การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา ที่มีความไม่แน่นอนโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

นายสังวาล บกสุวรรณ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2548

ISBN 974-17-4141-3

PID CONTROLLER DESIGN FOR UNCERTAIN LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS
USING LINEAR MATRIX INEQUALITY

Mr. Sungwan Boksuwan

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering
Department of Electrical Engineering
Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
Academic Year 2005
ISBN 974-17-4141-3

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีความไม่แน่นอนโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น
โดย	นายสังวาล บกสุวรรณ
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยอนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.ดิเรก ลาวัณย์ศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ)

.... กรรมการ
(อาจารย์ ดร.แนบบุญ หุนเจริญ)

สังวาล บกสุวรรณ: การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลาที่มีความไม่แน่นอนโดยวิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (PID CONTROLLER DESIGN FOR UNCERTAIN LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS USING LINEAR MATRIX INEQUALITY) อ. ที่ปรึกษา: ผศ.ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ, 74 หน้า, ISBN 974-17-4141-3

ระบบควบคุมทางอุตสาหกรรมจำนวนมากโดยเฉพาะการควบคุมกระบวนการมีตัวควบคุมพีไอดีเป็นเครื่องมือหลัก อย่างไรก็ตามวิธีส่วนใหญ่ที่ใช้คำนวณพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีสามารถใช้ได้เพียงแค่กับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกเท่านั้น ในวิทยานิพนธ์นี้เรานำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาชนิดหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกและชนิดหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก วิธีการของเราสามารถแก้ปัญหาเสถียรภาพและปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ โดยการใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งเป็นวิธีการที่ได้รับความสนใจมากเมื่อไม่นานมานี้ซึ่งปัจจุบันปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

แนวความคิดหลักที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอคือพยายามเปลี่ยนปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีไปเป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก วิธีการนี้นำไปสู่เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์ไม่คอนเวกซ์ เราใช้การทำซ้ำแบบคู่กันซึ่งเป็นวิธีเชิงเลข เพื่อแก้ปัญหาไม่คอนเวกซ์นี้ เราเริ่มด้วยการนำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อทำให้ระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกมีเสถียรภาพ จากนั้นขยายแนวความคิดไปยังระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก จากนั้นออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อให้ได้ตามข้อกำหนด $\mathcal{H}_\infty$ ปัญหาการออกแบบทั้งสองเราสมมติว่าทราบพารามิเตอร์ทั้งหมดของระบบอย่างแน่นอน แต่จริงๆ ในทางปฏิบัติพารามิเตอร์เหล่านี้อาจเกิดการเปลี่ยนแปลงค่าได้หรือแบบจำลองที่เราใช้ออกแบบตัวควบคุมอาจไม่สามารถอธิบายระบบได้อย่างถูกต้อง ดังนั้นเรานำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทนด้วยเพื่อแก้ปัญหาความไม่แน่นอนนี้

ภาควิชา ....วิศวกรรมไฟฟ้า....
สาขาวิชา ....วิศวกรรมไฟฟ้า....
ปีการศึกษา ....2548....

ลายมือชื่อนิสิต ....สังวาล บกสุวรรณ....
ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ....มานพ วงศ์สายสุวรรณ....

##4670551621: MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEY WORD : PID CONTROLLER DESIGN/ STATIC OUTPUT FEEDBACK/ LINEAR MATRIX INEQUALITIES/ ROBUST CONTROL

SUNGWAN BOKSUWAN: PID CONTROLLER DESIGN FOR UNCERTAIN LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS USING LINEAR MATRIX INEQUALITY THESIS ADVISOR: MANOP WONGSAISUWAN, Ph.D., 74 PP., ISBN 974-17-4141-3

Many industrial control systems, particularly those of the process industries, mainly have the proportional integral and derivative (PID) controller as their controller. However, most methods used to determine controller parameters can be applied only to single-input single-output plants. In this thesis, we propose the design of multivariable PID controllers for linear time-invariant systems. Our approach can solve the stability specifications and $\mathcal{H}_\infty$ problems using linear matrix inequality method. This method is currently of much interest and linear matrix inequalities problems can effectively be solved.

The main idea is that PID controller problems are transformed into the problem of the static output feedback controller design. Unfortunately, this approach gives LMI's plus a non-convex rank constraint. We employ the dual iteration numerical technique to overcome such difficulty. First, we present PID controller design to stabilize SISO plants. The same idea can be extended to the case of MIMO plants and the detail is presented. Then, the design of PID controller to achieve $\mathcal{H}_\infty$ specification is also given. An assumption for these design problem is that we exactly know parameters of plants but such parameters, in the real situations, may vary or the mathmatical model may not describe real plants accurately. To stabilize these plants, we propose the design of robust PID controllers.

Department Electrical Engineering	**Student's signature** สังวาล บกสุวรรณ
Field of study Electrical Engineering	**Advisor's signature** มานพ วงศ์สายสุวรรณ
Academic year 2005	

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ ด้วยความช่วยเหลือของ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มานพ วงศ์สายสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ซึ่งให้โอกาสผู้วิจัยเข้ามาเป็นนิสิตในที่ปรึกษา ให้กำลังใจและให้โอกาสทำงานพิเศษเพื่อเป็นค่าใช้จ่ายระหว่างเรียน ให้คำแนะนำในการทำงานและการเรียนด้วยเจตนาดีเสมอมา จึงใคร่ขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และอาจารย์ ดร. แนบบุญ หุนเจริญ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ที่ได้สละเวลาตรวจสอบและให้คำแนะนำเพื่อให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านในสาขาระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้พื้นฐานในวิชาทางระบบควบคุม อันเป็นพื้นฐานในการศึกษาและทำวิทยานิพนธ์นี้

ขอกราบขอบพระคุณ คุณแม่เสรี บกสุวรรณ ที่ให้โอกาสในการศึกษาตลอดมา ความรัก ความห่วงใย กำลังใจ และการดูแลเอาใจใส่ที่ดีเสมอมา

ขอขอบคุณความช่วยเหลือเป็นอย่างดีจาก วทัญญู คล้ายสงคราม วฤต ศรีศิลป์กุล ฐาปนา นามประดิษฐ์ และ ขอบคุณ พี่มานะชัย คำแย้ม และ จีรนุช จึงอุดมพร เพื่อนผู้ซึ่งให้ความช่วยเหลือคำแนะนำเป็นอย่างดีในทุกๆ เรื่อง ขอบคุณความเป็นเพื่อนจาก Addy Wahyudie และ เขตต์ พิฑูรมานิต ขอขอบคุณน้องที่ดีมากๆ กิตติพงศ์ เธียรจันทร์วงศ์ และ วุฒินันท์ ธูปหอม ขอบคุณ Pupus Adiwaluyo, Tu Auh Do และ Lychek Keo สำหรับมิตรภาพในห้องวิจัย

ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัยสำหรับเงินอุดหนุนงานวิจัยส่วนหนึ่ง ซึ่งทำให้การทำงานวิจัยเป็นไปด้วยดี สุดท้ายนี้ ขอขอบคุณห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุม ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับทรัพยากรต่างๆ ในการศึกษา ค้นคว้าและวิจัย

สารบัญ

สารบัญภาพ

คำอธิบายสัญลักษณ์

$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^m$	เซตของเวกเตอร์ค่าจริงมิติ m
$\mathbb{R}^{m\times n}$	ปริภูมิเวกเตอร์ของเมทริกซ์ค่าจริงมิติ $m \times n$
$\mathbb{C}^{m\times n}$	ปริภูมิเวกเตอร์ของเมทริกซ์ค่าเชิงซ้อนมิติ $m \times n$
$\mathbb{S}^n$	ปริภูมิเวกเตอร์ของเมทริกซ์สมมาตรมิติ $n \times n$
I_m	เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $m \times m$ ซึ่งจะละสัญลักษณ์ m ไว้ ในกรณีที่ สามารถทราบมิติของเมทริกซ์เอกลักษณ์ได้จากเมทริกซ์ที่มีขนาดสัมพันธ์กัน
X^T	เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$
A^{-1}	ตัวผกผันของ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ นั่นคือ $AA^{-1} = I$
$\mathbf{diag}(X_1, \ldots, X_N)$	เมทริกซ์ทแยงมุมแบบบล็อกที่มีเมทริกซ์ในแนวทแยงเป็น $X_1, \ldots, X_N$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_N \end{bmatrix}$$

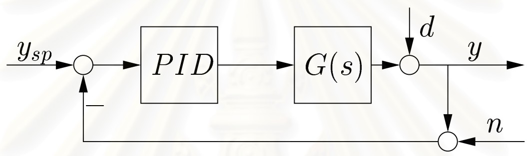
$X > 0$	เมทริกซ์สมมาตร X เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน นั่นคือ $X = X^T$ และ $z^T X z > 0$ สำหรับทุกค่า $z \in \mathbb{R}^n$ ที่ไม่เท่ากับศูนย์
$X > Y$	เมทริกซ์สมมาตร X และ Y ที่สอดคล้องกับ $X - Y > 0$
$X^{\perp}$	เมทริกซ์ซึ่งแถวประกอบด้วยฐานหลักของปริภูมิย่อยสู่ศูนย์ของ X
$\lVert \cdot \rVert_\infty$	นอร์ม $\mathcal{L}_\infty$ ของสัญญาณ
$\rho(A)$	ค่าที่มากที่สุดของส่วนจริงของค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

ตัวควบคุมชนิดพีไอดีมีใช้อย่างกว้างขวางในทางปฏิบัติโดยเฉพาะอย่างยิ่งในการควบคุมกระบวนการเพราะมีโครงสร้างที่ไม่ซับซ้อนและมีพารามิเตอร์ที่ต้องกำหนดเพียงแค่สาม ตัวระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีโดยทั่วไปแสดงในรูปที่ 1.1 ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ระบบที่เราสนใจและใช้ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเป็น



รูปที่ 1.1: ระบบควบคุมป้อนกลับโดยตัวควบคุมพีไอดี

ระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time-invariant system) ซึ่งอธิบายโดยฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}, \quad n > m \tag{1.1}$$

หรือสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p u \\ y &= C_p x \end{aligned} \tag{1.2}$$

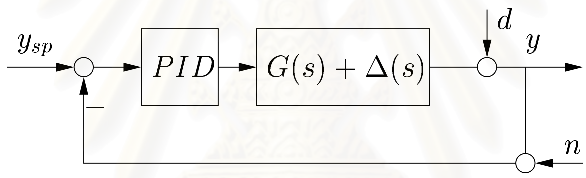
วิธีการออกแบบหรือคำนวณค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีนั้นมีหลายวิธีเพื่อให้สอดคล้องกับความต้องการในทางปฏิบัติโดยตัวควบคุมจะต้องสามารถลดผลของสัญญาณรบกวนและตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิง วิธีการคำนวณพารามิเตอร์ส่วนใหญ่สามารถใช้ได้เฉพาะระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO) เท่านั้นในวิทยานิพนธ์เล่มนี้เรายังจะเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (MIMO) ซึ่งในกรณีนี้พารามิเตอร์ของตัวควบคุมอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ แนวความคิดหลักๆ ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอคือพยายามเขียนปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก จากนั้นเราใช้เงื่อนไขการออกแบบสำหรับปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี ซึ่งอยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์ ดังนั้นเครื่องมือหลักที่ใช้ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในวิทยานิพนธ์นี้ คืออสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI) ซึ่งเป็นวิธีการออกแบบที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง เป็นวิธีการออกแบบโดยใช้การ

หาค่าเหมาะที่สุด (optimization) ชนิดหนึ่ง อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นปัญหาคอนเวกซ์ จึงทำให้สามารถหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบวงกว้าง (global) ได้

สังเกตว่าแบบจำลองซึ่งอธิบายโดยสมการ (1.1) หรือ (1.2) ที่เราใช้ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีอยู่ภายใต้ข้อสมมติที่ว่าพารามิเตอร์ทุกตัวของแบบจำลองไม่มีการเปลี่ยนแปลงหรือเราทราบค่าของพารามิเตอร์ที่แน่นอน หากข้อสมมตินี้เป็นจริงวิธีการข้างต้นยังคงใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่สำหรับบางระบบเราไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ที่แน่นอนได้หรือแบบจำลอง $G(s)$ ที่เราสร้างขึ้นมีความแตกต่างจากระบบจริง $H(s)$ ถ้าเรากำหนดให้ $\Delta(s)$ แทนความแตกต่างนี้แล้วระบบสามารถอธิบายได้โดย

$$H(s) = G(s) + \Delta(s) \tag{1.3}$$

โดยที่ $\|\Delta(s)\|_\infty$ เป็นขนาดของความแตกต่างที่มีค่าจำกัดค่าหนึ่ง การควบคุมระบบดังกล่าวแสดงในรูปที่ 1.2 สำหรับระบบชนิดนี้ถ้าเราใช้วิธีการออกแบบพีไอดีที่ผ่านมาอาจทำให้สมรรถนะที่ได้ไม่เป็นไปตามที่ต้องการหรือกระทั่งทำให้ระบบขาดเสถียรภาพได้ ในวิทยานิพนธ์นี้จะเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทนด้วย กล่าวคือเป็นตัวควบคุมที่รักษาให้ระบบวงปิดยังคงมีเสถียรภาพถึงแม้ว่าพารามิเตอร์เกิดการเปลี่ยนแปลงหรือมีความไม่แน่นอนในระบบ



รูปที่ 1.2: การควบคุมระบบที่มีความไม่แน่นอนโดยพีไอดี

1.2 งานวิจัยที่ผ่านมา

1.2.1 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดี

งานวิจัยในอดีตที่เกี่ยวกับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีมีมากมาย แต่งานวิจัยเมื่อไม่นานมานี้ที่นำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีมารวมกับการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ที่ควรจะกล่าวถึงประกอบด้วย

- ปี ค.ศ. 1998 K.J. Åström และคณะ [1] ได้เสนอวิธีการเชิงเลขสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอโดยอาศัยการหาค่าเหมาะสมที่สุดในการแก้ปัญหา วิธีการที่นำเสนอสามารถแก้ปัญหาไม่คอนเวกซ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพเนื่องจากวิธีการนี้ทำการเปลี่ยนปัญหาไม่คอนเวกซ์ไปเป็นปัญหาการหารากของสมการไม่เชิงเส้นหนึ่งตัวแปรเพียงแค่สมการเดียวแต่วิธีนี้ใช้ได้กับการออกแบบตัวควบคุมพีไอเท่านั้น

- ปี ค.ศ. 2001 Ming Ge และคณะ [2] นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทน ในฐานะปัญหา LQR และใช้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการแก้ปัญหา ทำให้สามารถรวมเงื่อนไข เช่น ตำแหน่งของโพล หรือ ข้อจำกัดของสัญญาณควบคุมได้ แต่สามารถใช้ได้กับระบบอันดับสองเท่านั้น

1.2.2 การป้อนกลับสัญญาณขาออก

ส่วนงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบตัวควบคุมสำหรับปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์นี้ มีดังต่อไปนี้

- ปี ค.ศ. 1998 Yong-Yan Cao และคณะ [3] นำเสนอการทำให้ระบบมีเสถียรภาพโดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับ การคำนวณเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่นำเสนอ แต่ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง

- ปี ค.ศ. 1998 Alfonso Poncella และ William E. Schmitendorf [4] นำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมป้อนกลับสัญญาณขาออก ซึ่งมีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ วิธีการออกแบบใช้วิธีการทำซ้ำเช่นเดียวกับวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน

- ปี ค.ศ. 1999 Tetsuya Iwasaki [5] นำเสนอวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน (dual iteration) สำหรับการออกแบบตัวควบคุมกำหนดอันดับได้เพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพวิธีนี้อาศัยการทำซ้ำอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น และไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้างแต่อัตราการประสบความสำเร็จสูง ในวิทยานิพนธ์นี้จะอาศัยวิธีนี้ในการแก้ปัญหา

- ปี ค.ศ. 2004 Atsushi Fujimori [6] เสนอวิธีการทำซ้ำสำหรับปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยการประมาณปัญหาไม่คอนเวกซ์เป็นปัญหาคอนเวกซ์และทำซ้ำจนกระทั่งได้คำตอบ วิธีการนี้ทำการเพิ่มพจน์กำลังสองในเงื่อนไขการออกแบบเพื่อทำให้กลายเป็นปัญหาคอนเวกซ์ การลู่เข้าของวิธีนี้ขึ้นอยู่กับการเลือกค่าของเมทริกซ์ที่เพิ่มเข้าไป ผู้ออกแบบจำเป็นจะต้องเลือกเมทริกซ์เหล่านี้ให้เหมาะสมด้วยตัวเอง

1.3 วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้ คือการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพซึ่งเป็นความต้องการพื้นฐานสำหรับการควบคุมระบบ หรือเพื่อให้ระบบมีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ และสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอนเราจะทำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพคงทน

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาชนิดหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (MIMO linear time-invariant system) ภายใต้เงื่อนไข

1. ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพ
2. ตัวควบคุมพีไอดีซึ่งมีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$
3. ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทนสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาโครงสร้างและคุณสมบัติของตัวควบคุมพีไอดี
2. ศึกษาทฤษฎีของการหาค่าเหมาะสมที่สุดและอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น
3. สร้างชุดคำสั่งบนโปรแกรม Matlab เพื่อแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้น
4. ศึกษาการควบคุมคงทนและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
5. ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีซึ่งทำให้ระบบมีเสถียรภาพหรือปรับปรุงสมรรถนะสำหรับระบบที่มีเสถียรภาพอยู่แล้ว
6. ขยายผลที่ได้ไปยังการออกแบบพีไอดีคงทนสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน
7. สรุปงานวิจัยที่ทำ และข้อดีข้อเสีย

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

วิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่มีระเบียบแบบแผนสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกอันดับจำกัด และวิธีการที่นำเสนอสามารถใช้ออกแบบตัวควบคุมพีไอหรือพีดีได้ด้วย เนื่องจากการออกแบบใช้วิธีอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจึงมีความยืดหยุ่นสามารถเพิ่มเงื่อนไขการออกแบบอื่น ๆ เพื่อปรับปรุงสมรรถนะ อีกทั้งยังสามารถนำไปพัฒนาเป็นซอฟต์แวร์สำหรับการออกแบบในลักษณะนี้ได้โดยง่าย

1.7 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในบทที่ 2 จะนำเสนอคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จะใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ โดยกล่าวถึงพีชคณิตพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งเป็นเครื่องมือหลักๆ ในวิทยานิพนธ์นี้รวมทั้งบทตั้งที่จำเป็น จากนั้นทำการนิยามนอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ และให้วิธีการคำนวณนอร์มนี้โดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น สุดท้ายของบทนี้ทำการทบทวนปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก บทที่ 3 กล่าวถึงตัวควบคุมพีไอดีชนิดขนานและชนิดถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงซึ่งอันหลังเป็นรูปแบบที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO) และขยายแนวความคิดนี้ไปยังระบบที่มีหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (MIMO) เพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพ จากนั้นเรานำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อทำให้ระบบมีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ซึ่งเงื่อนไขการออกแบบของปัญหาเหล่านี้เป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้น บทที่ 4 แนะนำวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันเพื่อแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นทั้งกรณีของปัญหาการทำให้ระบบมีเสถียรภาพและปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ บทที่ 5 เราจะนำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน เริ่มจากให้วิธีการนำเสนอความไม่แน่นอน เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนในรูปแบบอสมการเมทริกซ์ซึ่งนำไปสู่วิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทน บทที่ 6 ให้ตัวอย่าง

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการที่นำเสนอ บทที่ 7 เป็นสรุปและข้อเสนอแนะ ภาคผนวก ก เป็นชุดคำสั่ง Matlab ที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 2

คณิตศาสตร์พื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงคณิตศาสตร์ที่ใช้เป็นพื้นฐานในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับปัญหาการทำให้มีเสถียรภาพและปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ เนื้อหาประกอบด้วย §2.1 กล่าวถึงพีชคณิตเชิงเส้นที่ใช้ในการคำนวณเชิงเลข และใน §2.2 แนะนำอสมการเมทริกเชิงเส้น (LMI) ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักในวิทยานิพนธ์นี้ จากนั้น §2.3 ให้นิยามของ $\mathcal{H}_\infty$ นอร์มที่ใช้ในการวัดสมรรถนะของระบบและการคำนวณ $\mathcal{H}_\infty$ นอร์มของเมทริกซ์ถ่ายโอน สุดท้าย §2.4 และ §2.5 ทบทวนปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกและเสนอบทสรุป

