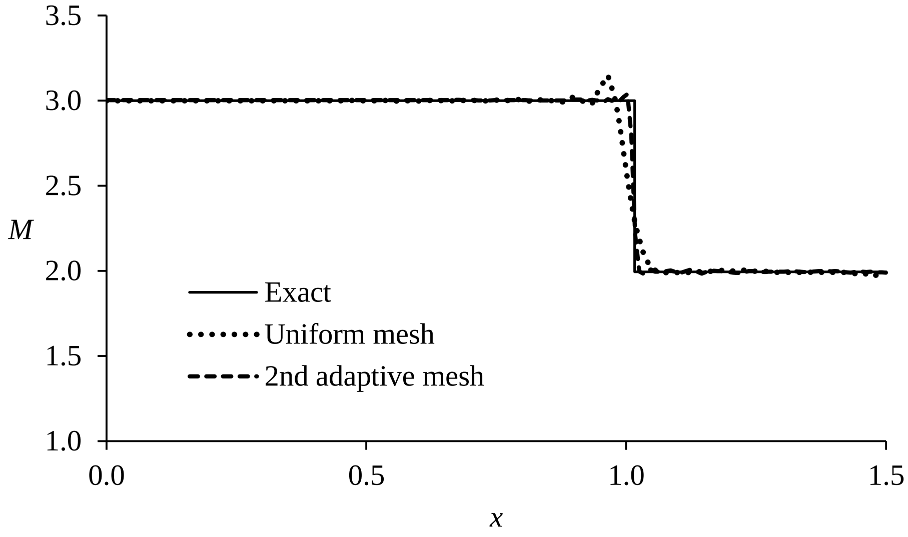
รูปที่ 7.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น ความดัน และมัคนัมเบอร์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 7.13 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.4 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 7.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.4 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°



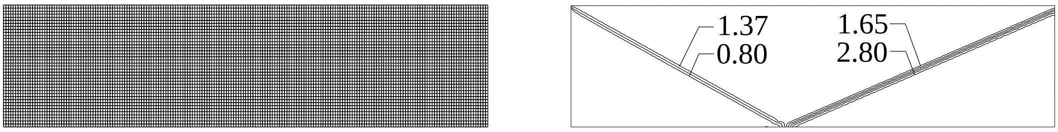
รูปที่ 7.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่ามัคนัมเบอร์ ที่ตำแหน่ง y = 0.4 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20°

7.3.3 การปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ จะทำเช่นเดียวกันกับปัญหาการไหลก่อนหน้านี้ โดยการนำค่าความหนาแน่นที่คำนวณได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นมาเป็นตัวบ่งชี้ในการปรับขนาดเอลิเมนต์ ซึ่งจะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ทั้งหมดจำนวน 2 ครั้ง รูปที่ 7.16-7.18 แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความดันของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ จะพบว่า หลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์แล้ว ขนาดความกว้างของคลื่นช็อกจะค่อยๆ แคบลง ตารางที่ 7.3 แสดงจำนวนเอลิเมนต์และจุดต่อที่ใช้ในการคำนวณ และเมื่อทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณหลังจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 กับผลเฉลยแม่นตรง ดังแสดงในรูปที่ 7.19-7.20 พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีแม่นยำมากขึ้น

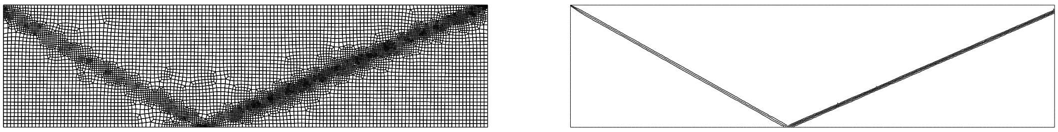
ตารางที่ 7.3 แสดงรายละเอียดการปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

การปรับขนาดเอลิเมนต์	จำนวนเอลิเมนต์	จำนวนจุดต่อ
เอลิเมนต์เริ่มต้น	8,000	8,241
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1	8,385	8,578
ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2	10,395	10,536



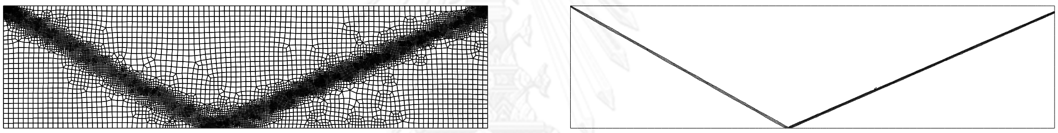
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 7.16 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



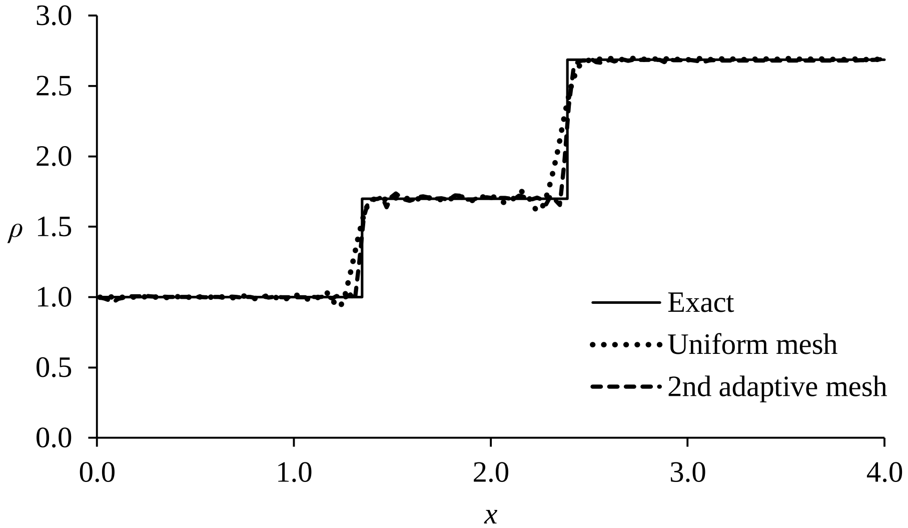
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 7.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

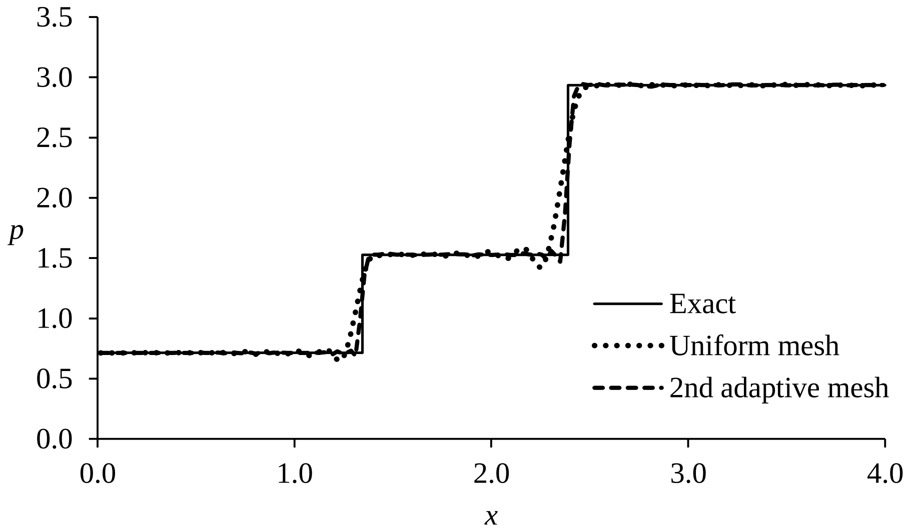


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 7.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



รูปที่ 7.19 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่น ที่ตำแหน่ง y = 0.25 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ



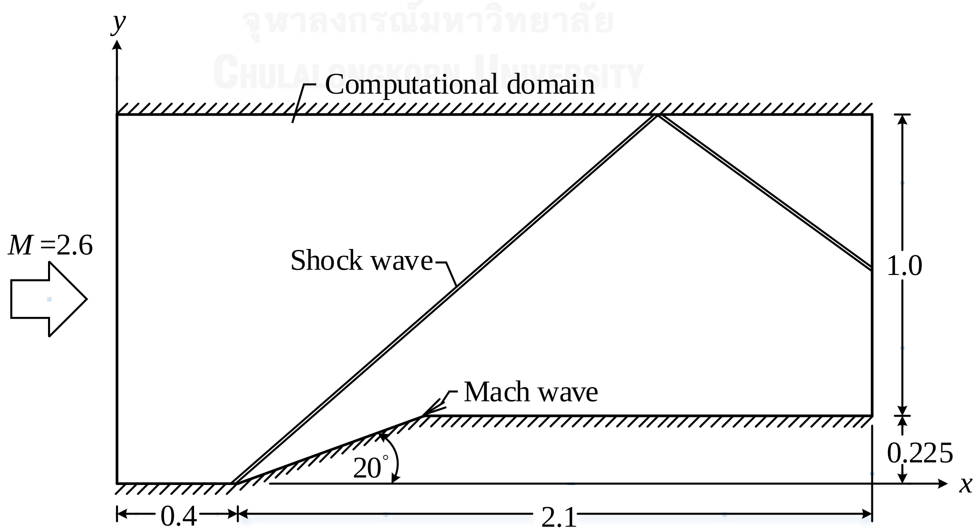
รูปที่ 7.20 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดัน ที่ตำแหน่ง y = 0.25 เมื่อปรับขนาดเอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

บทที่ 8
การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ลักษณะต่าง ๆ

ในบทนี้จะเป็นการนำเอาโปรแกรม TGHIFLOW ที่ได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องแล้วไปใช้วิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ในลักษณะต่างๆ ที่มีความซับซ้อนมากขึ้น พร้อมทั้งประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาดังกล่าว

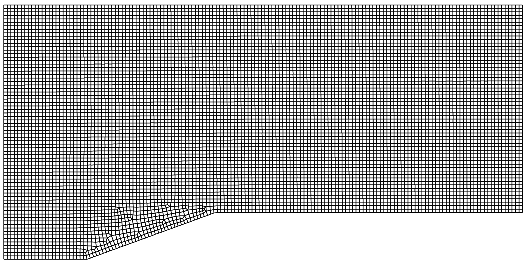
8.1 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°

ลักษณะของปัญหาเป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.6 เท่า ไหลมากระทบพื้นเอียงซึ่งทำมุม 20° กับพื้นระนาบก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงพุ่งตรงขึ้นไปกระทบกับผนังด้านบนของโดเมนและสะท้อนกลับลงด้านล่าง ส่วนลักษณะการไหลบริเวณมุมบนของพื้นเอียงจะเกิดการขยายตัวอย่างอิสระ (free expansion) ซึ่งจะพุ่งไปกระทบกับคลื่นช็อกที่สะท้อนกลับจากผนังด้านบน ทำให้บริเวณดังกล่าวเกิดความแปรปรวนของการไหลมากยิ่งขึ้น [13] ดังแสดงในรูปที่ 8.1 โดยเงื่อนไขขอบเขตของปัญหามีดังนี้ ขอบด้านซ้ายเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบทางด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนขอบด้านบนและด้านล่างเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ และค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.7642$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

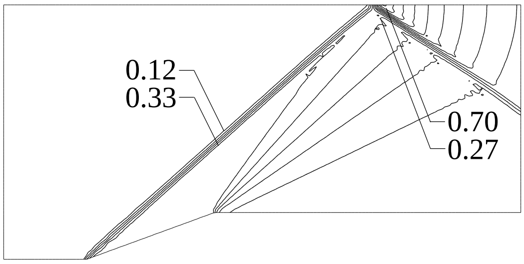


รูปที่ 8.1 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°

ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนี้จะเริ่มต้นด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 9,474 เอลิเมนต์ และ 9,692 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 8.2(ก) ส่วนรูปที่ 8.2(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ซึ่งพบว่าเส้นชั้นของค่าความดันที่ได้จากการคำนวณแสดงถึงลักษณะการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกได้เป็นอย่างดี รวมถึงการกระจายอย่างอิสระในบริเวณมุมบนของพื้นเอียงด้วย แต่บริเวณที่เกิดคลื่นช็อกยังมีขนาดกว้างเนื่องจากเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินไป ดังนั้น ในการวิเคราะห์ครั้งถัดไปจะทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ โดยการลดขนาดเอลิเมนต์บริเวณที่เกิดคลื่นช็อกให้เล็กลง ด้วยการใช้ค่าความหนาแน่นของผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นมาคำนวณหาขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมตามตำแหน่งต่าง ๆ ภายในโดเมน โดยใช้โปรแกรม DOUBLE GRADIENT หลังจากนั้นนำค่าที่คำนวณได้จากโปรแกรม DOUBLE GRADIENT ไปสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 จะพบว่ามีเอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกและเอลิเมนต์ขนาดใหญ่วางตัวบริเวณอื่นนอกแนวคลื่นช็อก ดังแสดงในรูปที่ 8.3(ก) ซึ่งรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วยจำนวนเอลิเมนต์ 9,467 เอลิเมนต์ และ 9,660 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.3(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่ได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 หลังจากนั้นก็ทำการปรับขนาดเอลิเมนต์อีกครั้ง เพื่อให้ผลลัพธ์มีความแม่นยำมากยิ่งขึ้น รูปที่ 8.4(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยจำนวนเอลิเมนต์ 10,212 เอลิเมนต์ และ 10,383 จุดต่อ รูปที่ 8.4(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่ได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 พบว่า คลื่นช็อกจะมีความคมชัดมากขึ้นในขณะที่ใช้จำนวนเอลิเมนต์ในการคำนวณใกล้เคียงกับรูปแบบไฟไนต์ก่อนหน้า และเมื่อทำการเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ได้จากระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (TGHIFLOW) กับระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะ (CBS) [13] ดังแสดงในรูปที่ 8.5-8.6 พบว่าระเบียบวิธีทั้งสองจะให้ค่าที่สอดคล้องกัน ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้เป็นอย่างดี

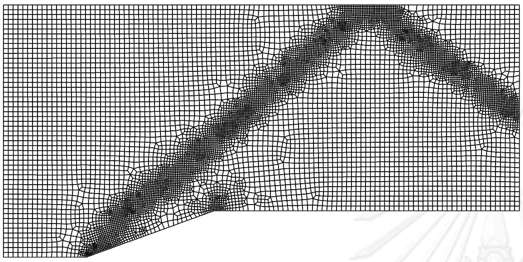


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

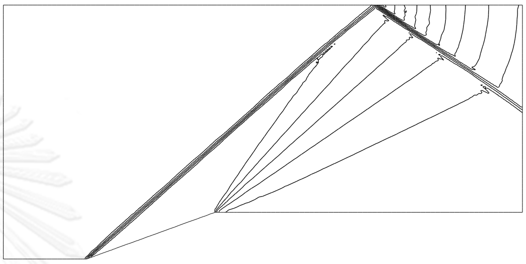


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.2 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°

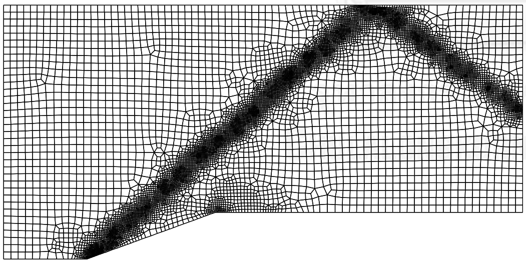


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

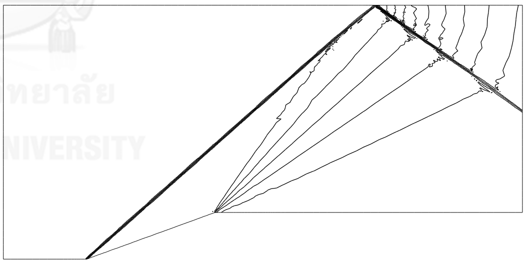


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.3 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°

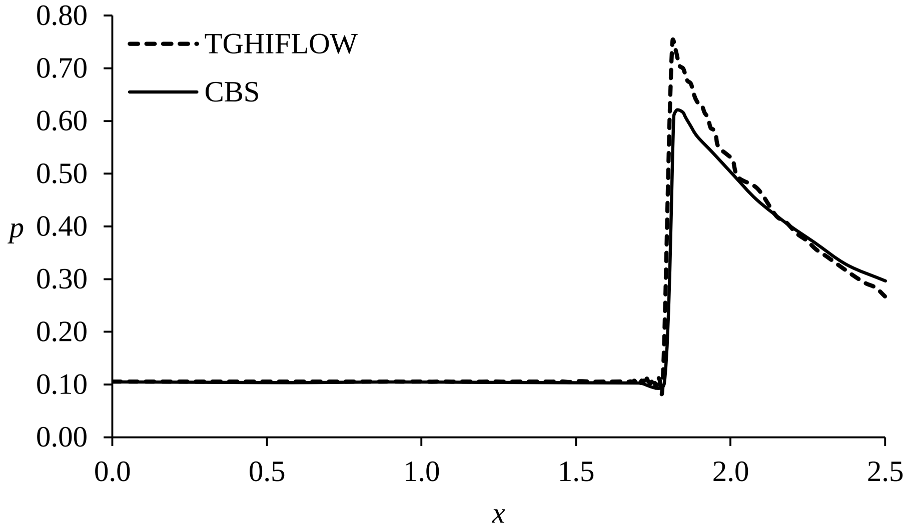


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

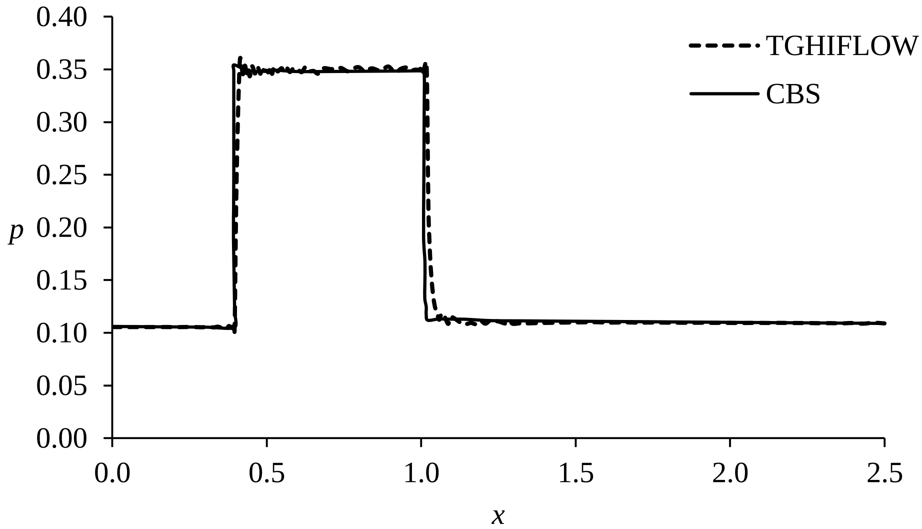


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.4 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°



