

การศึกษาเทคนิคการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด  
ในภาพที่มีสัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลีแบบคูณ



นายพสุ บุญวิสุทธิ

## สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

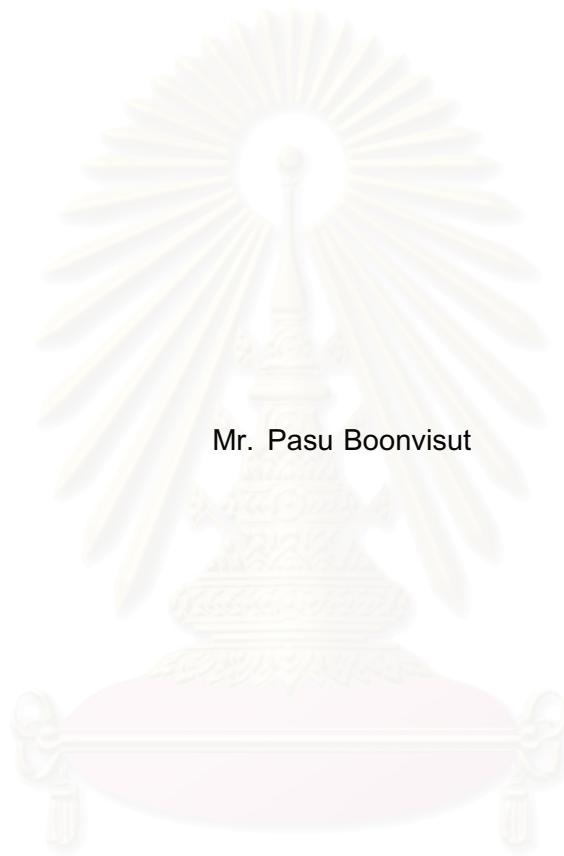
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2549

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

INVESTIGATION OF SUPER-RESOLUTION TECHNIQUES IN IMAGE  
WITH MULTIPLICATIVE RAYLEIGH NOISE



Mr. Pasu Boonvisut

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering Program in Electrical Engineering

Department of Electrical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

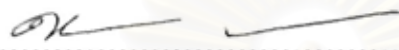
Academic Year 2006

Copyright of Chulalongkorn University

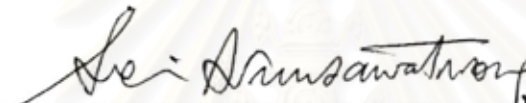
หัวข้อวิทยานิพนธ์ การศึกษาเทคนิคการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดในภาพที่มีสัญญาณรบกวน  
ชนิดเรย์ลีแบบคูณ  
โดย นายพสุ บุญวิสุทธิ  
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า  
อาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง

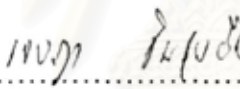
---

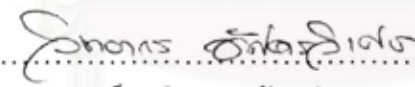
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบัณฑิต


  
..... คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร.ติเรก ลาวัณยศิริ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

  
..... ประธานกรรมการ  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุชิน อรุณสวัสดิ์วงศ์)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษา  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง)

  
..... อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม  
(อาจารย์ ดร.วิทยากร อัครวิเศษ)

  
..... กรรมการ  
(ดร.สรพงษ์ มฤคทัต)

สํานักวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พสุ บุญวิสุทธิ : การศึกษาเทคนิคการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดในภาพที่มีสัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลีแบบคูณ (INVESTIGATION OF SUPER-RESOLUTION TECHNIQUES IN IMAGE WITH MULTIPLICATIVE RAYLEIGH NOISE). อ.ที่ปรึกษา : ผศ. ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง, 85 หน้า.

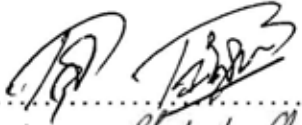
การเพิ่มความละเอียดเชิงพื้นที่ของชุดภาพความละเอียดต่ำโดยใช้กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่มีการใช้การเรกูลาร์ไรซ์นั้นเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ ปัญหาในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดถูกกำหนดในรูปการหาค่าที่น้อยที่สุดของฟังก์ชันมูลค่าที่ประกอบด้วยพจน์ค่าตกค้างและพจน์การเรกูลาร์ไรซ์ พจน์ค่าตกค้างนั้นมักถูกกำหนดอยู่ในรูปฟังก์ชันที่ใช้ norms ในปริภูมิ  $L^2$  ซึ่งจะแสดงความต่างแย้งระหว่างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่คาดหวังไว้กับภาพความละเอียดต่ำที่สังเกตการณ์ ในขณะที่พจน์การเรกูลาร์ไรซ์ที่ตามวิธีของติโฮนอฟนั้นช่วยถ่วงดุลกับการหาผลเฉลยที่มีความหมายจากปัญหาที่ตั้งไว้แล้ว ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทดลองสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยใช้การเรกูลาร์ไรซ์จากชุดภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ซึ่งแตกต่างจากงานวิจัยส่วนใหญ่ที่มักใช้สมมติฐานว่าสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณรบกวนเกาส์สีขาวแบบบวก การศึกษาายังแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันมูลค่าไม่เชิงเส้นที่ใช้ norms บนปริภูมิ  $L^1$  นั้นมีประสิทธิภาพมากกว่าในการลดทอนผลจากการรบกวนของสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังแสดงให้เห็นว่ากระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยใช้ norms บนปริภูมิ  $L^1$  นั้นสามารถหาผลเฉลยได้เร็วยิ่งขึ้นโดยใช้การทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้นเช่นแบบของ Polak-Ribière นอกจากนี้สำหรับปัญหาความละเอียดสูงยิ่งยวดแบบที่เป็นปัญหอันดั้มไม่เพียงพอหรืออาจจะกล่าวได้ว่าจำนวนภาพความละเอียดต่ำมีจำนวนน้อยมาก โดยการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟในอันดั้มที่สองนั้นมีประสิทธิภาพดีกว่าอันดั้มที่ศูนย์ที่ใช้โดยทั่วไป ดังนั้นงานวิจัยนี้ยังได้เสนอเทคนิคใหม่ที่นำตัวกรองซาวีสกี-โกเลย์มาใช้เพื่อประมาณการหาอนุพันธ์ในพจน์การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดั้มที่สองอีกด้วย

## สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
สาขาวิชา ..... วิศวกรรมไฟฟ้า .....  
ปีการศึกษา ..... 2549 .....

ลายมือชื่อนิสิต .....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

  
Chetana Chay

##4870394621 : MAJOR ELECTRICAL ENGINEERING

KEYWORDS : IMAGE SUPER-RESOLUTION / REGULARIZATION / TIKHONOV REGULARIZATION / TOTAL VARIATION / BILATERAL-TOTAL VARIATION/ INVERSE PROBLEM

PASU BOONVISUT : INVESTIGATION OF SUPER-RESOLUTION TECHNIQUES IN IMAGE WITH MULTIPLICATIVE RAYLEIGH NOISE. THESIS ADVISOR : CHEDSADA CHINRUNREUNG, Ph.D., 85 pp.

Regularization based image super-resolution (SR) is an efficient method for increasing the resolution of a low resolution (LR) image sequence. In this technique, the SR problem is formulated as a minimization of a cost function consisting of the residual term and the regularization term. The residual term, usually expressed in 2-norm function, defines discrepancy between the expected high resolution (HR) image and the observation LR image while the regularization term, normally employing Tikhonov's definition, represents a trade-off for locating a meaningful solution from an ill-posed problem. In this thesis, we investigate the regularization based SR for image sequences corrupted with multiplicative Rayleigh noise, which is contrary to most the reported works where the corrupted noise is assumed to be the additive white Gaussian noise. The investigation shows that a nonlinear 1-norm cost function in SR problem is more effective in reducing the multiplicative Rayleigh noise. Our works also show that SR formulation employing the 1-norm cost function can be solved faster by using method of nonlinear conjugate gradient (CG) such as Polak-Ribière CG (PR-CG). Moreover, for extremely low rank deficient SR problems, where number of LR image data are severely small, we discover that the second-order Tikhonov regularization is more effective than the conventional zeroth-order one. Accordingly, we thus develop a new technique based on a Savitzky-Golay filter for approximating the derivative term in the second-order Tikhonov regularization.


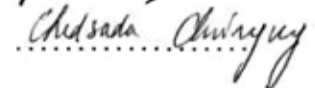
Department .... Electrical Engineering ....

Field of study ... Electrical Engineering ...

Academic year ..... 2006 .....