2.1 พีชคณิตเชิงเส้น

กำหนดเวกเตอร์ $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^m$ ผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์เหล่านี้เขียนได้ในรูปแบบ $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$ โดยที่ $\alpha_i \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่าเวกเตอร์เหล่านี้ไม่ขึ้นต่อกันหรือเป็นอิสระต่อกันเชิงเส้น (linearly independence) ถ้าสมการ $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0$ สามารถหาคำตอบได้เพียงแค่คำตอบเดียวคือ $\alpha_i = 0, \quad i = 1, \ldots, k$ เวกเตอร์ใด ๆ ที่เป็นผลบวกเชิงเส้นของเวกเตอร์เหล่านี้เขียนแทนด้วย $y = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$ และถ้าเรานำผลบวกเชิงเส้นทั้งหมดมาสร้างปริภูมิย่อย (subspace) จะเรียกปริภูมิย่อยนี้ว่าผลการแผ่ (span) ของ $a_1, \ldots, a_k$ เขียนแทนด้วย

$$\text{span}\{a_1, \ldots, a_k\} = \{y \in \mathbb{R}^m : y = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

เมื่อกำหนดเวกเตอร์ $a_1, \ldots, a_k$ เป็นเวกเตอร์ที่เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นและให้ $S = \text{span}\{a_1, \ldots, a_k\}$ เราเรียก $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ว่าเป็นฐานหลัก (basis) ชุดหนึ่งของ S และเรียกจำนวนของเวกเตอร์ในฐานหลักชุดนี้ว่ามิติ (dimension) ของ S เขียนแทนด้วย dim S และนิยามส่วนเติมเต็มตั้งฉาก (orthogonal complement) ของปริภูมิย่อย S ดังนี้

$$S_\perp = \{y \in \mathbb{R}^m : y^T x = 0, \quad \forall x \in S\}$$

พิจารณาเมทริกซ์ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ปริภูมิย่อยสู่ศูนย์ (nullspace) ของ A นิยามโดย

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

ถ้าทุกสดมภ์ของเมทริกซ์ A เป็นอิสระต่อกันเชิงเส้นแล้ว $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ $A^\perp$ โดยหมายถึง $\mathcal{N}(A^T)^T$ พิสัย (range) ของเมทริกซ์ A ซึ่งเป็นผลบวกเชิงเส้นของทุกสดมภ์นิยามโดย

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax\}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการคำนวณ $\mathcal{N}(\cdot)$ ของเมทริกซ์และแนะนำคำสั่งสำหรับ MATLAB ซึ่งใช้บ่อย ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้

ตัวอย่างที่ 1. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ คำนวณฐานหลักของ $\mathcal{N}(B^T)$ และ $\mathcal{R}(B)$ ให้ $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ อาศัยนิยามของปริภูมิสู่ศูนย์จะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นฐานหลักชุดหนึ่งของ $\mathcal{N}(B^T)$ คือ $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ และ $B^\perp = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

พิสัยของ B สามารถคำนวณได้อย่างง่ายๆ โดย

$$\mathcal{R}(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

สังเกตว่า $\mathcal{N}(B^T)$ และ $\mathcal{R}(B)$ ตั้งฉากซึ่งกันและกันนี้เป็นจริงสำหรับกรณีทั่วไปด้วยการคำนวณปริภูมิสู่ศูนย์ของเมทริกซ์ สามารถใช้คำสั่งในโปรแกรม MATLAB ซึ่งมีรูปแบบ

null(B','r')

ซึ่งผลที่ได้เป็นฐานหลักชุดหนึ่งของ $\mathcal{N}(B^T)$ ส่วน 'r' เป็นการบอกให้โปรแกรมสร้างฐานหลักซึ่งตัวเลขสามารถเขียนเป็นเศษส่วนได้ สำหรับตัวอย่างนี้ผลที่ได้คือ $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

เมทริกซ์ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรถ้า $A = A^T$ ดังนั้นเรานิยามเซตของเมทริกซ์สมมาตรด้วย $\mathbb{S}^n := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = A^T\}$ มีคุณสมบัติสองข้อที่สำคัญของเมทริกซ์สมมาตรคือค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็นค่าจริง และเวกเตอร์เฉพาะ (eigenvector) ตั้งฉากซึ่งกันและกันโดยที่ค่าลักษณะเฉพาะที่น้อยที่สุดและมากที่สุดของ A เขียนแทนด้วย $\lambda_{\min}(A)$ และ $\lambda_{\max}(A)$ ตามลำดับ สมมติว่า $A \in \mathbb{S}^n$ เรากล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์บวกแน่นอน (positive definite) ซึ่งเขียนแทนด้วย $A > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x^T Ax > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}^n$ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และสมมูลกับ $\lambda_{\min}(A) > 0$ เรากล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์ลบแน่นอน (negative definite) ก็ต่อเมื่อ $-A > 0$ สำหรับเมทริกซ์ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ใด ๆ $\rho(A)$ หมายถึงค่าที่มากที่สุดของ **Re** $\lambda_i(A)$ เมื่อ $\lambda_i(A)$ แทนค่าลักษณะเฉพาะตัวที่ i ของเมทริกซ์ A ซึ่งในกรณีนี้ เมทริกซ์ A ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทริกซ์สมมาตร

2.2 อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์สำหรับการออกแบบและวิเคราะห์ปัญหาในระบบควบคุม เนื่องจากมีข้อได้เปรียบเช่น

- ข้อกำหนดและเงื่อนไขในการออกแบบจำนวนมากสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้
- ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยเทคนิคเชิงเลข
- ปัญหาซึ่งมีหลายเงื่อนไขและหลายข้อกำหนดสมรรถนะที่เป็นอสมการเมทริกซ์สามารถรวมเป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นอันเดียวได้

อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$F(x) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n > 0 \tag{2.1}$$

โดยที่ $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งไม่ทราบค่า เรียกว่า ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variable) สำหรับ $F_0, \ldots, F_n$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรซึ่งทราบค่าในขณะที่เครื่องหมาย “ $>$ ” หมายถึง บวกแน่นอน (Positive definite) กล่าวคือ ค่าที่เล็กที่สุดของค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็นบวก

สมบัติที่สำคัญของอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น คือเป็นเงื่อนไขที่คอนเวกซ์ในตัวแปร x กล่าวคือ เซต $\{x : F(x) > 0\}$ เป็นคอนเวกต์เซตซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดย สมมติว่า x และ y เป็นสมาชิกของเซตนี้ นั่นคือ $F(x) > 0$ และ $F(y) > 0$ แล้วสำหรับทุกค่าของ $0 \leq \alpha \leq 1$ จะได้ว่า

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) > 0$$

เราจะกล่าวว่าอสมการเมทริกซ์มีคำตอบหรือเป็นไปได้ (feasible) ถ้าเซต $\{x : F(x) > 0\}$ ไม่เป็นเซตว่าง ปัญหาทางด้านระบบควบคุมที่สำคัญและพบบ่อย ๆ คือการวิเคราะห์เสถียรภาพ. พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา $\dot{x} = Ax$ ระบบนี้มีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ $\rho(A) < 0$ หรือมีเมทริกซ์ $X \in \mathbb{S}^n$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขอสมการ $X > 0$ และ $A^T X + XA < 0$ นี้เป็นปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปรเมทริกซ์ X แน่นอนว่าเงื่อนไขนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปแบบอสมการ (2.1) ได้ แต่โดยทั่วไปจะนิยมแก้ปัญหาในรูปแบบตัวแปรเมทริกซ์ ดังนั้นระบบ $\dot{x} = Ax$ มีเสถียรภาพหรือ $\rho(A) < 0$ ก็ต่อเมื่อเซต $\{X \in \mathbb{S}^n : X > 0,\ A^T X + XA < 0\}$ ไม่ว่าง

เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจำนวนหลายเงื่อนไขสามารถรวมเข้าเป็นอสมการเดียวได้ สมมติว่ามี $F^1(x) > 0, \ldots, F^p(x) > 0$ เขียนใหม่ได้เป็น diag$[F^1(x), \ldots, F^p(x)] > 0$ คุณสมบัตินี้ทำให้สามารถเพิ่มเงื่อนไขหรือเพิ่มความต้องการในการออกแบบระบบควบคุมได้โดยง่าย อสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นที่มีคุณสมบัติคอนเวกซ์ในสมการที่ (2.2)

$$R(x) > 0 \quad \text{และ} \quad Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0 \tag{2.2}$$

ซึ่ง $Q(x) = Q^T(x),\ R(x) = R^T(x) > 0$ และ $S(x)$ ขึ้นอยู่กับตัวแปร x แบบเชิงเส้นเท่านั้น สามารถแปลงไปเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นโดยอาศัยส่วนเติมเต็มของชูร์ (schur complement) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{2.3}$$

เช่นอสมการเมทริกซ์กำลังสอง

$$A^TX + XA + XBR^{-1}B^TX + Q < 0$$

ซึ่ง $A,\ B,\ Q = Q^T,\ R = R^T > 0$ เป็นเมทริกซ์คงตัวที่กำหนดให้และ $X = X^T$ เป็นตัวแปรเมทริกซ์ในตัวอย่างนี้ $Q(x) = A^TX + XA + Q,\ S(x) = XB$ และ $R(x) = -R$ โดยอาศัยส่วนเติมเต็มของชูร์จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} A^TX + XA + Q & XB \\ B^TX & -R \end{bmatrix} < 0$$

อสมการเมทริกซ์ที่ได้เป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปรเมทริกซ์ X

ปัญหาอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นรูปแบบมาตรฐานมีหลายรูปแบบ แต่รูปแบบที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้มี 3 รูปแบบและปัญหาเหล่านี้ปัจจุบันสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1. ปัญหาการหาค่าที่เป็นไปได้หรือหาตัวแปรตัดสินใจภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น (LMI feasibility problem) กำหนดให้

$$F(x) > 0$$

   วัตถุประสงค์คือต้องการหาx^{feas} ซึ่งทำให้ $F(x^{\text{feas}}) > 0$ เป็นจริง. ตัวอย่างของปัญหานี้คือการแก้ปัญหาเสถียรภาพ กล่าวคือต้องการหาเมทริกซ์ $X \in \mathbb{S}^n$ ซึ่งทำให้

$$X > 0 \quad \text{และ} \quad A^TX + XA < 0$$

   ถ้ามีเมทริกซ์ X^{feas} ซึ่งสอดคล้องกับอสมการด้านบนแล้วเมทริกซ์ A มีเสถียรภาพ.

2. ปัญหาโปรแกรมกึ่งแน่นอน (semidefinite programming) ซึ่งถือว่าเป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดเชิงคอนเวกซ์ เนื่องจากเป็นการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่เป็นเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขบังคับที่ประกอบด้วยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในรูปแบบ

$$\min_x c^Tx \quad s.t. \quad F(x) > 0$$

3. ปัญหาค่าลักษณะเฉพาะแบบทั่วไป (Generalized Eigenvalue Problem) หรือ GEVP

$$\begin{aligned} \min \lambda \quad s.t. \qquad C(x) &> 0 \\ B(x) &> 0 \\ \lambda B(x) - A(x) &> 0 \end{aligned}$$

มีปัญหาอสมการเมทริกซ์จำนวนมากที่ไม่เป็นเชิงเส้นแต่มีรูปแบบเฉพาะและเมื่อกำจัดตัวแปรตัวหนึ่งออกไปสามารถเขียนเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นได้โดยอาศัยบทตั้งที่ 2.1

บทตั้ง 2.1 *[7] กำหนดเมทริกซ์ $G \in \mathbb{S}^n$, $U \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times q}$ และเมทริกซ์เหล่านี้ไม่ขึ้นอยู่กับ $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. $G + UXV^T + VX^TU^T < 0$
2. $U^\perp G U^{\perp T} < 0$ *และ* $V^\perp G V^{\perp T} < 0$
3. $G - \sigma UU^T < 0$ *และ* $G - \sigma VV^T < 0$ *สำหรับบางค่า* $\sigma \in \mathbb{R}$

โดยที่ $U^\perp = \mathcal{N}(U^T)^T$ *และ* $V^\perp = \mathcal{N}(V^T)^T$

พิจารณาตัวอย่างหนึ่งซึ่งเกิดขึ้นในวิทยานิพนธ์นี้ สมมติว่ามีกำหนดค่าของ γ แล้วอสมการเมทริกซ์

$$X > 0 \quad \text{และ} \quad AX + XA^T - \gamma X + BKX + XK^TB^T < 0 \tag{2.4}$$

ไม่เป็นเชิงเส้นในตัวแปร X และ K เราต้องการกำจัดตัวแปร K เพื่อทำให้เป็นอสมการเชิงเส้นในตัวแปร X ซึ่ง $U^\perp = B^\perp = \mathcal{N}(B^T)^T$ และ $V^\perp = X^\perp = \Theta$ เนื่องจาก X เป็นเมทริกซ์ซึ่งมีพิสัยเต็ม (full rank) จากข้อ 2. ในบทตั้งที่ 2.1 จะได้ว่า

$$X > 0 \quad \text{และ} \quad B^\perp(AX + XA^T - \gamma X)B^{\perp T} < 0 \tag{2.5}$$

ดังนั้นเราสามารถกำจัดตัวแปร K จากอสมการตอนต้นได้ หลังจากที่ทำการคำนวณเมทริกซ์ X^{feas} ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ (2.5) ได้แล้ว K สามารถคำนวณได้จากอสมการที่ (2.4) โดยแทน $X = X^{\text{feas}}$

2.3 นอร์ม $\mathcal{H}_\infty$

สำหรับระบบเชิงเส้นไม่แปรผันตามเวลา (linear time-invariant system) อธิบายโดยเมทริกซ์ถ่ายโอน $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ โดยสมมติให้ $G(s)$ มีเสถียรภาพ จะได้ว่านอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ ของระบบนิยามได้โดย [8]

$$\|G\|_\infty := \sup_\omega \|G(j\omega)\| \quad \text{โดยที่} \quad \|G(j\omega)\|^2 = \lambda_{\max}[G(j\omega)^*G(j\omega)]$$

สำหรับกรณีของระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO) นอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ ของระบบจะหมายถึงค่าสูงสุดของขนาดผลตอบสนองเชิงความถี่หรือ $\|G\|_\infty := \sup_\omega |G(j\omega)|$ ในกรณีของระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (MIMO) นอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ จะหมายถึงค่าเอกฐาน (singular value) ที่สูงที่สุดซึ่งค่าเอกฐานจะขึ้นอยู่กับความถี่ด้วย.

การคำนวณนอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ ของเมทริกซ์ถ่ายโอน $G(s)$ อีกวิธีหนึ่งสามารถทำได้โดยการคำนวณอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น กล่าวคือ $\|G\|_\infty < \mu$ ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ $P \in \mathbb{S}^n$ ซึ่งทำให้

$$P > 0 \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} A^TP + PA & PB & C^T \\ B^TP & -\mu I & D^T \\ C & D & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

2.4 การป้อนกลับสัญญาณขาออก

แนวความคิดหลัก ๆ ในวิทยาพนธ์นี้คือพยายามเขียนปัญหาตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก จากนั้นจะใช้วิธีการแก้ปัญหาของการป้อนกลับสัญญาณขาออกในการแก้ปัญหาตัวควบคุมพีไอดี. ปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกสามารถอธิบายได้โดยการพิจารณาระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time-invariant system)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.6}$$

ระบบถูกควบคุมด้วยตัวควบคุม $u = Ly$ ทำการป้อนกลับสัญญาณขาออกจะได้รับระบบวงปิด

$$\dot{x} = (A + BLC)x \tag{2.7}$$

สมมติว่าวัตถุประสงค์ของการออกแบบต้องการทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพซึ่งสมมูลกับการคำนวณเมทริกซ์ L และ $X \in \mathbb{S}^n$ ที่ทำให้อสมการเมทริกซ์

$$X > 0 \quad \text{และ} \quad (A + BLC)X + X(A + BLC)^T < 0$$

เป็นจริง. เงื่อนไขนี้ไม่เป็นเชิงเส้นในตัวแปร L และ X แต่สามารถแก้ได้โดยอาศัยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน (Dual iteration) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่ใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในทางปฏิบัติ

2.5 บทสรุป

บทนี้ได้นำเสนอคณิตศาสตร์พื้นฐานที่ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีและพูดถึงอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นรวมถึงปัญหาพื้นฐานที่จะพิจารณาในวิทยานิพนธ์นี้ ปัญหาที่เราสนใจคือปัญหาการทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพและปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ ซึ่งในบทนี้เราได้ให้นิยามของปัญหานี้และเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นสำหรับการคำนวณนอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ ของเมทริกซ์ถ่ายโอน สุดท้ายทำการทบทวนปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกเนื่องจากแนวความคิดหลัก ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้คือพยายามเปลี่ยนปัญหาตัวควบพีไอดีเป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณออก

บทที่ 3

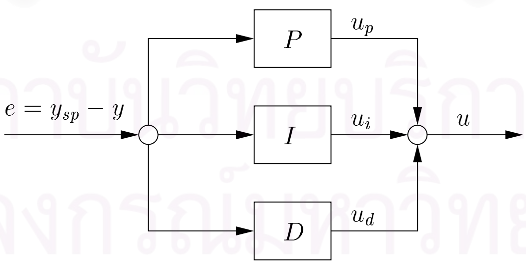
การควบคุมระบบด้วยตัวควบคุมพีไอดี

3.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงตัวควมคุมพีไอดี §3.2 สำหรับระบบที่มีหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกทั้งชนิดขนานและชนิดมีการถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิง ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี แนวความคิดหลักที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอคือพยายามเปลี่ยนปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก ดังนั้นใน §3.2.2 จะกล่าวถึงวิธีการเปลี่ยนปัญหาดังกล่าวสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก แต่วิธีการนี้สามารถขยายไปยังระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกได้ด้วยดังแสดงใน §3.3 จากนั้นเราจะนำเสนอปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ ในตอนท้ายของบท

3.2 ตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก

ตัวควบคุมชนิดพีไอดีเป็นตัวควบคุมที่นิยมใช้กันมากที่สุดในทางปฏิบัติโดยเฉพาะการควบคุมกระบวนการและมีโครงสร้างในรูปที่ 3.1 รูปแบบนี้เรียกว่าตัวควบคุมพีไอดีชนิดขนานโดยที่มีสัญญาณเข้าเป็นสัญญาณค่าความผิดพลาด e ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิง y_{sp} และสัญญาณขาออก y สัญญาณควบคุม u เป็นผลรวมของตัวควบคุมพี ไอและดี ตัวควบคุมชนิดนี้มีคุณสมบัติที่สำคัญ เช่น สามารถกำจัดค่าความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวโดยอาศัยส่วนควบคุมไอและสามารถคำนวณการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณผิดพลาดเพื่อทำการชดเชยล่วงหน้าผ่านส่วนควบคุมดี



รูปที่ 3.1: ตัวควบคุมพีไอดีชนิดขนาน

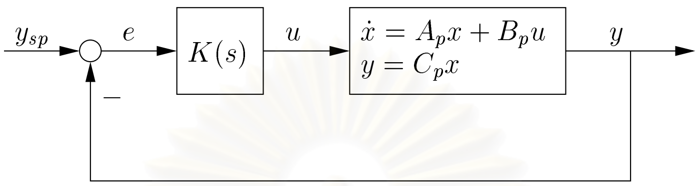
ตัวควบคุมพีไอดีในรูปที่ 3.1 เขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนได้ดังสมการ (3.1) ตัวควบคุมดีที่ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้รูปแบบที่เหมาะสม (proper form) ทำให้เราสามารถเขียนสมการสถานะของตัวควบคุมได้ และเราพบว่ามีพารามิเตอร์แค่สามตัวคือ $k_p,\ k_i$ และ k_d ที่ต้องออกแบบ ส่วน T จำเป็นต้องกำหนดค่าก่อนออกแบบ

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{Ts+1} \tag{3.1}$$

พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (linear time-invariant system) ซึ่งอธิบายโดยสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p u \\ y &= C_p x \end{aligned} \tag{3.2}$$

ระบบควบคุมป้อนกลับที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดีชนิดขนานแสดงได้ในรูปที่ 3.2

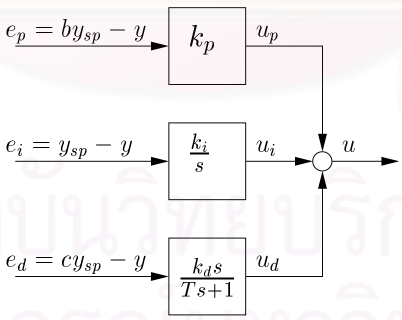


รูปที่ 3.2: ระบบควบคุมป้อนกลับพีไอดีชนิดขนาน

วัตถุประสงค์คือต้องการคำนวนค่า $k_p,\ k_i$ และ k_d ซึ่งทำให้ระบบควบคุมมีเสถียรภาพและมีสมรรถนะตามต้องการ โดยทั่วไปเรามีความต้องการหลายอย่างเช่น ผลตอบสนองชั่วครู่ที่ดี สามารถกำจัดค่าความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวและสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนโหลดได้ในเวลาเดียวกันตัวควบคุมในสมการที่ (3.1) จะต้องตอบสนองความต้องการเหล่านี้โดยคำนวณจากสัญญาณความผิดพลาด e