รูปที่ 8.5 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านบนสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°



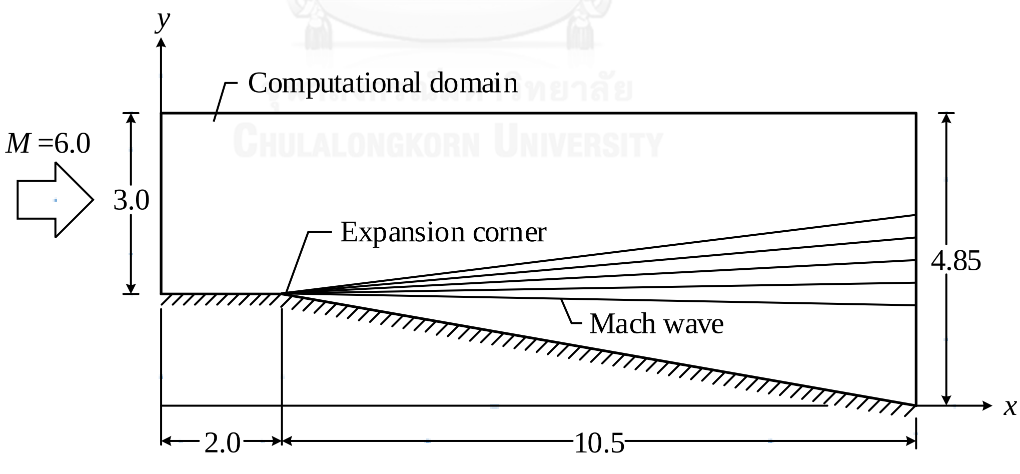
รูปที่ 8.6 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีพื้นเอียงมุม 20°

8.2 ปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

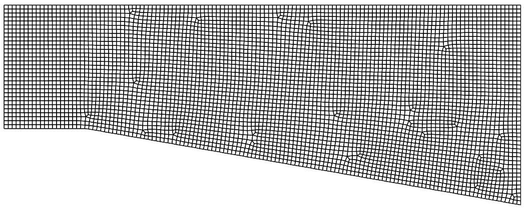
ลักษณะของปัญหาเป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 6.0 เท่าผ่านพื้นราบในช่วงแรก หลังจากนั้นจะไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดที่ขยายออก ส่งผลให้คุณสมบัติของของไหลเกิดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันจนก่อให้เกิดคลื่นช็อกตรงมุมหัก (expansion corner) [13] ดังแสดงในรูปที่ 8.7 โดย

เงื่อนไขขอบเขตกำหนดดังนี้ ขอบด้านซ้ายและด้านบนเป็นขอบเขตการไหลเข้า ด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนบริเวณขอบด้านล่างจะเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ และค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.5496$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

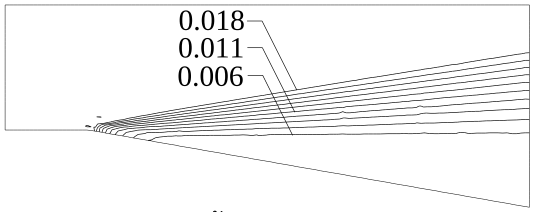
ในการวิเคราะห์ปัญหานี้จะทำในลักษณะเดียวกันกับปัญหาก่อนหน้านี้โดยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 4,976 เอลิเมนต์ และ 5,140 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 8.8(ก) ส่วนรูปที่ 8.8(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดัน พบว่า มีความผิดพลาดค่อนข้างมากในบริเวณมุมหักเพราะเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้ไม่สามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัทธ์ที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ เพื่อลดความผิดพลาดของผลลัพธ์ ในการคำนวณครั้งถัดไปจะทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหานี้ ดังแสดงในรูปที่ 8.9(ก)-(ข) ซึ่งแสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบเอลิเมนต์จำนวน 5,084 เอลิเมนต์ และ 5,240 จุดต่อ พบว่า มีการวางเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณมุมหักของผนังทำให้คลื่นช็อกบริเวณดังกล่าวมีความคมชัดขึ้นหลังจากทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเมื่อเปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่คำนวณได้กับผลเฉลยแม่นตรง [27] ดังแสดงในรูปที่ 8.10 พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าสอดคล้องกัน ยกเว้นบริเวณมุมหักของผนังด้านล่างทำให้จำเป็นจะต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กลงอีก หากต้องการผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำมากขึ้น



รูปที่ 8.7 ปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

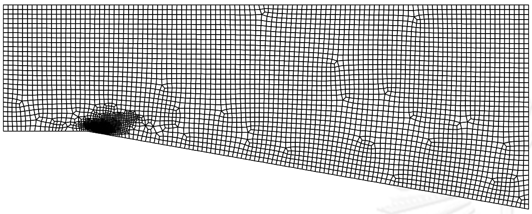


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์

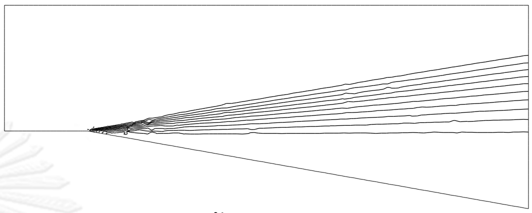


(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.8 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

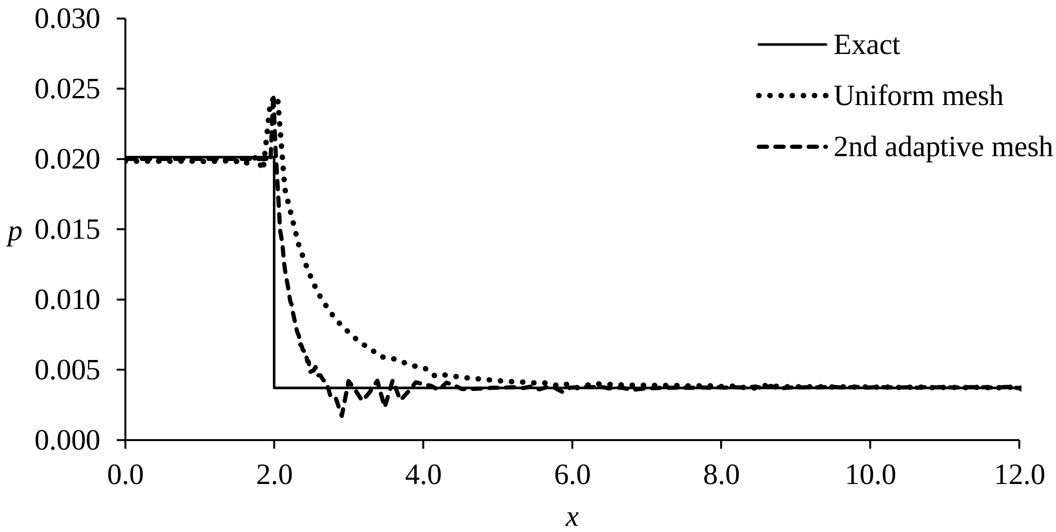


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์



(ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

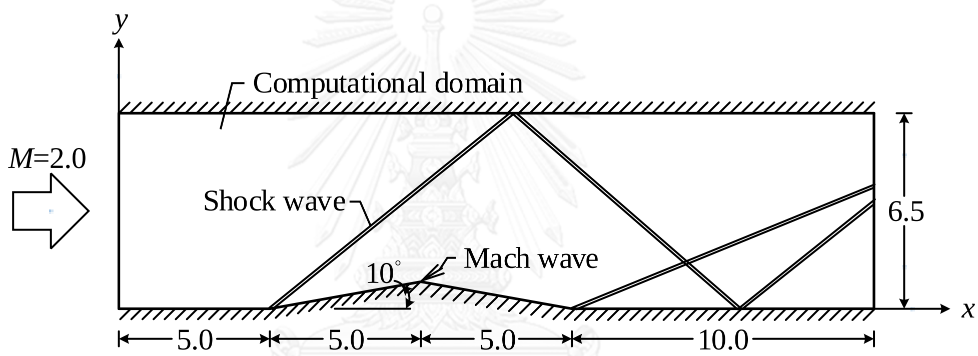
รูปที่ 8.9 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย



รูปที่ 8.10 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันบริเวณผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดขยาย

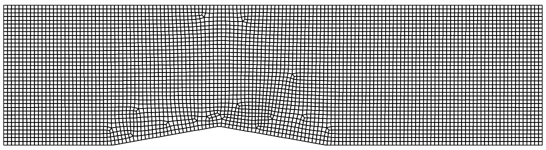
8.3 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม

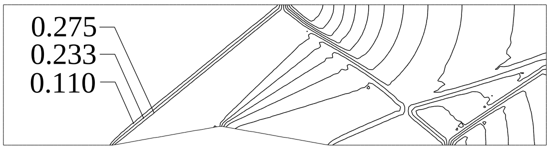
ลักษณะของปัญหา เป็นการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2 เท่า ไหลมากระทบกับเนินสามเหลี่ยมก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงพุ่งตรงขึ้นไปกระทบกับผนังด้านบนและสะท้อนกลับมากระทบกับผนังด้านล่างแล้วทำให้เกิดคลื่นสะท้อนขึ้น ส่วนการไหลบริเวณยอดเนินสามเหลี่ยมจะเกิดการขยายตัวอย่างอิสระซึ่งจะพุ่งไปกระทบคลื่นช็อกที่สะท้อนกลับจากผนังด้านบน ส่วนจุดมุมหักบริเวณด้านหลังเนินสามเหลี่ยมจะก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงพุ่งไปกระทบกับคลื่นช็อกที่สะท้อนลงมาจากด้านบน [29] ดังแสดงในรูปที่ 8.11 โดยมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ ขอบด้านซ้ายเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบทางด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนขอบด้านบนและด้านล่างเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.9464$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$



รูปที่ 8.11 ปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม

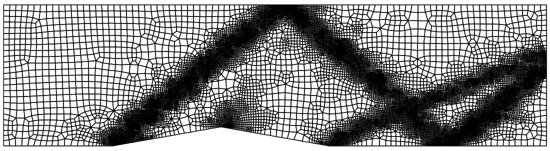
รูปที่ 8.12(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 5,021 เอลิเมนต์ และ 5,200 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.12(ข) แสดงลักษณะเส้นชั้นของค่าความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น พบว่า คลื่นช็อกที่เกิดขึ้นทั้งก่อนการตกกระทบและหลังจากการสะท้อนไม่มีความคมชัด เนื่องจากเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดเล็กไม่เพียงพอ ในการวิเคราะห์ครั้งถัดไปจะประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์เข้ากับปัญหานี้ รูปที่ 8.13(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์ 17,113 เอลิเมนต์ และ 17,344 จุดต่อ และเส้นชั้นของค่าความดันที่ได้จากรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวดังแสดงในรูปที่ 8.13(ข) พบว่า คลื่นช็อกจะมีความคมชัดขึ้น และเมื่อนำค่าความดันที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คิน (TGHIFLOW) ไปเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากระเบียบวิธีอัปวินด์เซลล์เซนเตอร์ (Cell-centered) [25] พบว่า ลักษณะการกระจายของค่าความดันที่ได้จากทั้งสองระเบียบวิธีให้ค่าที่สอดคล้องกันดังแสดงในรูปที่ 8.14-8.15

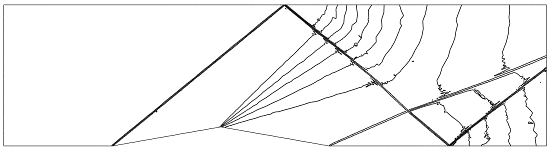




(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

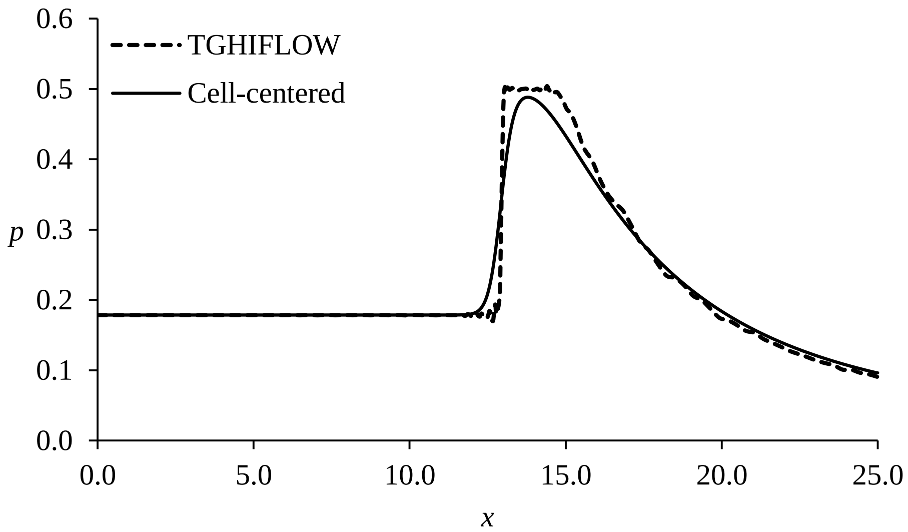
รูปที่ 8.12 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม



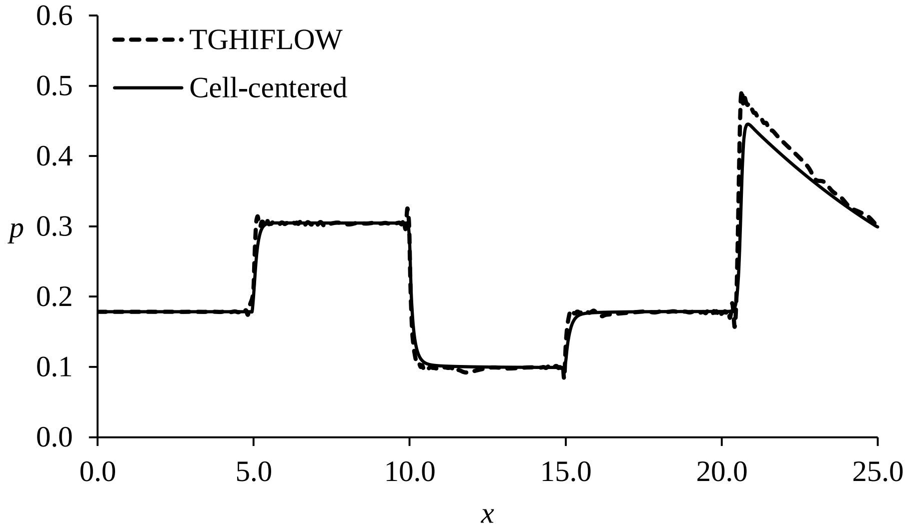


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.13 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม



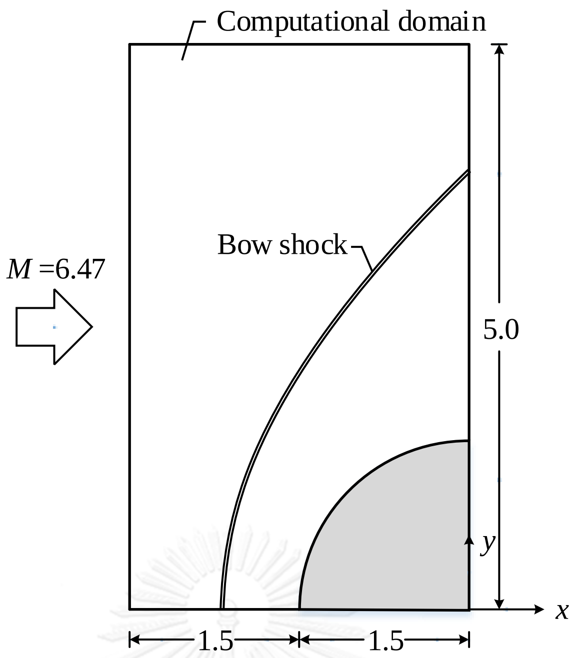
รูปที่ 8.14 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านบนสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม



รูปที่ 8.15 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันที่ผนังด้านล่างสำหรับปัญหาการไหลในช่องแคบที่มีเนินสามเหลี่ยม

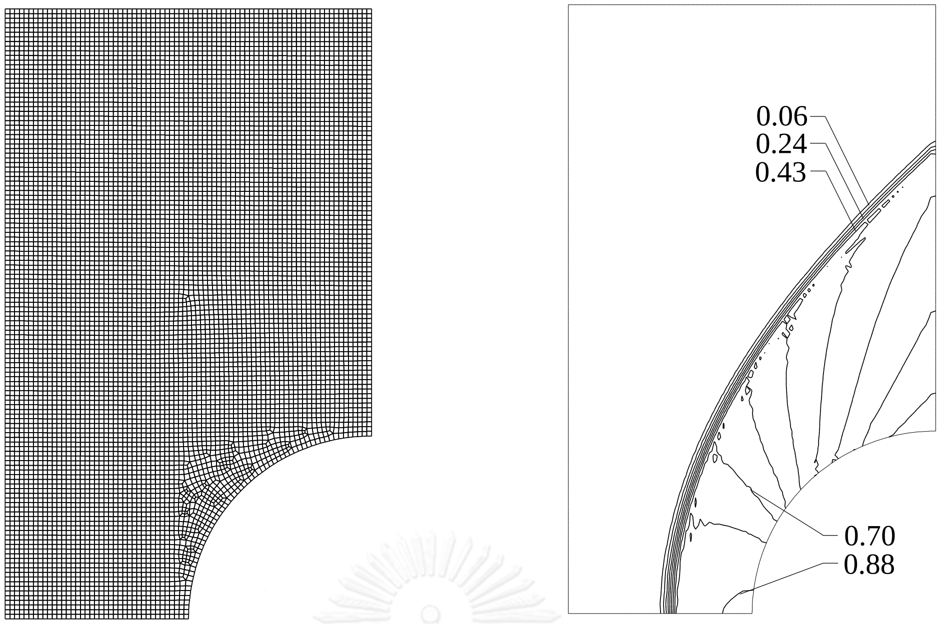
8.4 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก

ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอกเป็นปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากกว่าปัญหาก่อนหน้านี้ เนื่องจากมุมที่ของไหลกระทำกับทรงกระบอกมีค่ามากกว่าค่ามุมวิกฤต ซึ่งจะทำให้ของไหลที่มากระทบกับทรงกระบอกเกิดคลื่นช็อกโค้ง (Bow shock) ขึ้น [31] ดังแสดงในรูปที่ 8.16 โดยแนวคลื่นช็อกโค้งจะเกิดขึ้นบริเวณด้านหน้าของทรงกระบอก และในบริเวณเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่างแนวคลื่นช็อกโค้งกับผิวทรงกระบอกจะเกิดการไหลของอากาศด้วยความเร็วน้อยกว่าเสียง (Subsonic flow) เมื่อถัดจากบริเวณนี้ไปแล้วความเร็วของการไหลจะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนกระทั่งมีความเร็วมากกว่าความเร็วเสียงอีกครั้ง โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ ขอบด้านซ้ายและด้านบนเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบทางด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนขอบด้านล่างและผิวทรงกระบอกเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืดและกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.5455$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.38$