Student's signature

Advisor's signature



## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ถูกสร้างด้วยโปรแกรมเรียงพิมพ์ T<sub>E</sub>X และ I<sub>A</sub>T<sub>E</sub>X ขอขอบคุณ Donald E. Khuth ผู้ริเริ่มโปรแกรมเรียงพิมพ์นี้และแจกจ่ายเพื่อให้เป็นสาธารณะประโยชน์ ขอขอบคุณโปรแกรมที่ใช้ตัดคำภาษาไทย SWATH ของ คุณไพศาล เจริญพรสวัสดิ์ จากศูนย์คอมพิวเตอร์และอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ (NECTEC) และโปรแกรมตัดคำ ct<sub>t</sub>ex ที่พัฒนาโดยคุณวุฒิชัย อัมพรอร่ามเวทย์ จากโปรแกรมตัดคำดั้งเดิม tt<sub>t</sub>ex ของ ผศ.ดร.มานพ วงศ์สายสุวรรณ และได้แจกจ่ายให้ใช้กันได้อย่างเสรี และขอขอบคุณเนย-สิทธิพล พรรณวิไล ที่ได้สละเวลาช่วยกันแก้ไข รหัสต้นฉบับเพื่อเพิ่มคำศัพท์พิเศษที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ลงไป และแก้ไขให้สามารถคอมไพล์ได้บนระบบปฏิบัติการไมโครซอฟท์วินโดวส์ได้อย่างไม่มีปัญหา<sup>1</sup> ขอขอบคุณคุณเทพพิทักษ์ การุญบุญญานันท์ ผู้ดูแลชุดภาษาไทย thailatex ที่ได้แก้ไขข้อบกพร่องของชุดอักษรแห่งชาติ **ครุฑ** ตามคำขอร้องของข้าพเจ้าซึ่งใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้ใช้ endash และ emdash ได้อย่างถูกต้องทันเวลา<sup>2</sup> รวมถึงได้ตอบข้อสงสัยของข้าพเจ้ามาโดยตลอด ขอขอบคุณ พี่วาทัญญู คล้ายสงคราม และ พี่เขตต์ พิศุรมาชนิด ที่ได้สร้างแผ่นแบบวิทยานิพนธ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับ I<sub>A</sub>T<sub>E</sub>X นอกจากนี้แผ่นแบบดังกล่าวนี้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยังได้ใช้แผ่นแบบวิทยานิพนธ์จากที่เริ่มเขียนโดย อ. ดร. ชัชวาทย์ อาภรณ์แก้ว โดยที่ พี่ช้าง-มหิศร ว่องผาดิ ได้แก้ไขให้เป็นภาษาไทยและนำมามอบให้แก่ข้าพเจ้าพัฒนาต่อ นอกจากนี้ขอขอบคุณ เอ็ม-ศิริชัย พรสรายยุทธ ที่ได้ร่วมศึกษา I<sub>A</sub>T<sub>E</sub>X ในหลายประเด็น

สำหรับ คำศัพท์ และ คำทับศัพท์ ภาษาไทยต่าง ๆ ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ มาจากราชบัณฑิตยสถาน และโครงการอภิธานศัพท์สำหรับซอฟต์แวร์โอเพนซอร์ส (Glossary for Open Source Software: OSS Glossary)<sup>3</sup> จึงต้องขอขอบพระคุณมาในโอกาสนี้ด้วย

ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร. Peyman Milanfar จากมหาวิทยาลัยแคลิฟอร์เนียแห่งซานตาครุซ (University of California Santa Cruz) ที่ได้ส่งโปรแกรม MDSP<sup>4</sup> มาให้ศึกษากระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด ซึ่งทำให้สามารถนำมาใช้เปรียบเทียบผลกับวิธีในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ขอขอบคุณชิน-ณัฐพงศ์ ชินธเนศ ที่ได้จุดประกายเกี่ยวกับวิธีการสร้างตัวปฏิบัติการโดยนัย (implicit operator) แทนการใช้ตัวปฏิบัติการแบบเมทริกซ์ที่เหมาะสมกับระเบียบวิธีทำซ้ำเกรเดียนต์สังยุค (conjugate gradient) และแนะนำเอกสารทางวิชาการที่ดีให้ได้ศึกษา รวมถึงขอขอบคุณเบ-รัฐพล ทูลแสงนาม ที่ได้ร่วมกันศึกษาในประเด็นต่าง ๆ เกี่ยวกับกระบวนการเชิงเลข

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร. สุชิน อรุณสวัสดิ์ วงศ์ที่ให้คำแนะนำที่ดีเยี่ยมเกี่ยวกับกระบวนการทำซ้ำชนิดต่าง ๆ ที่เหมาะสมกับปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด รวมถึงคำแนะนำเกี่ยวกับการเขียนวิทยานิพนธ์ในบทที่ 3 และขอขอบพระคุณ ดร. สรรพฤทธิ์ มฤคทัต จากศูนย์คอมพิวเตอร์และอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ ที่ให้คำแนะนำเกี่ยวกับกระบวนการทำพลาที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด และได้ความคิดมาเขียนเรียบเรียงในบทที่ 2 ได้อย่างครบถ้วน รวมถึงวิธีการสร้างกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด ขอขอบพระคุณ ผศ. ดร. เจษฎา ชินรุ่งเรือง และอาจารย์ ดร. วิทยากร อัครวิเศษ ที่แนะนำแนวทางในการทำวิจัยและให้คำปรึกษาเกี่ยวกับการเรียนตลอดเวลาที่ศึกษาในระดับวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

<sup>1</sup>สามารถดาวน์โหลดรหัสต้นฉบับดังกล่าวของ ct<sub>t</sub>ex-win32 ได้ทางโปรโตคอล HTTP :

<http://bact.blogspot.com/2006/12/ctttx-130-win32-fixed.html>

<sup>2</sup>สามารถดาวน์โหลดรหัสต้นฉบับล่าสุดของ thailatex ได้ทางโปรโตคอล CVS :

`cvs -d :pserver:anonymous@linux.thai.net:/home/cvs co software/thailatex`

<sup>3</sup>สามารถเข้าถึงได้ทางโปรโตคอล HTTP : <http://www.opentle.org/oss glossary/index.php>

<sup>4</sup>สามารถขอได้จาก <http://www.cse.ucsc.edu/~milanfar/SR-Software.htm>

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย . . . . .	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ . . . . .	จ
กิตติกรรมประกาศ . . . . .	ฉ
สารบัญ . . . . .	ช
สารบัญตาราง . . . . .	ฌ
สารบัญรูป . . . . .	ญ
บทที่	
1 บทนำ . . . . .	1
1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา . . . . .	2
1.2 ขอบเขตวิทยานิพนธ์ . . . . .	3
1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ . . . . .	5
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ . . . . .	5
1.5 โครงสร้างวิทยานิพนธ์ . . . . .	5
2 แบบจำลองของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด . . . . .	7
2.1 แบบจำลองของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำหลายภาพ . . . . .	10
2.2 ปัญหากำลังสองน้อยที่สุด . . . . .	12
2.2.1 ระบบกำหนดมากเกินไป (Overdetermined system) . . . . .	12
2.2.2 ระบบกำหนดน้อยเกินไป (Underdetermined system) . . . . .	13
2.2.3 ระบบกำหนดพอดี (Square system) . . . . .	13
2.3 เมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพ . . . . .	13
2.3.1 การเปลี่ยนที่ตำแหน่ง . . . . .	14
2.3.2 การทำพรั . . . . .	15
2.3.3 การซ้กตัวอย่างลง . . . . .	18
2.4 นอร์มของปัญหา . . . . .	20
2.4.1 การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยปัญหาเป็นนอร์มบนปริภูมิ $L^2$ . . . . .	20
2.4.2 การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยปัญหาเป็นนอร์มบนปริภูมิ $L^1$ . . . . .	20
3 วิธีทำซ้ำที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด . . . . .	23
3.1 การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ (steepest descent) . . . . .	23
3.2 การค้นหาตามเส้น . . . . .	24
3.2.1 การค้นหาตามเส้นอย่างถูกต้องแม่นยำ . . . . .	26

3.2.2	การค้นหาค่าตามเส้นด้วยวิธีประมาณ . . . . .	27
3.3	เกรเดียนต์สังยุค (conjugate gradient) . . . . .	28
3.4	เกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น . . . . .	30
3.5	เกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้น . . . . .	31
3.5.1	การหาค่าระยะทางช่วงก้าว $\alpha_k$ เมื่อระบบเป็นแบบไม่เชิงเส้น . . . . .	32
3.5.1.1	การหาช่วงก้าวเริ่มต้นและช่วงก้าวต่อไป . . . . .	33
3.5.1.2	การประมาณช่วงของฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบควอดราติก . . . . .	33
3.5.1.3	การประมาณช่วงของฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบคิวบิก . . . . .	35
3.5.2	การหาค่า $\beta_k$ ด้วยวิธีการของ Fletcher-Reeves และ Polak-Ribière . . . . .	37
3.5.2.1	เกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves . . . . .	37
3.5.2.2	เกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière . . . . .	38
3.6	การใช้กระบวนการทำซ้ำกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด . . . . .	38
4	กระบวนการเรกูลาร์ไรซ์ . . . . .	41
4.1	การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟ . . . . .	44
4.1.1	การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์ . . . . .	48
4.1.2	การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับมากกว่าศูนย์ . . . . .	48
4.2	การเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวารีเอชัน . . . . .	49
4.2.1	การเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์รัล-โททลวารีเอชัน . . . . .	49
4.3	ผลของการใช้การเรกูลาร์ไรซ์แบบต่าง ๆ . . . . .	50
5	ผล การ สร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด จาก ภาพ ที่ ถูก ครอบ กว น ด้วย สัญญาณ ครอบ กว น ชนิด เรย์ลีแบบคุณ . . . . .	56
5.1	แบบจำลองการสร้างภาพความละเอียดต่ำที่ถูกครอบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคุณ . . . . .	57
5.2	กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่เหมาะสมกับภาพความละเอียดต่ำที่ถูกครอบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลี . . . . .	58
5.3	ผลการทดลองจากภาพที่ถูกครอบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคุณ . . . . .	59
6	บทสรุปและข้อเสนอแนะ . . . . .	65
6.1	บทสรุป . . . . .	65
6.2	ข้อเสนอแนะและปัญหาที่เกิดขึ้นในงานวิจัยนี้ . . . . .	65
6.3	สิ่งที่ควรทำในการทำงานวิจัยต่อไป . . . . .	66
	รายการอ้างอิง . . . . .	67
	<b>ภาคผนวก</b>	
	ภาคผนวก ก   ตัวกรองซาวิตสกี-โกเลย์ (Savitzky-Golay filter) . . . . .	72
	ภาคผนวก ข   ระบบที่ใช้ . . . . .	73
	ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ . . . . .	74