3.2.1 ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิง

โครงสร้างของพีไอดีแบบนี้มีความยืดหยุ่นสูงกว่าที่ผ่านมา โดยการจัดการผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณรบกวนโหลดแยกจากกันตัวควบคุมพีไอดีชนิดนี้ [9]มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3: ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิง

เราพบว่าสัญญาณควบคุมซึ่งเป็นผลรวมของสัญญาณออกของตัวควบคุมพี ไอ และดีเขียนได้ดังนี้

$$u = k_p e_p + \frac{k_i}{s} e_i + \frac{k_d s}{Ts+1} e_d \tag{3.3}$$

ข้อสังเกตคือค่าความผิดพลาดของแต่ละตัวควบคุมมีนิยามที่แตกต่างกัน โดยค่าความผิดพลาดในส่วนของตัวควบคุมพีคือ

$$e_p = by_{sp} - y, \quad 0 \le b \le 1 \tag{3.4}$$

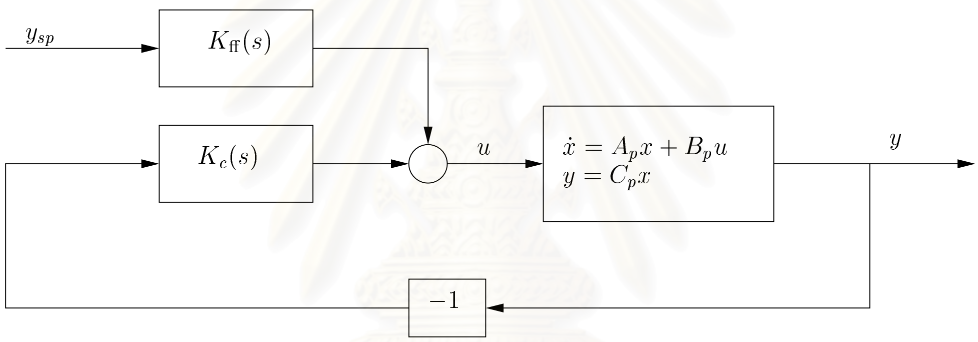
และค่าความผิดพลาดในส่วนตัวควบคุมดีคือ

$$e_d = cy_{sp} - y, \quad 0 \leq c \leq 1 \tag{3.5}$$

ค่าความผิดพลาดในส่วนตัวควบคุมไอจำเป็นจะต้องเป็นค่าที่แท้จริง

$$e_i = y_{sp} - y \tag{3.6}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัว ผลตอบสนองของระบบซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีที่มีค่าของ $k_p,\ k_i$ และ k_d ค่าเดียวกัน แต่ b และ c ต่างกันจะให้ผลตอบสนองต่อสัญญาณรบกวนโหลดเหมือนกัน แต่ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงแตกต่างกัน โดยทั่วไป c จะถูกกำหนดให้เป็น 0 เพื่อหลีกเลี่ยงการกระแทก (bumps) ในสัญญาณควบคุม ส่วน b ถ้ากำหนดให้เป็น 1 ผลตอบสนองจะมีค่าพุ่งเกินสูงสุดและถ้า b มีค่าเป็น 0 ให้ผลตอบสนองมีค่าพุ่งเกินต่ำสุด ดังนั้นเราสามารถปรับจูนค่าของ b เพื่อปรับปรุงผลตอบสนองสัญญาณอ้างอิงโดยไม่กระทบต่อผลตอบสนองสัญญาณรบกวนโหลด



รูปที่ 3.4: ระบบควบคุมป้อนกลับโดยใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนัก

สังเกตว่าแผ่นภาพกรอบในรูปที่ 3.2 ซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีในสมการที่ (3.1) สัญญาณควบคุม u ถูกคำนวณโดยอาศัยสัญญาณผิดพลาด e ไม่เป็นจริงสำหรับสัญญาณควบคุม u ที่นิยามโดยสมการที่ (3.3) และสัญญาณผิดพลาดถูกนิยามโดยสมการที่ (3.4) และ (3.5) ตามลำดับ ระบบควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก (SISO linear time-invariant system) ซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักแสดงในรูปที่ (3.9) ฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณอ้างอิง y_{sp} ไปยังสัญญาณควบคุม u เขียนได้โดย

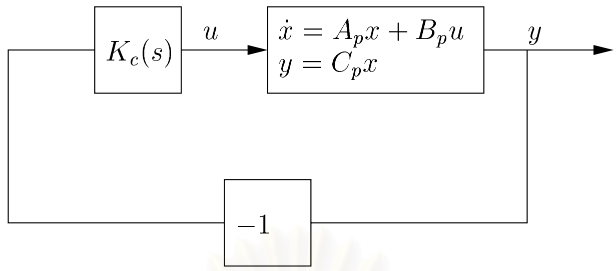
$$K_{\mathrm{ff}}(s) = bk_p + \frac{k_i}{s} + \frac{ck_d s}{Ts+1} \tag{3.7}$$

และฟังก์ชันถ่ายโอนจากสัญญาณขาออก y ไปยังสัญญาณควบคุม u

$$K_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{Ts+1} \tag{3.8}$$

สังเกตว่าฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมทั้งสองแตกต่างกันและการออกแบบอิสระต่อกัน สำหรับการออกแบบตัวควบคุม $K_c(s)$ เป็นจุดประสงค์หลักในวิทยานิพนธ์นี้ ส่วนตัวควบคุม $K_{ff}(s)$ ออกแบบหลังจากได้รับตัวควบคุม $K_c(s)$ แล้วโดยการปรับจูนค่าของ b และ c เพื่อปรับปรุงผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิง

3.2.2 การออกแบบพีไอดีในรูปแบบปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก

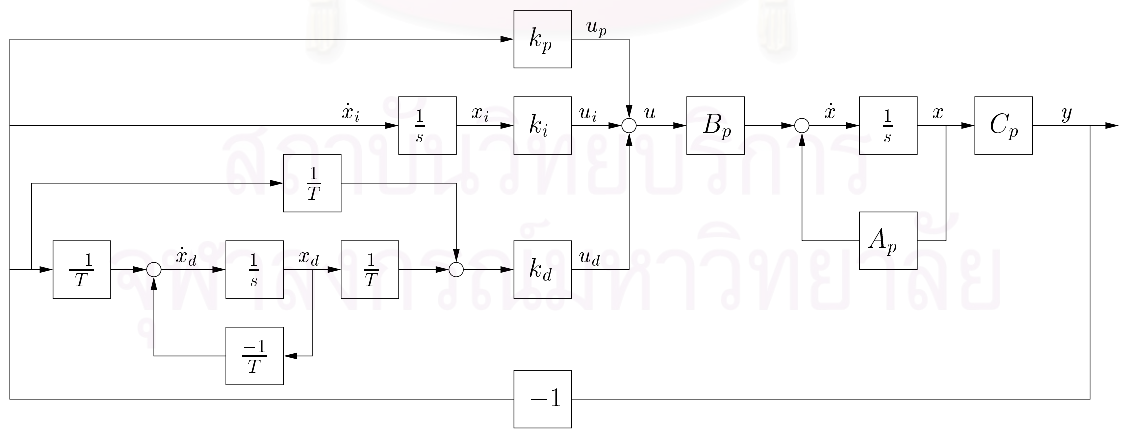


รูปที่ 3.5: รูปแบบการควบคุมสำหรับ $K_c(s)$

เราทราบจากหัวข้อที่ผ่านมาแล้วว่าการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสามารถทำได้โดยการคำนวณพารามิเตอร์ของ $K_c(s)$ จากนั้นทำการปรับจูนค่าพารามิเตอร์ b และ c ในฟังก์ชันถ่ายโอน $K_{ff}(s)$ เพื่อให้ได้ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงตามที่ต้องการ วิทยานิพนธ์เล่มนี้มุ่งที่จะคำนวณพารามิเตอร์ของฟังก์ชันถ่ายโอน $K_c(s)$ ระบบควบคุมในส่วนนี้แสดงในรูปที่ 3.5 ตอนนี้เราจะทำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพ โดยมีแนวความคิดหลัก ๆ คือพยายามเปลี่ยนปัญหาตัวควบคุมพีไอดีไปเป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก สังเกตว่าฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมดีสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสม (proper form) ได้ดังนี้

$$\frac{k_d s}{Ts+1} = \frac{k_d}{T} - \frac{k_d/T^2}{s+1/T} \tag{3.9}$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์นี้เราสามารถนิยามตัวแปรสถานะสำหรับตัวควบคุมไอและดีในรูปที่ 3.6 เพื่อเขียนสมการสถานะของระบบโดยรวม



รูปที่ 3.6: การนิยามตัวแปรสถานะสำหรับตัวควบคุม

ตัวควบคุมไอมีตัวแปรสถานะ x_i และสัญญาณขาออก u_i ดังนั้นในส่วนนี้สมการสถานะเขียนได้คือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -C_p x && (3.10) \\ u_i &= k_i x_i && (3.11) \end{aligned}$$

ในส่วนของตัวควบคุมดีตัวแปรสถานะคือ x_d และสัญญาณออก u_d สมการสถานะของส่วนนี้คือ

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= \frac{C_p}{T}x - \frac{1}{T}x_d && (3.12) \\ u_d &= -\frac{k_d}{T}C_p x + \frac{k_d}{T}x_d && (3.13) \end{aligned}$$

สำหรับ x นั้นเป็นตัวแปรสถานะของระบบเดิม เพื่อที่จะเขียนสมการสถานะของระบบโดยรวมเรา จะนิยาม $\tilde{x} = [x^T \ x_i^T \ x_d^T]^T$ และจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_i} \\ \dot{x_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ -C_p & 0 & 0 \\ \frac{C_p}{T} & 0 & \frac{-1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{3.14}$$

หรือ

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu \tag{3.15}$$

สัญญาณขาออกของตัวควบคุมพี ไอ และ ดี

$$\begin{aligned} u_p &= -k_p C_p x && (3.16) \\ u_i &= k_i x_i && (3.17) \\ u_d &= -\frac{k_d C_p}{T}x + \frac{k_d}{T}x_d && (3.18) \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $u = u_p + u_i + u_d$ ทำให้ได้สัญญาณควบคุมเป็น

$$\begin{aligned} u &= -k_p C_p x + k_i x_i - \frac{k_d C_p}{T}x + \frac{k_d}{T}x_d && (3.19) \\ &= \begin{bmatrix} k_p & k_i & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{C_p}{T} & 0 & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} && (3.20) \end{aligned}$$

หรือ

$$u = LC\tilde{x} \tag{3.21}$$

โดยที่ $L = \begin{bmatrix} k_p & k_i & k_d \end{bmatrix}$ และ $\tilde{y} = C\tilde{x}$ ตอนนี้เราจะได้สมการสถานะของระบบโดยรวมและสัญญาณควบคุมดังนี้

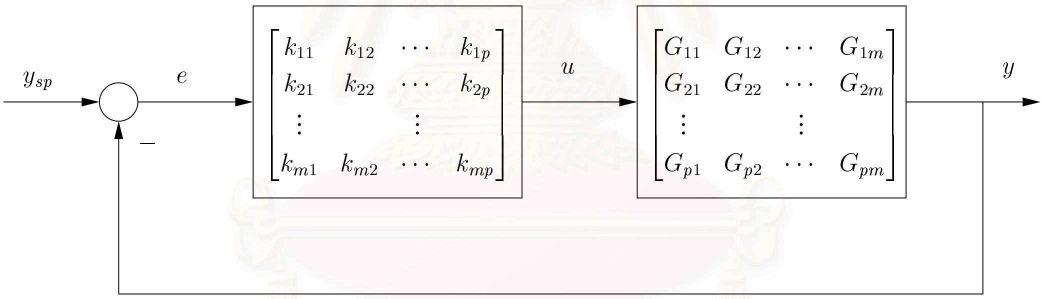
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu && (3.22) \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} && (3.23) \\ u &= L\tilde{y} && (3.24) \end{aligned}$$

สังเกตว่าระบบใหม่ที่ได้นั้นจริง ๆ แล้วเป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกนั่นเอง ซึ่งหมายความว่าเราสามารถนำเสนอปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกได้ การแก้ปัญหานี้สำหรับข้อกำหนดเสถียรภาพคือต้องการคำนวณเมทริกซ์ L เพื่อทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพซึ่งนำไปสู่อสมการเมทริกซ์กล่าวคือระบบวงปิดจะมีเสถียรภาพหรือ $\rho(A + BLC) < 0$ ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ L และ $X > 0$ ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์

$$(A + BLC)X + X(A + BLC)^T < 0 \tag{3.25}$$

เมื่อเราคำนวณเมทริกซ์ L ได้แล้วก็จะได้พารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีตามที่ต้องการ สังเกตด้วยว่าเงื่อนไขการออกแบบไม่เป็นเชิงเส้นในตัวแปร L และ X เพราะมีพจน์ที่คูณกันระหว่างตัวแปรเหล่านี้ดังนั้นการแก้ปัญหานี้โดยตรงทำได้ไม่ง่ายนัก วิธีหนึ่งสำหรับการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นคือการใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำเฉพาะที่ (local algorithm) ซึ่งมีอยู่มากมายแต่ทั้งหมดไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง (global solution) ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน (dual iteration) ซึ่งเป็นวิธีเฉพาะที่เช่นเดียวกัน แต่จากการทดลองพบว่าระเบียบวิธีนี้มีอัตราการลู่เข้าค่อนข้างสูง

3.3 ตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก



รูปที่ 3.7: ระบบควบคุมหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในหัวข้อที่ผ่านมาหรือวิธีทั่ว ๆ ไปนั้นส่วนใหญ่ใช้ได้เพียงแค่กับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกเท่านั้น ในหัวข้อนี้เราจะนำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีสัญญาณเข้าเท่ากับ m และสัญญาณออกเท่ากับ p ซึ่งระบบควบคุมดังกล่าวอธิบายได้ในรูปที่ (3.7) โดยที่ $k_{ij} = k_p^{ij} + \frac{k_i^{ij}}{s} + \frac{k_d^{ij}s}{T^{ij}s+1}$ สัญญาณควบคุมของตัวควบคุมนี้เขียนได้โดยสมการที่ (3.26) โดยกำหนดให้ $u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^T$ และ $e = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}^T$

$$u = \begin{bmatrix} k_p^{11} & k_p^{12} & \cdots & k_p^{1p} \\ k_p^{21} & k_p^{22} & \cdots & k_p^{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_p^{m1} & k_p^{m2} & \cdots & k_p^{mp} \end{bmatrix} e + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} k_i^{11} & k_i^{12} & \cdots & k_i^{1p} \\ k_i^{21} & k_i^{22} & \cdots & k_i^{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_i^{m1} & k_i^{m2} & \cdots & k_i^{mp} \end{bmatrix} e + \frac{s}{Ts+1} \begin{bmatrix} k_d^{11} & k_d^{12} & \cdots & k_d^{1p} \\ k_d^{21} & k_d^{22} & \cdots & k_d^{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_d^{m1} & k_d^{m2} & \cdots & k_d^{mp} \end{bmatrix} e$$

หรือ

$$u = K_p e + \frac{K_i}{s} e + K_d s (Ts+1)^{-1} e \tag{3.26}$$

และค่าความผิดพลาดนิยามโดย

$$e = y_{sp} - y \tag{3.27}$$

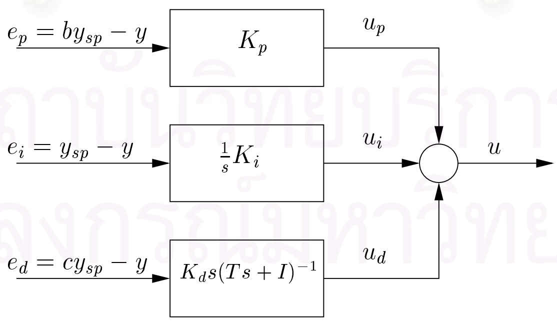
สำหรับกรณีนี้ T จะต้องเป็นสเกลาร์ นี้หมายความว่าตัวควบคุมแบบดีทุกตัวมีค่า T เท่ากันนั่นเอง แต่สำหรับกรณีที่สัญญาณเข้าเท่ากับสัญญาณออก T สามารถกำหนดให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมซึ่งจะได้สัญญาณควบคุมเป็น

$$u = K_p e + \frac{K_i}{s} e + K_d s (Ts+I)^{-1} e \tag{3.28}$$

สังเกตว่าตัวควบคุมในสมการ (3.28) มีโครงสร้างที่ง่ายต่อการเขียนโปรแกรม เนื่องจากปัจจุบันตัวควบคุมถูกสร้างขึ้นด้วยไมโครโพรเซสเซอร์หรือไมโครคอนโทรเลอร์แทบทั้งสิ้น สัญญาณควบคุมเป็นผลรวมของแต่ละตัวควบคุมพี ไอ และ ดี e เป็นสัญญาณความผิดพลาดซึ่งเป็นผลต่างระหว่างสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณขาออกเมทริกซ์ K_p, K_i และ K_d เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการคำนวณค่า ส่วนเมทริกซ์ทแยงมุม T จำเป็นต้องกำหนดค่าไว้ล่วงหน้า วัตถุประสงค์คือต้องการคำนวณค่าเมทริกซ์ K_p, K_i และ K_d ซึ่งทำให้ระบบควบคุมมีสมรรถนะตามต้องการ โดยทั่วไปมีความต้องการหลายอย่างเช่น ผลตอบสนองชั่วครู่ที่ดี สามารถกำจัดค่าความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัวและสามารถกำจัดสัญญาณรบกวนโหลดได้ในเวลาเดียวกัน ในสมการที่ (3.28) ตัวควบคุมจะต้องตอบสนองความต้องการเหล่านี้โดยคำนวณจากสัญญาณความผิดพลาด e

3.3.1 ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก

เช่นเดียวกับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกเราจะใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงในการออกแบบซึ่งตัวควบคุมพีไอดีชนิดนี้แสดงในรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8: ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิง

สัญญาณควบคุมเป็นผลรวมของตัวควบคุมพี ไอ และดี เขียนได้ดังนี้

$$u = K_p e_p + \frac{K_i}{s} e_i + K_d s (Ts+I)^{-1} e_d \tag{3.29}$$

ค่าความผิดพลาดในส่วนของตัวควบคุมแบบพีคือ

$$e_p = by_{sp} - y \tag{3.30}$$

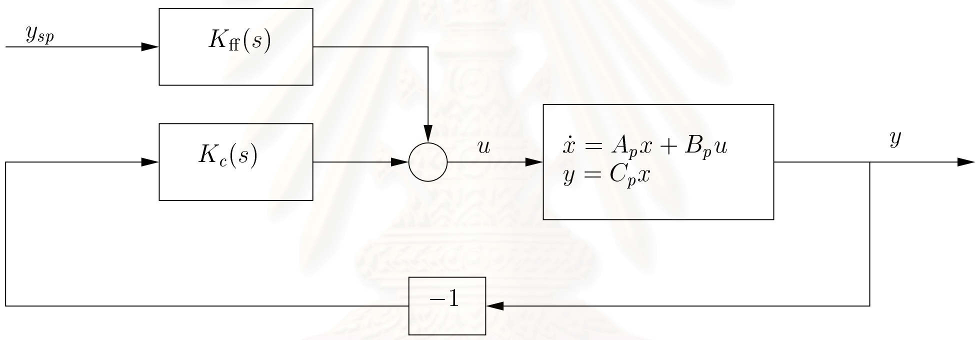
โดยที่ $b = \text{diag}\,[b_1\ b_2\ \cdots\ b_p],\quad 0 \le b_i \le 1$ และค่าความผิดพลาดในส่วนตัวควบคุมแบบดีคือ

$$e_d = cy_{sp} - y \tag{3.31}$$

เช่นเดียวกัน $c = \text{diag}\,[c_1\ c_2\ \cdots\ c_p],\quad 0 \le c_i \le 1$ ค่าความผิดพลาดในส่วนตัวควบคุมแบบไอจำเป็นจะต้องเป็นค่าที่แท้จริง

$$e_i = y_{sp} - y \tag{3.32}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงความผิดพลาดที่สถานะอยู่ตัว ระบบควบคุมสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก (MIMO linear time-invariant system) ซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักแสดงในรูปที่ 3.9 เมทริกซ์ถ่ายโอนจากสัญญาณอ้างอิง y_{sp} ไปยังสัญญาณควบคุม u เขียนได้โดย



รูปที่ 3.9: รูปแบบการควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนัก

$$K_{ff}(s) = bK_p + \frac{K_i}{s} + cK_d s(Ts + I)^{-1} \tag{3.33}$$

และสามารถเขียนเมทริกซ์ถ่ายโอนจากสัญญาณขาออก y ไปยังสัญญาณควบคุม u ได้โดย

$$K_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s(Ts + I)^{-1} \tag{3.34}$$