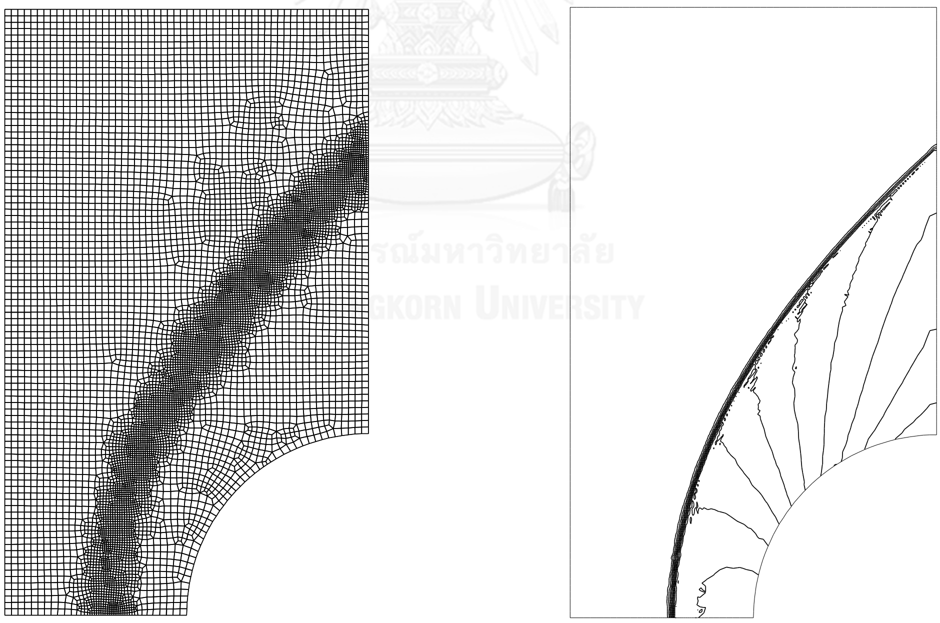
รูปที่ 8.16 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก

รูปที่ 8.17(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 9,042 เอลิเมนต์ และ 9,243 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.17(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ซึ่งจะเห็นได้ว่าอากาศจะไหลเข้ามาโดยมีการกระจายของความดันอย่างสม่ำเสมอ ต่อมาอากาศไหลผ่านพื้นผิวของทรงกระบอกทำให้เกิดการเปลี่ยนทิศทางการไหลไปตามพื้นผิวทรงกระบอก ก่อให้เกิดการอัดตัวของอากาศ ค่าความดันจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วปรากฏเป็นคลื่นช็อกโค้งขึ้น ส่วนคลื่นช็อกโค้งนั้นจะมีลักษณะที่กว้างและไม่คมชัด เนื่องจากเอลิเมนต์ในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกนั้นมีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้จำเป็นจะต้องปรับขนาดเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวให้มีขนาดเล็กลง รูปที่ 8.18(ก) เป็นรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 9,350 เอลิเมนต์ และ 9,515 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.18(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่สอดคล้องกับการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 พบว่า คลื่นช็อกโค้งมีความคมชัดขึ้น เพื่อปรับปรุงผลลัพธ์ให้มีความแม่นยำมากขึ้นอีก รูปที่ 8.19(ก)-(ข) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์และเส้นชั้นของค่าความดันที่ได้จากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 9,921 เอลิเมนต์ และ 10,052 จุดต่อ และเมื่อเปรียบเทียบตำแหน่งของการเกิดคลื่นช็อกโค้งในแนวเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกโดยใช้ค่าความดันที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเทย์เลอร์-กาเลอร์คินกับค่าที่ได้จากการคำนวณจากสมการของ Billig [32] ซึ่งสมการดังกล่าวสร้างจากผลการทดลอง พบว่า ตำแหน่งที่เกิดคลื่นช็อกโค้งของทั้งสองวิธีมีตำแหน่งที่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 8.20-8.21



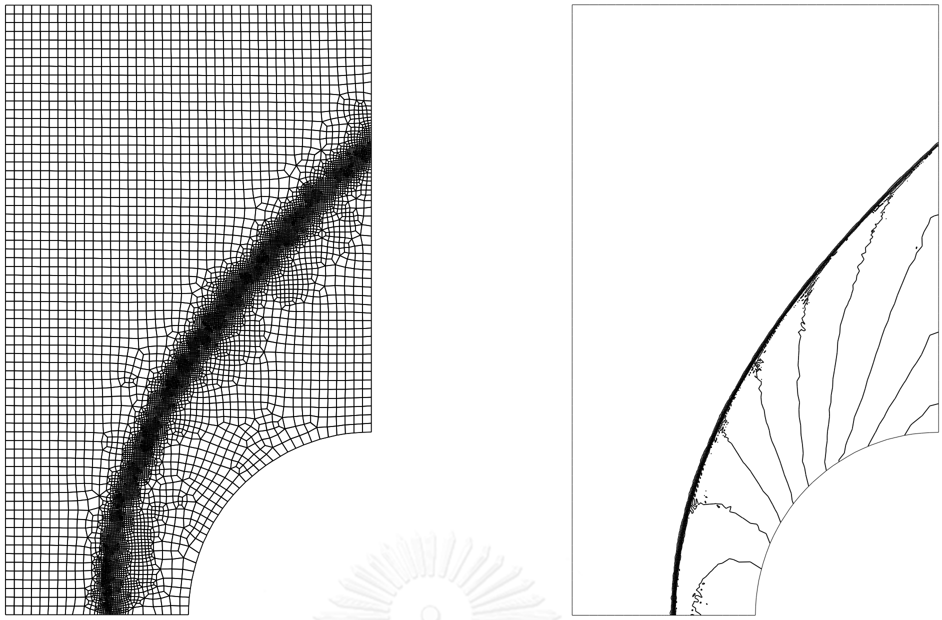
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.17 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก



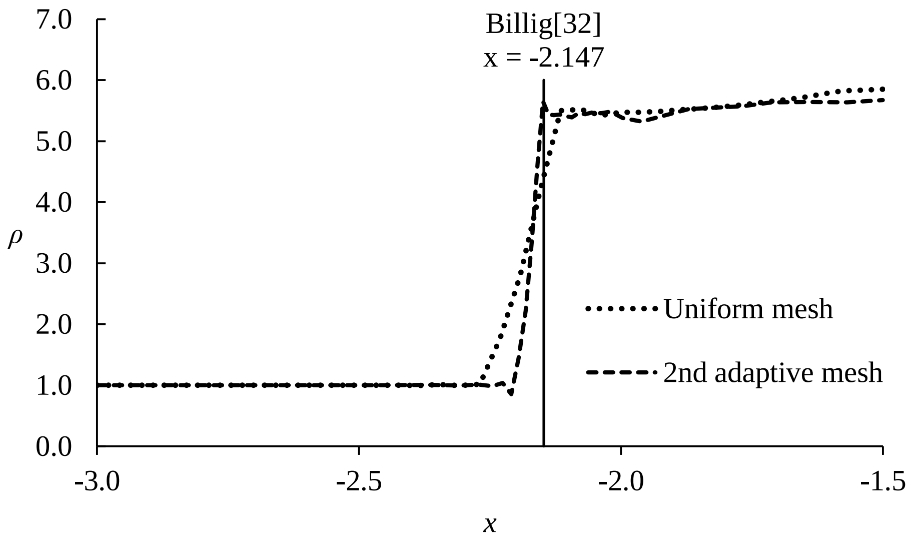
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.18 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก

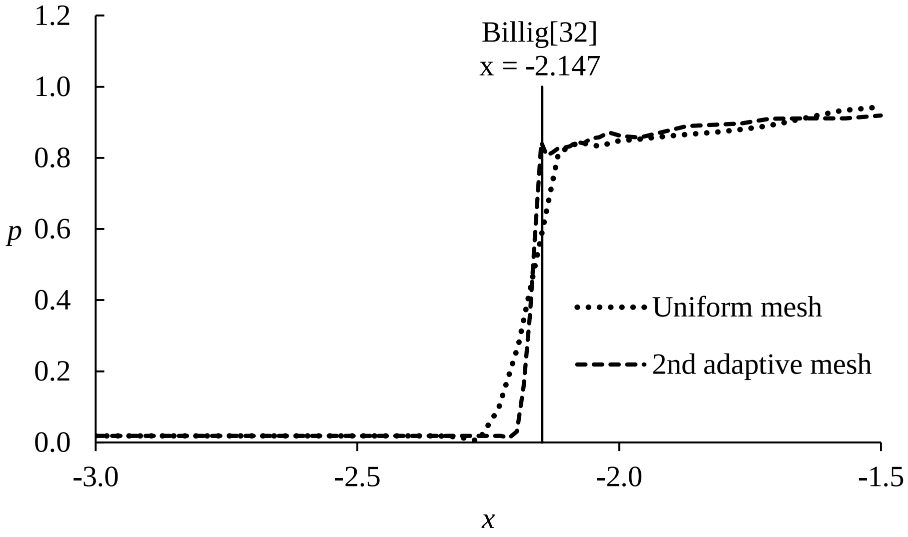


(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.19 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์การปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดัน สำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก



รูปที่ 8.20 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความหนาแน่นตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกระบอก สำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก



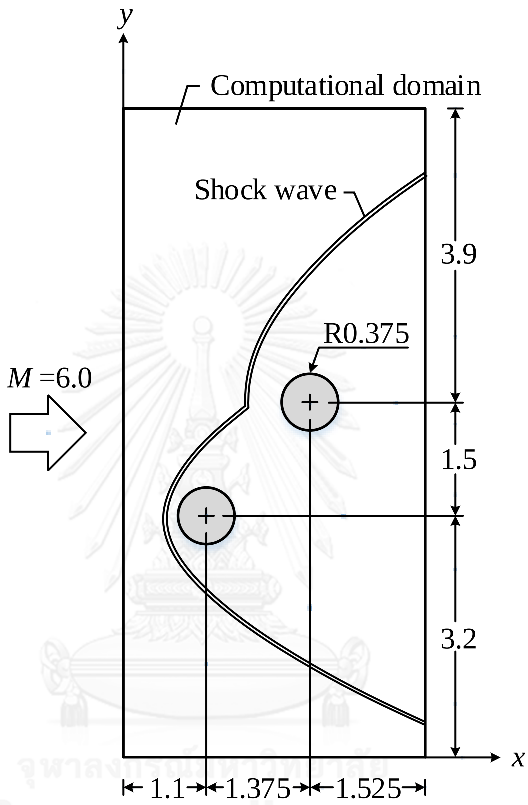
รูปที่ 8.21 เปรียบเทียบการกระจายของค่าความดันตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกระบอกสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก

8.5 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน

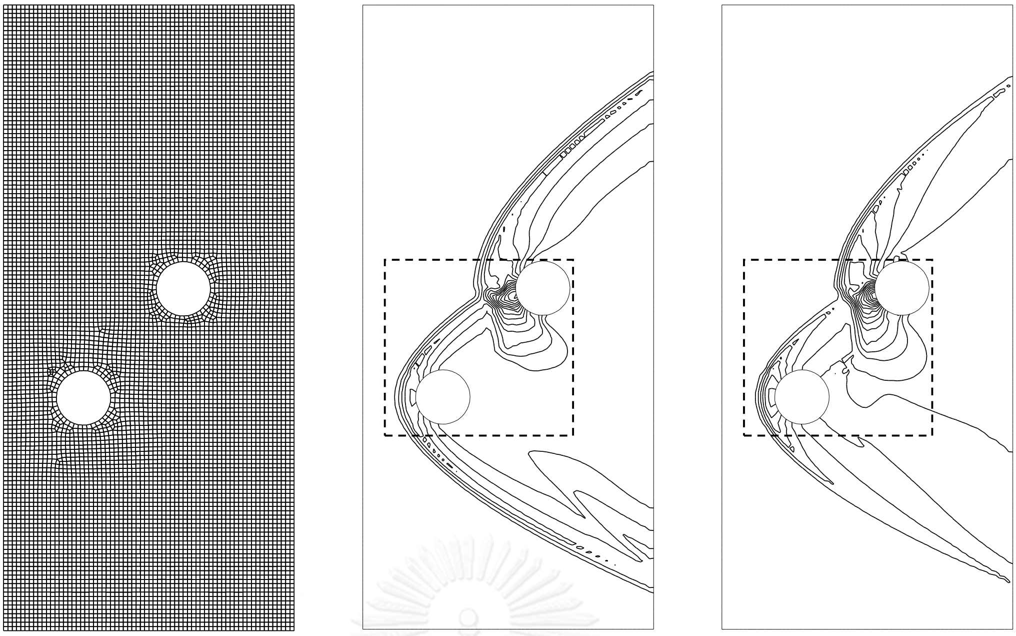
ลักษณะการไหลของปัญหาเป็นการกระทบกันของคลื่นช็อก (shock-shock interaction) ที่เกิดจากคลื่นช็อกโค้งของทรงกระบอกที่อยู่หน้ากับคลื่นช็อกโค้งของทรงกระบอกที่อยู่ด้านหลัง ก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลงสภาวะของการไหลอย่างรุนแรงบริเวณที่คลื่นช็อกโค้งกระทบกันซึ่งส่งผลกระทบโดยตรงต่อทรงกระบอกที่อยู่ด้านหลัง [13] ดังแสดงในรูปที่ 8.22 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาดังนี้ ขอบด้านซ้ายเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบด้านบน, ด้านล่าง และด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก ส่วนผิวทรงกระบอกทั้งสองเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.5496$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

รูปที่ 8.23(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นซึ่งประกอบไปด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 9,684 เอลิเมนต์ และ 9,937 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.23(ข)-(ค) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น จากผลลัพธ์ที่ได้พบว่า ในบริเวณที่เกิดการกระทบกันของคลื่นช็อกบริเวณด้านหน้าทรงกระบอกจะมีความแปรปรวนของผลลัพธ์ที่สูงดังแสดงรายละเอียดการกระทบกันของคลื่นช็อกในรูปที่ 8.24 หลังจากนั้นจะทำการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ รูปที่ 8.25(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 9,767 เอลิเมนต์ และ 9,940 จุดต่อ ส่วนรูปที่ 8.25(ข)-(ค) แสดงเส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันที่สอดคล้องกับการปรับขนาด

เอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และรูปที่ 8.26 แสดงรายละเอียดการกระทบกันของคลื่นช็อกบริเวณด้านหน้าทรงกระบอกหลังจากปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 พบว่า การกระจายของค่าความหนาแน่นและความดันบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกจะคมชัดขึ้น แสดงถึงประสิทธิภาพของการปรับขนาดเอลิเมนต์ที่ช่วยเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณได้เป็นอย่างดี

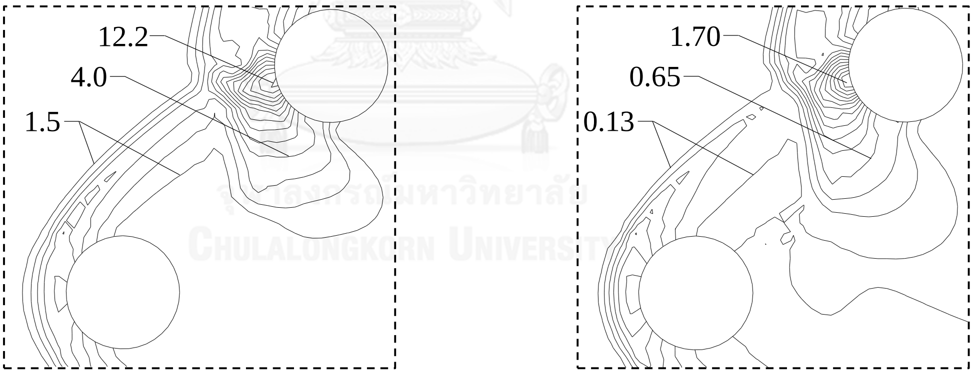


รูปที่ 8.22 ปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน



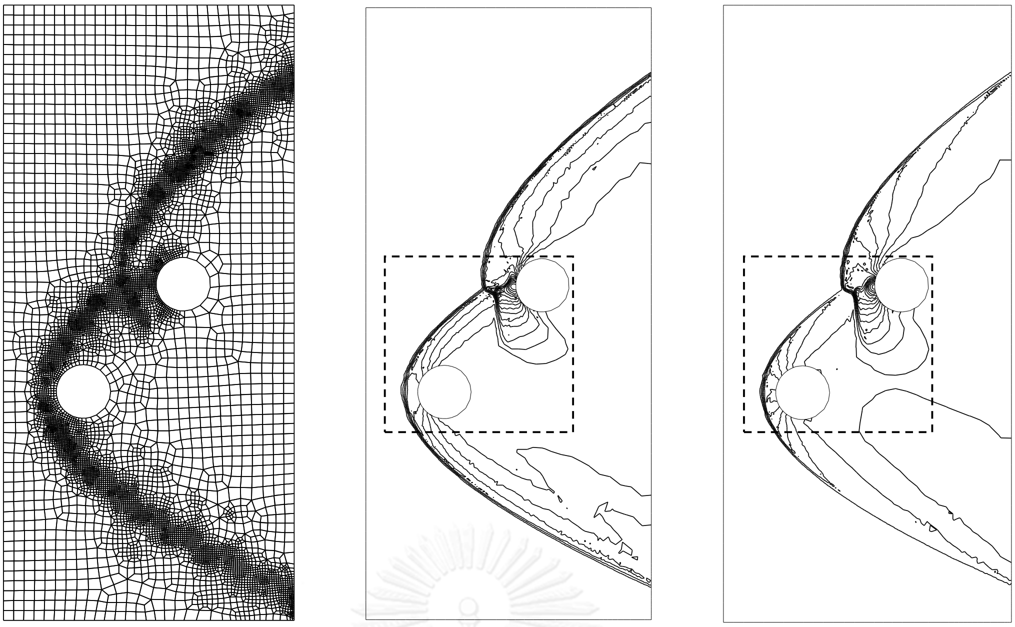
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น (ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.23 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน



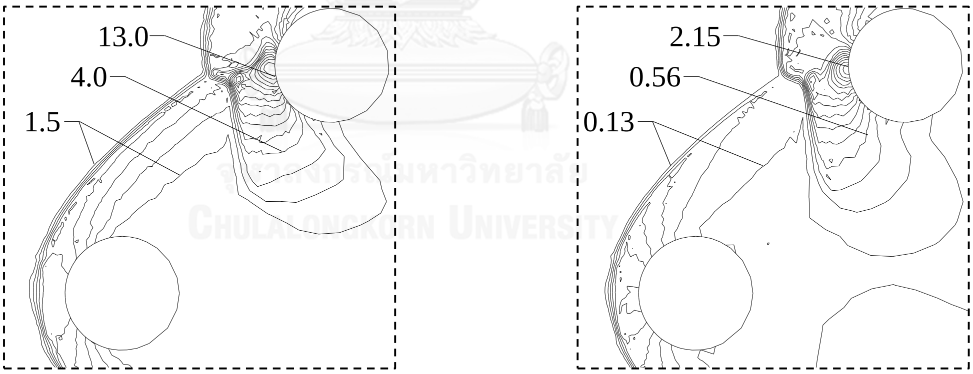
(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.24 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันของรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น (ค) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.25 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน



(ก) เส้นชั้นของค่าความหนาแน่น (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

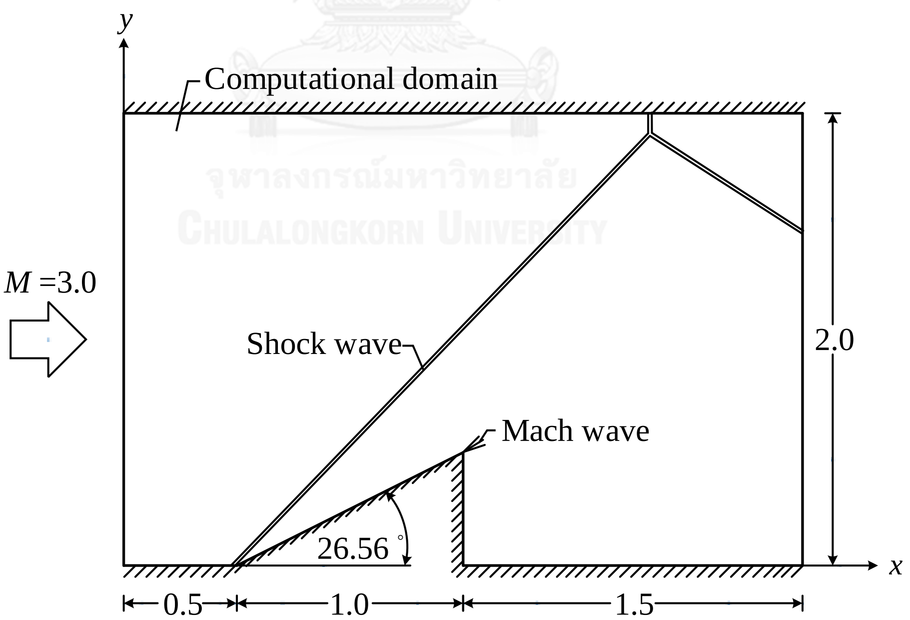
รูปที่ 8.26 เส้นชั้นของค่าความหนาแน่นและความดันหลังจากการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 สำหรับปัญหาการไหลผ่านทรงกระบอก 2 ท่อน

8.6 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56°

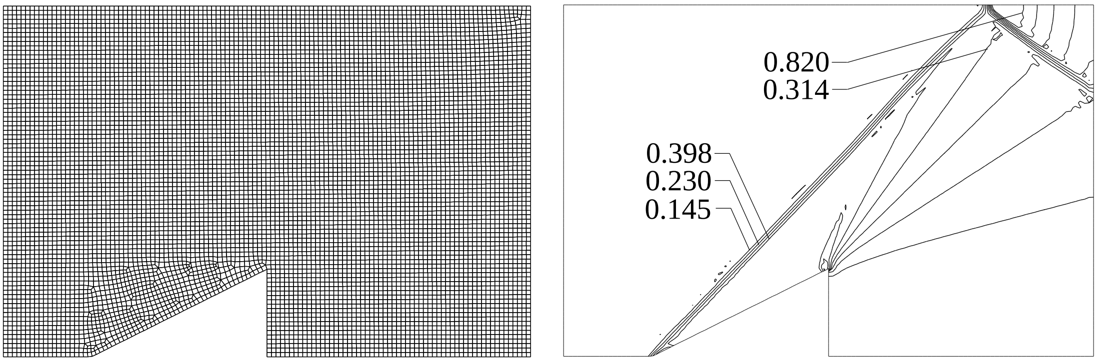
ลักษณะของปัญหานี้เป็นการไหลผ่านช่องแคบที่มีการยกระดับพื้นเอียงตรงผนังด้านล่างซึ่งทำมุม 26.56° กับพื้นราบ เมื่อของไหลที่มีระดับความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่า ไหลเข้าทางด้านซ้ายของโดเมนกระทบกับพื้นเอียงก่อให้เกิดคลื่นช็อกเอียงพุ่งไปกระทบกับผนังด้านบนและสะท้อนกลับ

ด้านล่าง ส่วนมุมบนของพื้นเอียงซึ่งมีลักษณะเป็นหน้าตัดขยายตัวอย่างฉับพลันจะก่อให้เกิดคลื่นมัค [25] ดังแสดงในรูปที่ 8.27 โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาดังนี้ ขอบด้านซ้ายเป็นขอบเขตการไหลเข้า ขอบด้านขวาเป็นขอบเขตการไหลออก และขอบด้านล่างและด้านบนเป็นผนังการไหลที่ไม่มีความหนืด และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ ค่าความหนาแน่น $\rho = 1.0$ ค่าความเร็ว $u = 1.0$, $v = 0$ ค่าพลังงานรวม $\varepsilon = 0.6984$ และอัตราส่วนความร้อนจำเพาะ $\gamma = 1.4$

ในการวิเคราะห์เริ่มต้นด้วยการแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 9,041 เอลิเมนต์ และ 9,252 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 8.28(ก) ส่วนในรูปที่ 8.28(ข) แสดงเส้นชั้นของค่าความดันที่สอดคล้องกับรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น พบว่า บริเวณที่เกิดคลื่นช็อกจะมีขนาดที่กว้างมาก และไม่ก่อให้เกิดคลื่นช็อกที่ตั้งฉากกับผนังด้านบนเหมือนดังแสดงในรูปที่ 8.27 เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในการคำนวณมีขนาดใหญ่เกินไป ทำให้ไม่สามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ รูปที่ 8.29(ก) แสดงรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดครั้งที่ 2 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์จำนวน 10,690 เอลิเมนต์ และ 10,829 จุดต่อ ซึ่งพบว่ามีการวางตัวของเอลิเมนต์ขนาดเล็กในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อก ทำให้คลื่นช็อกแคบลงและเกิดคลื่นช็อกตั้งฉากกับผนังด้านบน ดังแสดงในรูปที่ 8.29(ข)

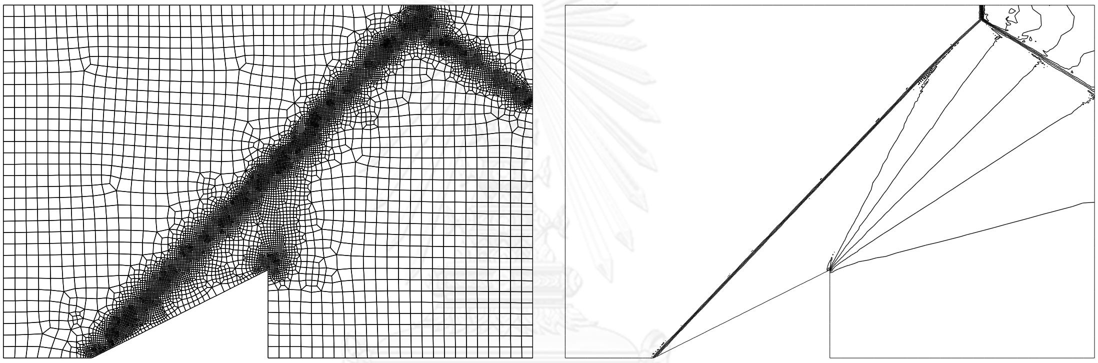


รูปที่ 8.27 ปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56°



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.28 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้นและเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56°



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (ข) เส้นชั้นของค่าความดัน

รูปที่ 8.29 รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 2 และเส้นชั้นของค่าความดันสำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องแคบที่พื้นเอียงมุม 26.56°

บทที่ 9
บทสรุป ปัญหาที่พบ และข้อเสนอแนะ

9.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ซึ่งเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนในการหาผลลัพธ์เป็นอย่างมาก อันเนื่องมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ ที่ใช้ในการคำนวณเป็นสมการที่ขึ้นอยู่แก่กันและกัน และสมการย่อยเหล่านี้ก็เป็นสมการไม่เชิงเส้นอีกด้วย ทำให้การหาผลเฉลยแม่นตรง สำหรับปัญหานี้แทบจะเป็นไปไม่ได้ ด้วยเหตุผลหลัก 2 ประการที่กล่าวมา จึงเป็นที่มาในการนำเอาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์สำหรับปัญหานี้ โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ เป็นสมการตั้งต้นในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้มักจะมีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์อย่างฉับพลันบริเวณคลื่นช็อกทำให้จำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณดังกล่าว เพื่อให้สามารถจับการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอย่างฉับพลันได้ ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อเวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้ในการคำนวณมากขึ้นหากใช้เอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กทั่วทั้งโดเมน จึงได้ทำการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหานี้ โดยมีหลักการคือ จะวางเอลิเมนต์ที่มีขนาดเล็กในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์มาก และวางเอลิเมนต์ขนาดใหญ่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์น้อย ทำให้ช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ใช้ในการคำนวณ

เริ่มต้นบทที่ 1 เป็นการอธิบายความสำคัญและความเป็นมาของวิทยานิพนธ์ที่ทำการศึกษาว่ามีความจำเป็นที่ต้องใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ และความจำเป็นในการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อเพิ่มความแม่นยำและช่วยลดเวลาในการคำนวณ รวมทั้งอธิบายถึงเป้าหมายในการทำวิทยานิพนธ์ บทที่ 2 เป็นการอธิบายเกี่ยวกับเอกสารที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ ส่วนในบทที่ 3 เป็นการอธิบายเกี่ยวกับการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนาเวียร์-สโตกส์ใน 2 มิติ ซึ่งประกอบด้วย สมการเชิงอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน เพื่อให้เกิดความเข้าใจความหมายทางกายภาพของแต่ละพจน์ในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยรวมทั้งที่มาของพจน์เหล่านี้ จากนั้นจึงเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้อยู่ในรูปตัวแปรอนุรักษ์เพื่อให้ง่ายแก่การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ และยังกล่าวถึงเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืด ซึ่งจะมี 3 เงื่อนไข ได้แก่ เงื่อนไขขอบเขตการไหลเข้า การไหลออก และผนังที่ไม่มีความหนืด ถัดมาบทที่ 4 เป็นการอธิบายระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทเลอร์-กาเลอร์คินเพื่อวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดโดยมีหลักการคือ การใช้อนุกรม-

เทย์เลอร์ในการสร้างความสัมพันธ์เวียนบังเกิดเกี่ยวกับเวลา และใช้ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกี่ยวกับระยะภายในโดเมนการไหล ในการสร้างสมการไฟไนต์-เอลิเมนต์ต่างๆ จะจัดให้อยู่ในรูปแบบอนุรักษ์ โดยตัวไม่รู้ค่าจะประกอบด้วย ค่าความหนาแน่น ค่าความเร็วตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ และค่าพลังงานรวม ซึ่งในการคำนวณจะแบ่งออกเป็น 2 ช่วงเวลา ในแต่ละช่วงเป็นการคำนวณหาตัวไม่รู้ค่าของทั้งเอลิเมนต์และตำแหน่งของจุดต่อ ตามลำดับ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ต่างๆ ที่ปรากฏในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จะอยู่ในรูปแบบปิด ซึ่งสามารถนำไปประดิษฐ์เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรง เพื่อเป็นการหลีกเลี่ยงการแก้ระบบสมการแบบปริยาย โดยการกำหนดให้เมทริกซ์มวลเป็นแบบรวมตัวที่จุดต่อ จึงทำให้การแก้ระบบสมการเป็นแบบชัดแจ้ง ซึ่งช่วยลดเวลาในการคำนวณได้อย่างมาก นอกจากนี้ เพื่อลดการสั่นของผลลัพธ์จึงได้เพิ่มความหนืดเทียมเข้าไปในการคำนวณด้วย ต่อจากนั้นบทที่ 5 เป็นการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินด้วยภาษาฟอร์แทรน ซึ่งให้ชื่อว่า TGHIFLOW โดยจะแสดงขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรม รายละเอียดของโปรแกรม ลักษณะแฟ้มข้อมูลนำเข้า และลักษณะแฟ้มข้อมูลของผลลัพธ์

หลังจากนั้นเป็นการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรม TGHIFLOW ด้วยปัญหาที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนและมีผลเฉลยแม่นตรง 3 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 2.4 เท่าตกกระทบพื้นราบ ปัญหาการไหลความเร็วสูงกว่าเสียง 3 เท่าผ่านพื้นเอียงมุม 20° และปัญหาการสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นตรงดังแสดงในบทที่ 6 แต่ในบริเวณที่เกิดคลื่นช็อกจะมีการสั่นและความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์เนื่องจากเอลิเมนต์ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่เกินไป ส่วนบทที่ 7 เป็นการอธิบายเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์กับปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยใช้หลักการของความเค้นหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็ง เพื่อเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์โดยการประยุกต์เทคนิคดังกล่าวกับปัญหาการไหลที่ได้วิเคราะห์ไปแล้วในบทที่ 6 นำมาวิเคราะห์ใหม่อีกครั้ง ซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความแม่นยำมากขึ้น ในขณะที่การสั่นจะลดลงเมื่อขนาดเอลิเมนต์บริเวณคลื่นช็อกมีขนาดเล็กลง และสุดท้ายบทที่ 8 เป็นการแสดงประสิทธิภาพของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้ไร้ความหนืดโดยการนำไปวิเคราะห์ปัญหาการไหลที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งพบว่าระเบียบวิธีดังกล่าวสามารถคำนวณหาผลลัพธ์ได้อย่างแม่นยำ และยังช่วยลดเวลาและหน่วยความจำที่ต้องใช้ในการคำนวณ

9.2 ปัญหาที่พบในขณะทำวิทยานิพนธ์

9.2.1 ในการปรับขนาดเอลิเมนต์เพื่อจะกำหนดขนาดเอลิเมนต์ให้เหมาะสมตามสภาวะการไหล โดยแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้วยโปรแกรม AUTOMESH-2D จะได้เอลิเมนต์ 3 ประเภท คือ ประเภทแรกเป็นเอลิเมนต์ที่มีคุณภาพดีที่สุด เมื่อนำไปคำนวณหาผลลัพธ์จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีไม่ค่อยเกิดการสั่นของผลลัพธ์ ประเภทที่ 2 เป็นเอลิเมนต์คุณภาพปานกลาง คือมุมแต่ละมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะมีขนาดดังนี้ 120°< θ <150° และ 30°< θ <60° และประเภทสุดท้ายเป็นเอลิเมนต์คุณภาพต่ำสุด คือมุมแต่ละมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะมีขนาดดังนี้ θ >150° และ θ <30° เมื่อนำเอลิเมนต์ประเภทที่ 2 และ 3 ไปคำนวณหาผลลัพธ์จะทำให้เกิดการสั่น ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อผลลัพธ์ที่คำนวณได้จะไม่มีความแม่นยำ จากการศึกษาพบว่า เมื่อทำการปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และ 2 ตามลำดับ จะพบเอลิเมนต์ประเภทที่ 2 และ 3 เป็นจำนวนมากในรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ของแต่ละปัญหาการไหล ยิ่งปัญหาใดมีความซับซ้อนมากขึ้นก็จะมีเอลิเมนต์ประเภทที่ 2 และ 3 มากขึ้นตามไปด้วย ทำให้เกิดการสั่นของผลลัพธ์และความคลาดเคลื่อนจากผลลัพธ์ที่แท้จริง นอกจากนี้ บางครั้งโปรแกรม AUTOMESH-2D ก็ไม่สามารถสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ เนื่องจากการค่าอนุพันธ์อันดับสองที่ใส่เข้าไปในโปรแกรม AUTOMESH-2D ไม่เหมาะสมกับตัวโปรแกรม ทำให้ต้องลองผิดลองถูกอยู่หลายครั้งกว่าจะได้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาที่มีความซับซ้อนมาก

9.2.2 ในการคำนวณปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้จะมีการเพิ่มความหนืดเทียม ซึ่งอยู่ในรูปแบบของปริมาณฟลักซ์ความหนืด เพื่อลดระดับการสั่นของผลลัพธ์ และต้องกำหนดค่าคงที่เข้าไปด้วย ถ้ากำหนดค่าคงที่ไม่เหมาะสมจะทำให้ผลลัพธ์มีความแม่นยำลดลง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ค่าคงที่มีค่าเท่ากับ 1 สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อนหรือเกิดการสั่นของผลลัพธ์ที่ไม่รุนแรงมากนัก แต่หากปัญหาใดมีรูปร่างซับซ้อนหรือเกิดการสั่นของผลลัพธ์ที่รุนแรงควรจะกำหนดให้ค่าคงที่มีค่ามากกว่า 1 แต่ไม่ควรกำหนดให้มีค่าสูงเกินไปเพราะจะทำให้ผลลัพธ์ที่คำนวณได้เกิดความคลาดเคลื่อนไปจากผลลัพธ์ที่แท้จริงมากเกินไป ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้ค่าคงที่มีค่าสูงสุดเท่า 2

9.2.3 ในการคำนวณหาช่วงเวลาที่จะใช้สำหรับคำนวณปัญหาที่ภายใต้สภาวะอยู่ตัว จะต้องกำหนดค่าความปลอดภัย ซึ่งจำเป็นที่จะต้องเลือกให้เหมาะสมกับปัญหานั้น หากกำหนดค่าดังกล่าวไม่เหมาะสมแล้วอาจจะทำให้ใช้เวลาในการคำนวณนานหรืออาจจะเกิดการลู่ออกของคำตอบได้ ซึ่งใน

งานวิจัยนี้จะกำหนดให้ค่าความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 0.5 สำหรับการคำนวณหาผลลัพธ์โดยใช้รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น ในขณะที่การคำนวณหาผลลัพธ์ด้วยรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์หลังจากการที่ปรับขนาดเอลิเมนต์ครั้งที่ 1 และ 2 แล้วจะกำหนดให้ค่าความปลอดภัยมีค่าเท่ากับ 1 เนื่องจากผลลัพธ์มีการลู่เข้าสู่คำตอบภายใต้สภาวะอยู่ตัวแล้ว แต่หากปัญหาใดผลลัพธ์เกิดการลู่ออกของคำตอบในระหว่างการคำนวณให้กำหนดค่าความปลอดภัยให้มีค่าน้อยกว่า 1 แต่ไม่ควรน้อยจนเกินไปเพราะจะส่งผลต่อเวลาที่ใช้ในการคำนวณนานขึ้น

9.3 ข้อเสนอแนะ

9.3.1 ปัญหาที่พบในหัวข้อที่ 9.2.1 หากสามารถแก้ไขได้จะทำให้การวิเคราะห์ปัญหาการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นอีกระดับ

9.3.2 ลักษณะการไหลโดยทั่วไปมักจะมีความหนืด เพื่อให้การวิเคราะห์การไหลมีความใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากขึ้น ควรเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับความหนืดเข้าไปในสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

รายการอ้างอิง

[1] Anderson, J. D. J. Fundamentals of Aerodynamics.Third Edition. New York: McGraw-Hill, 2001.