## สารบัญตาราง

	หน้า
2.1 ตารางแสดงรายละเอียดพารามิเตอร์และผลของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่ง ยวดตามรูปที่ 2.10 รายละเอียดของระบบที่ใช้อยู่ในภาคผนวก ข . . . . .	21
3.1 แสดง รายละเอียด การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง โดย เปรียบ เทียบ ด้วย วิธี ทำ ซ้ำ แบบต่าง ๆ บนฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ในอรัมบนปริภูมิ $L^1$ . . . . .	39
4.1 แสดง รายละเอียด การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง โดย เปรียบ เทียบ ด้วย วิธี ทำ ซ้ำ แบบต่าง ๆ บนฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ในอรัมบนปริภูมิ $L^1$ . . . . .	51
5.1 รายละเอียด ผลการจำลอง การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่ ใช้ ภาพ หลอน ความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ simpat . . . . .	60
5.2 รายละเอียด ผลการจำลอง การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่ ใช้ ภาพ หลอน ความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ squarevary . . . . .	60
5.3 รายละเอียด ผลการจำลอง การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่ ใช้ ภาพ หลอน ความ ละเอียด ต่ำ ที่ ถูก รบกวน ด้วย สัญญาณ รบกวน เรย์ลี แบบ คูณ invert- squarevary . . . . .	61

## สารบัญรูป

หน้า

2.1	ตัวอย่าง ภาพความละเอียดต่ำและภาพความละเอียดสูงที่เกิดจากการประมาณ ภาพความละเอียดต่ำภาพเดียว . . . . .	7
2.2	แนวคิดการนำภาพความละเอียดต่ำ (LR) มาใช้เพื่อประมาณภาพความละเอียดสูง (HR)	8
2.3	Degradation-Restoration Process . . . . .	8
2.4	แผนภาพแสดงแนวคิดการเกิดภาพความละเอียดต่ำจากภาพความละเอียดสูง . . . . .	9
2.5	แสดงกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงแบบย้อนกลับ . . . . .	9
2.6	ภาพแสดงตัวอย่าง การเปลี่ยนที่ของจุดภาพในกรณีที่มีเพียง การเลื่อนที่ด้วย เวกเตอร์เคลื่อนที่ $[1, 1]^T$ . . . . .	14
2.7	ภาพที่ผ่านการทำพรั้าโดยการใช้เงื่อนไขขอบเขตศูนย์และฟังก์ชันกระจายจุด . . . . .	17
2.8	ภาพที่ผ่านการชักตัวอย่างลงด้วยอัตราส่วนต่าง ๆ . . . . .	18
2.9	แสดงการทำงานของตัวปฏิบัติการ $D$ แสดงถึงการชักตัวอย่างลงของรูป ในขณะที่ ตัวปฏิบัติการ $D^T$ แสดงถึงการชักตัวอย่างขึ้นของรูป . . . . .	19
2.10	ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ norms ต่างกัน . . . . .	22
3.1	รูปแบบกำลังสองของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน . . . . .	24
3.2	คอนทัวร์ของฟังก์ชันซึ่งแสดงค่าต่ำสุด . . . . .	25
3.3	ค่าของระยะทางช่วงก้าวที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่าต่ำสุด . . . . .	26
3.4	แสดงช่วงของระยะก้าว $\alpha_k$ ที่ยอมรับได้ตามเงื่อนไขของ Armijo . . . . .	27
3.5	แสดงช่วงของระยะก้าว $\alpha_k$ ที่ยอมรับได้ตามเงื่อนไขของ Wolfe . . . . .	28
3.6	แสดงช่วงของระยะก้าว $\alpha_k$ ที่ยอมรับได้ตามเงื่อนไขของ Wolfe แบบผูกมัด . . . . .	29
3.7	การลู่เข้าของวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์เมื่อระบบเป็นเชิงเส้น และมีจุด เริ่มต้นที่ $x_0 = [-2, 2]^T$ . . . . .	29
3.8	การลู่เข้าของวิธีเกรเดียนต์สังยุค เมื่อมีระบบเป็นระบบเชิงเส้นและมีจุดเริ่มต้นที่ $x_0 = [-2, 2]^T, [-4, -4]^T, [2, -2]^T, [-3, 1]^T, [-2, 2]^T, [6, 4]^T$ และ $[4, -6]^T$ . . . . .	31
3.9	การประมาณค่าเส้นโค้งโดยใช้เส้นโค้งแบบควอดราติก . . . . .	34
3.10	การประมาณค่าเส้นโค้งโดยใช้เส้นโค้งแบบคิวบิก . . . . .	36
3.11	ผลการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยเปรียบเทียบเรื่องการทำซ้ำ . . . . .	40
4.1	ค่าของลอการิทึมของ norms ของระบบในสมการที่ 4.5 และ 4.6 . . . . .	42
4.2	ภาพแสดงบริเวณที่เป็นแก่นกลาง (kernel) ที่ทำให้คำตอบเป็นเวกเตอร์ศูนย์ภาพ (null vector) จากระบบตามสมการที่ 4.5 และ 4.6 . . . . .	43

4.3	ผลของการเรกูลาร์ไรซ์ผลเฉลย ตามสมการที่ 4.5 และ 4.6 โดยปรับค่าพารามิเตอร์ การเรกูลาร์ไรซ์ $\lambda$ ตั้งแต่ $1 \times 10^{-16}$ ถึง 1 . . . . .	45
4.4	แสดงผลเฉลยเมื่อเพิ่มผลของการเรกูลาร์ไรซ์ด้วยพารามิเตอร์ $\lambda$ โดยที่เมื่อ $\lambda = 0$ นั้นหมายความว่าไม่มีการเรกูลาร์ไรซ์ในระบบ . . . . .	47
4.5	ผลของแต่ละวิธีในการเรกูลาร์ไรซ์การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่สร้าง จากภาพความละเอียดต่ำจำนวน 5 ภาพ ในในรูปแบบที่ 4.5ข . . . . .	52
4.6	เปรียบเทียบค่า PSNR ของภาพที่สร้างจากกระบวนการสร้างภาพความละเอียด สูงยิ่งยวด โดยเรกูลาร์ไรซ์ด้วยการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่สอง ในแบบทั่ว ไปและแบบที่ใช้ตัวกรองของซาวิตสกี-โกเลย์ . . . . .	53
4.7	ตัวอย่างภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณโดยเปรียบเทียบ วิธีการเรกูลาร์ไรซ์ . . . . .	54
4.8	ตัวอย่างภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ . . . . .	55
5.1	ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูก รบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณ simpat . . . . .	62
5.2	ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปแบบที่ 5.1 . . . . .	62
5.3	ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูก รบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณ squarevary . . . . .	63
5.4	ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปแบบที่ 5.3 . . . . .	63
5.5	ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูก รบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณ invertsquarevary . . . . .	64
5.6	ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปแบบที่ 5.5 . . . . .	64

# บทที่ 1

## บทนำ

ในปัจจุบันการใช้ระบบคอมพิวเตอร์เพื่อวัตถุประสงค์ในการเก็บข้อมูล ในรูปแบบดิจิทัลเป็นสิ่งที่เป็น เพราะนอกจากประหยัดพื้นที่ใช้สอยแล้วยังสามารถใช้ประโยชน์จากการที่สามารถดัดแปลง ปรับแก้ไขข้อมูลเหล่านั้นเพื่อที่เพิ่มคุณภาพหรือคัดส่วนเฉพาะที่ต้องการได้ ง่าย การบันทึกภาพถ่ายหรือภาพวิดีโอในระบบดิจิทัลนั้นในปัจจุบันก็พัฒนาไปมากเช่นกัน โดยพบว่าความละเอียดของภาพนั้นเพิ่มขึ้นเป็นอย่างมากในระยะเวลาอัน สั้น ทั้งความละเอียดเชิงพื้นที่ (spatial resolution) การถ่ายภาพที่ความถี่สูงมาก รวมถึงช่วงพลวัต (dynamic range) ของภาพก็สูงมากขึ้นเรื่อย ๆ เช่นกัน

จุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์นี้ เพื่อเพิ่ม คุณภาพให้กับ ภาพ ที่ ถูก เก็บ ข้อมูล อยู่ใน รูปแบบดิจิทัลเหล่านั้นให้มีคุณภาพ มาก ยิ่ง ขึ้น การสร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด หรือ image super-resolution นั้นหมายถึงความถึงกระบวนการประมวลผลภาพที่สามารถสร้างภาพความละเอียดสูง (high resolution image) จากภาพความละเอียดต่ำ (low resolution image) ซึ่งการที่ได้ภาพความละเอียดสูงจากภาพความละเอียดต่ำนั้นสามารถช่วยในการนำภาพ ไปทำกระบวนการประมวลผลภาพชนิดอื่นเช่นการรู้จำตัวอักษร วัตถุหรือการค้นหาลักษณะที่ ต้องการในภาพเป็นต้น ซึ่งการทำเทคนิคการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นสามารถช่วยประหยัดค่าใช้จ่ายในการเปลี่ยนอุปกรณ์รับภาพหรือเซนเซอร์ รับภาพเพื่อที่เพิ่มความละเอียดของภาพที่ต้องการได้เพราะไม่มีค่าใช้จ่ายทางด้าน อุปกรณ์ฮาร์ดแวร์