สังเกตว่าเมทริกซ์ถ่ายโอนของตัวควบคุมทั้งสองแตกต่างกันและการออกแบบอิสระต่อกัน สำหรับการออกแบบตัวควบคุม $K_c(s)$ เป็นจุดประสงค์หลักในวิทยานิพนธ์นี้ ส่วนตัวควบคุม $K_{ff}(s)$ ออกแบบหลังจากได้รับตัวควบคุม $K_c(s)$ โดยการปรับจูนค่าของเมทริกซ์ b และ c เพื่อปรับปรุงผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิง

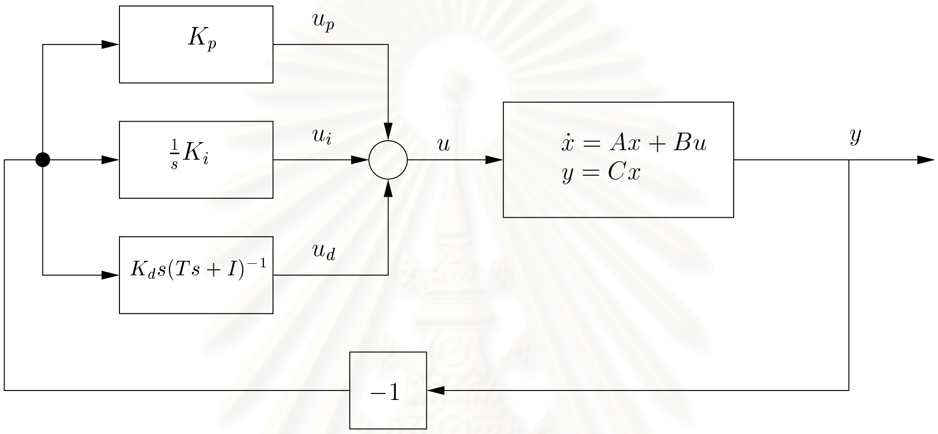
3.3.2 การออกแบบพีไอดีในรูปแบบปัญหาการป้อนกลับสัญญาณออก

การออกแบบระบบควบคุมด้วยตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักในรูปที่ (3.9) สามารถแยกออกเป็นสองตัวควบคุมซึ่งมีเมทริกซ์ถ่ายโอน $K_{ff}(s)$ และ $K_c(s)$ การออกแบบสามารถทำได้โดยอิสระต่อกัน ตอนนี้จะนำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุม $K_c(s)$ โดยอาศัยแนวความคิดหลัก ๆ คือพยายามนำเสนอปัญหาการ

ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก พิจารณาระบบเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (linear time-invariant system) อธิบายโดย

$$\dot{x} = A_p x + B_p u, \quad y = C_p x \tag{3.35}$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ เป็นตัวแปรสถานะ $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ เป็นสัญญาณควบคุมและ $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ เป็นสัญญาณออกสำหรับเมทริกซ์ A_p, B_p และ C_p คือเมทริกซ์พลวัต ทำการออกแบบตัวควบคุม $K_c(s)$ สำหรับระบบดังกล่าวซึ่งสามารถแสดงได้ในรูปที่ (3.10) และมีเมทริกซ์ถ่ายโอน



รูปที่ 3.10: ระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุม $K_c(s)$

$$K_c(s) = K_p + \frac{1}{s}K_i + K_d s(Ts+1)^{-1} \tag{3.36}$$

โดยที่ K_p, K_i และ K_d เป็นเมทริกซ์ที่ต้องคำนวณค่าและเมทริกซ์ T ซึ่งเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมหลักจะต้องกำหนดค่าก่อนการออกแบบ สังเกตว่าพจน์ $s(Ts+I)^{-1}$ ในเมทริกซ์ถ่ายโอนของส่วนควบคุมดีสามารถเขียนใหม่ได้โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$(A_1 + A_2)^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1}A_2(A_1^{-1}A_2 + I)^{-1}A_1^{-1} \tag{3.37}$$

กล่าวคือ

$$s(Ts+I)^{-1} = s(sI + T^{-1})^{-1}T^{-1} \tag{3.38}$$

ตอนนี้เราพิจารณาเฉพาะพจน์ $(sI + T^{-1})^{-1}$ เมื่อเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.37) โดยที่ $A_1 = sI$ และ $A_2 = T^{-1}$ ก็จะได้ว่า

$$(sI + T^{-1})^{-1} = s^{-1}I - s^{-1}T^{-1}(s^{-1}T^{-1} + I)^{-1}s^{-1} \tag{3.39}$$

แทนสมการที่ (3.39) ในสมการที่ (3.38) นำไปสู่

$$s(Ts+I)^{-1} = T^{-1} - T^{-1}(sI + T^{-1})^{-1}T^{-1} \tag{3.40}$$

สุดท้ายเราอาศัยสมการที่ (3.40) ระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมในสมการที่ (3.36) เขียนใหม่ได้ในรูปที่ 3.11 เพื่อที่จะเขียนสมการสถานะของระบบวงปิด จำเป็นต้องนิยามตัวแปรสถานะเพิ่มเติมดังในรูปที่ 3.11 และเขียนสมการสถานะสำหรับตัวควบคุมไอและดี โดยการนิยามตัวแปรสถานะ x_i สำหรับตัวควบคุมไอซึ่งมีสัญญาณออกเป็น u_i จะได้ว่า

$$\dot{x}_i = -C_p x \quad (3.41)$$

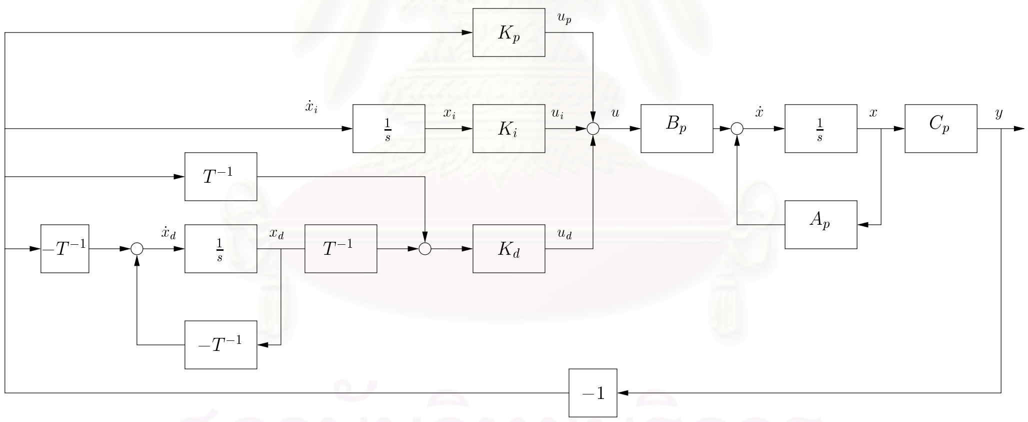
$$u_i = K_i x_i \quad (3.42)$$

และนิยามตัวแปรสถานะ x_d สำหรับตัวควบคุมดีซึ่งมีสัญญาณออกเป็น u_d ได้รับสมการสถานะของส่วนควบคุมนี้คือ

$$\dot{x}_d = T^{-1}C_p x - T^{-1}x_d \quad (3.43)$$

$$u_d = -K_d T^{-1}C_p x + K_d T^{-1}x_d \quad (3.44)$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรสถานะของระบบเดิม ดังนั้นระบบโดยรวมสามารถเขียนเป็นระบบใหม่โดยใช้ตัวแปรสถานะเหล่านี้เพื่อให้ได้สมการสถานะของระบบโดยรวม ดังนั้นเราสามารถเขียนระบบใหม่ซึ่งรวมสมการสถานะของตัวควบคุมเข้าไว้ด้วยกันได้โดย



รูปที่ 3.11: การนิยามตัวแปรสถานะของระบบ

ทำการนิยามตัวแปรสถานะ $\tilde{x} = [x^T x_i^T x_d^T]^T$ ซึ่งได้รับระบบใหม่ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_i} \\ \dot{x_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ -C_p & 0 & 0 \\ T^{-1}C_p & 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.45)$$

หรือ

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu \quad (3.46)$$

สัญญาณขาออกของตัวควบคุมพี ไอ และ ดี

$$u_p = -K_p C_p x \tag{3.47}$$

$$u_i = K_i x_i \tag{3.48}$$

$$u_d = -K_d T^{-1} C_p x + K_d T^{-1} x_d \tag{3.49}$$

และเนื่องจาก $u = u_p + u_i + u_d$ ทำให้ได้สัญญาณควบคุมเป็น

$$u = -K_p C_p x + K_i x_i - K_d T^{-1} C_p x + K_d T^{-1} x_d \tag{3.50}$$

$$= \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_p & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -T^{-1}C_p & 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

หรือ

$$u = LC\tilde{x} \tag{3.52}$$

แทนสมการ (3.52) ในสมการ (3.46) จะได้ระบบควบคุมวงปิดคือ

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + BLC\tilde{x} \\ &= (A + BLC)\tilde{x} \end{aligned} \tag{3.53}$$

ดังนั้นปัญหาการคำนวณค่าเมทริกซ์ K_p, K_i และ K_d เพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพสามารถเขียนเป็นปัญหาการคำนวณค่าเมทริกซ์ L ซึ่งทำให้ $\rho(A + BLC) < 0$ ปัญหานี้เป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณออกนั่นเอง ดังนั้นปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสามารถนำเสนอได้ในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีโดยอาศัยวิธีนี้ทำให้เราออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีมากกว่าหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกได้ อย่างไรก็ตามเงื่อนไขสำหรับการออกแบบนำไปสู่ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นกล่าวคือ

$$X > 0 \quad \text{และ} \quad (A + BLC)X + X(A + BLC)^T < 0 \tag{3.54}$$

ดังนั้นถ้าเราสามารถหาเมทริกซ์ L และ $X \in \mathbb{S}^n$ ที่สอดคล้องกับอสมการเมทริกซ์ข้างต้นได้ก็หมายความว่าเราสามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้นั่นเอง แต่ปัจจุบันยังไม่มีวิธีทั่วไปในการแก้ปัญหานี้ แต่มีหลายขั้นตอนวิธีเฉพาะที่ซึ่งสามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในทางปฏิบัติ ในวิทยานิพนธ์ใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในบทต่อไป

3.4 การออกแบบพีไอดีตามข้อกำหนด $\mathcal{H}_\infty$

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการออกแบบระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีโดยวัตถุประสงค์การออกแบบคือต้องการให้ระบบมีสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ในบางครั้งนอกเหนือจากการทำให้ระบบมีเสถียรภาพแล้วเราต้องการให้ระบบมีสมรรถนะอื่น ๆ ด้วย พิจารณาระบบซึ่งอธิบายโดยสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_{p1} w + B_{p2} u \\ z &= C_{p1} x \\ y &= C_{p2} x \end{aligned} \tag{3.55}$$

โดยที่ $x \in \mathbb{R}^n$ เป็นตัวแปรสถานะ $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ เป็นสัญญาณควบคุม $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ เป็นสัญญาณรบกวนขาเข้า สัญญาณอ้างอิงสามารถพิจารณาเป็น w ได้เช่นกัน $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ เป็นสัญญาณออก และ $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ คือสัญญาณสมรรถนะขาออกที่เราสนใจส่วนเมทริกซ์ $A_p, B_{p1}, B_{p2}, C_{p1}$ และ C_{p2} คือเมทริกซ์พลวัต ระบบดังกล่าวถูกควบคุมด้วยตัวควบคุมพีไอดีในสมการที่ (3.36) เราสามารถออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบนี้ได้เช่นเดียวกับปัญหาการทำให้มีเสถียรภาพ ปัญหานี้สามารถนำเสนอในฐานะการป้อนกลับสัญญาณขาออกโดยการนิยามตัวแปรสถานะ x_i สำหรับส่วนควบคุมพีและ x_d สำหรับส่วนควบคุมดีจะได้ระบบใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_i} \\ \dot{x_d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ -C_{p2} & 0 & 0 \\ T^{-1}C_{p2} & 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{p2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \tilde{z} &= \begin{bmatrix} C_{p1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} \\ \tilde{y} &= \begin{bmatrix} -C_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -T^{-1}C_{p2} & 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} \\ u &= \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix} \tilde{y} \end{aligned} \tag{3.56}$$

ทำการนิยามตัวแปรสถานะ $\tilde{x} = [x^T x_i^T x_d^T]^T$ ซึ่งได้รับระบบใหม่ดังนี้

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1 w + B_2 u \tag{3.57}$$

$$\tilde{z} = C_1 \tilde{x} \tag{3.58}$$

$$\tilde{y} = C_2 \tilde{x} \tag{3.59}$$

$$u = L\tilde{y} \tag{3.60}$$

ระบบใหม่ที่ได้เป็นปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก ดังนั้นเราสามารถนำเสนอปัญหาตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกได้ แทนสมการที่ (3.60) ซึ่งเป็นสัญญาณควบคุมของระบบใหม่

ในสมการที่ (3.57) จะได้รับระบบวงปิดคือ

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A + B_2 L C_2)\tilde{x} + B_1 w \\ \tilde{z} &= C_1 \tilde{x} \end{aligned} \tag{3.61}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_{cl}\tilde{x} + B_1 w \\ \tilde{z} &= C_1 \tilde{x} \end{aligned} \tag{3.62}$$

วัตถุประสงค์ในการออกแบบระบบนี้คือต้องการคำนวณเมทริกซ์ L ซึ่งสมาชิกของเมทริกซ์นี้เป็นพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดี ซึ่งทำให้ $\|T_{\tilde{z}w}\|_\infty < \mu$ โดยที่ $T_{\tilde{z}w} = C_1(sI - A_{cl})^{-1}B_1$ เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนจาก w ไป $\tilde{z}$ และ μ เป็นสเกลาร์ที่มากกว่าศูนย์ การคำนวณเมทริกซ์ทำได้โดยอาศัยบทตั้งที่ 3.1

บทตั้ง 3.1 *เมื่อกำหนดสเกลาร์ $\mu > 0$ และเมทริกซ์ถ่ายโอน $T_{\tilde{z}w}(s) = C_1(sI - A_{cl})^{-1}B_1$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นเท่ากับศูนย์แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *ระบบมีเสถียรภาพ*
2. $\|T_{\tilde{z}w}\|_\infty < \mu$
3. *มีเมทริกซ์ L และเมทริกซ์สมมาตร์ $X > 0$ ซึ่งทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง*

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 L C_2)X + X(A + B_2 L C_2)^T & X C_1^T & B_1 \\ C_1 X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.63}$$

ดังนั้นเราสามารถใช้บทตั้งนี้ในการคำนวณเมทริกซ์ L ที่ต้องการสำหรับระบบวงปิดในสมการที่ (3.61) โชคไม่ดีอสมการนี้ไม่เป็นเชิงเส้นในตัวแปร L และ X ดังนั้นในการแก้ปัญหานี้จะต้องอาศัยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันในบทต่อไปและเมื่อเราสามารถแก้อสมการที่ (3.63) ได้ก็จะนำไปสู่พารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีโดย $L = \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix}$

3.5 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ได้กล่าวถึงตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาทั้งชนิดหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกและได้ขยายแนวความคิดไปยังชนิดหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกทั้งชนิดขนานและชนิดถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงซึ่งอันหลังจะมีความยืดหยุ่นกว่ากล่าวคือสามารถปรับจูนค่าพารามิเตอร์บางตัวเพื่อปรับปรุงผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงโดยไม่กระทบต่อผลตอบสนองสัญญาณรบกวนโหลด เราได้แสดงให้เห็นว่าระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีสามารถนำเสนอในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกได้ทั้งปัญหาการทำให้ระบบมีเสถียรภาพและปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ นี่หมายความว่าเราสามารถใช้ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี และพบว่าเงื่อนไขการออกแบบสำหรับปัญหานี้นำไปสู่เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นซึ่งเราจะนำเสนอการแก้ปัญหาเหล่านี้โดยอาศัยวิธีการทำซ้ำในบทต่อไป

บทที่ 4

ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน

4.1 บทนำ

การแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นซึ่งเกิดขึ้นในการออกแบบตัวควบคุมที่มีการกำหนดโครงสร้างไว้ล่วงหน้า เช่นตัวควบคุมพีไอดี ปัญหานี้ยังไม่สามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในปัจจุบันแต่โดยอาศัยขั้นตอนวิธีเฉพาะที่ซึ่งมีอยู่มากมายปัญหานี้สามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในทางปฏิบัติ

เนื้อหาในบทนี้ประกอบไปด้วย §4.2 นำเสนอวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหาการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ ในขั้นตอนวิธีเฉพาะที่การลู่เข้าสู่คำตอบขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น ดังนั้นใน §4.3 เราจะนำเสนอวิธีการคำนวณค่าเริ่มต้นสำหรับวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน สุดท้ายเสนอวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ ผลส่วนใหญ่ในบทนี้ถูกนำเสนอไว้แล้วใน [5, 4]

4.2 วิธีทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับตัวควบคุมกำหนดอันดับได้

ในการออกแบบตัวควบคุมซึ่งจำกัดอันดับ เงื่อนไขที่ใช้สำหรับการออกแบบเป็นอสมการเมทริกซ์ไม่คอนเวกซ์ทำให้ยาก ที่จะหาคำตอบ มีหลายขั้นตอนวิธีเฉพาะที่ (local algorithm) สำหรับแก้ปัญหาดังกล่าว แต่ไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบวงกว้าง สำหรับวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันเป็นขั้นตอนวิธีเฉพาะที่ [5] อีกวิธีหนึ่ง โดยอาศัยอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในการหาคำตอบสำหรับปัญหา การทำให้มีเสถียรภาพ ระบบควบคุมซึ่งใช้ตัวควบคุมพีไอดีมีสมการสถานะและสมการขาออกของระบบวงปิดในสมการที่ (3.61) ระบบจะมีเสถียรภาพก็ต่อเมื่อ $\rho(A + BLC) < 0$ ซึ่งสมมูลกับ

$$(A + BLC)X + X(A + BLC)^T < 0$$

เงื่อนไขการออกแบบที่ได้เป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นในตัวแปร X และ L ซึ่งสามารถแก้ได้โดยอาศัยวิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน ขั้นตอนวิธีสำหรับการทำซ้ำแบบคู่กันตั้งอยู่บนพื้นฐานของบทตั้งที่ 4.1

บทตั้ง 4.1 *[5] เมื่อกำหนดค่าสเกลาร์ γ และเมทริกซ์ A, B และ C ให้ ข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน*

1. *มีเมทริกซ์ L ซึ่งทำให้*
$$\rho(A + BLC) < \frac{\gamma}{2}$$

2. *มี K, F และ $X = X^T > 0$ ซึ่งทำให้*
$$(A + BK)X + X(A + BK)^T < \gamma X \tag{4.1}$$
$$(A + FC)X + X(A + FC)^T < \gamma X \tag{4.2}$$

โดยที่ $\frac{\gamma}{2}$ หมายถึงส่วนจริงของค่าลักษณะเฉพาะที่มากที่สุด ดังนั้นเมื่อ $\gamma = 0$ เงื่อนไข (4.1) และ (4.2) เป็นเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับการทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้โดยอาศัยการป้อนกลับสัญญาณขาออก เงื่อนไข (4.1) และ (4.2) เมื่อ $\gamma = 0$ มีความหมายว่าระบบสามารถทำให้มีเสถียรภาพได้โดยการป้อนกลับสัญญาณขาออกก็ต่อเมื่อมีอัตราการขยายป้อนกลับสถานะ K อัตราการขยายสังเกต F ซึ่งทำให้ระบบวงปิดมีค่า X ร่วมกัน อัตราการขยาย L ในบทตั้ง 4.1 อาจหาได้โดยการหาค่าต่ำสุดของ γ ภายใต้เงื่อนไข (4.1) และ (4.2) โดย γ, X, K และ F เป็นตัวแปร ซึ่งระบบสามารถทำให้มีเสถียรภาพได้โดยอาศัยการป้อนกลับสัญญาณขาออกก็ต่อเมื่อ ค่าต่ำสุดของ $\gamma^* < 0$ ในกรณีนี้อัตราการขยาย L สามารถคำนวณได้โดยการแก้อสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

$$(A + BLC)X + X(A + BLC)^T < \gamma X \tag{4.3}$$

ซึ่ง $\gamma^* < \gamma < 0$ บทตั้ง 4.1 รับประกันว่ามีอัตราการขยาย L ที่สอดคล้องกับอสมการ (4.3) ปัญหาการหาค่าต่ำสุดของ γ ภายใต้เงื่อนไข (4.1) และ (4.2)

$$\gamma^* = \min_{K,F} \phi(K, F) \tag{4.4}$$

โดยตรงนั้นทำได้ไม่ง่ายนัก เนื่องจาก K, F และ X เป็นตัวแปรทั้งหมด ปัญหานี้จึงกลายเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น วิธีการแก้คือกำหนดค่าให้กับตัวแปร ตัวหนึ่งแล้วทำการหาค่าต่ำสุดของ γ เทียบกับตัวแปรอีกตัวหนึ่งและมีขั้นตอนวิธีดังนี้