[2] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานทางวิศวกรรม.พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2553.

[3] ปราโมทย์ เดชะอำไพ. พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุม.พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2553.

[4] ณัฐชนนท์ ประสมสุข. การเพิ่มความเที่ยงตรงของผลลัพธ์ปัญหาของแข็งด้วยเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแบบปรับขนาดได้ที่ใช้ฟลักซ์เชิงเส้น. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2556.

[5] Brueckner, F. P. and Heinrich, J. C. Petrov-Gallerkin Finite Element Model for Compressible Flows. <u>International Journal for Numerical Methods in Engineering</u>, vol. 32, January 1991:p. 255-274.

[6] Taghaddosi, F., Habashi, W. G., Guevremont, G., and Ait-ali-yahia, D. An Adaptive Least-Squares Method for the Compressible Euler Equations. <u>International Journal for Numerical Methods in Fluids</u>, vol. 31, 1999:p. 1121-1139.

[7] Zienkiewicz, O. C. and Codina, R. A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow-Part I. The Split, Characteristic-Based Scheme. <u>International Journal for Numerical Methods in Fluids</u>, vol. 20, 1995:p. 869-885.

[8] Zienkiewicz, O. C., Morgan, K., and Satya Sai, B. V. K. A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow-Part II. Test on the Explicit Form. <u>International Journal for Numerical Methods in Fluids</u>, vol. 20, 1995:p. 887-913.

[9] Codina, R., Vazquez, M., and Zienkiewicz, O. C. A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flows. Part III: The Semi-Implicit Form. <u>International Journal for Numerical Methods in Fluids</u>, vol. 21, 1998:p. 13-32.

[10] Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O. C., Satya Sai, B. V. K., Morgan, K., Codina, R., and Vazquez, M. Shock Capturing Viscosities for the General Fluid Mechanics Algorithm. <u>International Journal for Numerical Methods in Fluids</u>, vol. 28, 1998:p. 1325-1353.

[11] Satya Sai, B. V. K. General Purpose Versus Special Algorithms for High-Speed Flow with Shocks. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 27, 1998:p. 57-80.

[12] Zienkiewicz, O. C., Nithiarasu, P., Codina, R., Vázquez, M., and Ortiz, P. The Characteristic-Based-Split Procedure: An Efficient and Accurate Algorithm for Fluid Problems. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 31, 1999:p. 359-392.

[13] ปริญญา บุญมาเลิศ. ผลเฉลยของการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้โดยระเบียบวิธีการแยกด้วยคุณลักษณะและเทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.

[14] Donea, J. A Tayler-Galerkin Method for Convective Transport Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 20, 1984:p. 101-119.

[15] Lohner, R., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C. The Solution of Non-Linear Hyperbolic Equation Systems by the Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 4, 1984:p. 1043-1063.

[16] Lohner, R., Morgan, K., and Zienkiewicz, O. C. An Adaptive Finite Element Procedure for Compressible High Speed Flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 51, 1985:p. 441-465.

[17] Bey, K., Earl, S., Thornton, A., Dechaumphai, D., and Ramarkrishnan, R. A New Finite Element Approach for Prediction of Aerothermal Loads-Progress in Inviscid Flow Computations. 7th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Cincinnati, Ohio, USA, 1985.

[18] Thornton, A., Dechaumphai, D., and Vemaganti, G. A Finite Element Approach for Prediction of Aerothermal Loads. AIAA/ASME 4th Fluid Mechanics, Plasma Dynamics and Lesers Conference, Atlanta, Georgia, USA, 1986.

[19] Oden, J. T., Strouboulis, T., and Devloo, P. Adaptive Finite Element Methods for High-Speed Compressible Flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 7, 1987:p. 1211-1228.

[20] Bono, G. and A.M., A. An Adaptive Mesh Strategy for High Compressible Flow Based on Nodal Re-Allocation. Journal of the Brazil Society of Mechanical and Engineering, vol. 3, 2008:p. 189-196.

[21] วิโรจน์ ลิ่มตระการ. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปฏิสัมพันธ์ระหว่างการไหลความเร็วสูงและโครงสร้าง. วิทยานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต, ภาควิชาเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

[22] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. The Finite Element Method.Fifth Edition: Butterworth-Heinemann, 2000.

[23] Lapidus, A. A Detached Shock Calculation by Second-Order Finite Differences. Journal of Computational Physics, vol. 2, 1967:p. 154-177.

[24] Kaplan, W. Advanced Calculus.Fifth Edition. Massachusetts: Addison-Wesley, 2003.

[25] Dechaumphai, D. and Phongthanapanich, S. Easy Finite Element Method with Software.First Edition. Oxford, U.K.: Alpha Science, 2009.

[26] Anderson, J. D. J. Modern Compressible Flow with Historical Perspective.Third Edition. New York: McGraw-Hill, 2003.

[27] Anderson, J. D. J. Computational Fluid Dynamics, the Basics with Applications.International Edition. Singapore: McGraw-Hill, 1995.

[28] Ma, X. W., Zhao, G. Q., and Sun, L. Automesh-2D/3D: robust automatic mesh generator for metal forming simulation. Materials Research Innovations, vol. 15(s1), 2011:p. s482-s486.

[29] ปัญญา จันทร์ไพแสง. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลความเร็วสูงแบบอัดตัวได้. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต, ภาควิชาเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

[30] Kouhi, M. and Onate, E. A Stabilized Finite Element Formulation for High-Speed Inviscid Compressible Flows Using Finite Calculus. International journal for numerical methods in fluids, vol. 74, 2014:p. 872-897.

[31] Phongthanapanich, S. and Dechaumphai, D. Healing of Shock Instability for Roe's Flux-Difference Splitting Scheme on Triangular Meshes. International journal for numerical methods in fluids, vol. 59, 2009:p. 559-575.

[32] Billig, F. S. Shock-Wave Shapes Around Spherical and Cylindrical-Nosed Bodies. Journal of Spacecraft, vol. 4, June 1967:p. 822-823.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TGHIFLOW

รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์ TGHIFLOW ดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 4 มีดังนี้

```
program TGHIFLOW

!   A TAYLOR-GALERKIN COMPUTER PROGRAM FOR SOLVING THE EULER EQAUTIONS
!   FOR TWO-DIMENSIONAL INVISCID HIGH-SPEED COMPRESSIBLE FLOW.

    USE SOLVER

    IMPLICIT NONE

    PRINT *, 'WELCOME TO PROGRAM'

!   READ INPUT DATA TO ELEMENT QUANTITIES.

    CALL READINPUT()

    CALL CPU_TIME(TIME)
    TIME1 = TIME

    WRITE(6,2)
    WRITE(8,2)
    CALL GETDAT(tmpyear, tmpmonth, tmpday)
    CALL GETTIM(tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund)
    WRITE(6,3) tmpday, tmpmonth, tmpyear
    WRITE(6,4) tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund
    WRITE(8,3) tmpday, tmpmonth, tmpyear
    WRITE(8,4) tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund
    WRITE(8,*)

2   FORMAT(/,'START TIME :')
3   FORMAT(3X,I2.2,'/',I2,'/',I4.4)
4   FORMAT(3X,I2,':',I2.2,':',I2.2,':',I2.2)
6   FORMAT(/,'STOP TIME :')

!   TRANSFORM PRIMATIVE VARIABLES INTO CONSERVATIVE VARIABLES.

    CALL TRANSFORM()

    ALLOCATE(UNKOLD(NPOIN,NAMAT))

    DO I=1,NPOIN
        DO J=1,NAMAT
            UNKOLD(I,J) = UNKNO(I,J)
        END DO
    END DO

!   COMPUTE  DNDX AND DNDY FOR FLUID ELEMENTS.

    CALL GAUSS()

!   COMPUTE ALL ELEMENT MATRICES.

    CALL LUMASS()

!   COMPUTE DIRECTION COSINES OF THE NORMAL VECTORS.

    CALL GETLM()

!   #####  LOOP OVER THE TIMESTEPS  #####

    DO ITIME=1,NTIME
```

```
!       COMPUTE LOCAL TIME STEPS FOR ELEMENTS AND NODES.

        ALLOCATE(DTE(NELEM), DTP(NPOIN))

        IF(CSAFE==0.) GO TO 50

        CALL TIMESTEP()

        GO TO 90
50      CONTINUE

        DO K=1,NELEM
            DTE(K) = DT
        END DO

        DO K=1,NPOIN
            DTP(K) = DT
        END DO

90      CONTINUE

!       COMPUTE INVISCID FLUXES  F  AND  G  FOR FLUID NODES.

        CALL GETFG(NPOIN, UNKNO, F, G)

!       COMPUTE ELEMENT QUANTITIES AT HALF STEP.

        CALL UDHALF()

!       COMPUTE ELEMENT SIDE QUANTITIES AT HALF STEP.

        CALL USSIDE()
        DEALLOCATE(F,G)

!       COMPUTE ELEMENT FLUX QUANTITIES AT HALF STEP

        CALL GETFG(NELEM, UHALF, FHALF, GHALF)
        DEALLOCATE(UHALF)

!       COMPUTE INVISCID VECTOR  RHS1 (INTEGRAL OVER ELEMENT AREA).

        CALL GETRHS1()

!       COMPUTE ELEMENT SIDE FLUX QUANTITIES AT HALF STEP.

        CALL GETFG(NBOUN, USIDE, FSIDE, GSIDE)
        DEALLOCATE(USIDE)

!       COMPUTE INVISCID VECTOR  RHS2 (INTEGRAL OVER OUTFLOW ELEMENT EDGE).

        CALL GETRHS2()

!       ADD ALL FLUID LOAD VECTORS.

        CALL SUMRHS()

!       SOLVE FOR FLUID NODAL INCREMENTS AND APPLY APPROPRIATE BOUNDARY CONDITIONS.

        ALLOCATE(DELUN(NPOIN,NAMAT))

        DELUN = 0.0

        CALL SOLVE(RHS)
        DEALLOCATE(RHS)

        DO I=1,NAMAT
            DO J=1,NPOIN
                UNKNO(J,I) = UNKNO(J,I) + DELUN(J,I)
            END DO
```

```
        END DO

!       ADD THE INCREMENTS TO THE NEW SOLUTION.

!       APPLY INVISCID WALL

        CALL INVWALL()

!       APPLY LAPIDUS SMOOTHING TO THE FLUID SOLUTION.

        CALL LAPIDUSOLD()

!       SOLVE FOR FLUID NODAL INCREMENTS AND APPLY APPROPRIATE BOUNDARY CONDITIONS.

        CALL SOLVE(RHS3)
        DEALLOCATE(RHS3, DTP)

!       OBTAIN FINAL FLUID SOLUTION AT THIS TIME STEP.

        DO I=1,NAMAT
            DO J=1,NPOIN
                UNKNO(J,I) = UNKNO(J,I) + DELUN(J,I)
            END DO
        END DO

!       UPDATE OUTFLOW QUANTITIES.

        CALL UPOUTF()

!       APPLY INVISCID WALL

        CALL INVWALL()

!       CHECK CONVERGENCE.

        ALLOCATE(ERROR(NPOIN,NAMAT))

        DO I=1,NPOIN
            DO J=1,NAMAT
                ERROR(I,J) = UNKNO(I,J) - UNKOLD(I,J)
            END DO
        END DO

!       PRINT OUT FLUID ERROR.

        CALL RESDLF()

!       UPDATE OLD FLUID SOLUTION.

        DO I=1,NPOIN
            DO J=1,NAMAT
                UNKOLD(I,J) = UNKNO(I,J)
            END DO
        END DO

        TOL = ERR

        IF(SUMS(1)<TOL .AND. SUMS(2)<TOL .AND. SUMS(3)<TOL .AND. SUMS(4)<TOL) GO TO 900

        DEALLOCATE(DELUN, ERROR, SUMS)

!   #####  END OF TIME STEP LOOP  #####

    END DO

900 CONTINUE

!   TRANSFORM CONSERVATIVE VARIABLES BACK TO PRIMATIVE VARIABLES.

    DO I=2,NAMAT
```

```
        DO J=1,NPOIN
            UNKNO(J,I) = UNKNO(J,I)/UNKNO(J,1)
        END DO
    END DO

!   COMPUTATION PRESSURE AND MACH MACH NUMBER

    ALLOCATE(PRESS(NPOIN), ASOS(NPOIN), MACH(NPOIN))

    DO I = 1,NPOIN
        PRESS(I) = (GAMMA - 1)*UNKNO(I,1)*( UNKNO(I,4) - 0.5*( UNKNO(I,2)*UNKNO(I,2) +
&       UNKNO(I,3)*UNKNO(I,3)) )
        ASOS(I)  = ABS( GAMMA*PRESS(I)/UNKNO(I,1) )
        MACH(I)  = SQRT( ( UNKNO(I,2)*UNKNO(I,2) + UNKNO(I,3)*UNKNO(I,3) )/ASOS(I) )
    END DO

!   PRINT OUT FLUID SOLUTION TO GRAPHIC.

    CALL PLOTOUTPUT()

    CALL CPU_TIME(TIME)
    TIME2 = TIME

    WRITE(8,7) (TIME2 - TIME1)
7   FORMAT('USE TOTAL TIME : 'F10.5)

    CALL GETDAT(tmpyear, tmpmonth, tmpday)
    CALL GETTIM(tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund)
    WRITE(6,6)
    WRITE(6,3) tmpday, tmpmonth, tmpyear
    WRITE(6,4) tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund
    WRITE(8,6)
    WRITE(8,3) tmpday, tmpmonth, tmpyear
    WRITE(8,4) tmphour, tmpminute, tmpsecond, tmphund

    end program hiflowtg
```

```
MODULE SOLVER

    IMPLICIT NONE

    INTEGER(4), PARAMETER                       ::NAMAT = 4, NNODE = 4

    CHARACTER(LEN=50)                           ::NAME1, TEXT

    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:,:)   ::XY, DNDX, DNDY, XY2, UELE, FELE, GELE, US
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:,:)   ::FS, GS, RHSEL, CAPU, RHSELE, DUM

    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::COORD, UNKNO, F, G, DETJ, LMASS, DNDXA
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::DNDYA, UHALF, FHALF, GHALF, USIDE, FSIDE
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::GSIDE, RHS1, RHS2, RHS3, TEMP
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::DELUN, UNKOLD, ERROR, JACO, X, Y, V, X1, Y1
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::U1, V1, T, DUMMY, RSIDE, RHS, UE, VE, DUME

    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::MMAT, AREA, DELX, DELY, DTE, DTP, SLENG
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::DNDXI, DNDET, DUM1, DUM2, DXI, DET, UNODE
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::VNODE, TNODE
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::DUMX, DUMY, UEL, VEL, AEL, UN, VN, SUMSQ
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::SUMS, PRESS, MACH, ASOS, DUMN, RL, RM, WLEN
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::TEMRL, TEMRM, UOLD, VOLD, UNEW, VNEW, UU1
    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::UU2, VV1, VV2

    REAL(8)                                     ::GAMMA, CSAFE, ALAP, CBIG, TOL, USUM, ASUM
    REAL(8)                                     ::TEM, UF, tmphour, tmpminute, tmpsecond
    REAL(8)                                     ::tmphund, TIME1, TIME2, TIME, DT, ERR

    INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::INTMAT, INTBF, INTWAL, IOUT

    INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)       ::ONE

    INTEGER(4)                                  ::NELEM, NPOIN, NBOUN, NTIME, NWALL, NLINES
    INTEGER(4)                                  ::ILINE, LENG, ITIME, I, J, K, N, II, NUME
    INTEGER(4)                                  ::IC, IN, N1, N2, tmpyear, tmpmonth, tmpday
    INTEGER(4)                                  ::JJ, IL, IJ, L, IONE, IE, N3, N4, NI, NSHOW

CONTAINS

!--------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE READINPUT()

    IMPLICIT NONE

!   INPUT FILE NAME AND VERSION.

    WRITE(*,*) 'PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:'
    READ(5,'(A)') NAME1
    OPEN(UNIT=7, FILE= NAME1,         STATUS='OLD')
    OPEN(UNIT=8, FILE='RESULT.OUT',   STATUS='UNKNOWN')
    OPEN(UNIT=9, FILE=' ERROR.OUT',   STATUS='UNKNOWN')

    LENG = LEN_TRIM(NAME1)

!   READ TITLE OF COMPUTATION.

    READ(7,*) NLINES
    DO ILINE=1,NLINES
        READ(7,1) TEXT
    END DO

!   READ INPUT DATA.

    READ(7,1) TEXT
1   FORMAT(5A8)
    READ(7,*) NELEM, NPOIN, NBOUN, NWALL, NTIME, NSHOW

!   READ PROPERTIES OF FLUID.
```

```
    READ(7,1) TEXT
    READ(7,*) GAMMA, CSAFE, ALAP, DT, ERR

!   READ ELEMENT NODAL CONNECTIONS.

    ALLOCATE(INTMAT(NELEM,NNODE))
    READ(7,1) TEXT
    DO I=1,NELEM
        READ(7,*) N, (INTMAT(I,J), J=1,NNODE)
    END DO

!   READ ELEMENT NODAL COORDINATES, INITIAL CONDITIONS AND BOUNDARY CONDITIONS.

    ALLOCATE(COORD(NPOIN,2), UNKNO(NPOIN,NAMAT))
    READ(7,1) TEXT
    DO I=1,NPOIN
        READ(7,*) N, (COORD(I,J), J=1,2), (UNKNO(I,J), J=1,NAMAT)
    END DO

!   READ BOUNDARY CONDITIONS FOR OUTFLOW.

    ALLOCATE(INTBF(NBOUN,4))
    READ(7,1) TEXT
    DO I=1,NBOUN
        READ(7,*) N, (INTBF(I,J), J=1,4)
    END DO

!   READ BOUNDARY CONDITIONS FOR INVISCID WALL.

    ALLOCATE(INTWAL(NWALL,3))
    READ(7,1) TEXT
    DO I=1,NWALL
        READ(7,*) (INTWAL(I,J), J=1,3)
    END DO

!   WRITE INPUT DATA.

    WRITE(*,*) 'THE MESH MODEL CONSISTS OF:'
    WRITE(6,50) NPOIN
50  FORMAT(/,'         NUMBER OF NODES                         =',I10)
    WRITE(6,60) NELEM
60  FORMAT(  '         NUMBER OF ELEMENT                       =',I10)
    WRITE(6,70) NBOUN
70  FORMAT(  '         ELEMENT FOR BOUNDARY CONDITIONS         =',I10)
    WRITE(6,80) NWALL
80  FORMAT(  '         NODES FOR INVISCID WALL CONDITIONS      =',I10)

    WRITE(*,*) ' '
    WRITE(*,*) 'CHECK CONVERGENCE:'

    END SUBROUTINE READINPUT

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE TRANSFORM()

    IMPLICIT NONE

!   TRANSFORMS TO CONSERVATION VARIABLES.

    DO J=1,NPOIN
        DO I=2,NAMAT
            UNKNO(J,I) = UNKNO(J,I)*UNKNO(J,1)
        END DO
    END DO

    END SUBROUTINE TRANSFORM

!-------------------------------------------------------------------------
```

```
    SUBROUTINE GAUSS()

    IMPLICIT NONE

    REAL(8)                                     ::XI(4), ET(4), A1(4), A2(4)

!   COMPUTE DNDX, DNDY, DETJ AT GAUSS POINTS FOR ALL FLUID ELEMENTS.

    DATA XI/-0.57735026, 0.57735026, 0.57735026,-0.57735026/
    DATA ET/-0.57735026,-0.57735026, 0.57735026, 0.57735026/
    DATA A1/-0.5, 0.5, 0.5,-0.5/
    DATA A2/-0.5,-0.5, 0.5, 0.5/

!   OBTAIN ELEMENT NODAL COORDINATES FOR FLUID ELEMENTS.

    ALLOCATE(XY(NELEM,NNODE,2))

    DO I=1,2
        DO J=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                N = INTMAT(K,J)
                XY(K,J,I) = COORD(N,I)
            END DO
        END DO
    END DO

!   LOOP OVER NUMBER OF GAUSS POINTS.

    ALLOCATE(DNDXI(NNODE), DNDET(NNODE), JACO(NELEM,NNODE), DETJ(NELEM,4))
    ALLOCATE(DNDX(NELEM,NNODE,4), DNDY(NELEM,NNODE,4))

    DO II=1,4

!       COMPUTE N,XI AND N,ET

        DO I=1,NNODE
            DNDXI(I) = A1(I)*( 0.5 + A2(I)*ET(II) )
            DNDET(I) = A2(I)*( 0.5 + A1(I)*XI(II) )
        END DO

!       COMPUTE ELEMENT JACOBIANS J11, J12, J21, J22.

        JACO = 0.

        DO I=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                JACO(K,1) = JACO(K,1) + DNDXI(I)*XY(K,I,1)
                JACO(K,2) = JACO(K,2) + DNDXI(I)*XY(K,I,2)
                JACO(K,3) = JACO(K,3) + DNDET(I)*XY(K,I,1)
                JACO(K,4) = JACO(K,4) + DNDET(I)*XY(K,I,2)
            END DO
        END DO

        DO K=1,NELEM
            DETJ(K,II) = JACO(K,1)*JACO(K,4) - JACO(K,2)*JACO(K,3)
        END DO

!       COMPUTE N,X AND N,Y.

        DO I=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                DNDX(K,I,II) = ( JACO(K,4)*DNDXI(I) - JACO(K,2)*DNDET(I) )/DETJ(K,II)
                DNDY(K,I,II) = (-JACO(K,3)*DNDXI(I) + JACO(K,1)*DNDET(I) )/DETJ(K,II)
            END DO
        END DO

    END DO

    END SUBROUTINE GAUSS
```

```
!---------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE LUMASS()

    IMPLICIT NONE

!   COMPUTE ALL ELEMENT MATRICES (INTEGRALS OVER AREA).

    ALLOCATE(X(NELEM,NNODE), Y(NELEM,NNODE), V(NELEM,NNODE), LMASS(NELEM,NNODE), MMAT(NPOIN))
    ALLOCATE(AREA(NELEM), DNDXA(NELEM,NNODE), DNDYA(NELEM,NNODE))

    MMAT = 0.

    DO I=1,NELEM

        DO J=1,NNODE
            N = INTMAT(I,J)
            X(I,J) = COORD(N,1)
            Y(I,J) = COORD(N,2)
        END DO

!       COMPUTE COEFFICIENTS V(J) FOR ALL ELEMENTS.

        V(I,1) = ((X(I,2)-X(I,1))*(Y(I,4)-Y(I,1)) - (X(I,4)-X(I,1))*(Y(I,2)-Y(I,1)))/4.0
        V(I,2) = ((X(I,2)-X(I,1))*(Y(I,3)-Y(I,2)) - (X(I,3)-X(I,2))*(Y(I,2)-Y(I,1)))/4.0
        V(I,3) = ((X(I,3)-X(I,2))*(Y(I,4)-Y(I,3)) - (X(I,4)-X(I,3))*(Y(I,3)-Y(I,2)))/4.0
        V(I,4) = ((X(I,4)-X(I,1))*(Y(I,4)-Y(I,3)) - (X(I,4)-X(I,3))*(Y(I,4)-Y(I,1)))/4.0

!       COMPUTE ALL ELEMENT AREAS.

        AREA(I) = V(I,1) + V(I,2) + V(I,3) + V(I,4)

!       COMPUTE LUMPED MASS MATRIX FOR ALL ELEMENTS.

        LMASS(I,1) = (2*V(I,4) +   V(I,3) + 2*V(I,2) + 4*V(I,1))/9.0
        LMASS(I,2) = (  V(I,4) + 2*V(I,3) + 4*V(I,2) + 2*V(I,1))/9.0
        LMASS(I,3) = (2*V(I,4) + 4*V(I,3) + 2*V(I,2) +   V(I,1))/9.0
        LMASS(I,4) = (4*V(I,4) + 2*V(I,3) +   V(I,2) + 2*V(I,1))/9.0

        DO J=1,NNODE
            N = INTMAT(I,J)
            MMAT(N) = MMAT(N) + LMASS(I,J)
        END DO

!       COMPUTE EXACT ELEMENT MATRICES N,X DA AND N,Y DA.

        DNDXA(I,1) =  0.5*(Y(I,2) - Y(I,4))
        DNDXA(I,2) =  0.5*(Y(I,3) - Y(I,1))
        DNDXA(I,3) = -DNDXA(I,1)
        DNDXA(I,4) = -DNDXA(I,2)
        DNDYA(I,1) =  0.5*(X(I,4) - X(I,2))
        DNDYA(I,2) =  0.5*(X(I,1) - X(I,3))
        DNDYA(I,3) = -DNDYA(I,1)
        DNDYA(I,4) = -DNDYA(I,2)

    END DO

    END SUBROUTINE LUMASS

!---------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE GETLM()

    IMPLICIT NONE

!   COMPUTE DIRECTION COSINES OF THE OUTFLOW NORMAL VECTORS.

    ALLOCATE(XY2(NBOUN,2,2))
```

```
    DO I=1,2
        DO J=1,2
            DO K=1,NBOUN
                N = INTBF(K,J)
                XY2(K,J,I) = COORD(N,I)
            END DO
        END DO
    END DO

    ALLOCATE(DELX(NBOUN), DELY(NBOUN))

    DO K=1,NBOUN
        DELX(K) = XY2(K,2,1) - XY2(K,1,1)
        DELY(K) = XY2(K,2,2) - XY2(K,1,2)
    END DO

    END SUBROUTINE GETLM

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE GETFG(NUMBER, UU, FF, GG)

    IMPLICIT NONE

    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::FF, GG, P, UU
    REAL(8)                                     ::GAM1, GAM2
    INTEGER(4)                                  ::NUMBER

!   COMPUTE INVISCID FLUXES F AND G FOR FLUID NODES.

    GAM1 = GAMMA - 1.
    GAM2 = 0.5*(3. - GAMMA)

    ALLOCATE(P(NUMBER,4), FF(NUMBER,NAMAT), GG(NUMBER,NAMAT))

    FF = 0.0
    GG = 0.0

    DO I=1,NUMBER
        FF(I,1) = UU(I,2)
        FF(I,3) = UU(I,2)*UU(I,3)/UU(I,1)
        GG(I,1) = UU(I,3)
        GG(I,2) = FF(I,3)
    END DO

    DO I=1,NUMBER
        P(I,1) = UU(I,2)/UU(I,1)
        P(I,2) = UU(I,3)/UU(I,1)
        P(I,3) = GAMMA*UU(I,4)/UU(I,1)
        P(I,4) = -0.5*GAM1*( P(I,1)*P(I,1) + P(I,2)*P(I,2) )
    END DO

    DO I=1,NUMBER
        FF(I,2) = GAM2*UU(I,2)*P(I,1) + GAM1*( UU(I,4) - 0.5*UU(I,3)*P(I,2) )
        FF(I,4) = UU(I,2)*P(I,4) + UU(I,2)*P(I,3)
        GG(I,3) = GAM2*UU(I,3)*P(I,2) + GAM1*( UU(I,4) - 0.5*UU(I,2)*P(I,1) )
        GG(I,4) = UU(I,3)*P(I,4) + UU(I,3)*P(I,3)
    END DO

    DEALLOCATE(P)

    END SUBROUTINE GETFG

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE TIMESTEP()

    IMPLICIT NONE

!   COMPUTE FLUID ELEMENT AND NODAL LOCAL TIME STEPS.