วิธีหนึ่งสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นใช้ ภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพ โดยภาพความละเอียดต่ำเหล่านั้น ต้องเป็นภาพที่แสดงถึงวัตถุเดียวกันหรืออีกนัยหนึ่งก็คืออาจเป็นภาพถ่าย ต่อเนื่องของวัตถุชิ้นเดียวกัน เนื่องจากกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่ง ยวด ที่ใช้ประโยชน์จากการมีข้อมูลภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพซึ่ง ให้ข้อมูลที่ มีประโยชน์ต่อการสร้างกลับของภาพความละเอียดสูงที่แตกต่างกัน ดัง นั้นหากชุดของภาพความละเอียดต่ำที่นำมาใช้นั้น มีข้อมูลที่ซ้ำกันเป็นจำนวนมากก็ ไม่เป็นผลดีต่อระบบ โดยทั่วไปแล้วในการหลอมรวมภาพ (image fusion) นั้นสามารถ ช่วยในการลดสัญญาณรบกวน (noise) เพิ่มมุมมองของภาพ ถ่าย (field of view: FOV) ลดผลของการสั่นไหวของภาพ (stabilization) ความพร่า ของภาพ (blur) และเพิ่มช่วงพลวัตได้ [1] โดย ที่ต้องรู้ว่าภาพความละเอียดต่ำแต่ละภาพนั้นภาพใดมีการเคลื่อนที่ไปในทาง ไต จากนั้นต้องนำภาพความละเอียดต่ำเหล่านั้นกลับมาในตำแหน่งเดียวกันหรือตำแหน่ง ที่อ้างอิงให้ได้ถูกต้อง หลังจากนั้นต้องเพิ่มความละเอียดของภาพให้สูงขึ้น และจัดการปัญหาอื่นเช่นสัญญาณรบกวนหรือความพร่าของภาพทำให้ภาพความละเอียดสูงที่ได้ นั้นชัดเจน

## 1.1 งานวิจัยที่ผ่านมา

คำว่า Super-resolution นั้นมีมานานแล้ว เป็นแนวคิดที่ต้องการเพิ่มความละเอียดของสัญญาณจากสัญญาณที่มีความละเอียดต่ำมาเป็นสัญญาณที่มีความละเอียดสูง โดยเริ่มแรกนั้นคำนี้ใช้ในการเพิ่มความละเอียดของสัญญาณที่มีมิติเพียงมิติเดียว เช่นสัญญาณจากรังสีแกมมา [2] หรือคลื่นน้ำ [3] แต่แนวความคิดเกี่ยวกับการนำภาพความละเอียดต่ำขนาดเล็กหลาย ๆ ภาพมารวมกันเพื่อสร้างเป็นภาพความละเอียดสูงนั้นริเริ่มโดย Huang และ Tsan [4] ซึ่งเป็นวิธีทางโดเมนความถี่โดยอาศัยคุณสมบัติของการเลื่อนของการแปลงฟูรีเยร์ การสมนาม (alias) ของการแปลงฟูรีเยร์แบบต่อเนื่อง (continuous Fourier transform: CFT) ของภาพความละเอียดสูงและภาพความละเอียดต่ำ และสมมติฐานว่าภาพความละเอียดสูงนั้นมีแถบความถี่จำกัดรวมถึงภาพไม่มีสัญญาณรบกวน [5] หลังจากนั้นไม่นาน Kim และคณะ [6] ได้ปรับปรุงผลงานฉบับนี้โดยคิดผลของการทำพัวและสัญญาณรบกวนโดยใช้การทำผลต่างกำลังสองน้อยที่สุด

ต่อมา Irani และ Peleg [7] ได้เสนอวิธี iterative back-projection (IBP) ตามงานของ Keren และคณะ [8] ในปี 1988 เพื่อใช้ในงานสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด โดยวิธี IBP นี้เริ่มด้วยการคาดคะเนภาพแรก หลังจากนั้นนำภาพ ไปผ่านกระบวนการ back-projection เพื่อให้ได้ภาพความละเอียดต่ำ แล้วนำความผิดพลาดที่ได้ ไปบวกเข้ากับภาพต่อไป และวิธีทำซ้ำการทำงาน Irani และ Peleg ได้ทดลองใช้กระบวนการนี้กับการทำพัวที่ไม่มีความเป็นเอกกรุป (non-uniform) และได้ผลที่น่าพอใจ

Elad และ Feuer [9] ได้เสนอแบบจำลองที่เลียนแบบการบูรณะภาพ เนื่องจากปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดกับปัญหาการกู้คืนภาพนั้นมีลักษณะที่ใกล้เคียงกันมาก ปัจจุบันขอบเขตงานนี้เป็นวิธีที่มีผู้ใช้กันอย่างแพร่หลายที่สุดวิธีหนึ่ง โดยแทนสัญลักษณ์ในรูปแบบเมทริกซ์-เวกเตอร์ และแก้ปัญหาผกผันนี้ด้วยระเบียบวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ (steepest descent หรือ gradient descent) และเกรเดียนต์สังยุค (conjugate gradient) นอกจากนี้ยังมีความพยายามที่ทำการบูรณะเพิ่มความละเอียดของภาพชุดต่อเนื่องหรือ video-to-video โดยใช้คาลมานฟิลเตอร์ (Kalman filter) โดยที่ Nguyen, Milanfar และ Golub [10, 11] ได้นำแบบจำลองของ Elad และ Feuer มาทำต่อโดยได้เสนอวิธีการปรับปรุงลักษณะของเมทริกซ์ของระบบและหาคำตอบโดยวิธีการเกรเดียนต์สังยุคแบบปรับสภาพ (preconditioned conjugate gradient) ซึ่งเหมาะกับปัญหาตั้งไว้แล้ว (ill-posed problem) บางชนิดมากกว่าเกรเดียนต์สังยุคเดิมและได้เสนอวิธีการเลือกค่าพารามิเตอร์สำหรับการเรกูลาร์ไรซ์แบบติฮอนอฟ (Tikhonov regularization) สำหรับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดด้วยวิธีอัตโนมัติโดยใช้ general cross validation (GCV)

ต่อมา Farsiu และ Milanfar [12] เสนอวิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยปรับปรุงจากวิธีมัธยฐาน (median-based) ของ Zomet [13] โดยเพิ่มเติมวิธีการเรกูลาร์ไรซ์ที่เรียก



ว่าไบเลเทอรัล-โททัลวาริเอชัน (bilateral-total variation: BTV) เข้าไปในกระบวนการและแยกกระบวนการหาคำตอบเป็นสองขั้นตอนคือการสร้างภาพความละเอียดสูงที่ถูกทำรบกวนมาก่อนและจากนั้นจึงทำให้ภาพชัดขึ้นผ่านกระบวนการที่เรียกว่า BTV โดยสรุปปัญหาว่าการที่ปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นเป็นปัญหาตั้งไว้เวลานั้นเกิดมาจากการที่มีกระบวนการทำรบกวนภาพอยู่ในระบบ หากแยกออกมาและนำมาคิดทำให้ระบบมีสถานะที่ดีขึ้นแล้วทำให้ทำงานได้เร็วขึ้นและการเป็นกระบวนการเลื่อนและบวกผสมแบบมัธยฐานและการเรกูลารีไรซ์แบบไบเลเทอรัล-โททัลวาริเอชัน (median shift-and-add+BTV) ซึ่งมีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น

## 1.2 ขอบเขตวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบจุดต่าง (speckle noise) ซึ่งเป็นปัญหาตั้งไว้แล้วและต้องการการเรกูลารีไรซ์เช่นเดียวกันกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดแบบทั่วไป แต่การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดแบบทั่วไปนั้นมีสัญญาณรบกวนเป็นแบบบวก ซึ่งสามารถหาคำตอบได้อย่างเหมาะสมด้วยฟังก์ชันมูลค่าที่เป็น *นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$*  และสามารถเรกูลารีไรซ์ด้วยการเรกูลารีไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์

สัญญาณรบกวนแบบจุดต่างเช่นในกรณีของภาพอัลตราซาวนด์ทางการแพทย์ (medical ultrasound image) และภาพถ่ายจากช่องเปิดสังเคราะห์ (synthetic aperture radar: SAR) นั้นนิยมประมาณให้เป็นสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณซึ่งได้รับการแก้ไขให้ดีขึ้นหากผ่านกระบวนการเชิงมัธยฐาน จากการศึกษาพบว่าการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่เป็น *นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$*  ซึ่งเป็นกระบวนการเชิงมัธยฐานนั้นได้ผลดีกับภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดในกรณีที่ภาพความละเอียดต่ำที่มีสัญญาณรบกวนแบบพริกไทยและเกลือ รวมถึงในกรณีที่ข้อมูลจากภาพความละเอียดต่ำน้อยเช่นในกรณีที่มีจำนวนของภาพความละเอียดต่ำน้อย และกรณีที่การวางตำแหน่งภาพความละเอียดต่ำเกิดความผิดพลาด [12, 14] ซึ่งทำให้เกิดจุดสีดำและ/หรือขาวบนภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่สร้างขึ้น เนื่องจากการแก้ไขปัญหาของสัญญาณรบกวนแบบพริกไทยและเกลือนั้นมักจะทำด้วยวิธีเดียวกันกับสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างซึ่งในกรณีนี้คือสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้ทดลองใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่เป็น *นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$*  กับภาพที่ถูกสัญญาณดังกล่าวรบกวนพบว่าได้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าฟังก์ชันมูลค่าที่เป็น *นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$*