1. เลือกค่าเริ่มต้นใด ๆ K_0 และให้ $k = 1$
2. หาค่าต่ำสุดของ $\phi(K_{k-1}, F)$ และให้ค่า F ซึ่งทำให้เกิดค่าต่ำสุดเป็น F_k
3. หาค่าต่ำสุดของ $\phi(K, F_k)$ และให้ค่า K ซึ่งทำให้เกิดค่าต่ำสุดเป็น K_k
4. ให้ $k = k + 1$ และทำซ้ำขั้นตอนที่ 2

วิธีการหาค่าต่ำสุดของ $\phi(K, F)$ เทียบกับตัวแปรตัวหนึ่งขณะที่ระบุค่าของอีกตัวแปรหนึ่งทำได้โดยเริ่มจากการพิจารณา

$$(A + BK)X + X(A + BK)^T < \gamma X$$

หรือ

$$AX + XA^T - \gamma X + BKX + XK^TB^T < 0 \tag{4.5}$$

มีเมทริกซ์ K ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ (4.5) ก็ต่อเมื่อ

$$B^{\perp}(AX + XA^T - \gamma X)B^{\perp T} < 0 \tag{4.6}$$

โดยที่ $(\cdot)^{\perp}$ หมายถึง เมทริกซ์ซึ่งแถวประกอบด้วยฐานหลักสำหรับปริภูมิสู่ศูนย์ของ $(\cdot)^T$ ดังนั้นปัญหากลายเป็น

$$\min_{X>0} \gamma \quad s.t.\ \ (4.2),\ \ (4.6) \tag{4.7}$$

นี้เป็นการหาค่าต่ำสุดของค่าลักษณะเฉพาะแบบทั่วไป (Generalized eigenvalue minimization problem) และสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หลังจากนั้นอัตราขยาย K สามารถคำนวณได้โดยเงื่อนไข (4.1)
สำหรับกรณีที่มีการระบุค่าของ K สำหรับการหาค่าต่ำสุดของ $\phi(K, F)$ ค่า F ที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดหาได้ในลักษณะเดียวกันยกเว้นแต่ใช้เงื่อนไขที่เป็นคู่กันนั้นคือ

$$Y(A + BK) + (A + BK)^T Y < \gamma Y \tag{4.8}$$

$$Y(A + FC) + (A + FC)^T Y < \gamma Y \tag{4.9}$$

อสมการเมทริกซ์นี้สมมูลกับเงื่อนไข (4.1) และ (4.2) โดย $Y = X^{-1}$
ขั้นตอนที่ได้อธิบายทั้งหมดสามารถเขียนเป็นลำดับการทำซ้ำได้ดังนี้

1. เลือกเมทริกซ์ K_0 ใด ๆ และให้ $k = 1$

2. กำหนดค่า $K = K_{k-1}$ และแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k = \min_{Y>0} \gamma \quad s.t. \quad & Y(A + BK) + (A + BK)^T Y < \gamma Y \\ & C^{T^\perp}(YA + A^T Y - \gamma Y)C^{T^{\perp T}} < 0 \end{aligned}$$

   คำนวณค่า F_k โดยแก้อสมการเมทริกซ์

$$Y_k(A + FC) + (A + FC)^T Y_k < \hat{\gamma}_k Y_k$$

3. กำหนดค่า $F = F_k$ และแก้ปัญหา

$$\begin{aligned} \gamma_k = \min_{X>0} \gamma \quad s.t. \quad & X(A + FC) + X(A + FC)^T < \gamma X \\ & B^\perp(AX + XA^T - \gamma X)B^{\perp^T} < 0 \end{aligned}$$

   คำนวณค่า K_k โดยแก้อสมการเมทริกซ์

$$(A + BK)X_k + X_k(A + BK)^T < \gamma_k X_k$$

4. ถ้า $|(\gamma_k - \gamma_{k-1})/\gamma_k| \leq \epsilon$ สำหรับค่า $\epsilon > 0$ ซึ่งเล็กเพียงพอแล้วหยุด ถ้าเงื่อนไขไม่เป็นจริงให้ $k = k + 1$ ทำขั้นตอนที่ 2 ต่อไป

5. คำนวณเมทริกซ์ L จากอสมการ (4.3)

สังเกตว่าวิธีนี้ไม่เพียงแค่สามารถทำให้ระบบวงปิดมีเสถียรภาพเท่านั้นเมื่อ $\gamma = 0$ แต่ยังสามารถทำให้ค่าของ γ น้อยที่สุดได้ด้วยซึ่งค่าของ γ มีความสัมพันธ์กับช่วงเวลาเข้า (settling time) ดังนั้นเราสามารถใช้วิธีนี้ในการปรับปรุงช่วงเวลาเข้าของระบบได้ ในขั้นตอนที่ 5 การคำนวณเมทริกซ์ L สามารถทำได้โดยการแทนค่าเมทริกซ์ X ด้วย X^* ที่ได้จากขั้นตอนที่ 3 แต่สำหรับค่าของ γ เราไม่จำเป็นต้องแทนด้วย γ^* กล่าวคือ $\gamma^* \leq \gamma \leq 0$ จากการทดลองเราพบว่าค่า γ ต่ำ ๆ จะนำไปสู่สมาชิกของ L ที่มีค่าสูงซึ่งเป็นพารามิเตอร์ K_p, K_i และ K_d ของตัวควบคุมพีไอดีบางครั้งเราต้องการค่าต่ำ ๆ สำหรับพารามิเตอร์เหล่านี้

4.3 การกำหนดค่าเริ่มต้น

วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันไม่มีคุณสมบัติการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง คำตอบที่ได้จึงขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น ดังนั้นเราต้องเลือกค่าเริ่มต้นให้ใกล้กับคำตอบที่ต้องการหรือเหมาะที่สุด แนวความคิดหลักคือพยายามคำนวณค่า X ที่ใกล้กับค่า X^* (ค่า X ที่ทำให้เกิดค่าเหมาะที่สุด) จากนั้นใช้ค่า X ที่ได้คำนวณค่า K และใช้ค่า K นี้เป็นค่าเริ่มต้น

กำหนดให้ $X > 0$ และ $Y > 0$ จะมีค่า K และ F ซึ่งทำให้เงื่อนไข (4.1) และ (4.2) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} = n \tag{4.10}$$

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geq 0 \tag{4.11}$$

$$B^{\perp}(AX + XA^T - \gamma X){B^{\perp}}^T < 0 \tag{4.12}$$

$$C^{T^{\perp}}(YA + A^TY - \gamma Y){C^{T^{\perp}}}^T < 0 \tag{4.13}$$

เป็นจริงโดยที่ n เป็นอันดับของพลานต์ สำหรับปัญหาการทำให้มีเสถียรภาพเป้าหมายคือหาคู่เมทริกซ์ (X, Y) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (4.10), (4.11), (4.12) และ (4.13) ในขณะที่ $\gamma = 0$ อย่างไรก็ตามปัญหานี้หาคำตอบยาก แต่คู่เมทริกซ์ (X, Y) ซึ่งใกล้กับเป้าหมายอาจคำนวณจากการหาค่าต่ำสุดของ $\operatorname{tr}(X + Y)$ ภายใต้เงื่อนไข (4.11), (4.12) และ (4.13) ในขณะที่ $\gamma = 0$ ปัญหานี้เป็นการหาค่าเหมาะที่สุดภายใต้เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เมื่อเราคำนวณค่า X ได้แล้ว ค่า K สามารถคำนวณได้โดยอสมการเมทริกซ์เงื่อนไข (4.1) ซึ่งมี $\gamma = 0$ จากนั้นใช้ค่า K ที่ได้ในฐานะที่เป็นค่าเริ่มต้น K_0

4.4 วิธีทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$

สำหรับระบบวงปิดในสมการ (3.61) ปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ เราต้องการออกแบบเมทริกซ์ L ซึ่งทำให้ $\|T_{\tilde{z}w}\|_\infty < \mu$ ข้อกำหนดนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ L และ $X \in \mathbb{S}^n$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} (A + B_2LC_2)X + X(A + B_2LC_2)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.14}$$

เป็นเงื่อนไขอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นในตัวแปร X และ L ปัจจุบันปัญหานี้ยังไม่สามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่สามารถแก้ได้โดยอาศัยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันซึ่งใช้วิธีการกำหนดค่าให้กับตัวแปรตัวหนึ่งแล้วอสมการกลายเป็น อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นเทียบกับตัวแปรที่เหลือ จากนั้นทำการกำหนดค่าอีกตัวแปรหนึ่งทำสลับกันไปเช่นนี้ วิธีนี้รับประกันว่าคำตอบจะลู่เข้าแต่ไม่รับประกันว่าจะลู่เข้าค่าที่ต้องการหรือไม่ นี่เป็นข้อด้อยของขั้นตอนวิธีเฉพาะที่กล่าวคือไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบที่ต้องการ สำหรับวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันซึ่งเป็นขั้นตอนวิธีเฉพาะที่เช่นเดียวกัน ตัวแปรตัวใหม่คือ K และ F ถูกใช้ในการทำซ้ำซึ่งทำให้คำตอบมีอัตราการลู่เข้าค่อนข้างสูงแต่วิธีนี้ไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง ขั้นตอนวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันตั้งอยู่บนพื้นฐานของบทตั้ง 4.2

บทตั้ง 4.2 *[4] เมื่อกำหนดค่าสเกลาร์ μ และระบบ (3.61) ให้ ข้อความต่อไปนี้จะสมมูลกัน*

1. $\|T_{\tilde{z}w}\|_\infty < \mu$
2. *มี K, F และ $X = X^T > 0$ ซึ่งทำให้*

$$\begin{bmatrix} (A+FC_2)X + X(A+FC_2)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.15}$$

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)X + X(A+B_2K)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.16}$$

การคำนวณเมทริกซ์ L ทำได้โดยเริ่มจากการหาค่าต่ำสุดของ μ ภายใต้เงื่อนไข (4.15) และ (4.16) อย่างไรก็ตามปัญหานี้ยังคงเป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นซึ่งวิธีการแก้จะได้กล่าวถึงต่อไป ตอนนี้สมมติว่าแก้ปัญหานี้ได้แล้วและผลที่ได้คือ μ^* และ X^* จากนั้นเมทริกซ์ L สามารถคำนวณได้จากแก้อสมการที่ (4.14) โดยการแทนค่า $X = X^*$ และ $\mu^* \leq \mu$ ทำให้อสมการกลายเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร L

การหาค่าต่ำสุดของ μ ภายใต้เงื่อนไข (4.15) และ (4.16) เราใช้วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันเช่นเดียวกับปัญหาการทำให้มีเสถียรภาพ การหาค่าต่ำสุดของ μ ในขณะที่กำหนดค่าตัวแปรเมทริกซ์ F ทำให้เงื่อนไข (4.15) กลายเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร X และเงื่อนไข (4.16) ยังคงเป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)X + X(A+B_2K)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} B_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \tag{4.17}$$

มีเมทริกซ์ K ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ (4.17) ก็ต่อเมื่อ

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp^T} < 0 \tag{4.18}$$

ดังนั้นปัญหาสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\min_{X>0} \mu \quad s.t \quad (4.15),\ (4.18) \tag{4.19}$$

นี้เป็นปัญหาโปรแกรมกึ่งบวกแน่นอน (semidefinite program) และสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ หลังจากได้รับ X^* และ μ^* เมทริกซ์ K สามารถคำนวณได้โดยแก้อสมการ (4.16) สำหรับกรณีที่มีการระบุค่า

ของ K การหาค่าต่ำสุดของ μ ทำได้ลักษณะเดียวกันเว้นแต่ใช้เงื่อนไขที่เป็นคู่กันคือ

$$\begin{bmatrix} Y(A+FC_2)+(A+FC_2)^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\mu I & 0 \\ C_1 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.20}$$

(4.21)

$$\begin{bmatrix} Y(A+B_2K)+(A+B_2K)^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\mu I & 0 \\ C_1 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.22}$$

อสมการเมทริกซ์นี้สมมูลกับเงื่อนไข (4.15) และ (4.16) โดย $Y = X^{-1}$
ขั้นตอนวิธีสามารถเขียนเป็นลำดับการทำซ้ำได้ดังนี้

1. เลือกเมทริกซ์ K_0 ใด ๆ และให้ $k = 1$

2. กำหนดค่า $K = K_{k-1}$ และหาค่าต่ำสุดของ μ สำหรับ $Y > 0$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{bmatrix} Y(A+B_2K)+(A+B_2K)^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\mu I & 0 \\ C_1 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} C_2^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} YA+A^TY & YB_1 & C_1^T \\ B_1^TY & -\mu I & 0 \\ C_1 & 0 & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp^T} < 0$$

คำนวณค่า F_k โดยแก้อสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} Y_k(A+FC_2)+(A+FC_2)^TY_k & Y_kB_1 & C_1^T \\ B_1^TY_k & -\mu_{\min} I & 0 \\ C_1 & 0 & -\mu_{\min} I \end{bmatrix} < 0$$

3. กำหนดค่า $F = F_k$ และหาค่าต่ำสุดของ μ สำหรับ $X > 0$ ภายใต้เงื่อนไข

$$\begin{bmatrix} (A+FC_2)X+X(A+FC_2)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} AX+XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp^T} < 0$$

คำนวณค่า K_k โดยแก้อสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)X_k+X_k(A+B_2K)^T & X_kC_1^T & B_1 \\ C_1X_k & -\mu_{\min} I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu_{\min} I \end{bmatrix} < 0$$

4. ทำซ้ำจนกระทั่งได้ค่า μ ที่ต้องการ

5. คำนวณค่าเมทริกซ์ L จากอสมการ (4.14) กล่าวคือ

$$\begin{bmatrix} (A + B_2LC_2)X^* + X^*(A + B_2LC_2)^T & X^*C_1^T & B_1 \\ C_1X^* & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

ในการคำนวณเมทริกซ์ L ในขั้นตอนที่ 5 เราแทน $X = X^*$ และ $\mu_{\min} \leq \mu$ โดยที่ $\mu_{\min}$ เป็นค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ในขั้นตอนที่ 3 ตอนนี้เงื่อนไขการออกแบบกลายเป็นอสมการเมทริกซ์เชิงเส้นในตัวแปร L เท่านั้นซึ่งปัจจุบันสามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จากการทดลองพบว่าถ้าค่าของ μ ต่ำ ๆ จะนำไปสู่ค่าสมาชิกของ L หรือพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีที่มีค่าสูง ในบางครั้งเราต้องการสมาชิกที่มีค่าต่ำ ๆ

4.5 บทสรุป

บทนี้ได้นำเสนอการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นทั้งกรณีปัญหาการทำให้ระบบมีเสถียรภาพและปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ เราพบว่าปัญหาเหล่านี้สามารถแก้ได้ในลักษณะเดียวกันโดยการใช้วิธีการทำซ้ำแบบคู่กัน ถึงแม้ว่าวิธีนี้ไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง แต่จากการทดลอง [5] พบว่ามีอัตราการลู่เข้าค่อนข้างสูง ดังนั้นวิธีการนี้สามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพในทางปฏิบัติไม่เพียงแค่ปัญหาเหล่านี้เท่านั้นในบทต่อไปเราจะพบว่าการแก้ปัญหาเสถียรภาพคงทนเงื่อนไขการออกแบบนำไปสู่อสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นเช่นเดียวกันและสามารถแก้ได้เช่นเดียวกันกับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$

บทที่ 5

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทน

5.1 บทนำ

ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่ผ่านมาไม่ว่าระบบถูกอธิบายโดยฟังก์ชันถ่ายโอนหรือสมการสถานะเราสมมติว่าพารามิเตอร์ทุกตัวมีค่าคงที่หรือทราบค่าที่แน่นอน ดังนั้นระบบจะมีผลตอบสนองตามที่ได้ออกแบบไว้ถ้าข้อสมมติยังคงเป็นจริง แต่โดยทั่วไปพารามิเตอร์ของฟังก์ชันถ่ายโอนหรือสมการสถานะที่ใช้อธิบายระบบทางกายภาพจะมีค่าที่ไม่แน่นอนในกรณีนี้ตัวควบคุมข้างต้นไม่สามารถควบคุมระบบให้มีสมรรถนะตามที่ออกแบบไว้ได้อีกต่อไปหรือกระทั่งทำให้ระบบขาดเสถียรภาพ ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะทำการออกแบบระบบควบคุมโดยใช้ตัวควบคุมพีไอดีเพื่อทำให้ระบบยังคงมีเสถียรภาพถึงแม้จะมีความไม่แน่นอนในระบบ

เราจะกล่าวถึงระบบที่มีความไม่แน่นอนใน §5.2 การจัดการกับระบบซึ่งมีความไม่แน่นอนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำผลที่ได้ไปออกแบบตัวควบคุมพีไอดีชนิดคงทนจากนั้น §5.3 เราพิจารณาเงื่อนไขเสถียรภาพคงทนในรูปแบบอสมการเมทริกซ์เชิงเส้น เงื่อนไขดังกล่าวสามารถขยายไปสู่การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในหัวข้อ §5.4 แต่อสมการเมทริกซ์ที่ได้ไม่เชิงเส้น อย่างไรก็ตามปัญหานี้สามารถแก้ได้เช่นเดียวกับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ ที่ผ่านมา

5.2 การนำเสนอความไม่แน่นอน

โดยทั่วไปแบบจำลองที่ใช้สำหรับการออกแบบตัวควบคุมจะมีความแตกต่างจากระบบจริง ๆ ความแตกต่างนี้เรียกว่า ความไม่แน่นอน (uncertainty) ซึ่งมีสาเหตุมาจากการที่ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองเป็นเพียงแค่ค่าประมาณและมีการเปลี่ยนแปลง หรือข้อจำกัดในการอธิบายระบบทางกายภาพให้ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ถึงแม้ว่าเราสามารถสร้างแบบจำลองได้อย่างถูกต้องแต่แบบจำลองที่ได้มีความซับซ้อนยากต่อการออกแบบตัวควบคุม ดังนั้นในการออกแบบเราจะเลือกแบบจำลองที่ง่ายและพิจารณาความแตกต่างระหว่างระบบทางกายภาพและแบบจำลองเป็นความไม่แน่นอน ความไม่แน่นอนที่เกิดขึ้นในระบบอาจเป็นสาเหตุให้ระบบสูญเสียเสถียรภาพได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวตัวควบคุมจะต้องทำให้ระบบยังคงมีเสถียรภาพถึงแม้ว่าระบบมีความไม่แน่นอนเกิดขึ้น

การอธิบายถึงระบบซึ่งมีความไม่แน่นอน ระบบถูกอธิบายโดยเซตของแบบจำลองเชิงเส้นไม่ขึ้นกับเวลาเรียกว่า เซตความไม่แน่นอน (uncertain set) ความไม่แน่นอนอาจแบ่งได้เป็น [8]

1. ความไม่แน่นอนในพารามิเตอร์ (parameter uncertainty) ความไม่แน่นอนชนิดนี้โครงสร้างและอันดับไม่มีการเปลี่ยนแปลงแต่ค่าของตัวพารามิเตอร์ไม่แน่นอนหรือมีการเปลี่ยนแปลงภายในขอบเขต พิจารณาระบบ $\ddot{y} + a\dot{y} + y = u$ ซึ่งมีความไม่แน่นอนในพารามิเตอร์ a และทราบว่าเปลี่ยนแปลงอยู่

ในช่วง $[a_{\min}, a_{\max}]$ เขียนฟังก์ชันถ่ายโอนได้เป็น

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$$

ความไม่แน่นอนในพารามิเตอร์ a สามารถนำเสนอด้วยรูปแบบใหม่

$$a_p = \bar{a}(1 + w_a \delta_a), \quad |\delta_a| \leq 1$$

โดยที่ $\bar{a} = \frac{a_{\min}+a_{\max}}{2}$ และ $w_a = \frac{a_{\max}-a_{\min}}{a_{\max}+a_{\min}}$ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ที่ได้คือ

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + \bar{a}(1 + w_a \delta_a)s + 1}, \quad |\delta_a| \leq 1$$

ซึ่งอธิบายความไม่แน่นอนผ่านพารามิเตอร์ δ_a มีค่าในช่วง $-1 \leq \delta_a \leq 1$ แทนพารามิเตอร์ a เดิม

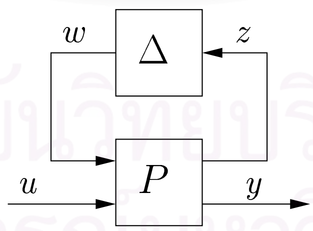
2. ความไม่แน่นอนที่เกิดจากการละพลวัตและพลวัตซึ่งไม่สามารถสร้างแบบจำลองได้ ระบบจะมีความไม่แน่นอนนี้เสมอโดยทั่วไปเกิดขึ้นที่ความถี่สูงเนื่องมาจากไม่สามารถสร้างแบบจำลองได้อย่างถูกต้อง หรือถ้าสามารถสร้างแบบจำลองได้อย่างถูกต้อง แต่มีอันดับสูงยากต่อการออกแบบจึงละพลวัตบางส่วนไปและคิดว่าเป็นความไม่แน่นอน ระบบซึ่งมีความไม่แน่นอนชนิดนี้นำเสนอด้วยรูปแบบ

$$G_p(s) = G(s)(1 + w(s)\Delta(s)); \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \quad \forall\omega$$