```

```
!   OBTAIN ELEMENT NODAL COORDINATES.

    ALLOCATE(X1(NELEM,NNODE), Y1(NELEM,NNODE))

    DO J=1,NNODE
        DO K=1,NELEM
            N = INTMAT(K,J)
            X1(K,J) = COORD(N,1)
            Y1(K,J) = COORD(N,2)
        END DO
    END DO

!   COMPUTE ELEMENT LENGTHS IN XI AND ET DIRECTIONS.

    ALLOCATE(DUM1(NELEM), DUM2(NELEM), DXI(NELEM), DET(NELEM))

    DO I=1,NELEM
        DUM1(I) = 0.5*( X1(I,2) + X1(I,3) - X1(I,1) - X1(I,4) )
        DUM1(I) = DUM1(I)*DUM1(I)
        DUM2(I) = 0.5*( Y1(I,2) + Y1(I,3) - Y1(I,1) - Y1(I,4) )
        DUM2(I) = DUM2(I)*DUM2(I)
        DUM1(I) = DUM1(I) + DUM2(I)
        DXI(I)  = SQRT(DUM1(I))
    END DO

    DUM1 = 0.0
    DUM2 = 0.0

    DO I=1,NELEM
        DUM1(I) = 0.5*( X1(I,3) + X1(I,4) - X1(I,1) - X1(I,2) )
        DUM1(I) = DUM1(I)*DUM1(I)
        DUM2(I) = 0.5*( Y1(I,3) + Y1(I,4) - Y1(I,1) - Y1(I,2) )
        DUM2(I) = DUM2(I)*DUM2(I)
        DUM1(I) = DUM1(I) + DUM2(I)
        DET(I)  = SQRT(DUM1(I))
    END DO

!   COMPUTE DIRECTION COSINES OF XI AXIS: DUM1 & DUM2.

    ALLOCATE(DUMMY(NELEM,4))

    DO I=1,NELEM
        DUMMY(I,1) = 0.5*(X1(I,2) + X1(I,3) - X1(I,1) - X1(I,4))/DXI(I)
        DUMMY(I,2) = 0.5*(Y1(I,2) + Y1(I,3) - Y1(I,1) - Y1(I,4))/DXI(I)
        DUMMY(I,3) = 0.5*(X1(I,3) + X1(I,4) - X1(I,1) - X1(I,2))/DET(I)
        DUMMY(I,4) = 0.5*(Y1(I,3) + Y1(I,4) - Y1(I,1) - Y1(I,2))/DET(I)
    END DO

!   OBTAIN VELOCITY COMPONENTS FOR ALL FLIUD NODES.

    ALLOCATE(UNODE(NPOIN), VNODE(NPOIN), TNODE(NPOIN))

    DO I=1,NPOIN
        UNODE(I) = UNKNO(I,2)/UNKNO(I,1)
        VNODE(I) = UNKNO(I,3)/UNKNO(I,1)
        TNODE(I) =(UNKNO(I,4)/UNKNO(I,1) - 0.5*( UNODE(I)*UNODE(I) + VNODE(I)*VNODE(I) ))
    END DO

!   OBTAIN ELEMENT NODAL VELOCITIES.

    ALLOCATE(U1(NELEM,NNODE), V1(NELEM,NNODE), T(NELEM,NNODE))

    DO J=1,NNODE
        DO I=1,NELEM
            N = INTMAT(I,J)
            U1(I,J) = UNODE(N)
            V1(I,J) = VNODE(N)
             T(I,J) = TNODE(N)
        END DO
    END DO
```

```
!   COMPUTE AVERAGE ELEMENT VELOCITY COMPONENTS.

    ALLOCATE(DUMX(NELEM), DUMY(NELEM))

    DUMX = 0.
    DUMY = 0.

    DO J=1,NNODE
        DO I=1,NELEM
            DUMX(I) = DUMX(I) + 0.25*U1(I,J)
            DUMY(I) = DUMY(I) + 0.25*V1(I,J)
        END DO
    END DO

!   TRANSFORM THESE VELOCITY COMPONENTS INTO XI AND ET.

    ALLOCATE(UEL(NELEM), VEL(NELEM))

    DO I=1,NELEM
        UEL(I) =          DUMMY(I,1)*DUMX(I)
        UEL(I) = UEL(I) + DUMMY(I,2)*DUMY(I)
        VEL(I) =          DUMMY(I,3)*DUMX(I)
        VEL(I) = VEL(I) + DUMMY(I,4)*DUMY(I)
    END DO

!   COMPUTE ABSOLUTE VELOCITY COMPONENTS IN XI AND ET.

    DO I=1,NELEM
        UEL(I) = ABS(UEL(I))
        VEL(I) = ABS(VEL(I))
    END DO

!   COMPUTE AVERAGE ELEMENT SPEED OF SOUND.
!   LET'S DENOTE DUM1 AS ELEMENT TEMPERATURES.

    DUM1 = 0.0
    DUM2 = 0.0

    DO J=1,NNODE
        DO I=1,NELEM
            DUM1(I) = DUM1(I) + 0.25*T(I,J)
        END DO
    END DO

    DO I=1,NELEM
        DUM2(I) = GAMMA*(GAMMA - 1.)*DUM1(I)
        IF(DUM2(I)<0.) THEN
            DUM2(I) = 0.
        END IF
    END DO

    ALLOCATE(AEL(NELEM))

    DO I=1,NELEM
        AEL(I) = SQRT(DUM2(I))
    END DO

!   COMPUTE ELEMENT TIME STEPS BASED ON CFL CONDITIONS.

    DO I=1,NELEM
        DUMX(I) = 1./(DXI(I)*DXI(I)) + 1./(DET(I)*DET(I))
        DUMY(I) = SQRT(DUMX(I))
        AEL(I) = AEL(I)*DUMY(I)
        DUMX(I) = UEL(I)/DXI(I)
        DUMY(I) = VEL(I)/DET(I)
        DTE(I)  = 1./(DUMX(I) + DUMY(I) + AEL(I))
    END DO

!   COMPUTE THE FINAL ELEMENT TIME STEPS.
```

```
    DO I=1,NELEM
        DTE(I) = CSAFE*DTE(I)
    END DO

!   COMPUTE ALL NODAL TIME STEPS.
!   NOTE: NODAL TIME STEP IS THE MINIMUM TIME STEP OF ALL ELEMENTS SURROUDING THAT NODE.

    CBIG = 1.E+10

    DO I=1,NPOIN
        DTP(I) = CBIG
    END DO

    DO J=1,NNODE
        DO I=1,NELEM
            N = INTMAT(I,J)
            IF(DTE(I)<DTP(N)) THEN
                DTP(N) = DTE(I)
            END IF
        END DO
    END DO

    DEALLOCATE(X1, Y1, DUM1, DUM2, DXI, DET, DUMMY, UNODE, VNODE, TNODE, U1, V1, T, DUMX)
    DEALLOCATE(DUMY, UEL, VEL, AEL))

    END SUBROUTINE TIMESTEP

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE UDHALF()

    IMPLICIT NONE

!   COMPUTE ELEMENT QUANTITIES AT HALF STEP.
!   OBTAIN ELEMENT NODAL INVISCID FLUX VECTORS.

    ALLOCATE(UELE(NELEM,NNODE,NAMAT), FELE(NELEM,NNODE,NAMAT), GELE(NELEM,NNODE,NAMAT))

    DO I=1,NNODE
        DO J=1,NAMAT
            DO K=1,NELEM
                N = INTMAT(K,I)
                UELE(K,I,J) = UNKNO(N,J)
                FELE(K,I,J) =     F(N,J)
                GELE(K,I,J) =     G(N,J)
            END DO
        END DO
    END DO

    ALLOCATE(UHALF(NELEM,NAMAT))

    UHALF = 0.

    DO J=1,NAMAT
        DO I=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                UHALF(K,J) = UHALF(K,J) + LMASS(K,I)*UELE(K,I,J) - 0.5*DTE(K)*
   &                        (DNDXA(K,I)*FELE(K,I,J) + DNDYA(K,I)*GELE(K,I,J))
            END DO
        END DO
    END DO

    DO J=1,NAMAT
        DO K=1,NELEM
            UHALF(K,J) = UHALF(K,J)/AREA(K)
        END DO
    END DO

    DEALLOCATE(UELE, FELE, GELE)
```

```
      END SUBROUTINE UDHALF

!-----------------------------------------------------------------------

      SUBROUTINE USSIDE()

      IMPLICIT NONE

!     COMPUTE ELEMENT SIDE QUANTITIES AT HALF STEP.
!     OBTAIN ELEMENT SIDE NODAL QAUNTITIES.

      ALLOCATE(US(NBOUN,2,NAMAT), FS(NBOUN,2,NAMAT), GS(NBOUN,2,NAMAT))

      DO I=1,2
          DO J=1,NAMAT
              DO K=1,NBOUN
                  N = INTBF(K,I)
                  US(K,I,J) = UNKNO(N,J)
                  FS(K,I,J) =     F(N,J)
                  GS(K,I,J) =     G(N,J)
              END DO
          END DO
      END DO

!     COMPUTE ELEMENT SIDE QUANTITIES (USING SIMPLEST FORM).

      ALLOCATE(USIDE(NBOUN,NAMAT), SLENG(NBOUN), TEMP(NBOUN,NAMAT))

      DO J=1,NAMAT
          DO I=1,NBOUN
              N = INTBF(I,3)
              SLENG(I) = DELX(I)*DELX(I) + DELY(I)*DELY(I)
              SLENG(I) = SQRT(SLENG(I))
              TEMP(I,J)  = (-FS(I,1,J) + FS(I,2,J))*DELX(I)/SLENG(I) + (-FS(I,1,J) +
     &                       FS(I,2,J))*DELX(I)/SLENG(I)
              USIDE(I,J) = 0.5*(US(I,1,J) + US(I,2,J)) - 0.5*DTE(N)*TEMP(I,J)/SLENG(I)
          END DO
      END DO

      DEALLOCATE(US, FS, GS, DTE, SLENG, TEMP)

      END SUBROUTINE USSIDE

!-----------------------------------------------------------------------

      SUBROUTINE GETRHS1()

      IMPLICIT NONE

!     COMPUTE INVISCID LOAD VECTOR RHS1.
!     OBTAIN ELEMENT NODAL LOAD VECTORS.

      ALLOCATE(RHSEL(NELEM,NNODE,NAMAT))

      DO I=1,NAMAT
          DO J=1,NNODE
              DO K=1,NELEM
                  RHSEL(K,J,I) = DNDXA(K,J)*FHALF(K,I) + DNDYA(K,J)*GHALF(K,I)
              END DO
          END DO
      END DO

      ALLOCATE(RHS1(NPOIN,NAMAT))

      RHS1 = 0.

      DO I=1,NAMAT
          DO J=1,NNODE
              DO K=1,NELEM
```

```
            N = INTMAT(K,J)
            RHS1(N,I) = RHS1(N,I) + RHSEL(K,J,I)
        END DO
    END DO
END DO

DO I=1,NAMAT
    DO K=1,NPOIN
        RHS1(K,I) = DTP(K)*RHS1(K,I)
    END DO
END DO

DEALLOCATE(FHALF, GHALF, RHSEL)

END SUBROUTINE GETRHS1

!----------------------------------------------------------------------

SUBROUTINE GETRHS2()

IMPLICIT NONE

!   COMPUTE OUTFLOW INVISCID VECTOR RHS2.
!   OBTAIN SIDE INVISCID QUANTITIES FOR THE NODES ON THE ELEMENT OUTFLOW EDGES.

ALLOCATE(RSIDE(NBOUN,NAMAT))

DO I=1,NAMAT
    DO K=1,NBOUN
        RSIDE(K,I) = 0.5*( DELY(K)*FSIDE(K,I) - DELX(K)*GSIDE(K,I) )
    END DO
END DO

!   OBTAIN SYSTEM NODAL LOAD VECTOR.

ALLOCATE(RHS2(NPOIN,NAMAT))

RHS2 = 0.

DO I=1,NAMAT
    DO J=1,2
        DO K=1,NBOUN
            IF(INTBF(K,4)/=2) GO TO 40
            N = INTBF(K,J)
            RHS2(N,I) = RHS2(N,I) + RSIDE(K,I)
40          CONTINUE
        END DO
    END DO
END DO

DO I=1,NAMAT
    DO K=1,NPOIN
        RHS2(K,I) = -DTP(K)*RHS2(K,I)
    END DO
END DO

DEALLOCATE(FSIDE, GSIDE, RSIDE)

END SUBROUTINE GETRHS2

!----------------------------------------------------------------------

SUBROUTINE SUMRHS()

IMPLICIT NONE

!   ADD ALL FLUID LOAD VECTORS (SUMMATION OF RHS1 + RHS2).

ALLOCATE(RHS(NPOIN,NAMAT))
```

```
    DO I=1,NAMAT
        DO K=1,NPOIN
            RHS(K,I) = RHS1(K,I) + RHS2(K,I)
        END DO
    END DO

    DEALLOCATE(RHS1, RHS2)

    END SUBROUTINE SUMRHS

    !----------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE SOLVE(RH)

    IMPLICIT NONE

    REAL(8),    ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)     ::RH

!   SOLVE FLUID SYSTEM EXPLICIT EQUATIONS FOR INCREMENTS OF UNKNOWN AND APPLY APPROPRIATE
!   BOUNDARY CONDITIONS.
!   SOLVE SYSTEM EXPLICIT EQUATIONS FOR INCREMENTS OF DELUN.

    DO I=1,NAMAT
        DO J=1,NPOIN
            DELUN(J,I) = RH(J,I)/MMAT(J)
        END DO
    END DO

!   APPLY BOUNDARY CONDITIONS (1=FIXED).

    DO I=1,NAMAT
        DO J=1,NBOUN
            DO K=1,2
                N = INTBF(J,K)
                IF(INTBF(J,4)==1) THEN
                    DELUN(N,I) = 0.
                END IF
            END DO
        END DO
    END DO


    END SUBROUTINE SOLVE

    !----------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE INVWALL()

    IMPLICIT NONE

!   APPLY INVISCID WALL

    ALLOCATE(RL(NPOIN), RM(NPOIN), ONE(NPOIN), WLEN(NBOUN), TEMRL(NBOUN), TEMRM(NBOUN))
    ALLOCATE(UOLD(NPOIN), VOLD(NPOIN), UNEW(NPOIN), VNEW(NPOIN), UU1(NWALL), UU2(NWALL))
    ALLOCATE(VV1(NWALL), VV2(NWALL))

    RL  = 0.0
    RM  = 0.0
    ONE = 0

    DO 500 I=1,NBOUN
        IC = INTBF(I,4)
        IF(IC/=3) GO TO 500
        WLEN(I)  = DELX(I)*DELX(I) + DELY(I)*DELY(I)
        WLEN(I)  = SQRT(WLEN(I))
        TEMRL(I) = DELX(I)/WLEN(I)
        TEMRM(I) = DELY(I)/WLEN(I)
        DO K=1,2
            IN = INTBF(I,K)
            RL(IN) = RL(IN) + TEMRL(I)
```

```
            RM(IN) = RM(IN) + TEMRM(I)
            ONE(IN) = ONE(IN) + 1
        END DO
500 CONTINUE

    DO I=1,NWALL
        IN = INTWAL(I,2)
        RL(IN) = RL(IN)/ONE(IN)
        RM(IN) = RM(IN)/ONE(IN)
        UOLD(I) = UNKNO(IN,2)/UNKNO(IN,1)
        VOLD(I) = UNKNO(IN,3)/UNKNO(IN,1)
        UNEW(I) = UOLD(I)*RL(IN)*RL(IN) + VOLD(I)*RL(IN)*RM(IN)
        VNEW(I) = UOLD(I)*RL(IN)*RM(IN) + VOLD(I)*RM(IN)*RM(IN)
        UNKNO(IN,2) = UNEW(I)*UNKNO(IN,1)
        UNKNO(IN,3) = VNEW(I)*UNKNO(IN,1)
    END DO

    DO 700 I=1,NWALL
        II = INTWAL(I,3)
        IF(II==0) GO TO 700
        N1 = INTWAL(I-1,2)
        N  = INTWAL(I,2)
        N2 = INTWAL(I+1,2)
        UU1(I) = UNKNO(N1,2)/UNKNO(N1,1)
        UU2(I) = UNKNO(N2,2)/UNKNO(N2,1)
        VV1(I) = UNKNO(N1,3)/UNKNO(N1,1)
        VV2(I) = UNKNO(N2,3)/UNKNO(N2,1)
        UNEW(I) = 0.5*(UU1(I) + UU2(I))
        VNEW(I) = 0.5*(VV1(I) + VV2(I))
        UNKNO(N,2) = UNEW(I)*UNKNO(N,1)
        UNKNO(N,3) = VNEW(I)*UNKNO(N,1)
700 CONTINUE

    DEALLOCATE(RL, RM, ONE, WLEN, TEMRL, TEMRM, UOLD, VOLD, UNEW, VNEW, UU1, UU2, VV1, VV2)

    END SUBROUTINE INVWALL

    !---------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE LAPIDUSOLD()

    IMPLICIT NONE

!   COMPUTE ARTIFICIAL VISCOSITY LOAD VECTOR USING OLD LAPIDUS APP.
!   (NEGATIVE INPUT LAPIDUS CONSTANT ACTIVATES THIS SUBROUTINE)
!   IDENTIFY OLD LAPIDUS BY NEGATIVE INPUT LAPIDUS CONSTANT.

    ALLOCATE(UN(NPOIN), VN(NPOIN))
    DO K=1,NPOIN
        UN(K) = UNKNO(K,2)/UNKNO(K,1)
        VN(K) = UNKNO(K,3)/UNKNO(K,1)
    END DO

!   OBTAIN ELEMENT NODAL VELOCITIES U & V.

    ALLOCATE(UE(NPOIN,NNODE), VE(NPOIN,NNODE))
    DO I=1,NNODE
        DO K=1,NELEM
            N = INTMAT(K,I)
            UE(K,I) = UN(N)
            VE(K,I) = VN(N)
        END DO
    END DO

!   OBTAIN ELEMENT CONSERVATION VARIABLES CAPU(4).

    ALLOCATE(CAPU(NELEM,NNODE,NAMAT))

    DO I=1,NAMAT
        DO J=1,NNODE
```

```
            DO K=1,NELEM
                N = INTMAT(K,J)
                CAPU(K,J,I) = UNKNO(N,I)
            END DO
        END DO
    END DO

    ALLOCATE(RHSELE(NELEM,NNODE,NAMAT))

    RHSELE = 0.

!   NUMERICAL INTEGRATION LOOP.

    ALLOCATE(DUME(NELEM,4), DUM(NELEM,2,NAMAT))

    DO II=1,4

        DUME = 0.

!       COMPUTE ELEMENT U,X AND V,Y.

        DO I=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                DUME(K,1) = DUME(K,1) + DNDX(K,I,II)*UE(K,I)
                DUME(K,2) = DUME(K,2) + DNDY(K,I,II)*VE(K,I)
            END DO
        END DO

!       THEIR ABSOLUTE VALUES.

        DO K=1,NELEM
            DUME(K,3) = ABS(DUME(K,1))
            DUME(K,4) = ABS(DUME(K,2))
        END DO

!       COMPUTE ELEMENT CAP U,X AND CAP U,J.

        DO I=1,NAMAT
            DO K=1,NELEM
                DUME(K,1) = 0.
                DUME(K,2) = 0.
            END DO

            DO J=1,NNODE
                DO K=1,NELEM
                    DUME(K,1) = DUME(K,1) + DNDX(K,J,II)*CAPU(K,J,I)
                    DUME(K,2) = DUME(K,2) + DNDY(K,J,II)*CAPU(K,J,I)
                END DO
            END DO

            DO K=1,NELEM
                DUM(K,1,I) = AREA(K)*DUME(K,3)*DUME(K,1)
                DUM(K,2,I) = AREA(K)*DUME(K,4)*DUME(K,2)
            END DO
        END DO

        DO I=1,NAMAT
            DO J=1,NNODE
                DO K=1,NELEM
                    RHSELE(K,J,I) = RHSELE(K,J,I) + ( DNDX(K,J,II)*DUM(K,1,I) +
   &                                DNDY(K,J,II)*DUM(K,2,I) )*DETJ(K,II)
                END DO
            END DO
        END DO

    END DO

!   OBTAIN SYSTEM NODAL LOAD VECTOR.

    ALLOCATE(RHS3(NPOIN,NAMAT))
```

```
    RHS3 = 0.

    DO I=1,NAMAT
        DO J=1,NNODE
            DO K=1,NELEM
                N = INTMAT(K,J)
                RHS3(N,I) = RHS3(N,I) + RHSELE(K,J,I)
            END DO
        END DO
    END DO

    DO I=1,NAMAT
        DO K=1,NPOIN
            RHS3(K,I) = -ALAP*DTP(K)*RHS3(K,I)
        END DO
    END DO

    DEALLOCATE(UN, VN, UE, VE, CAPU, DUME, DUM, RHSELE)

    END SUBROUTINE LAPIDUSOLD

    !---------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE RESDLF()

!   COMPUTE FLOW SOLUTION RESIDUALS.

    ALLOCATE(SUMSQ(NAMAT), DUMN(NPOIN), SUMS(NAMAT))

    DO J=1,NAMAT

        SUMSQ(J) = 0.

        DO I=1,NPOIN
            DUMN(I) = ERROR(I,J)*ERROR(I,J)
            SUMSQ(J)= SUMSQ(J) + DUMN(I)
        END DO

        SUMS(J)  = SQRT(SUMSQ(J))
        SUMSQ(J) = LOG10(SUMS(J))

    END DO

    NUME = MOD(ITIME,NSHOW)

    IF(NUME==0) THEN
        WRITE(*,300)  ITIME, (SUMS(I), I=1,NAMAT)
    END IF

    WRITE(9,300)  ITIME, (SUMSQ(I), I=1,NAMAT)
300 FORMAT(I6, 4E16.5)

    DEALLOCATE(SUMSQ, DUMN)

    END SUBROUTINE RESDLF

    !---------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE PLOTOUTPUT()

    IMPLICIT NONE

    WRITE(6,610)
610 FORMAT(/,'*** PRINT OUT GRAPHIC DISPLAY IN TECPLOT FORMAT ***')

    OPEN(UNIT=12, FILE=NAME1(1:LENG-4)//'GRAPHIC.plt', STATUS='UNKNOWN')

    WRITE(12,630) NAME1
630 FORMAT('TITLE ="',(A),'"')
```

```
    WRITE(12,640)
640 FORMAT(' VARIABLES = "X", "Y", "RHO", "U", "V", "TOTAL", "P", "M" ')
    WRITE(12,650) NPOIN, NELEM
650 FORMAT('ZONE N =', I6,',E = ',I6, ', F = FEPOINT, ET = QUADRILATERAL')

    DO I = 1,NPOIN
        WRITE(12,660) ( COORD(I,J) ,J=1,2 ), ( UNKNO(I,K), K=1,4 ), PRESS(I), MACH(I)
660     FORMAT(2F12.6, 2X, 6E16.6)
    END DO

    DO I = 1,NELEM
        WRITE(12,670) (INTMAT(I,J) ,J=1,4)
670     FORMAT(4I10)
    END DO

    CLOSE(UNIT=12, STATUS='KEEP')

    END SUBROUTINE PLOTOUTPUT

    ! --------------------------------------------------------------------

    END MODULE SOLVER
```