อย่างไรก็ตามในงานวิจัยที่ใช้ฟังก์ชันมูลค่าเป็น *นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$*  ดังกล่าวนั้น [12, 14] แยกกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดออกเป็นสองขั้นตอน โดยขั้นตอนแรกนั้นเกี่ยวกับการเพิ่มความละเอียดของภาพและการวางภาพความละเอียดต่ำให้ถูกตำแหน่ง และขั้นตอนที่สองนั้นเป็นการขจัดความพร่าของภาพ เมื่อแยกกระบวนการทั้งสองขั้นตอนออกจากกันกระบวนการทำซ้ำแบบการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์แบบค่าความยาวช่วงก้าวกง ที่มีประสิทธิภาพแต่การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณ

รบกวนเรย์ลีแบบคุณนั้นมีปัญหาเรื่องสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างซึ่งขจัดได้ยากกว่า จึงทำให้ไม่ควรแยกกระบวนการทั้งสองออกจากกัน ซึ่งทำให้การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์แบบค่าความยาวช่วงก้าวคงที่หาผลเฉลยได้ช้ามาก และแม้ว่ากระบวนการทำซ้ำแบบเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้นที่ใช้ในงานวิจัยก่อนหน้านั้น [10, 11, 15] ให้ผลเฉลยที่รวดเร็วกว่าแต่ไม่สามารถแก้ไขปัญหาของฟังก์ชันมูลค่าแบบไม่เชิงเส้นเช่น นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  ได้ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงขอเสนอการใช้กระบวนการทำซ้ำแบบเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งได้รับการพิสูจน์ว่ามีการลู่เข้าของผลเฉลยที่รวดเร็วยิ่งกว่าการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ และใช้ค่าของความยาวช่วงก้าวที่เหมาะสมในแต่ละรอบของการทำซ้ำแทนการใช้ความยาวช่วงก้าวแบบคงที่ ซึ่งสามารถนำไปแก้ไขปัญหาที่ฟังก์ชันมูลค่าเป็นแบบ นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  ซึ่งเป็นปัญหาไม่ใช่เชิงเส้นได้

นอกจากนั้นแล้วการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์ นั้นไม่เหมาะสมกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคุณเนื่องจาก ผลของสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างที่มีมาก การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟที่มีอันดับสูงขึ้นนั้นเหมาะสมกว่า โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสนอการใช้ตัวกรองของซาวิตสกี-โกเลย์ (Savitzky-Golay filter) เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการหาค่าอนุพันธ์ในการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟในอันดับที่สูงขึ้น และนำผลของการเรกูลาร์ไรซ์ในแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกัน

เนื่องจากการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำนั้นเกิดปัญหาในการหาผลตอบจากระบบที่มีสภาวะเลว ขั้นตอนที่สำคัญในการหาค่าตอบคือกระบวนการเรกูลาร์ไรซ์และกระบวนการทำซ้ำซึ่งเป็นหัวข้อวิจัยของวิทยานิพนธ์โดยมีขอบเขตการศึกษาวิจัยดังนี้

1. ศึกษาขั้นตอนและระเบียบวิธีในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพ โดยเลือกใช้ระเบียบวิธีชนิดเชิงกำหนด [5, 10–12] โดยรู้ถึงการวางตำแหน่งอย่างสมบูรณ์ (perfect registration)
2. เลือกใช้ชุดของภาพความละเอียดต่ำที่สร้างขึ้นจากภาพความละเอียดสูงเพื่อศึกษากระบวนการทำกลับ ขั้นตอนการกำเนิดภาพความละเอียดต่ำ
3. ศึกษาประสิทธิภาพในการหาค่าตอบ และลักษณะของคำตอบ โดย ระเบียบวิธีการลด ระดับตามแนวเกรเดียนต์ [9, 12] และเกรเดียนต์สังยุค [9–11]
4. ศึกษา การเรกูลาร์ไรซ์ เพื่อ ปรับปรุง ลักษณะ ของ ระบบ ให้ โดย การใช้ การเรกูลาร์ไรซ์ แบบติโฮนอฟ, โททลวารีเอชัน และ ไบเลเทอร์ล-โททลวารีเอชัน
5. เปรียบเทียบการเรกูลาร์ไรซ์ที่เสนอ กับการเรกูลาร์ไรซ์แบบอื่น ๆ สำหรับภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีตัวอย่างเช่นภาพอัลตราซาวนด์และภาพ ถ่ายด้วยเรดาร์ห้องเปิดสังเคราะห์

### 1.3 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

ศึกษาวิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดและนำมาประยุกต์ใช้กับภาพความละเอียดต่ำที่ถูกสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ

1. ศึกษากระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพ
2. เปรียบเทียบกระบวนการเรกูลาร์ไรเซชันแบบต่าง ๆ
3. ศึกษากระบวนการทำซ้ำเพื่อแก้ปัญหการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด

### 1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยใช้ภาพความละเอียดต่ำที่มีสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ซึ่งนำวิธีในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบบวกมาประยุกต์ใช้ โดยวิธีที่เหมาะสมคือ ใช้การเรกูลาร์ไรซ์ที่มีอันดับสูง ขึ้นเช่น การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่สอง หรือการเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์ล-โททลวารีเอชัน และการใช้กระบวนการทำซ้ำแบบเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้นซึ่งสามารถนำมาใช้กับฟังก์ชันมูลค่าแบบไม่เชิงเส้นเช่นในกรณีของนอร์มบนปริภูมิ  $L^1$

1. ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด โดยสามารถสร้างและเข้าใจกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพ
2. การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ
3. สามารถทำความเข้าใจ ปรับปรุง และวิเคราะห์ กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยการใช้การเรกูลาร์ไรซ์ในแบบต่าง ๆ
4. สามารถทำความเข้าใจ ปรับปรุง และวิเคราะห์ กระบวนการทำซ้ำเพื่อใช้ในการแก้ปัญหการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดได้

### 1.5 โครงสร้างวิทยานิพนธ์

โครงสร้างวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยึดขอบข่ายงานตามข้างต้น โดยมีทั้งหมด 6 บท ซึ่งบทต่อไปจาก **บทที่ 1** นี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

**บทที่ 2** แบบจำลองของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด: เกี่ยวกับการสร้างแบบจำลองของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดซึ่งสร้างภาพความละเอียดสูงจากภาพความละเอียดต่ำ

หลาย ๆ ภาพนั้นเป็นปัญหาผกผัน (inverse problems) ชนิดหนึ่ง โดยที่การสร้างแบบจำลองเดินหน้า (forward model) นั้นมีความสำคัญเป็นอย่างมาก

**บทที่ 3 วิธีทำซ้ำที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด :** เกี่ยวกับเรื่องของวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดซึ่งจำเป็น ต่อการแก้ปัญหาที่สร้างแบบจำลองแล้วมีขนาดใหญ่ โดยเฉพาะปัญหาที่สร้างให้เป็นรูปแบบเชิงเส้น เนื่องจากช่วยให้การแก้ปัญหาที่สละสลวยและรวดเร็วยิ่งขึ้น โดยกล่าวถึงระเบียบวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์และเกรเดียนต์สังยุค ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่เหมาะสมและเป็นที่ยอมรับในการใช้แก้ปัญหาชนิดนี้ และกล่าวถึงรูปแบบของระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับนอร์มที่ใช้ซึ่งเป็นวิธีที่วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอ

**บทที่ 4 กระบวนการเรกูลาร์ไรซ์ :** กล่าวถึงกระบวนการเรกูลาร์ไรซ์ซึ่งจากการศึกษาที่ผ่านมาทำให้ทราบว่า ในกระบวนการสร้างภาพดิจิทัลความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพนั้นเป็นปัญหาตั้งไว้แล้ว [16–18] ซึ่งมีการกระจายตัวของค่าลักษณะเฉพาะของระบบมาก และเมทริกซ์ของระบบที่มีเงื่อนไขเลว (ill-conditioned matrix) ซึ่งต้องการการปรับปรุงแก้ไขเพื่อที่หาคำตอบผ่านกระบวนการเชิงเลขต่าง ๆ โดยการใช้ข้อสมมุติบางอย่างเช่นความราบเรียบของคำตอบ (solution smoothness) กระบวนการปรับปรุงแก้ไขดังกล่าวเรียกว่าการเรกูลาร์ไรซ์ (regularization) เพื่อที่แก้ไขปัญหาตั้งไว้แล้ว ดีฮอนอฟเสนอไว้ว่าสามารถแก้ไขเพื่อหาคำตอบได้ง่ายขึ้นด้วยการเรกูลาร์ไรซ์ [19] กระบวนการเรกูลาร์ไรซ์นั้นลดการกระจายตัวของค่าลักษณะเฉพาะของระบบซึ่งทำให้หาคำตอบของระบบสมการได้รวดเร็วและแม่นยำยิ่งขึ้น งานวิจัยที่ผ่านมาได้มีการนำเสนอวิธีการเรกูลาร์ไรซ์แบบต่าง ๆ เช่นการเรกูลาร์ไรซ์แบบดีฮอนอฟ [1, 9–12, 15], โททลวารีเอชชัน และไบเลเทอร์ล-โททลวารีเอชชัน [12] งานวิจัยนี้นำวิธีการเรกูลาร์ไรซ์เหล่านั้นมาปรับปรุงและเปรียบเทียบ เพื่อหาวิธีการเรกูลาร์ไรซ์ที่มีประสิทธิภาพในการหาคำตอบได้ดียิ่งขึ้น