โดยที่ $\Delta(s)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งมีเสถียรภาพและ $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ในขณะที่ $G(s)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งระบุค่าทั้งหมดส่วน $w(s)$ เป็นฟังก์ชันถ่ายโอนที่มีเสถียรภาพ เรียกว่าฟังก์ชันถ่ายโอนถ่วงน้ำหนักสามารถกำหนดได้โดย

$$|w(j\omega)| \geq \max_{Gp} \left| \frac{G_p(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|, \quad \forall\omega$$

ระบบที่มีความไม่แน่นอนทั้งชนิดความไม่แน่นอนในตัวพารามิเตอร์และความไม่แน่นอนจากการละพลวัตสามารถนำเสนอด้วยแผนภาพกรอบในรูปที่ 5.1 ซึ่งเป็นรูปแบบทั่วไป



รูปที่ 5.1: ระบบซึ่งมีความไม่แน่นอน

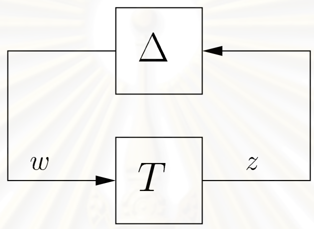
และสามารถจะอธิบายด้วยสมการสถานะ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_{p1} w + B_{p2} u \\ z &= C_{p1} x \\ y &= C_{p2} x \\ w &= \Delta z \end{aligned} \tag{5.1}$$

โดยที่ $\Delta \in \mathcal{D} := \{\Delta \in \mathbb{C}^{m\times q} : \|\Delta\|_\infty < \sigma\}$ สัญญาณ w และ z เป็นสัญญาณที่ใช้อธิบายส่วนที่มีความไม่แน่นอน u คือสัญญาณขาเข้าและ y เป็นสัญญาณขาออก

5.3 เสถียรภาพคงทน

ระบบมีเสถียรภาพคงทน หมายถึงระบบยังคงมีเสถียรภาพถึงแม้มีความไม่แน่นอนเกิดขึ้นในระบบ การรับประกันเสถียรภาพคงทนขึ้นอยู่กับการนิยามความไม่แน่นอน ระบบมีเสถียรภาพคงทนสำหรับความไม่แน่นอนชนิดหนึ่งไม่ได้บอกเป็นนัยว่าระบบจะมีเสถียรภาพคงทนกับความไม่แน่นอนอื่น ๆ พิจารณาระบบแสดงในรูปที่ 5.2



รูปที่ 5.2: ระบบป้อนกลับซึ่งมีความไม่แน่นอน

ระบบนี้อธิบายได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w \\ z &= C_1 x \\ w &= \Delta z \end{aligned} \tag{5.2}$$

โดยที่ $\Delta \in \mathcal{D} := \{\Delta \in \mathbb{C}^{m\times q} : \|\Delta\|_\infty < \sigma\}$ และ T เป็นเมทริกซ์ถ่ายโอนจาก w ไป z เงื่อนไขเสถียรภาพคงทนสำหรับระบบนี้มาสามารถอธิบายด้วยบทตั้งที่ 5.1

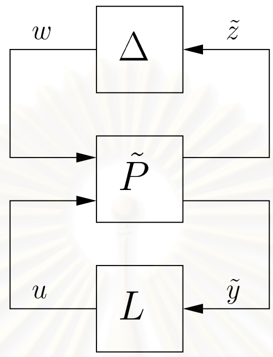
บทตั้ง 5.1 *[8] เมื่อกำหนดค่าสเกลาร์ $\mu > 0$ ให้แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *ระบบป้อนกลับในรูปที่ 5.2 มีเสถียรภาพคงทนต่อความไม่แน่นอน $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\mu}$*
2. $\|T_{zw}\|_\infty < \mu$
3. *มีเมทริกซ์สมมาตร $X > 0$ ซึ่งทำให้อสมการเมทริกซ์เป็นจริง*

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3}$$

5.4 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีชนิดคงทน

จากข้างต้นพบว่าปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสามารถที่จะนำเสนอในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกได้ การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีชนิดคงทนสามารถทำได้เช่นเดียวกับปัญหาที่ผ่านมาซึ่งรูปแบบการควบคุมสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอนสามารถแสดงโดยแผนภาพกรอบในรูปที่ 5.3



รูปที่ 5.3: ระบบควบคุมซึ่งมีความไม่แน่นอน

เพื่อที่จะเขียนสมการสถานะของระบบโดยรวมเราต้องนิยามตัวแปรสถานะ x_i และ x_d เพิ่มเติมจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ -C_{p2} & 0 & 0 \\ T^{-1}C_{p2} & 0 & -T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{p2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\
\tilde{z} &= \begin{bmatrix} C_{p1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} \\
\tilde{y} &= \begin{bmatrix} -C_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -T^{-1}C_{p2} & 0 & T^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \\ x_d \end{bmatrix} \\
u &= \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix} \tilde{y} \\
w &= \Delta \tilde{z}
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

โดยที่ $\Delta \in \mathcal{D} := \{\Delta \in \mathbb{C}^{m\times q} : \|\Delta\|_\infty < \sigma\}$ ทำการนิยามตัวแปรสถานะ $\tilde{x} = [x^T x_i^T x_d^T]^T$ ซึ่งได้ระบบใหม่ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + B_1 w + B_2 u \\
\tilde{z} &= C_1 \tilde{x} \\
\tilde{y} &= C_2 \tilde{x} \\
u &= L\tilde{y} \\
w &= \Delta \tilde{z}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

วัตถุประสงค์คือต้องการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี $u = L\tilde{y}$ ซึ่ง $L = \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d \end{bmatrix}$ โดยรับประกันเสถียรภาพคงทนกล่าวคือ ตัวควบคุมยังคงควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพถึงแม้มีความไม่แน่นอนในระบบทางกายภาพ แบบจำลองในสมการที่ (5.5) เมื่อทำการป้อนกลับสัญญาณขาออกจะได้ระบบวงปิด

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A + B_2 L C_2)\tilde{x} + B_1 w \\ \tilde{z} &= C_1 \tilde{x} \\ w &= \Delta \tilde{z} \end{aligned} \tag{5.6}$$

ในการออกแบบตัวควบคุมคงทนเราจะอาศัยบทตั้งที่ 5.1 ซึ่งจะได้ว่าระบบวงปิดมีเสถียรภาพคงทนก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์สมมาตร $X > 0$ และเมทริกซ์ L ซึ่งสอดคล้องกับ

$$\begin{bmatrix} (A + B_2LC_2)X + X(A + B_2LC_2)^T & XC_1^T & B_1 \\ C_1X & -\mu I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \tag{5.7}$$

สำหรับบางค่า μ โดยที่ $\mu = \sigma^{-1}$ สังเกตว่าอสมการนี้ไม่เป็นเชิงเส้น แต่สามารถแก้ได้เช่นเดียวกับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ ถ้าเราสามารถคำนวณเมทริกซ์ L ได้ก็จะได้รับพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีซึ่งสามารถควบคุมให้ระบบยังคงมีเสถียรภาพได้ถึงแม้ว่าระบบจะมีความไม่แน่นอน

5.5 บทสรุป

ในบทนี้เราได้นำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอนซึ่งความไม่แน่นอนเหล่านี้สามารถนำเสนอในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ได้เพื่อทำให้ระบบยังคงมีเสถียรภาพ ถึงแม้ว่าจะมีความไม่แน่นอน และเราพบว่าเงื่อนไขการออกแบบเป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นซึ่งสามารถแก้ได้เช่นเดียวกับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$

บทที่ 6

ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี

6.1 บทนำ

เพื่อให้เห็นถึงประสิทธิภาพของวิธีการที่นำเสนอ ในบทนี้เราจะให้ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ใน §6.2 ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกเพื่อชี้ให้เห็นว่าวิธีการที่เรานำเสนอสามารถปรับปรุงผลตอบสนองนอกเหนือจากทำให้ระบบมีเสถียรภาพ จากนั้นใน §6.3 ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพ สุดท้ายใน §6.4 ทำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทนสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน เราใช้ตัวควบคุมพีไอดีถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงในการออกแบบซึ่งสัญญาณควบคุมเขียนได้โดย $u = K_p(by_{sp} - y) + \frac{K_i}{s}(y_{sp} - y) + \frac{K_d s}{Ts+1}(cy_{sp} - y)$ และเพื่อป้องกันการกระแทกในสัญญาณควบคุมเราจะกำหนดให้ $b = 0$ และ $c = 0$ เพื่อจำลองการทำงาน ทุกตัวอย่างในวิทยานิพนธ์นี้ใช้ CPU 2.4 GHz ชนิด Pentium 4 ขนาดของแรม 224 MB

6.2 ตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออก

ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในหัวข้อนี้ประกอบด้วยสองตัวอย่าง โดยวัตถุประสงค์หลักคือพยายามทำให้ระบบมีเสถียรภาพ และแสดงให้เห็นถึงผลกระทบต่อสัญญาณอ้างอิงเมื่อเปลี่ยนค่าของ b

ตัวอย่างที่ 1. พิจารณาระบบซึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 - 3s - s + 2}$$

หรือ

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

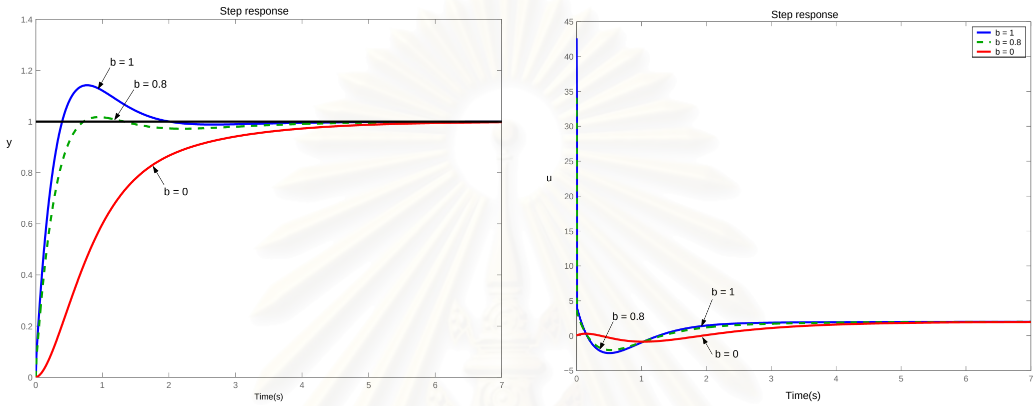
เห็นได้อย่างชัดเจนว่าระบบนี้ไม่มีเสถียรภาพ จากนั้นทำการควบคุมระบบด้วยตัวควบคุมพีไอดีเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพ กล่าวคือเรากำหนด ให้หยุดการทำซ้ำเมื่อ $\gamma < 0$ เราใช้ค่า $T = 0.01$ จะได้รับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม

$$k_p = 42.6079, \quad k_i = 39.8032, \text{และ} \quad k_d = 7.8627$$

หลังจากการทำซ้ำเพียงแค่หนึ่งครั้งเราได้รับ $\gamma = -0.3946$ ระบบควบคุมวงปิดมีเสถียรภาพเนื่องจากค่าลักษณะเฉพาะน้อยกว่าศูนย์ทั้งหมด กล่าวคือ

$$-0.82 \pm j0.06, \quad -2.25 \pm j1.17 \quad \text{และ} \quad -919.74$$

ผลตอบสนองและสัญญาณควบคุมของตัวอย่างนี้แสดงในรูปที่ 6.1 เราเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ b และพบว่าผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงเปลี่ยน ค่า $b = 1$ ให้ค่าพุ่งเกินสูงสุดและ $b = 0$ ไม่แสดงค่าพุ่งเกิน



รูปที่ 6.1: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

ตัวอย่างที่ 2. พิจารณา $G(s)$ ซึ่งอธิบายโดย

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 15 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างนี้นำมาจาก [3] ซึ่งในบทความนำเสนอการออกแบบระบบควบคุมให้มีเสถียรภาพโดยวิธีการป้อนกลับสัญญาณขาออก เนื่องจากค่าลักษณะเฉพาะมีค่าเป็น 1 และ -1 เราจะออกแบบระบบควบคุมวงปิดโดยใช้ตัวควบคุมพีไอดี กำหนดให้ $T = 0.05$ และเงื่อนไขหยุดทำซ้ำคือ $|(\gamma_k - \gamma_{k-1})/\gamma_k| < 0.001$ หลังจากทำซ้ำสามรอบ เราได้รับค่าของ γ ดังนี้

$$-4.0338 \quad -4.2352, \quad \text{และ} \quad -4.2392$$

เราใช้ $\gamma = -4.0338$ สำหรับการคำนวณพารามิเตอร์ของตัวควบคุมซึ่งได้รับ

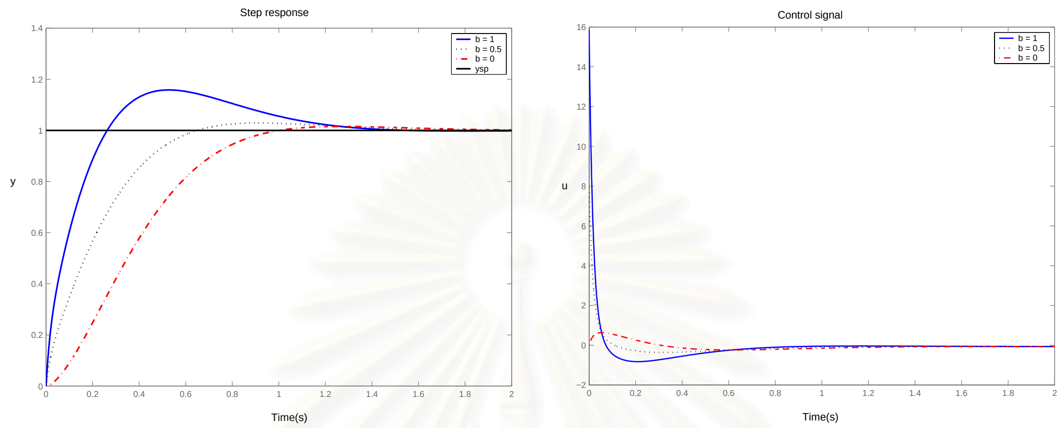
$$k_p = 15.8639, \quad k_i = 42.3413, \quad k_d = 2.2362$$

โดยใช้ตัวควบคุมพีไอดีที่คำนวณได้ ค่าลักษณะเฉพาะวงปิดมีค่าดังนี้

$$-3.2464 \pm j2.4415, \quad -12.4982 \quad \text{และ} \quad -61.5977$$

ระบบควบคุมวงปิดมีเสถียรภาพเนื่องจากค่าลักษณะเฉพาะวงปิดทั้งหมดน้อยกว่าศูนย์ ผลตอบสนองต่อสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย และสัญญาณควบคุมแสดงในรูปที่ 6.2 เราเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ b เท่า

กับ 1, 0.5, และ 0 ซึ่งทำให้ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงเปลี่ยนไป สำหรับค่า $b = 1$ ค่าพุ่งเกินมีค่าสูงสุด ระบบมีผลตอบสนองเร็ว แต่สัญญาณควบคุมตอนเริ่มต้นมีค่าสูง เมื่อลดค่า $b = 0.5$ เราพบว่าสัญญาณควบคุมลดลง และ $b = 0$ สัญญาณควมคุมน้อยที่สุด แต่ระบบไม่มีค่าพุ่งเกิน



รูปที่ 6.2: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

6.3 ตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออก

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณนั้นสามารถทำได้เช่นเดียวกับกรณีที่ผ่านมา แต่ถ้าจำนวนของสัญญาณเข้าเท่ากับจำนวนของสัญญาณออก เราสามารถกำหนดพารามิเตอร์ T เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมหลักโดยสมาชิกสามารถมีค่าแตกต่างกันได้

ตัวอย่างที่ 3. พิจารณาระบบที่อธิบายโดย

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ 3.5446 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.49 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

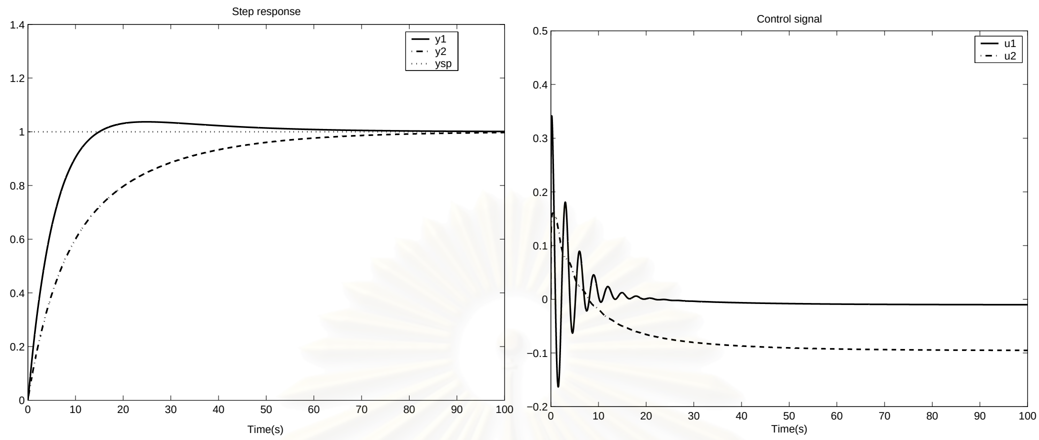
มีค่าลักษณะเฉพาะวงเปิด $-0.233, 0.276 \pm j0.256, -2.073$ จึงเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ตัวอย่างนี้ถูกใช้ใน [6] ซึ่งในบทความนี้ทำการหาค่าเหมาะที่สุดของตัวควบคุมสำหรับปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก เราจะออกแบบตัวควบคุมพีไอดี โดยใช้วิธีที่นำเสนอสำหรับ $T = \text{diag }[0.05, 0.01]$ และให้หยุดการทำซ้ำเมื่อ $\gamma < 0$ คำนวณเมทริกซ์ L หรือพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีได้ดังนี้

$$L = \begin{bmatrix} 29.8019 & 206.4160 & 13.2228 & 14.9690 & 1.5218 & -1.6972 \\ 21.7823 & -40.7254 & 1.7645 & -1.9056 & 0.2457 & -0.2321 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$K_p = \begin{bmatrix} 29.8019 & 206.4160 \\ 21.7823 & -40.7254 \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} 13.2228 & 14.9690 \\ 1.7645 & -1.9056 \end{bmatrix}, \quad K_d = \begin{bmatrix} 1.5218 & -1.6972 \\ 0.2457 & -0.2321 \end{bmatrix}$$

เราได้รับ $\gamma = -0.0992$ หลังจากการทำซ้ำหนึ่งรอบ ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณควบคุม ซึ่งกำหนดให้ $b = 0$ แสดงโดย



รูปที่ 6.3: ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิง $y_{sp} = [1\ 1]^T$

จากรูปเราพบว่าผลตอบสนองสามารถติดตามสัญญาณอ้างอิงได้และระบบมีเสถียรภาพตามที่ต้องการ เนื่องจากเงื่อนไขในการออกแบบเรากำหนดแค่ให้ระบบมีเสถียรภาพเท่านั้น

6.4 ตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทน

ในหัวข้อนี้จะออกแบบพีไอดีสำหรับหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน โดยตัวควบคุมจะต้องสามารถควบคุมระบบให้มีเสถียรภาพ

ตัวอย่างที่ 1. ระบบอธิบายโดยฟังก์ชันถ่ายโอน

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 - 3(1 + 0.9\delta_a)s^2 - (1 + 0.75\delta_b)s + 2(1 + 0.8\delta_c)}$$

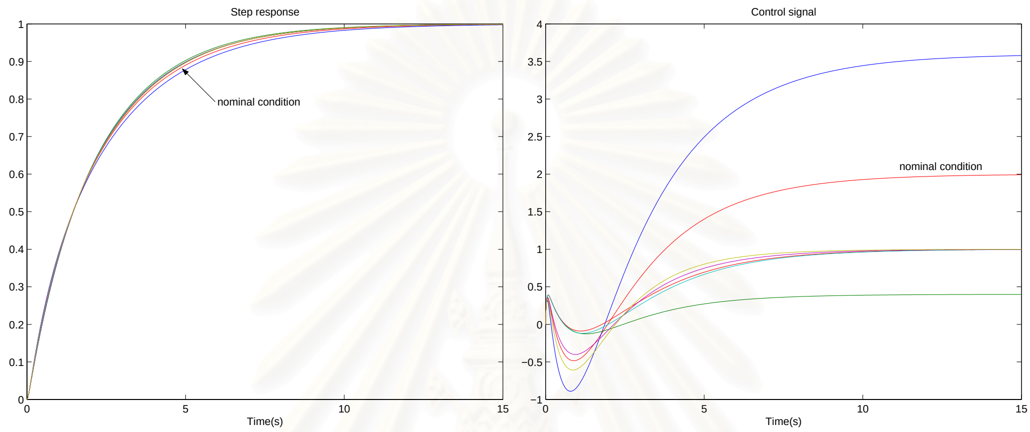
มีความไม่แน่นอนในพารามิเตอร์ ระบบนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของสมการที่ (5.1) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.6 & 0.75 & 2.7 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \\
w &= \begin{bmatrix} \delta_c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_a \end{bmatrix} z, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_c & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_a \end{bmatrix}, \quad \|\Delta\|_\infty \le 1
\end{aligned}$$