ภาคผนวก ข

รายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DOUBLEGRADIENT

รายละเอียดโปรแกรมคอมพิวเตอร์ DOUBLEGRADIENT ดังที่ได้อธิบายไว้ในบทที่ 7 มีดังนี้

```
program DOUBLEGRADIENT

    USE BODY

    IMPLICIT NONE

    character(len=10)                       ::date
    character(len=10)                       ::times
    character(len=10)                       ::zone
    integer(4)                              ::values(8)

    !----------------------------------------------------------------------

    print *, '--------------------------------------'
    print *, ' WELCOME TO 2ND GRADIENT QUAD PROGRAM '
    print *, '--------------------------------------'

    CALL DATE_AND_TIME(date,times,zone,values)
    WRITE(6,99) values(3),values(2),values(1)
99  format(/,'    START PROGRAM DATE = ',I2,'/',I2,'/',I4)
    WRITE(6,98) values(5),values(6),values(7),values(8)
98  format('    START PROGRAM TIME = ',I2,':',I2,':',I2,':',I4)
    WRITE(6,97) values(4)
97  format('    START PROGRAM ZONE = ',I6)

    CALL READINPUT()

    CALL GRAD()

    WRITE(6,100)
100 FORMAT(/,'FINISH CALCULATE FIRST GRADIENT')

    CALL SECONDGRAD()

    WRITE(6,101)
101 FORMAT(/,'FINISH CALCULATE SECOND GRADIENT')

    CALL MAXGRADIENT()

    CALL PLOTOUTPUT()

    CALL WRITEOUTPUT()

    WRITE(6,102)
102 FORMAT(/,'-- END PROGRAM --',/,'(PLEASE ENTER TO EXIT)')

    end program DOUBLEGRADIENT
```

```
MODULE BODY

!   FOR QUADRILATERAL ELEMENT

    USE SOLVING

    IMPLICIT NONE

    CHARACTER(LEN=30)                       ::NAME1, TEXT

    INTEGER(4)                              ::NLINES, ILINE, I, J, IP, IE
    INTEGER(4)                              ::NPOIN, NELEM, K, L
    INTEGER(4)                              ::NNODE, LENG
    INTEGER(4)                              ::IR, IC, IROW, ICOL, T

    INTEGER(4), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:) ::INTMAT

    REAL(8)                                 ::X1, X2, X3, X4
    REAL(8)                                 ::Y1, Y2, Y3, Y4
    REAL(8)                                 ::A1, A2, B1, B2, A, B
    REAL(8)                                 ::A3, A4, A5, A6, A7, A8
    REAL(8)                                 ::B3, B4, B5, B6, B7, B8
    REAL(8)                                 ::DUMMY

    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::RYY, RXX, RXY, RYX
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::Z, R, SYSRX, SYSRY
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::DX, DY, DXX, DYY, DXY, DYX, DMAX
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::SYSRXX, SYSRYY, SYSRXY, SYSRYX
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::RDX, RDY, RX, RY
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:)      ::DXYYX, DDXX, DDYY, DDMAX, V

    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)    ::COORD, M, MX, MY, SYSM, SYSM1
    REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,:)    ::SYSM2, SYSM3, SYSM4, SYSM5, SYSM6

    CONTAINS

    !--------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE READINPUT()

    IMPLICIT NONE

    WRITE(6,10)
10  FORMAT(/, 'PLEASE ENTER THE INPUT FILE NAME:',/)
    READ(5,'(A)') NAME1

    LENG = LEN_TRIM(NAME1)

    OPEN(UNIT=7, FILE=NAME1, STATUS='OLD', ACTION='READ')

!   READ TITLE OF COMPUTATION

    READ(7,*) NLINES

    DO ILINE = 1,NLINES
        READ(7,1) TEXT
1       FORMAT(20A4)
    END DO

    READ(7,1) TEXT
    READ(7,*) NPOIN, NELEM

    ALLOCATE(COORD(NPOIN,2), Z(NPOIN))
    ALLOCATE(INTMAT(NELEM,4))

    READ(7,1) TEXT
    DO IP = 1,NPOIN
        READ(7,*) I, (COORD(I,K), K=1,2), Z(I)
        IF(I /= IP) WRITE(6,40) IP
40      FORMAT(/, 'NODE NO.', I5,' IN DATA FILE IS MISSING',/,/,'PLEASE CHECK
```

```
&             INPUT DATA (ENTER TO EXIT)')
        IF(I /= IP) READ(*,*)
        IF(I /= IP) STOP
    END DO

    READ(7,1) TEXT
    DO IE = 1,NELEM
        READ(7,*) I, (INTMAT(I,J), J=1,4)
        IF(I /= IE) WRITE(6,50) IE
50      FORMAT(/, 'ELEMENT NO.', I5,' IN DATA FILE IS MISSING',/,/,'PLEASE
&             CHECK INPUT DATA (ENTER TO EXIT)')
        IF(I /= IE) READ(*,*)
        IF(I /= IE) STOP
    END DO

    WRITE(6,60) NPOIN, NELEM
60  FORMAT(/,'*** READ INPUT FILE COMPLETE ***',/,/,'*** THE MODEL CONSISTS
&         OF', I5,' NODES AND', I5,' ELEMENTS ***')

    END SUBROUTINE READINPUT

!------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE GRAD()

    IMPLICIT NONE

    ALLOCATE(M(4,4), MX(4,4), MY(4,4))
    ALLOCATE(R(4), SYSRX(NPOIN), SYSRY(NPOIN))
    ALLOCATE(DX(NPOIN), DY(NPOIN), DXX(NPOIN), DYY(NPOIN), DXY(NPOIN))
    ALLOCATE(DYX(NPOIN), RX(4), RY(4), V(4))
    ALLOCATE(SYSM(NPOIN,NPOIN))

    OPEN(UNIT=8, FILE='CHECK', STATUS='UNKNOWN')

    T = 0.
    M = 0.
    MX = 0.
    MY = 0.
    R = 0.
    DX = 0.
    DY = 0.
    DXX = 0.
    DYY = 0.
    DXY = 0.
    DYX = 0.
    SYSM = 0.
    SYSRX = 0.
    SYSRY = 0.
    RX = 0.
    RY = 0.
    V = 0.

    WRITE(6,70)
70  FORMAT(/,'*** PREPARE CALCULATION***')

    DO IE = 1,NELEM

        I = INTMAT(IE,1)
        J = INTMAT(IE,2)
        K = INTMAT(IE,3)
        L = INTMAT(IE,4)

        X1 = COORD(I,1)
        X2 = COORD(J,1)
        X3 = COORD(K,1)
        X4 = COORD(L,1)

        Y1 = COORD(I,2)
        Y2 = COORD(J,2)
```

```
      Y3 = COORD(K,2)
      Y4 = COORD(L,2)

      V(1) = ((X2 - X1)*(Y4 - Y1) - (X4 - X1)*(Y2 - Y1))/4.0
      V(2) = ((X2 - X1)*(Y3 - Y2) - (X3 - X2)*(Y2 - Y1))/4.0
      V(3) = ((X3 - X2)*(Y4 - Y3) - (X4 - X3)*(Y3 - Y2))/4.0
      V(4) = ((X4 - X1)*(Y4 - Y3) - (X4 - X3)*(Y4 - Y1))/4.0


      R(1) = Z(I)
      R(2) = Z(J)
      R(3) = Z(K)
      R(4) = Z(L)

!   M MATRIX

      M(1,1) = (3*V(4) +   V(3) + 3*V(2) + 9*V(1))/36.0
      M(1,2) = (  V(4) +   V(3) + 3*V(2) + 3*V(1))/36.0
      M(1,3) = (  V(4) +   V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
      M(1,4) = (3*V(4) +   V(3) +   V(2) + 3*V(1))/36.0
      M(2,2) = (  V(4) + 3*V(3) + 9*V(2) + 3*V(1))/36.0
      M(2,3) = (  V(4) + 3*V(3) + 3*V(2) +   V(1))/36.0
      M(2,4) = (  V(4) +   V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
      M(3,3) = (3*V(4) + 9*V(3) + 3*V(2) +   V(1))/36.0
      M(3,4) = (3*V(4) + 3*V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
      M(4,4) = (9*V(4) + 3*V(3) +   V(2) + 3*V(1))/36.0

      DO I=1,4
          DO J=1,4
              M(J,I) = M(I,J)
          END DO
      END DO

!   MX MATRIX

      MX(1,1) =  y2/6 - y4/6
      MX(1,2) = y3/12 - y1/6 + y4/12
      MX(1,3) = y4/12 - y2/12
      MX(1,4) = y1/6 - y2/12 - y3/12
      MX(2,1) = y2/6 - y3/12 - y4/12
      MX(2,2) = y3/6 - y1/6
      MX(2,3) = y1/12 - y2/6 + y4/12
      MX(2,4) = y1/12 - y3/12
      MX(3,1) = y2/12 - y4/12
      MX(3,2) = y3/6 - y1/12 - y4/12
      MX(3,3) = y4/6 - y2/6
      MX(3,4) = y1/12 + y2/12 - y3/6
      MX(4,1) = y2/12 + y3/12 - y4/6
      MX(4,2) = y3/12 - y1/12
      MX(4,3) = y4/6 - y2/12 - y1/12
      MX(4,4) = y1/6 - y3/6

!   MY MATRIX

      MY(1,1) = x4/6 - x2/6
      MY(1,2) = x1/6 - x3/12 - x4/12
      MY(1,3) = x2/12 - x4/12
      MY(1,4) = x2/12 - x1/6 + x3/12
      MY(2,1) = x3/12 - x2/6 + x4/12
      MY(2,2) = x1/6 - x3/6
      MY(2,3) = x2/6 - x1/12 - x4/12
      MY(2,4) = x3/12 - x1/12
      MY(3,1) =  x4/12 - x2/12
      MY(3,2) = x1/12 - x3/6 + x4/12
      MY(3,3) = x2/6 - x4/6
      MY(3,4) = x3/6 - x2/12 - x1/12
      MY(4,1) = x4/6 - x3/12 - x2/12
      MY(4,2) = x1/12 - x3/12
      MY(4,3) = x1/12 + x2/12 - x4/6
      MY(4,4) = x3/6 - x1/6
```

```
        RX = MATMUL(MX,R)
        RY = MATMUL(MY,R)

!   ASSEMBLE

        CALL ASSEMBLE()

    END DO

    WRITE(6,80)
80  FORMAT(/,'*** ASSEMBLY FINISH***')

    WRITE(6,81)
81  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DX ')

    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRX, DX)

    DEALLOCATE(SYSRX)

    WRITE(6,82)
82  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DY ')

    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRY, DY)

    DEALLOCATE(SYSRY)

    END SUBROUTINE GRAD

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE ASSEMBLE()

    IMPLICIT NONE

    NNODE = 4

    DO  IR=1,NNODE

        IROW = INTMAT(IE,IR)
        SYSRY(IROW) = SYSRY(IROW) + RY(IR)
        SYSRX(IROW) = SYSRX(IROW) + RX(IR)

        DO  IC=1,NNODE
            ICOL = INTMAT(IE,IC)
            SYSM(IROW,ICOL) = SYSM(IROW,ICOL) + M(IR,IC)
        END DO

    END DO

    END SUBROUTINE ASSEMBLE

!-------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE SECONDGRAD()

    IMPLICIT NONE

    ALLOCATE(RDX(4), RDY(4))
    ALLOCATE(SYSRXX(NPOIN), SYSRYY(NPOIN), SYSRXY(NPOIN), SYSRYX(NPOIN))
    ALLOCATE(RYY(4), RXX(4), RXY(4), RYX(4))

    M = 0.
    MX = 0.
    MY = 0.
    SYSM = 0.
    SYSRYY = 0.
    SYSRXX = 0.
    SYSRXY = 0.
    SYSRYX = 0.
```

```
    RDX = 0.
    RDY = 0.
    RXX = 0.
    RYY = 0.
    RXY = 0.
    RYX = 0.
    V = 0.

    WRITE(6,75)
75  FORMAT(/,'*** PREPARE SECOND CALCULATION***')

    DO IE = 1,NELEM

        I = INTMAT(IE,1)
        J = INTMAT(IE,2)
        K = INTMAT(IE,3)
        L = INTMAT(IE,4)

        X1 = COORD(I,1)
        X2 = COORD(J,1)
        X3 = COORD(K,1)
        X4 = COORD(L,1)

        Y1 = COORD(I,2)
        Y2 = COORD(J,2)
        Y3 = COORD(K,2)
        Y4 = COORD(L,2)

        V(1) = ((X2 - X1)*(Y4 - Y1) - (X4 - X1)*(Y2 - Y1))/4.0
        V(2) = ((X2 - X1)*(Y3 - Y2) - (X3 - X2)*(Y2 - Y1))/4.0
        V(3) = ((X3 - X2)*(Y4 - Y3) - (X4 - X3)*(Y3 - Y2))/4.0
        V(4) = ((X4 - X1)*(Y4 - Y3) - (X4 - X3)*(Y4 - Y1))/4.0

        RDX(1) = DX(I)
        RDX(2) = DX(J)
        RDX(3) = DX(K)
        RDX(4) = DX(L)

        RDY(1) = DY(I)
        RDY(2) = DY(J)
        RDY(3) = DY(K)
        RDY(4) = DY(L)

!   M MATRIX

        M(1,1) = (3*V(4) +   V(3) + 3*V(2) + 9*V(1))/36.0
        M(1,2) = (  V(4) +   V(3) + 3*V(2) + 3*V(1))/36.0
        M(1,3) = (  V(4) +   V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
        M(1,4) = (3*V(4) +   V(3) +   V(2) + 3*V(1))/36.0
        M(2,2) = (  V(4) + 3*V(3) + 9*V(2) + 3*V(1))/36.0
        M(2,3) = (  V(4) + 3*V(3) + 3*V(2) +   V(1))/36.0
        M(2,4) = (  V(4) +   V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
        M(3,3) = (3*V(4) + 9*V(3) + 3*V(2) +   V(1))/36.0
        M(3,4) = (3*V(4) + 3*V(3) +   V(2) +   V(1))/36.0
        M(4,4) = (9*V(4) + 3*V(3) +   V(2) + 3*V(1))/36.0

        DO I=1,4
            DO J=1,4
                M(J,I) = M(I,J)
            END DO
        END DO

!   MX MATRIX

        MX(1,1) =  y2/6 - y4/6
        MX(1,2) = y3/12 - y1/6 + y4/12
        MX(1,3) = y4/12 - y2/12
        MX(1,4) = y1/6 - y2/12 - y3/12
        MX(2,1) = y2/6 - y3/12 - y4/12
        MX(2,2) = y3/6 - y1/6
```

```
        MX(2,3) = y1/12 - y2/6 + y4/12
        MX(2,4) = y1/12 - y3/12
        MX(3,1) = y2/12 - y4/12
        MX(3,2) = y3/6 - y1/12 - y4/12
        MX(3,3) = y4/6 - y2/6
        MX(3,4) = y1/12 + y2/12 - y3/6
        MX(4,1) = y2/12 + y3/12 - y4/6
        MX(4,2) = y3/12 - y1/12
        MX(4,3) = y4/6 - y2/12 - y1/12
        MX(4,4) = y1/6 - y3/6

!   MY MATRIX

        MY(1,1) = x4/6 - x2/6
        MY(1,2) = x1/6 - x3/12 - x4/12
        MY(1,3) = x2/12 - x4/12
        MY(1,4) = x2/12 - x1/6 + x3/12
        MY(2,1) = x3/12 - x2/6 + x4/12
        MY(2,2) = x1/6 - x3/6
        MY(2,3) = x2/6 - x1/12 - x4/12
        MY(2,4) = x3/12 - x1/12
        MY(3,1) =  x4/12 - x2/12
        MY(3,2) = x1/12 - x3/6 + x4/12
        MY(3,3) = x2/6 - x4/6
        MY(3,4) = x3/6 - x2/12 - x1/12
        MY(4,1) = x4/6 - x3/12 - x2/12
        MY(4,2) = x1/12 - x3/12
        MY(4,3) = x1/12 + x2/12 - x4/6
        MY(4,4) = x3/6 - x1/6

        RYY = MATMUL(MY,RDY)

        RXX = MATMUL(MX,RDX)

        RYX = MATMUL(MY,RDX)

        RXY = MATMUL(MX,RDY)

!   ASSEMBLE

        CALL SECONDASSEMBLE()

    END DO

    WRITE(6,85)
85  FORMAT(/,'*** SECOND ASSEMBLY FINISH***')

    WRITE(6,90)
90  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DXX ')

    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRXX, DXX)

    DEALLOCATE(SYSRXX)

    WRITE(6,91)
91  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DYY ')

    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRYY, DYY)

    DEALLOCATE(SYSRYY)

    WRITE(6,92)
92  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DYX ')

    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRYX, DYX)

    DEALLOCATE(SYSRYX)

    WRITE(6,93)
93  FORMAT(/,'--- SOLVING FOR DXY ')
```

```
    CALL CGNEW(NPOIN, SYSM, SYSRXY, DXY)

    DEALLOCATE(SYSRXY)

    END SUBROUTINE SECONDGRAD

!--------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE SECONDASSEMBLE()

    IMPLICIT NONE

    NNODE = 4

    DO IR=1,NNODE

        IROW = INTMAT(IE,IR)
        SYSRYY(IROW) = SYSRYY(IROW) + RYY(IR)
        SYSRXX(IROW) = SYSRXX(IROW) + RXX(IR)
        SYSRXY(IROW) = SYSRXY(IROW) + RXY(IR)
        SYSRYX(IROW) = SYSRYX(IROW) + RYX(IR)

        DO IC=1,NNODE
            ICOL = INTMAT(IE,IC)
            SYSM(IROW,ICOL) = SYSM(IROW,ICOL) + M(IR,IC)
        END DO

    END DO

    END SUBROUTINE SECONDASSEMBLE

!--------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE PLOTOUTPUT()

    IMPLICIT NONE

    WRITE(6,610)
610 FORMAT(/,'*** PRINT OUT GRAPHIC DISPLAY IN TECPLOT FORMAT ***')

    OPEN(UNIT=11, FILE=NAME1(1:LENG)//'_GRADIENT.PLT', STATUS='UNKNOWN')

    WRITE(11,630) NAME1
630 FORMAT(' TITLE = ',(A))
    WRITE(11,640)
640 FORMAT(' VARIABLES = "X", "Y", "Z", "DX", "DY", "DXX", "DYY", "DXY", "DYX", "DMAX",
&         "DDXX", "DDYY", "DDMAX" ')
    WRITE(11,650) NPOIN, NELEM
650 FORMAT('ZONE N =', I6,',E = ',I6, ', F = FEPOINT, ET = QUADRILATERAL')

    DO I = 1,NPOIN
        WRITE(11,660) (COORD(I,K) ,K=1,2), Z(I), DX(I), DY(I), DXX(I), DYY(I), DXY(I), DYX(I),
&            DMAX(I), DDXX(I), DDYY(I), DDMAX(I)
660     FORMAT(2F12.6,2X, 11E16.6)
    END DO

    DO I = 1,NELEM
        WRITE(11,670) (INTMAT(I,J) ,J=1,4)
670     FORMAT(4I6)
    END DO

    CLOSE(UNIT=11, STATUS='KEEP')

    END SUBROUTINE PLOTOUTPUT

!--------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE MAXGRADIENT()
```

```
    IMPLICIT NONE

    ALLOCATE(DMAX(NPOIN), DXYYX(NPOIN), DDXX(NPOIN), DDYY(NPOIN), DDMAX(NPOIN))

    DO IP = 1, NPOIN

        DMAX(IP) = ABS(MAX(DXX(IP), DYY(IP), DXY(IP), DYX(IP)))
        DXYYX(IP) = (DXY(IP) + DYX(IP))/2
        DUMMY = SQRT( ((DXX(IP)-DYY(IP))**2)/4 + DXYYX(IP)**2 )
        DDXX(IP) = ((DXX(IP)+DYY(IP))**2)/2 + DUMMY
        DDYY(IP) = ((DXX(IP)+DYY(IP))**2)/2 - DUMMY
        DDMAX(IP) = ABS(MAX(DDXX(IP), DDYY(IP)))

    END DO

    END SUBROUTINE MAXGRADIENT

!--------------------------------------------------------------------------
    SUBROUTINE WRITEOUTPUT()

    IMPLICIT NONE

    WRITE(6,400)
400 FORMAT(/,'*** PRINT OUT SOLUTIONS: ***')

    WRITE(12,410)
410 FORMAT(' *** DOUBLE GRADIENT ***')

    WRITE(12,430) NAME1
430 FORMAT(' TITLE = ',(A))
    WRITE(12,450) NPOIN, NELEM
450 FORMAT('NODE =', I6,',ELEMENT = ',I6)
    WRITE(12,440)
440 FORMAT(' VARIABLES = "X", "Y", "DMAX", "DDMAX"')

    DO I = 1,NPOIN
        WRITE(12,460) (COORD(I,K) ,K=1,2), DMAX(I), DDMAX(I)
460     FORMAT(2F12.6,2X, 2E16.6)
    END DO

    CLOSE(UNIT=12, STATUS='KEEP')

    END SUBROUTINE WRITEOUTPUT

!-------------------------------------------------------------------------

END MODULE
```

```
MODULE SOLVING

    IMPLICIT NONE

    CONTAINS

!---------------------------------------------------------------------------

    SUBROUTINE CGNEW(N, A, B, X)

    IMPLICIT NONE

    INTEGER(4)                              ::COUNT, I, N, J, K

    REAL(8)                                 ::SUM, DEL, DOWN, ALAM, TOL, DEL1, ALPHA

    REAL(8), DIMENSION(N)                   ::X, B, R, D, U

    REAL(8), DIMENSION(N,N)                 ::A

    COUNT = 0

    X = 0

!   ASSIGN TOLERANCE FOR STOPPING CRITERION:

    TOL = 0.00000001

!   COMPUTE INTIAL RESIDUAL & SEARCE DIRECTION:

    RING1: DO I=1,N
        SUM = 0.
        RING2: DO J=1,N
            SUM = SUM + A(I,J)*X(J)
        END DO RING2
        R(I) = SUM - B(I)
        D(I) = -R(I)
    END DO RING1

    DEL = 0.
    DO I=1,N
        DEL = DEL + R(I)*R(I)
    END DO

!   ENTER THE ITERATION LOOP:

    LOOP1: DO K=1,N+1
        LOOP2: DO I=1,N
            U(I) =0.
            LOOP3: DO J=1,N
                U(I) = U(I) + A(I,J)*D(J)
            END DO LOOP3
        END DO LOOP2

        DOWN = 0.

        DO I=1,N
            DOWN = DOWN + D(I)*U(I)
        END DO

        ALAM = DEL/DOWN

        DO I=1,N
            X(I) = X(I) + ALAM*D(I)
            R(I) = R(I) + ALAM*U(I)
        END DO

        DEL1 = 0.
```

```
        DO I=1,N
            DEL1 = DEL1 + R(I)*R(I)
        END DO

        IF(DEL1.LT.TOL) RETURN

        ALPHA = DEL1/DEL

        DO I=1,N
            D(I) = -R(I) + ALPHA*D(I)
        END DO

        DEL = DEL1
        COUNT = COUNT +1

        IF (K==(N+1)) THEN
            WRITE(*,*)  '!!---------------------ALERT MESSAGE----------------------!!'
            WRITE(*,*)  '!!---CGNEW EXIT BY COMPLETED LOOP, IT CAN NOT REACH TOL---!!'
            WRITE(*,*)  '!!--------------------------------------------------------!!'
        END IF

    END DO LOOP1

    END SUBROUTINE CGNEW

!-------------------------------------------------------------------------

END MODULE
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายวิทยา สดับสาร เกิดเมื่อวันที่ 9 เดือน มีนาคม พุทธศักราช 2532 จังหวัดสุรินทร์ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2554 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปีการศึกษา 2555