**บทที่ 5 กล่าวถึงผล การสร้างภาพ ความละเอียดสูง ยิ่งยวดจาก ภาพที่ถูก รบกวนด้วย สัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลีแบบคูณ :** บทสุดท้ายกล่าวถึงการนำกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดมาใช้เพื่อเพิ่มคุณภาพของภาพที่ถูกสัญญาณแบบเรย์ลีรบกวน โดยที่เนื้อหาในบทนี้กล่าวถึงแนวทางในการสร้างภาพสังเคราะห์ และผลของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพดังกล่าว

**บทที่ 6 บทสรุปและข้อเสนอแนะ :** กล่าวถึงบทสรุปของวิทยานิพนธ์, ปัญหาที่เกิดขึ้น, แนวทางการแก้ไข และงานที่สามารถทำต่อยอดได้ในอนาคต



## บทที่ 2

### แบบจำลองของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด

การสร้างภาพความละเอียดสูงจากภาพความละเอียดต่ำนั้นจะมีวิธีแตกต่างกันขึ้นอยู่กับเทคนิคและวิธีที่ใช้ วิธีที่ง่ายที่สุดวิธีหนึ่งก็คือการประมาณค่าในช่วง ข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำ (interpolation) ซึ่งภาพความละเอียดสูงที่เกิดจากการประมาณค่าในช่วงดังกล่าวนี้มีลักษณะไม่ชัดเจนและ ได้รายละเอียดไม่ชัดเจนตามรูปที่ 2.1ข



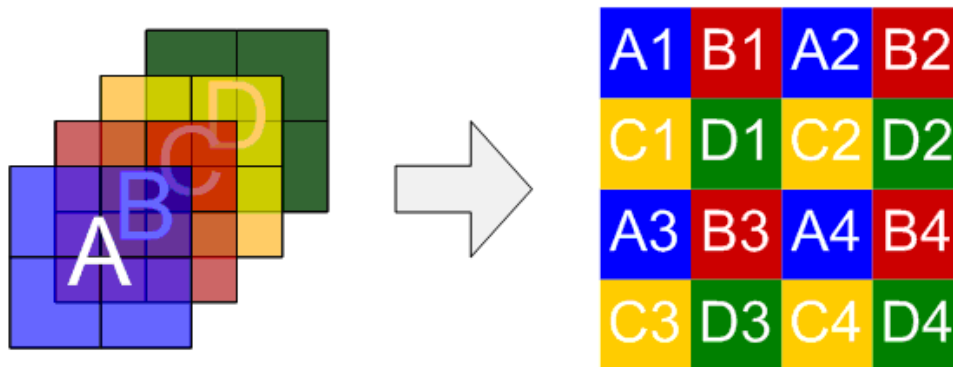
รูปที่ 2.1: ตัวอย่างภาพความละเอียดต่ำและภาพความละเอียดสูงที่เกิดจากการประมาณภาพความละเอียดต่ำภาพเดียว ก) ภาพความละเอียดต่ำ (LR)  $f$  ข) รูปความละเอียดสูงที่เกิดจากการทำ Bicubic Interpolation จากภาพความละเอียดต่ำในรูปที่ 2.1ก

แนวคิดในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่มีประสิทธิภาพกว่าวิธีข้างต้นวิธีหนึ่ง คือแนวคิดที่ใช้ประโยชน์จากข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพ เหตุผลก็คือภาพความละเอียดต่ำภาพหนึ่งจะมีข้อมูลเกี่ยวกับภาพความละเอียดสูง ที่แตกต่างกัน การใช้ภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพก็จะสามารถ นำมาใช้สร้างภาพความ ละเอียดสูงได้ โดยการใช้ข้อมูลจากภาพความละเอียดต่ำภาพอื่น ๆ มาชดเชยหรือประมาณ ข้อมูลภาพความละเอียดต่ำในภาพหลักหรือภาพอ้างอิง

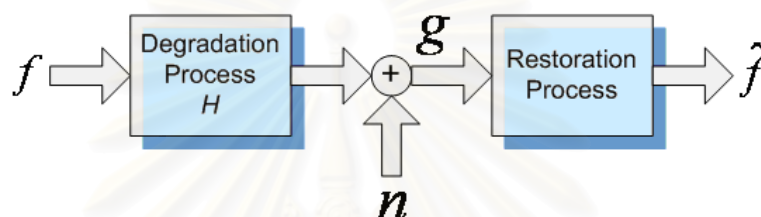
$$\hat{f} = \arg \min_f \|\mathbf{H}f - g\|_p^p \quad (2.1)$$

เพื่อที่จะรองรับแนวคิดดังกล่าวไว้ข้างต้นจึงมีการนำแนวคิดเกี่ยวกับการบูรณะภาพ (image restoration) เข้ามาใช้ในกระบวนการ กล่าวคือเป็นแนวคิดที่สมมติภาพที่ต้องการ  $f$  ผ่านกระบวนการลดทอนคุณภาพ (degradation)  $\mathbf{H}$  จนได้ภาพที่ถูกลดทอนคุณภาพ  $g$  จากนั้นนำภาพที่ถูกลดทอนคุณภาพผ่านกระบวนการย้อนกลับจนได้ภาพประมาณ  $\hat{f}$  ที่ใกล้เคียงกับภาพก่อนการลดทอนตามสมการ  $f$  โดยที่  $p$  แสดงถึงนอร์มในปริภูมิ  $L^p$  ซึ่งโดยทั่วไปมักให้  $p = 2$  และปัญหานี้เทียบได้กับปัญหากำลังสองน้อยที่สุด





รูปที่ 2.2: แนวคิดการนำภาพความละเอียดต่ำ (LR) มาใช้เพื่อประมาณภาพความละเอียดสูง (HR)



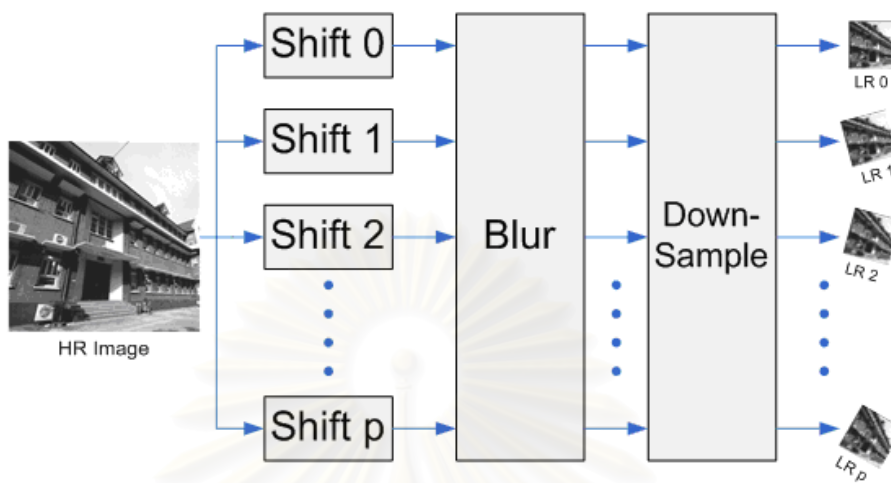
รูปที่ 2.3: Degradation-Restoration Process

ในที่นี้ให้ภาพความละเอียดสูงคือภาพที่ต้องการส่วนภาพความละเอียดต่ำคือภาพที่ถูกลดทอนคุณภาพ สิ่งที่ต้องการหาคือกระบวนการบูรณะกลับที่จะสามารถจะทำให้ภาพความละเอียดต่ำที่ถูกลดทอนคุณภาพนั้นกลับเป็นภาพความละเอียดสูงที่ใกล้เคียงกับภาพความละเอียดสูงต้นแบบให้มากที่สุด โดยกระบวนการย้อนกลับนั้นจะต้องอ้างอิงกระบวนการลดทอน

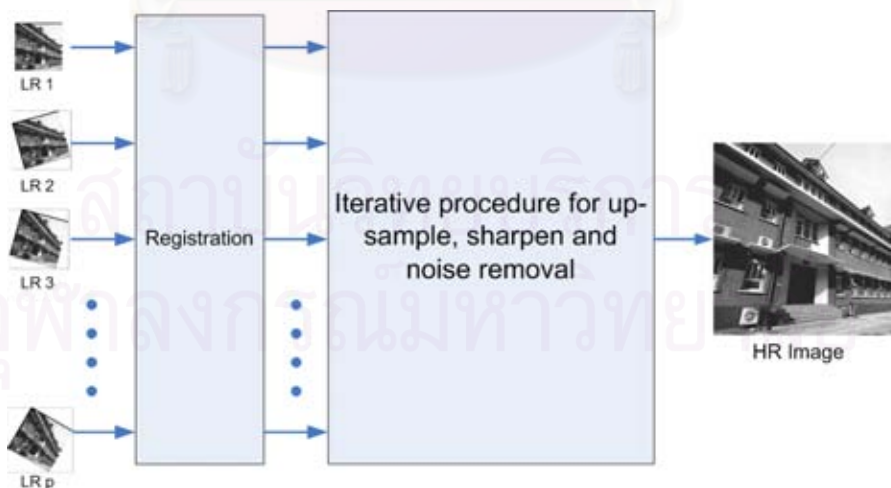
กระบวนการลดทอนตามรูปที่ 2.4 นั้นเป็นกระบวนการหนึ่งี่สร้างเลียนแบบกระบวนการเกิดภาพความละเอียดต่ำจากการถ่ายภาพ โดยที่เริ่มจากการที่ภาพความละเอียดสูง (ที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่ไม่จำกัด) ถูกถ่ายภาพด้วยมุกกล้องที่แตกต่างกัน และแสงที่เก็บข้อมูลของภาพนั้นผ่านเลนส์จะเกิดการทำให้ภาพไม่ชัดเจน (blur) หรืออาจจะเกิดจากการที่ภาพขยับทำให้เกิดทำให้ภาพไม่ชัดเจน (motion blur) และในที่สุดก็จะถูกลดความละเอียดลงด้วยอุปกรณ์รับภาพ เช่นฟิล์มหรือ charge-coupled device (CCD) ของกล้อง ทำให้ภาพความละเอียดสูงที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่ไม่จำกัดถูกลดทอนความละเอียดลงเหลือภาพที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่จำกัด