ต้องการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพคงทนโดยใช้ค่า $T = 0.01$ ได้รับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม

$$K_p = 43.1750, \quad K_i = 20.4003, \quad K_d = 0.2902$$

ผลตอบสนองต่อสัญญาณอ้างอิงและสัญญาณควบคุมแสดงในรูปที่ 6.4 ในการจำลองการทำงานเราทำการเปลี่ยนแปลงค่าของพารามิเตอร์ไปหลาย ๆ ค่าแต่จากรูปเราพบว่าผลตอบสนองยังคงมีค่าใกล้เคียงกัน



รูปที่ 6.4: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและสัญญาณควบคุม

ตัวอย่างที่ 2. ฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งมีความไม่แน่นอนในพารามิเตอร์ $3 \leq \zeta \leq 11$

$$G(s) = \frac{s + \sqrt{\zeta} + 1}{s^2 + (\zeta^2 - 10)s + 3\zeta + 11}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนนี้ใช้ใน [10] เพื่อแสดงวิธีการออกแบบระบบให้มีเสถียรภาพคงทน ในบทความนี้ใช้สามฟังก์ชันถ่ายโอนซึ่งได้จากการกำหนดให้ $\zeta = 3,\ 7,\ 11$ แล้วใช้การป้อนกลับสัญญาณขาออก เพื่อทำให้ระบบทั้งสามมีเสถียรภาพพร้อมกัน เราจะออกแบบระบบนี้ให้มีเสถียรภาพคงทน โดยการใช้ตัวควบคุมพีไอดี พจน์ $\sqrt{\zeta} + 1$ และ ζ^2 ไม่เป็นเชิงเส้นจึงไม่สามารถเขียนในรูปแบบสมการที่ (5.1) ได้ ทำการนิยามตัวแปรใหม่โดยกำหนดให้ $\tilde{\zeta}_1 = \zeta^2$ และ $\tilde{\zeta}_2 = \zeta$ และคำนวณขอบเขตของตัวแปรเหล่านี้จากนั้นเขียนระบบใหม่โดยใช้ตัวแปร $\tilde{\zeta}_1$ และ $\tilde{\zeta}_2$ สำหรับ $\sqrt{\zeta} + 1$ กำหนดให้เท่ากับ 3.646 ได้รับฟังก์ชันถ่ายโอนใหม่ดังนี้

$$G(s) = \frac{s + 3.646}{s^2 + (\tilde{\zeta}_1 - 10)s + 3\tilde{\zeta}_2 + 11}; \quad 9 \leq \tilde{\zeta}_1 \leq 121,\ 3 \leq \tilde{\zeta}_2 \leq 11$$

นำเสนอความไม่แน่นอนนี้ด้วย $\tilde{\zeta}_1 = 65(1 + 0.8615\delta_1)$ และ $\tilde{\zeta}_2 = 7(1 + 0.5714\delta_2)$ โดยที่ $-1 \leq \delta_1, \delta_2 \leq 1$ จะได้

$$G(s) = \frac{s + 3.646}{s^2 + [65(1 + 0.8615\delta_1) - 10]s + 3[7(1 + 0.5714\delta_2)] + 11}$$

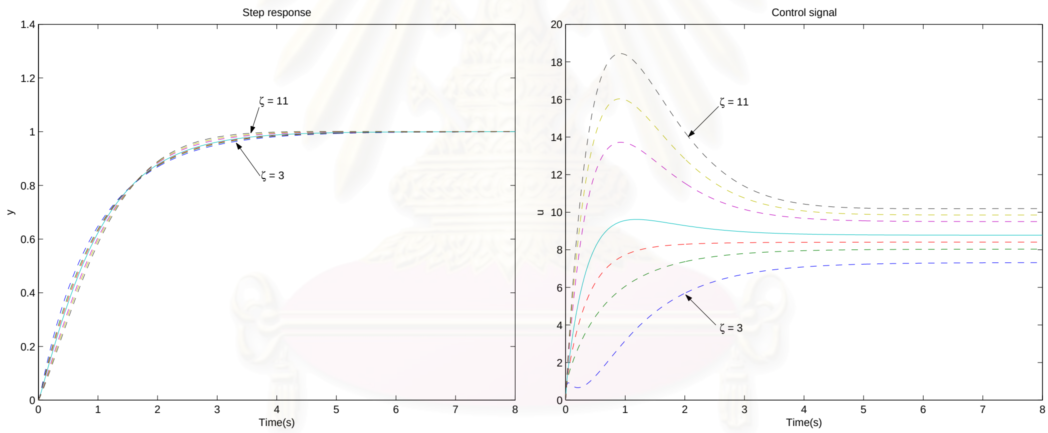
ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบของสมการที่ (5.1) โดย

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -32 & -55 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -11.9994 & -55.9975 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \\
y &= \begin{bmatrix} 3.646 & 1 \end{bmatrix} x \\
w &= \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix} z, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_2 & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{bmatrix}, \quad \|\Delta\|_\infty \le 1
\end{aligned}
$$

ทำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพสำหรับทุกค่าของ ζ ด้วยวิธีการที่นำเสนอได้รับพารามิเตอร์ของตัวควบคุมสำหรับ $T = 0.01$ ซึ่งมี

$$K_p = 97.3889, \quad K_i = 107.2533, \quad K_d = 0.3756$$

จำลองการทำงานโดยใช้โครงสร้างตัวควบคุมพีไอดีที่ผ่านมาดังแสดงในรูปที่ (6.5)



รูปที่ 6.5: ผลตอบสนองสัญญาณขั้นบันไดหนึ่งหน่วยและสัญญาณควบคุม

ในการจำลองเราทำการเปลี่ยนค่าของพารามิเตอร์ในของเขตที่กำหนดให้และพบว่าระบบยังคงมีเสถียรภาพอย่างไรก็ตามวิธีการออกแบบในตัวอย่างนี้อนุรักษ์ค่อนข้างมาก เนื่องจาก Δ ในตัวอย่างของเราเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมหลัก ดังนั้นถ้าไม่สามารถคำนวณตัวควบคุมพีไอดีได้ ไม่ได้หมายความว่าไม่มีตัวควบคุมพีไอดีที่ทำให้ระบบมีเสถียรภาพคงทน

6.5 บทสรุป

ในบทนี้เราทำการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกและได้แสดงให้เห็นว่าวิธีการที่เรานำเสนอสามารถใช้สำหรับปรับปรุงผลตอบสนองได้ด้วยนอกเหนือจากการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ สำหรับการออกแบบพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกนั้นทำได้เช่นเดียวกัน ในตัวอย่างที่นำเสนอเราพบว่าตัวควบคุมที่ได้มีพารามิเตอร์บางตัวเป็นลบ สุดท้ายเราออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอนเพื่อให้ระบบมีเสถียรภาพคงทน

บทที่ 7

บทสรุปและข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกทั้งกรณีของระบบซึ่งเราทราบพารามิเตอร์ที่แน่นอนและระบบซึ่งมีความไม่แน่นอนเพื่อทำให้ระบบเสถียรภาพ แนวความคิดหลัก ๆ ที่วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอคือนำเสนอปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก จากนั้นใช้ความรู้สำหรับการแก้ปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกในการแก้ปัญหาตัวควบคุมพีไอดี อย่างไรก็ตามปัญหานี้นำไปสู่เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นและไม่คอนเวกซ์ทำให้ยากที่จะหาคำตอบ เนื่องจากปัจจุบันยังไม่มีวิธีการใด ๆ ที่จะแก้ปัญหานี้ได้ แต่โดยอาศัยระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันเราพบว่าปัญหานี้สามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพถึงแม้วิธีนี้จะไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง

บทที่ 2 นำเสนอพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ประกอบด้วยพื้นฐานทางพีชคณิต, อสมการเมทริกซ์เชิงเส้นซึ่งเป็นเครื่องมือหลัก ๆ ในวิทยานิพนธ์นี้และปัญหาอสมการเมทริกซ์พื้นฐานที่เกี่ยวข้อง, นอร์ม $\mathcal{H}_\infty$ และทบทวนปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออก

บทที่ 3 กล่าวถึงตัวควบคุมพีไอดีทั้งชนิดขนานและชนิดถ่วงน้ำหนักสัญญาณอ้างอิงซึ่งเป็นรูปแบบที่เราใช้ในการออกแบบ จากนั้นเราทำการนำเสนอปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในฐานะปัญหาการป้อนกลับสัญญาณขาออกสำหรับระบบหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพ วิธีการนี้สามารถขยายไปยังกรณีของตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกได้โดยตรง ตอนท้ายของบทนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ เราจะพบว่าทุกปัญหาที่กล่าวมานำไปสู่เงื่อนไขการออกแบบที่เป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นและไม่คอนเวกซ์

บทที่ 4 แนะนำวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นและไม่คอนเวกซ์ โดยอาศัยวิธีนี้เราจะพบว่านอกเหนือจากจะสามารถทำให้ระบบมีเสถียรภาพได้แล้วยังสามารถปรับปรุงช่วงเวลาเข้าที่ (settling time) ได้อีกด้วย วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันเป็นระเบียบวิธีเฉพาะที่ซึ่งไม่รับประกันการลู่เข้าสู่คำตอบในวงกว้าง การลู่เข้าขึ้นอยู่กับการเลือกค่าเริ่มต้นในการทำซ้ำ ในบทนี้ได้ให้วิธีการคำนวณค่าเริ่มต้นซ้ำ ทำให้วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันมีอัตราการลู่เข้าค่อนข้างสูง สุดท้ายแนะนำวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$ เราพบว่าปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นนี้สามารถแก้ได้เช่นเดียวกับอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นของปัญหาการทำให้มีเสถียรภาพ

บทที่ 5 กล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบซึ่งมีความไม่แน่นอนหรือพารามิเตอร์เกิดการเปลี่ยนแปลงเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพคงทน เริ่มจากแนะนำวิธีการนำเสนอความไม่แน่นอนในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ ทั้งกรณีที่ความไม่แน่นอนมีสาเหตุมาจากพารามิเตอร์ในระบบเกิดการเปลี่ยนแปลงและ

พลวัตที่ไม่สามารถสร้างแบบจำลองได้หรือมีการละพลวัตบางส่วนไปเพื่อให้ได้แบบจำลองที่ง่ายต่อการออกแบบตัวควบคุม ให้นิยามของเสถียรภาพคงทนซึ่งนำไปสู่เงื่อนไขอสมการเมทริกซ์ เราพบว่าปัญหาการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีคงทนมีเงื่อนไขแบบซึ่งเป็นอสมการเมทริกซ์ไม่เชิงเส้นเช่นเดียวกับปัญหาสมรรถนะ $\mathcal{H}_\infty$

บทที่ 6 นำเสนอตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาหนึ่งสัญญาณเข้าหนึ่งสัญญาณออกและระบบหลายสัญญาณเข้าหลายสัญญาณออกเพื่อทำให้ระบบมีเสถียรภาพ สุดท้ายเราออกแบบตัวควบคุมพีไอดีสำหรับระบบที่มีความไม่แน่นอน

7.2 ข้อเสนอแนะ

เนื่องจากวิธีการเชิงตัวเลขที่เราใช้ในการแก้ปัญหาอสมการเมทริกซ์ไม่คอนเวกซ์คือวิธีการทำซ้ำแบบคู่กันซึ่งสามารถใช้ได้กับระบบที่ไม่มีเมทริกซ์ D_p กล่าวคือ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_p x + B_p u \\ y &= C_p x\end{aligned}$$

ทำให้วิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่เรานำเสนอมีข้อจำกัด นอกจากนั้นตัวพารามิเตอร์ T ของตัวควบคุมดีซึ่งจำเป็นจะต้องมีการกำหนดค่าก่อนการออกแบบค่าที่กำหนดมีผลกระทบต่อการลู่เข้า โดยเฉพาะในกรณีที่พารามิเตอร์นี้เป็นเมทริกซ์ ในวิทยานิพนธ์นี้ยังต้องอาศัยการปรับจูนค่ายังไม่สามารถหาค่าที่ดีที่สุดสำหรับพารามิเตอร์ T ได้

รายการอ้างอิง

1. K. J. Åström, H. Panagopoulos, and T. Hägglund, "Design of PI Controllers based on Non-Convex Optimization," *Automatica*, 34, 5, (1998): 585-601.

2. M. Ge, M. Chiu, and Q. Wang, "Robust PID Controller Design via LMI Approach," *Journal of Process*, 12, 3, (2002): 3-13.

3. Y. Cao, J. Lam, and Y. Sun, "Static Output Feedback Stabilization: An ILMI Approach," *Automatica*, 34, 12, (1998): 1641-1645.

4. A. Poncela and W. Schmitendorf, "Design of a Tuned Mass Damper for Seismic Excited Building via $\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Control," *International Conference on Control Applications*, (1998): 663-667.

5. T. Iwasaki, "The Dual Iteration for Fixed-Order Control," *IEEE Trans. Aut. Control*, 44, 4, (1999): 783-788.

6. A. Fujimori, "Optimization of Static Output Feedback Using Substitutive LMI Formulation," *IEEE Trans. Aut. Control*, 49, 6, (2004): 995-999.

7. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory.* Philadelphia: SIAM, 1994.

8. S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control Analysis and Design.* England: JOHN WILEY & SONS, 1996.

9. K. J. Åström and T. Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning.* Research Traingle Park, NC: Instrument Society of America, 1995.

10. Y. Cao, J. Lam, and Y. Sun, "Simultaneous Stabilization via Static Output Feedback and State Feedback," *IEEE Trans. Aut. Control*, 44, 6, (1999): 1277-1282.

11. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox for Use with MATLAB.* Natick, MA: The MathWorks, 1995.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ชุดคำสั่งในการคำนวณ

ภาคผนวก ก. จะนำเสนอชุดคำสั่งสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ ชุดคำสั่งดังกล่าวเป็นรูทีน (routine) ในโปรแกรม MATLAB และ YALMIP โดยใช้ชุดคำสั่งใน LMI Control Toolbox [11] ซึ่งแก้ปัญหาโดยใช้วิธีจุดภายใน (interior point method)

ก.1 วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหาการทำให้ระบบมีเสถียรภาพ

```
%--------------------------The Dual Iteration-------------------------------------
%This iteration is designed to solve stability problems for linear
%time-invariant plants with multiple-input multiple-output.
%This program calls two subprogarms FixK and FixF.
%To run the dual iteration,we must supply
% 1. The matrices Ap, Bp, Cp used to describe the dynamic system.
% 2. The prespecified parameter T.

%Returned outputs consist of
% 1. L_solution containing Kp, Ki and Kd controller parameters.
% 2. gamma_solution saving optimal costs at each iterations.

function[gamma_solution,L_solution] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T)
[r_Ap,c_Ap] = size(Ap);
[r_Bp,c_Bp] = size(Bp);
[r_Cp,c_Cp] = size(Cp);

%Defining A B and C matrices consising of the states of controller.
A = [  Ap      zeros(r_Ap,r_Cp)    zeros(r_Ap,r_Cp)    ;

     -Cp      zeros(r_Cp,r_Cp)    zeros(r_Cp,r_Cp)    ;

    inv(T)*Cp  zeros(r_Cp,r_Cp)      -inv(T)*eye(r_Cp)];


B = [       Bp        ;

      zeros(r_Cp,c_Bp)  ;

      zeros(r_Cp,c_Bp)  ];


C = [     -Cp                zeros(r_Cp,r_Cp)       zeros(r_Cp,r_Cp) ;

      zeros(r_Cp,r_Ap)           eye(r_Cp)          zeros(r_Cp,r_Cp) ;

        -inv(T)*Cp           zeros(r_Cp,r_Cp)       inv(T)*eye(r_Cp) ];
```

```
%-------------------------------------------------------------------------------------
%Computing X which is nearest optimal X.
[r_A,c_A] = size(A);
[r_B,c_B] = size(B);
[r_C,c_C] = size(C);
B_com = null(B','r')';
C_com = null(C,'r')';

setlmis([])
X = lmivar(1,[r_A 1]);
Y = lmivar(1,[r_A 1]);
%Define [X I;I Y] > 0
lmi_1 = newlmi;
lmiterm([-lmi_1 1 1 X],1,1);
lmiterm([-lmi_1 1 2 0],eye(r_A));
lmiterm([-lmi_1 2 2 Y],1,1);

lmi_2 = newlmi;
lmiterm([lmi_2 1 1 X],B_com*A,B_com','s');

lmi_3 = newlmi;
lmiterm([lmi_3 1 1 Y],C_com,A*C_com','s');
lmi_initial = getlmis;
%Derive objective function
n = decnbr(lmi_initial);
c = zeros(n,1);
for j = 1:n
   [Xj,Yj] = defcx(lmi_initial,j,X,Y);
   c(j)   = trace(Xj) + trace(Yj);
end
[c_opt,V_opt] = mincx(lmi_initial,c);
X = dec2mat(lmi_initial,V_opt,X);

%Determining K initial matrix by means of X obtaining from the previous computation.
setlmis([])
K = lmivar(2,[c_B r_A]);

lmiterm([1 1 1 0],(A*X + X*A'));
lmiterm([1 1 1 K],B,X,'s');
lmisys = getlmis;
[tmin,Kdec] = feasp(lmisys);
K = dec2mat(lmisys,Kdec,K);
%--------------------------------------------------------------------------

%Iterating for desired or minimized gamma

[gamma_hat,F,iter_tmin_F(1)] = Fixk(A,B,C,K);
[gamma,X_opt,K,iter_tmin_K(1)] =FixF(A,B,C,F);

ess = 1;
i = 1;
tmin_F = iter_tmin_F(1);
tmin_K = iter_tmin_K(1);
iter_gamma(1) = gamma;
while (ess > 0.001) & (i < 100) & (tmin_F <= 0) & (tmin_K <= 0) & (gamma > 0)
     [gamma_hat,F,tmin_F] = Fixk(A,B,C,K);
     if (tmin_F <= 0)
          [gamma_new,X_opt_new,K,tmin_K] = FixF(A,B,C,F);
```

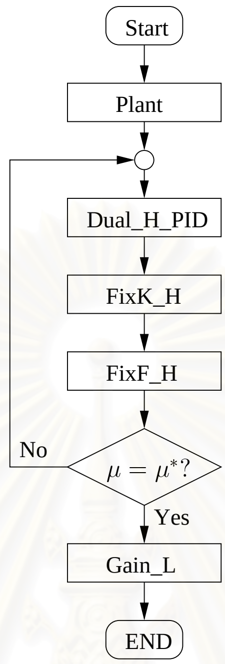
```
            ess = abs((gamma_new - gamma)/gamma_new)
            gamma = gamma_new;
            i = i + 1;
            iter_gamma(i) = gamma;
            iter_tmin_F(i) = tmin_F;
            iter_tmin_K(i) = tmin_K;
            iteration = i
            if (tmin_K <= 0)
               X_opt = X_opt_new;
            end
        end
end
if gamma < 0
   L = sdpvar(c_B,r_C);
   eq_4 = (A + B*L*C)*X_opt + X_opt*(A + B*L*C)' - gamma*X_opt;
   constraint_eq_4 = set(eq_4 < 0) ;
   solvesdp(constraint_eq_4);
   L_solution = double(L);
   gamma_solution = gamma;
else
   gamma_solution = gamma;
   L_solution = zeros(c_B,r_C);
end
```