ในความเป็นจริงแล้วไม่สามารถเก็บภาพที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่แบบไม่จำกัดได้ ภาพที่ทำกลับจึงจะต้องมีความละเอียดเชิงพื้นที่แบบจำกัด และในที่นี้จะนำภาพที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่ต่ำมาสร้างให้เป็นภาพความละเอียดเชิงพื้นที่สูงและมีความละเอียดตามที่ต้องการและเหมาะสมกับปริมาณของข้อมูลความละเอียดต่ำที่ได้รับมาโดยกระบวนการย้อนกลับ

กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นจะสามารถกระทำได้โดยการทำการบูรณะ



รูปที่ 2.4: แผนภาพแสดงแนวคิดการเกิดภาพความละเอียดต่ำจากภาพความละเอียดสูง



รูปที่ 2.5: แสดงกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงแบบย้อนกลับ

การย้อน กลับจากการบวกรวมการเกิดภาพความละเอียดต่ำ คือการนำภาพความละเอียดต่ำมาเลื่อนที่ ให้ตรงกันกับตำแหน่งของภาพความละเอียดต่ำอ้างอิงหรือเฟรมแรกแล้วผ่านกระบวนการวนรอบ เพื่อให้ได้คำตอบที่ถูกต้องที่สุดสำหรับการทำให้ภาพไม่ชัดเจนและการลดความละเอียดของ ภาพ ลงตามแบบจำลองที่สร้างขึ้นหรือการกระบวนการหาแบบจำลอง (system identification)

## 2.1 แบบจำลอง ของ การ สร้าง ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด จาก ภาพ ความ ละเอียด ต่ำ หลายภาพ

การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นใช้โมเดลของการบูรณะภาพ (restoration) เป็นหลักนั่นคือเป็นการโมเดลภาพที่ถูกทอนประสิทธิภาพจากภาพต้นฉบับหรือเรียกอีกอย่างหนึ่งในกรณีนี้ว่าเป็นภาพที่มีความละเอียดสูง

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y) \quad (2.2)$$

โดยที่  $g(x, y)$  เป็นภาพที่ถูกทอนประสิทธิภาพ มีขนาด  $m \times n$  จุดภาพ ในขณะที่  $h(x, y)$  เป็นตัวแทนทางพื้นที่ของฟังก์ชันทอนประสิทธิภาพ (spatial representation of the degradation function) ซึ่งคูณประสาน (convolution:  $*$ ) อยู่กับ  $f(x, y)$  ซึ่งเป็นภาพที่มีความละเอียดสูงมีขนาด  $M \times N$  จุดภาพและบวกเข้ากับสัญญาณรบกวน  $n(x, y)$  ที่มีขนาดเท่ากับ  $g(x, y)$  คือ  $m \times n$  โดยสมการข้างต้นนั้นสามารถเปลี่ยนมาให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้โดยหากอาศัยคำจำกัดความของการคูณประสาน [20]

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n) \quad (2.3)$$

จะสามารถเขียนสมการ (2.3) ได้ในรูปแบบเวกเตอร์-เมทริกซ์ได้

$$\begin{bmatrix} g(x_0, y_0) \\ g(x_1, y_0) \\ g(x_2, y_0) \\ \vdots \\ g(x_n, y_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{0,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{1,0} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ h_{0,1} & h_{0,0} & 0 & 0 & \dots & h_{1,1} & h_{1,0} & 0 & \dots & \dots \\ h_{0,2} & h_{0,1} & h_{0,0} & 0 & \dots & h_{1,2} & h_{1,1} & h_{1,0} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ f(x_1, y_0) \\ f(x_2, y_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_n, y_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(x_0, y_0) \\ n(x_1, y_0) \\ n(x_2, y_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n(x_n, y_m) \end{bmatrix}$$

$$g = \mathbf{H}f + n \quad (2.4)$$

โดยที่  $g$  เป็นเวกเตอร์แสดงถึงภาพที่ถูกทอนประสิทธิภาพ จะมีขนาด  $mn \times 1$  เรียงตามลำดับที่แบบ *เลขซีโคกราฟ* (*lexicographic order*),  $\mathbf{H}$  เป็นเมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพ (operation matrix of degradation function) จะมีขนาด  $mn \times MN$  ในสมการ (2.4) แสดงถึงรูปแบบหนึ่งของ  $\mathbf{H}$  ที่อาจจะเกิดขึ้นจากระบบ โดยสังเกตว่ามีลักษณะมีที่ว่างมาก (sparse)  $f$  เป็นเวกเตอร์ของรูปที่มีความละเอียดสูงจะมีขนาด  $MN \times 1$  ซึ่งมีขนาดเท่ากับ เวกเตอร์ของสัญญาณรบกวน  $n$

หลักการของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดคือการใช้ข้อมูลจากภาพความละเอียดต่ำหลาย ๆ ภาพมารวมกันแต่ละเฟรมที่เพิ่มขึ้นก็จะให้ข้อมูลที่เพิ่มเติมเพื่อที่จะนำไปประมาณจุดภาพย่อยที่อยู่รอบข้าง สามารถเขียนสมการของการเกิดภาพความละเอียดต่ำเฟรมที่  $k$  ได้ดังนี้

$$g_k = \mathbf{H}_k f + n_k \quad (2.5)$$

สังเกตได้ว่า  $f$  ไม่มี  $k$  เป็นตัวห้อยอยู่ที่ด้านล่าง ส่วน  $g$  และ  $\mathbf{H}$  นั้นมี  $k$  ห้อยอยู่แสดงถึงค่าของเวกเตอร์และเมทริกซ์ของภาพที่  $k$  และ  $\mathbf{H}$  นั้นเมทริกซ์ปฏิบัติการ (operation matrix) ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ทั้งสามดังนี้

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{D}\mathbf{B}_k\mathbf{S}_k \quad (2.6)$$

โดยที่  $\mathbf{D}$  มีขนาด  $mn \times MN$ ,  $\mathbf{B}_k$  และ  $\mathbf{S}_k$  มีขนาด  $MN \times MN$  ซึ่งเมทริกซ์เหล่านี้เป็นการเลื่อนที่ตำแหน่ง (Shifting) การทำพรา และ การซัดตัวอย่างลง (Down-sampling) ของรูปภาพตามลำดับ บางครั้งเพื่อผลการคำนวณที่เร็วขึ้น อาจจะใช้  $\mathbf{B}_k$  และ  $\mathbf{S}_k$  ทำให้  $\mathbf{H}_k = \mathbf{D}\mathbf{S}_k\mathbf{B}_k$  [21] โดยสมมติฐานที่ว่า การทำพราเป็นแบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับพื้นที่ (spatial linear invariant) ซึ่งปกติแล้ว เป็นตัวปฏิบัติการการซัดตัวอย่างลง ทำให้ นั้นกลายเป็นตัวปฏิบัติการเลื่อนที่ตำแหน่งที่มีการซัดตัวอย่างลง ซึ่งจะกล่าวถึงรูปแบบอย่างละเอียดในหัวข้อที่ 2.3

เมื่อนำสมการ (2.5) มาต่อกันตั้งแต่เฟรมที่ 0 ถึงเฟรมที่  $p$  (รวมทั้งหมด  $p$  เฟรม) จะได้

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{p-1} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \mathbf{H}f + n \quad (2.7)$$

ซึ่ง  $\mathbf{H}$  มีขนาด  $mnp \times MN$ ,  $g$  และ  $n$  มีขนาดเท่ากันคือ  $mnp \times 1$

## 2.2 ปัญหากลางสองน้อยที่สุด

โดยปกติแล้วหากแก้หา  $f$  จากระบบสมการ  $\gamma = \mathbf{H}f + n$  นั้น เมื่อ  $\mathbf{H}$  เป็นเมทริกซ์จัตุรัสสามารถทำได้โดย

$$f = \mathbf{H}^{-1}\gamma \quad (2.8)$$

แต่เนื่องจาก  $\mathbf{H}$  อาจจะไม่เป็นจัตุรัสก็ได้เช่นปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นเป็นการที่ใช้ข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำมากกว่าหนึ่งภาพเพื่อนำมาเป็นข้อมูลของภาพที่ความละเอียดสูงหนึ่งภาพ ซึ่งจำนวนข้อมูลและจำนวนของภาพความละเอียดต่ำนั้น มีความสำคัญต่อวิธีการที่จะนำไปหาภาพความละเอียดสูง โดยที่อาจจะสามารถแบ่งได้เป็นสามกรณีคือ ระบบกำหนดมากเกินไป, ระบบกำหนดน้อยเกินไป และ ระบบกำหนดพอดี