โปรแกรมที่ผ่านมาเป็นโปรแกรมหลักในการคำนวณและเรียกสองโปรแกรมย่อยคือ FixK และ FixF

```
%--------------------------------FixK---------------------------------------------
%This is a subprogram designed to compute F while K is fixed.
%A, B, C and K are supplied as input data.
%The subprogram gives F and optimal gamma

function[gamma_hat,F_feasible,tmin_F] = Fixk(A,B,C,K)
[r_A,c_A] = size(A);
[r_B,c_B] = size(B);
[r_C,c_C] = size(C);
C_com = null(C,'r')';

setlmis([])
Y = lmivar(1,[r_A 1]);
%Defining Y > I
lmi_1 = newlmi;
lmiterm([-lmi_1 1 1 Y],1,1);
lmiterm([lmi_1 1 1 0],1);
%Defining Y*(A + BK) + (A + BK)'*Y < t*Y
LFC_1 = newlmi;
lmiterm([LFC_1 1 1 Y],1,(A + B*K),'s');
lmiterm([-LFC_1 1 1 Y],1,1);
%Define C_com(YA + A'Y)C_com' < tC_comYC_com'
LFC_2 = newlmi;
lmiterm([LFC_2 1 1 Y],C_com,A*C_com','s');
lmiterm([-LFC_2 1 1 Y],C_com,C_com');
lmi_K = getlmis;

[gamma_hat,y_opt] = gevp(lmi_K,2);
Y_opt = dec2mat(lmi_K,y_opt,Y);
%Computing F
setlmis([]);
sigma = lmivar(1,[1 1]);
```

```
F_con = newlmi;
lmiterm([F_con 1 1 0],(Y_opt*A + A'*Y_opt - gamma_hat*Y_opt));
lmiterm([F_con 1 1 sigma],-1,C'*C);
lmi_solve_sigma = getlmis;
[tmin_F,sigma_decision] = feasp(lmi_solve_sigma);
sigma_matrix = dec2mat(lmi_solve_sigma,sigma_decision,sigma);
F_feasible = (-sigma_matrix/2)*inv(Y_opt)*C';

%------------------------------FixF--------------------------------------

%This is a subprogram designed to compute K while F is fixed.
%A, B, C and F are supplied as input data.
%The subprogram gives K  optimal X and gamma

function[gamma,X_opt,K_feasible] = FixF(A,B,C,F)
[r_A,c_A] = size(A);
[r_B,c_B] = size(B);
[r_C,c_C] = size(C);
B_com = null(B','r')';

setlmis([]);
X = lmivar(1,[r_A 1]);
%Defining X > I
lmi_1 = newlmi;
lmiterm([-lmi_1 1 1 X],1,1);
lmiterm([lmi_1 1 1 0],1);
%Defining (A + FC)X + X(A + FC)' < tX
LFC_1 = newlmi;
lmiterm([LFC_1 1 1 X],(A + F*C),1,'s');
lmiterm([-LFC_1 1 1 X],1,1);
%Defining B_com(AX + XA')B_com' < tB_comXB_com'
LFC_2 = newlmi;
lmiterm([LFC_2 1 1 X],B_com*A,B_com','s');
lmiterm([-LFC_2 1 1 X],B_com,B_com');
lmi_F = getlmis;

[gamma,x_opt] = gevp(lmi_F,2);
X_opt = dec2mat(lmi_F,x_opt,X);

% Computing K
setlmis([]);
sigma = lmivar(1,[1 1]);
K_con = newlmi;
lmiterm([K_con 1 1 0],(A*X_opt + X_opt*A' - gamma*X_opt));
lmiterm([K_con 1 1 sigma],-1,B*B');
lmi_solve_sigma = getlmis;
[tmin_K,sigma_decision] = feasp(lmi_solve_sigma);
sigma_matrix = dec2mat(lmi_solve_sigma,sigma_decision,sigma);
K_feasible = (-sigma_matrix/2)*B'*inv(X_opt);
```

ก.2 วิธีการทำซ้ำแบบคู่กันสำหรับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$



รูปที่ ก.1: แผนภูมิสายงานการคำนวณพารามิเตอร์ของพีไอดี

โปรแกรมวิธีการทำซ้ำสำหรับปัญหา $\mathcal{H}_\infty$ อธิบายโดยแผนภูมิสายงานที่ ก.1 โดยเริ่มจากการคำนวณเมทริกซ์พลวัตซึ่งรวมสถานะของตัวควบคุมด้วยโดยโปรแกรมย่อย Plant จากนั้นเริ่มการทำซ้ำด้วยสามโปรแกรมย่อยคือ Dual_H_PID, FixK และ FixF เพื่อคำนวณค่า μ ที่ต้องการ สุดท้ายเราใช้โปรแกรมย่อย Gain_L สำหรับการคำนวณเมทริกซ์ L ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดี โปรแกรมทั้งหมดแสดงด้านล่าง

Plant.m

```
%----------------------------------Plant-----------------------------------
%This subprogram defines new matrieces (A, B1, B2, C1, and C2) containing
%state variables of controller.

function[A,B1,B2,C1,C2] = plant(Ap,Bp1,Bp2,Cp1,Cp2,T)
[r_Ap,c_Ap]   = size(Ap);
[r_Bp1,c_Bp1] = size(Bp1);
[r_Bp2,c_Bp2] = size(Bp2);
[r_Cp1,c_Cp1] = size(Cp1);
[r_Cp2,c_Cp2] = size(Cp2);

A = [   Ap      zeros(r_Ap,r_Cp2)      zeros(r_Ap,r_Cp2)   ;

     -Cp2     zeros(r_Cp2,r_Cp2)     zeros(r_Cp2,r_Cp2)  ;

   inv(T)*Cp2  zeros(r_Cp2,r_Cp2)     -inv(T)*eye(r_Cp2)  ];
```

```
B1 = [     Bp1            ;

       zeros(r_Cp2,c_Bp1)  ;

       zeros(r_Cp2,c_Bp1)  ];

B2 = [     Bp2            ;

       zeros(r_Cp2,c_Bp2)  ;

       zeros(r_Cp2,c_Bp2)  ];

C1 = [  Cp1    zeros(r_Cp1,r_Cp2)     zeros(r_Cp1,r_Cp2)  ];

C2  = [       -Cp2           zeros(r_Cp2,r_Cp2)       zeros(r_Cp2,r_Cp2)  ;

       zeros(r_Cp2,c_Cp2)        eye(r_Cp2)            zeros(r_Cp2,r_Cp2)  ;

          -inv(T)*Cp2        zeros(r_Cp2,r_Cp2)       inv(T)*eye(r_Cp2)   ];
```

Dual_H_PID.m

```
%---------------------------Dual_H_PID-------------------------------------
%This program iterates to find the desired objective cost.

function[K_feas] = Dual_H_PID(A,B1,B2,C1,C2)
[r_A,c_A]   = size(A);
[r_B1,c_B1] = size(B1);
[r_B2,c_B2] = size(B2);
[r_C1,c_C1] = size(C1);
[r_C2,c_C2] = size(C2);
Ca = [C2' ; zeros(c_B1,r_C2) ; zeros(r_C1,r_C2) ];
Ba = [B2  ; zeros(r_C1,c_B2) ; zeros(c_B1,c_B2) ];
B_com = null(Ba','r')';
C_com = null(Ca','r')';

X = sdpvar(r_A,c_A);
Y = sdpvar(r_A,c_A);
gamma = sdpvar(1,1);
gamma = 100;

F1 = [X eye(r_A);eye(r_A) Y];

F2 = [ (Y*A+A'*Y)          Y*B1                  C1'                         ;

       B1'*Y          -gamma*eye(c_B1)     zeros(c_B1,r_C1)     ;

         C1           zeros(r_C1,c_B1)     -gamma*eye(r_C1)     ];

F3 = [ (A*X + X*A')          B1                X*C1'                       ;

          B1'      -gamma*eye(c_B1)       zeros(c_B1,r_C1)       ;

         C1*X       zeros(r_C1,c_B1)     -gamma*eye(r_C1)    ];

constraint = set( X >0 ) + set(Y > 0) + set(F1 >=0) + set(C_com*F2*C_com' < 0) + set(B_com*F3*B_com' < 0 );
```

```
solvesdp(constraint,trace(X+Y));
X_feas = double(X);

%Solving K using X_feas
K = sdpvar(c_B2,r_A);
Fk = [((A + B2*K)*X_feas + X_feas*(A + B2*K)')     B1              X_feas*C1'      ;

                B1'                  -gamma*eye(c_B1)      zeros(c_B1,r_C1)             ;

              C1*X_feas                zeros(r_C1,c_B1)      -gamma*eye(r_C1)       ];

cons_k = set(Fk < 0);
solvesdp(cons_k);
K_feas = double(K);
```

FixK_H.m

```
%---------------------------------FixK_H-----------------------------------
%This subprogram is used to compute F while K is fixed

function[gamma_1,F_feas] = FixK_H(A,B1,B2,C1,C2,K)
[r_A,c_A]   = size(A);
[r_B1,c_B1] = size(B1);
[r_B2,c_B2] = size(B2);
[r_C1,c_C1] = size(C1);
[r_C2,c_C2] = size(C2);
Ca = [C2' ; zeros(c_B1,r_C2) ; zeros(r_C1,r_C2) ];
C_com = null(Ca','r')';

Y = sdpvar(r_A,c_A);
gamma = sdpvar(1,1);

F1 = [  Y*(A+B2*K)+(A+B2*K)'*Y           Y*B1               C1'            ;

             B1'*Y           -gamma*eye(c_B1)          zeros(c_B1,r_C1)    ;

               C1            zeros(r_C1,c_B1)         -gamma*eye(r_C1)    ];


F2 = [ (Y*A+A'*Y)           Y*B1             C1'                  ;

      B1'*Y         -gamma*eye(c_B1)     zeros(c_B1,r_C1)    ;

        C1         zeros(r_C1,c_B1)     -gamma*eye(r_C1)    ];

constraint = set(Y > 0 ) + set(F1 < 0) +  set(C_com*F2*C_com' < 0);
solvesdp(constraint,gamma);
gamma_1 = double(gamma);
Y_feas  = double(Y);
%Determining F
F = sdpvar(r_A,r_C2);

Ff = [ (Y_feas*(A + F*C2) + (A + F*C2)'*Y_feas)           Y*B1               C1'          ;

                  B1'*Y                   -gamma_1*eye(c_B1)      zeros(c_B1,r_C1)     ;

                   C1                    zeros(r_C1,c_B1)       -gamma_1*eye(r_C1)     ];
```

```
 cons_F = set(Ff< 0);
 solvesdp(cons_F);
 F_feas = double(F);
```

FixF_H.m

```
%---------------------------------FixF_H-----------------------------------
%This subprogram is used to compute K while F is fixed

function[gamma_2,K_feas,X_feas] = FixF_H(A,B1,B2,C1,C2,F)
[r_A,c_A]   = size(A);
[r_B1,c_B1] = size(B1);
[r_B2,c_B2] = size(B2);
[r_C1,c_C1] = size(C1);
[r_C2,c_C2] = size(C2);
Ba = [B2  ; zeros(r_C1,c_B2) ; zeros(c_B1,c_B2) ];
B_com = null(Ba','r')';

X = sdpvar(r_A,c_A);
gamma = sdpvar(1,1);

F1 = [  ((A+F*C2)*X + X*(A+F*C2)')      B1               X*C1'          ;

               B1'          -gamma*eye(c_B1)      zeros(c_B1,r_C1)      ;

             C1*X            zeros(r_C1,c_B1)     -gamma*eye(r_C1)    ];

F2 = [  (A*X + X*A')           B1               X*C1'                   ;

        B1'          -gamma*eye(c_B1)      zeros(c_B1,r_C1)     ;

       C1*X            zeros(r_C1,c_B1)     -gamma*eye(r_C1)    ];


constraint = set( X > 0 ) + set(F1 < 0) +  set(B_com*F2*B_com' < 0);
solvesdp(constraint,gamma);
gamma_2 = double(gamma);
X_feas  = double(X);

%Determine K
K = sdpvar(c_B2,r_A);
Fk = [((A + B2*K)*X_feas + X_feas*(A + B2*K)')     B1               X_feas*C1'    ;

              B1'                 -gamma_2*eye(c_B1)      zeros(c_B1,r_C1)         ;

             C1*X_feas                zeros(r_C1,c_B1)      -gamma_2*eye(r_C1)    ];

cons_k = set(Fk < 0);
solvesdp(cons_k);
K_feas = double(K);
```

Gain_L.m

```
%------------------------------Gain_L--------------------------------------
%This subprogram is designed to compute L containing PID parameters

function[L_feas] = Gain_L(A,B1,B2,C1,C2,X_feas,gamma_feas)
```

```
[r_A,c_A]   = size(A);
[r_B1,c_B1] = size(B1);
[r_B2,c_B2] = size(B2);
[r_C1,c_C1] = size(C1);
[r_C2,c_C2] = size(C2);

L = sdpvar(c_B2,r_C2);

F1 = [  ((A + B2*L*C2)*X_feas + X_feas*(A + B2*L*C2)')         B1                  X_feas*C1'     ;

              B1'                               -gamma_feas*eye(c_B1)          zeros(c_B1,r_C1)          ;

            C1*X_feas                               zeros(r_C1,c_B1)          -gamma_feas*eye(r_C1)   ];


constraint = set(F1 < 0)  ;
solvesdp(constraint,L(1,1)*L(1,1) + L(1,2)*L(1,2) + L(1,3)*L(1,3));

L_feas  = double(L);
%------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

ภาคผนวก ข

ชุดคำสั่งสำหรับตัวอย่าง

ภาคผนวก ข. จะรวมชุดคำสั่งสำหรับตัวอย่างการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ ในแต่ละตัวอย่างนอกเหนือจากการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีแล้วยังรวมการจำลองผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอ้างอิงด้วย

ข.1 ตัวอย่างที่ 1.

```
%This progarm is designed to compute controller parameters and step response.
%We show the effect of changing parameter b.
function[Kp,Ki,Kd] = ex1output()
Ap = [0 1 0;0 0 1;-2 1 3];
Bp = [0;0;1];
Cp = [1 2 1];
T = 0.01;
Dp = 0;
[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T);
Kp = L_solution(1,1);
Ki = L_solution(1,2);
Kd = L_solution(1,3);
Ac = [0 0;0 -inv(T)];
Bc = [1;-inv(T)];
Cc = [Ki Kd*inv(T)];
Dc = Kp + Kd*inv(T);
[Ai,Bi,Ci,Di] = feedback(Ap,Bp,Cp,Dp,Ac,Bc,Cc,Dc,-1);
t = 0:0.01:7;
input = ones(length(t),1);
Aff = 0;
Bff = 1;
Cff = Ki;
Dff = 1*Kp;

[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on

Dff = 0.8*Kp;
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on

Dff = 0*Kp;
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on
%---------------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
%This program is designed to compute controller parameters and control signal.
function[Kp,Ki,Kd] = ex1control()
Ap = [0 1 0;0 0 1;-2 1 3];
Bp = [0;0;1];
Cp = [1 2 1];
T = 0.01;
Dp = 0;

[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T);
Kp = L_solution(1,1);
Ki = L_solution(1,2);
Kd = L_solution(1,3);
Ac = [0 0;0 -inv(T)];
Bc = [1;-inv(T)];
Cc = [Ki Kd*inv(T)];
Dc = Kp + Kd*inv(T);
t = 0:0.01:7;
input = ones(length(t),1);
Aff = 0;
Bff = 1;
Cff = Ki;
Dff = 1*Kp;

[As,Bs,Cs,Ds] = series(Ap,Bp,Cp,Dp,Ac,Bc,Cc,Dc);
[Aui,Bui,Cui,Dui] = feedback(0,0,0,1,As,Bs,Cs,Ds,-1);
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
hold on
Dff = 0.8*Kp;
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
hold on
Dff = 0*Kp;
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
```

ข.2 ตัวอย่างที่ 2.

```
%This program is used to compute controller parameters and control signal.
%We change the parameter b to show their effects.
function[Kp,Ki,Kd] = ex2output()
Ap = [0 1;1 0];
Bp = [1;0];
Cp = [1 15];
T = 0.05;
Dp = 0;

[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T)
Kp = L_solution(1,1);
Ki = L_solution(1,2);
Kd = L_solution(1,3);
Ac = [0 0;0 -inv(T)];
Bc = [1;-inv(T)];
Cc = [Ki Kd*inv(T)];
Dc = Kp + Kd*inv(T);

[Ai,Bi,Ci,Di] = feedback(Ap,Bp,Cp,Dp,Ac,Bc,Cc,Dc,-1);
t = 0:0.001:2;
input = ones(length(t),1);

Aff = 0;
Bff = 1;
Cff = Ki;
Dff = 1*Kp;
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
eig(Acl)
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on

Dff = 0.5*Kp;
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on
\newpage
Dff = 0*Kp;
[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ai,Bi,Ci,Di);
lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,input,t)
hold on
%-------------------------------------------------------------------------------------------------------
\vpace{3mm}
%This program is designed to compute controller parameters and control signal.
function[Kp,Ki,Kd] = ex2control()
Ap = [0 1;1 0];
Bp = [1;0];
Cp = [1 15];
T = 0.05;
Dp = 0;

[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T);
Kp = L_solution(1,1);
Ki = L_solution(1,2);
Kd = L_solution(1,3);
Ac = [0 0;0 -inv(T)];
Bc = [1;-inv(T)];
```

```
Cc = [Ki Kd*inv(T)];
Dc = Kp + Kd*inv(T);

t = 0:0.001:2;
input = ones(length(t),1);

Aff = 0;
Bff = 1;
Cff = Ki;
Dff = 1*Kp;

[As,Bs,Cs,Ds] = series(Ap,Bp,Cp,Dp,Ac,Bc,Cc,Dc);
[Aui,Bui,Cui,Dui] = feedback(0,0,0,1,As,Bs,Cs,Ds,-1);
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
hold on

Dff = 0.5*Kp;
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
hold on

Dff = 0*Kp;
[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Aui,Bui,Cui,Dui);
lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,input,t)
hold on
```

ข.3 ตัวอย่างที่ 3.

```
%This program is used to compute controller parameters and step response for ysp = [1 1].
function[Kp,Ki,Kd] = ex3output()
Ap = [-0.0366 0.0271 0.0188 -0.4555;0.0482 -1.01 0.0024 -4.0208;0.1002 0.3681 -0.707 1.42;0 0 1 0]
Bp = [0.4422 0.1761;3.5446 -7.5922;-5.52 4.49;0 0]
Cp = [1 0 0 0;0 1 0 0 ]
Dp = [0 0;0 0]
T = [0.05 0;0 0.01]
[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T)
Kp = L_solution(1:2,1:2);
Ki = L_solution(1:2,3:4);
Kd = L_solution(1:2,5:6);

Ak = [zeros(2,2) zeros(2,2);zeros(2,2) -inv(T)];
Bk = [eye(2);-inv(T)];
Ck = [Ki Kd*inv(T)];
Dk = Kp + Kd*inv(T);

[Ac,Bc,Cc,Dc] = feedback(Ap,Bp,Cp,Dp,Ak,Bk,Ck,Dk,-1);
Aff = zeros(2,2);
Bff = eye(2);
Cff = Ki;
Dff = 0*Kp;

[Acl,Bcl,Ccl,Dcl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Ac,Bc,Cc,Dc);
eig(Acl)
t = 0:0.001:100;
u = ones(length(t),2);
[y,x] = lsim(Acl,Bcl,Ccl,Dcl,u,t);
plot(t,y,t,u(:,1))
%--------------------------------------------------------------------------------------------------------------
%This program is designed to compute controller parameters and control signal.
function[Kp,Ki,Kd] = ex3control()
Ap = [-0.0366 0.0271 0.0188 -0.4555;0.0482 -1.01 0.0024 -4.0208;0.1002 0.3681 -0.707 1.42;0 0 1 0]
Bp = [0.4422 0.1761;3.5446 -7.5922;-5.52 4.49;0 0]
Cp = [1 0 0 0;0 1 0 0 ]
Dp = [0 0;0 0]
T = [0.05 0;0 0.01]
[gamma_solution,L_solution,iter_gamma,iter_tmin_K,iter_tmin_F] = Dual_PID(Ap,Bp,Cp,T)
Kp = L_solution(1:2,1:2);
Ki = L_solution(1:2,3:4);
Kd = L_solution(1:2,5:6);

Ak = [zeros(2,2) zeros(2,2);zeros(2,2) -inv(T)];
Bk = [eye(2);-inv(T)];
Ck = [Ki Kd*inv(T)];
Dk = Kp + Kd*inv(T);

[Aupc,Bupc,Cupc,Dupc] = series(Ap,Bp,Cp,Dp,Ak,Bk,Ck,Dk);

As = zeros(2,2)
Bs = zeros(2,2)
Cs = zeros(2,2)
Ds = eye(2)

[Au,Bu,Cu,Du] = feedback(As,Bs,Cs,Ds,Aupc,Bupc,Cupc,Dupc,-1);
Aff = zeros(2,2);
```

```
Bff = eye(2);
Cff = Ki;
Dff = 0*Kp;

[Aucl,Bucl,Cucl,Ducl] = series(Aff,Bff,Cff,Dff,Au,Bu,Cu,Du);
t = 0:0.001:100;
unit = ones(length(t),2);
[u,x] = lsim(Aucl,Bucl,Cucl,Ducl,unit,t);
plot(t,u)
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายสังวาล บกสุวรรณ เกิดเมื่อวันที่ 7 กันยายน 2518 ที่อำเภอหลังสวน จังหวัดชุมพรเป็นบุตรนายสวิน และนางเสรี บกสุวรรณ สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม จากภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยี พระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2545 หลังจากนั้นศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สังกัดห้องปฏิบัติการวิจัยระบบควบคุมเมื่อปีการศึกษา 2546