### 2.2.1 ระบบกำหนดมากเกินไป (Overdetermined system)

$$\begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

กรณีที่ข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำทั้งหมดมีจำนวนมากกว่าภาพความละเอียดสูง โดยการคิดถึงจำนวนข้อมูลนั้นทั้งข้อมูลของขนาดภาพและข้อมูลของจำนวนของภาพความละเอียดต่ำจำเป็นต้องถูกนำมาคิดว่ามากกว่าจำนวนของข้อมูลของภาพความละเอียดสูงหรือไม่ ยกตัวอย่างเช่น ถ้ามีภาพความละเอียดต่ำขนาด  $64 \times 64$  จุดภาพ มีทั้งหมด 20 ภาพ ต้องการสร้างภาพความละเอียดสูงหนึ่งภาพขนาด  $256 \times 256$  จุดภาพนั้น จะสามารถคิดได้ว่า มีมิติของข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำทั้งหมด  $(64 \times 64) \times 20 = 81,920$  มิติซึ่งมากกว่ามิติของข้อมูลภาพความละเอียดสูง ซึ่งมี  $256 \times 256 = 65,536$  มิติ ซึ่งจะเรียกระบบในกรณีนี้ว่า ระบบกำหนดมากเกินไป ซึ่งหากหาคำตอบจากสมการ (2.7) ในเชิงกำลังสองน้อยที่สุดได้ว่า

$$f = \arg \min_f \|\mathbf{H}f - \gamma\|_2^2 \quad (2.10)$$

สามารถหาผลตอบได้จากตัวผกผันเทียมทางซ้าย (left pseudo-inverse)

$$f = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \gamma \quad (2.11)$$



## 2.2.2 ระบบกำหนดน้อยเกินไป (Underdetermined system)

$$\begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

กรณีที่ข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำทั้งหมดมีจำนวนน้อยกว่าภาพความละเอียดสูง โดยการคิดถึงจำนวนมิติข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำนั้นจะต้องถูกนำมาคิดเช่นกันว่ามีจำนวนน้อยกว่ามิติของข้อมูลของภาพความละเอียดสูงหรือไม่ ซึ่งจะเรียกระบบในกรณีนี้ว่า ระบบกำหนดน้อยเกินไป หากจะหาคำตอบจากสมการ (2.8) จะสามารถหาผลตอบได้จากตัวผกผันเทียมทางขวา (right pseudo-inverse)

$$f = \mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}\gamma \quad (2.13)$$

## 2.2.3 ระบบกำหนดพอดี (Square system)

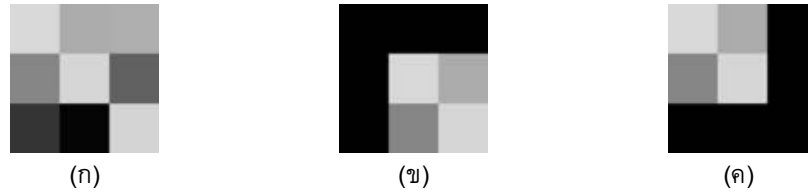
$$\begin{bmatrix} \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

กรณีที่ข้อมูลของภาพความละเอียดต่ำทั้งหมดนั้นมีจำนวนเท่ากับจำนวนข้อมูล ภาพความละเอียดสูงพอดี และจะเรียกระบบในกรณีนี้ว่า ซึ่งจะสามารถหาคำตอบได้จากสมการ (2.8) และกระบวนการเสมอเหมือนกันกับกรณีที่ 1 และ 2 ในกรณีที่มีขนาดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส จึงให้ความสนใจในกรณีที่ 1 และ 2 เนื่องจากเป็นกรณีทั่วไปกว่า

## 2.3 เมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพ

จะเห็นว่าไม่ว่าระบบจะเป็นแบบใดสิ่งที่จะต้องจำลองให้ได้คือเมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพ  $\mathbf{H}$  ซึ่งประกอบขึ้นมาจากกระบวนการสามขั้นตอนตามสมการ (2.6) และเมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพสลับเปลี่ยน  $\mathbf{H}^T$  โดยที่

$$\mathbf{H}_k^T = \mathbf{S}_k^T \mathbf{B}_k^T \mathbf{D}^T \quad (2.15)$$



รูปที่ 2.6: ภาพแสดงตัวอย่างการเปลี่ยนที่ของจุดภาพในกรณีที่มีเพียงการเลื่อนที่ด้วย เวกเตอร์เคลื่อนที่  $[1, 1]^T$  (a) ภาพเริ่มต้นที่จะนำไปเลื่อนตำแหน่ง, (b) ภาพที่เลื่อนตำแหน่งจากรูป (a) ด้วยเวกเตอร์เคลื่อนที่  $[1, 1]^T$  ซึ่งสมมูลกับการคูณด้วยเมทริกซ์ปฏิบัติการการเคลื่อนที่  $S_k$ , (c) ภาพที่เลื่อนที่กลับจากรูป (b) ด้วยเวกเตอร์เคลื่อนที่  $[-1, -1]^T$  ซึ่งสมมูลกับการคูณด้วยเมทริกซ์ปฏิบัติการการเคลื่อนที่  $S_k^T$

### 2.3.1 การเปลี่ยนที่ตำแหน่ง

ในการถ่ายภาพต่อเนื่องหลาย ๆ ครั้งนั้นสิ่งที่เกิดขึ้นเสมอคือภาพสองภาพที่ถ่ายติดกัน จุดภาพของทั้งสองจุดภาพจะไม่ได้อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน แม้ว่าจะตั้งใจถ่ายภาพเดียวกัน ภาพที่ได้ก็จะมีอาการเหลื่อมกันเล็กน้อย จุดมุ่งหมายของการเลื่อนที่ตำแหน่งภาพในกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดคือการเลื่อนตำแหน่งของภาพในเฟรมต่าง ๆ ให้มาอยู่ในจุดเดียวกันเพื่อที่จะสามารถใช้ข้อมูลที่อยู่ในจุดใกล้เคียงกันของภาพที่กระจายอยู่ในแต่ละเฟรมมาช่วยในการสร้างภาพความละเอียดสูงกลับขึ้นมา สิ่งที่จะต้องหาในกระบวนการก่อนหน้าที่จะมีการเลื่อนตำแหน่งของภาพความละเอียดต่ำเหล่านั้นคือการริจิสเตอร์ภาพไปยังตำแหน่งอ้างอิง โดยอาจจะกำหนดที่เฟรมแรกของข้อมูลหรือเฟรม กึ่งกลางของข้อมูลก็ได้เป็นเฟรมอ้างอิง จากนั้นนำเฟรมที่สนใจมาเปรียบเทียบกับเฟรมอ้างอิงว่ามีการเคลื่อนที่ไปเท่าใด โดยจะเรียกเวกเตอร์ที่สามารถนำภาพจากเฟรมดังกล่าวเลื่อนไปที่ตำแหน่งอ้างอิงได้ว่าเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ (motion vector)

ถ้าหาก  $S_k$  นั้นเป็นเมทริกซ์ตัวแทนการเลื่อนตำแหน่งของจุดภาพตำแหน่งหนึ่งไปอีกตำแหน่งหนึ่ง ก็อาจจะสามารถกล่าวได้ว่า เมทริกซ์ตัวแทนการเลื่อนตำแหน่งสลับเปลี่ยน  $S_k^T$  ก็แสดงการเลื่อนตำแหน่งของจุดภาพจากจุดที่เลื่อนไปตำแหน่งนั้นกลับมาที่ตำแหน่งเดิม

#### ตัวอย่างการเลื่อนภาพ

ให้  $f$  เป็นภาพขนาด  $3 \times 3$  ตามรูป ที่ 2.6 ที่นำมาเรียงตามลำดับให้กลายเป็นเวกเตอร์ลำดับเลขิโคกราฟจนได้เวกเตอร์ขนาด  $9 \times 1$  แล้ว และ  $S_k$  เป็นตัวปฏิบัติการเลื่อนภาพที่มี ขนาด  $9 \times 9$  และถูกเลื่อนที่ด้วยเวกเตอร์เคลื่อนที่  $[1, 1]^T$

$$S_k f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{1,3} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ f_{2,3} \\ f_{3,1} \\ f_{3,2} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ 0 \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

จะได้ภาพตามรูปที่ 2.6ข และถ้าหากนำภาพตามรูปที่ 2.6ข มาเลื่อนตำแหน่งกลับด้วยตัวปฏิบัติการ  $S_k^T$  จะได้ว่า

$$S_k^T S_k f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ 0 \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ 0 \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

ซึ่งจะให้ผลตามรูปที่ 2.6ค

นอกจากการปฏิบัติการนี้จะหมายถึงการเลื่อนตำแหน่งรูปแล้วยังหมายรวมไปถึงการเลื่อนตำแหน่งของจุดภาพ จุดใด ๆ ไปอีกตำแหน่งหนึ่งอีกด้วย เช่นในกรณีที่ภาพอาจจะไม่เลื่อนที่ไปตามแกนทั้งสองมิติของรูปเท่านั้น อาจเกิดการหมุนของภาพพร้อมกันไปด้วย หรือในกรณีที่ภาพเกิดความบิดเบี้ยว (distortion) เช่นในกรณีภาพของมนุษย์กำลังหันหน้าเป็นต้น จำเป็นจะต้องนำภาพจะเฟรมรอบข้างหมุนหรือบิดมาให้ตรงกันกับภาพหลักในตำแหน่งอ้างอิงให้ได้ ในกรณีตัวปฏิบัติการสลับเปลี่ยนนั้นก็จะเป็นการวนการย้อนกลับเหมือนกับกรณีเลื่อนที่ ซึ่งจำเป็นจะต้องหมุนหรือบิดภาพกลับไปตำแหน่งเดิมได้ด้วยเช่นกัน

กรณีที่สามารรถเลื่อนที่ บิด หรือ หมุนภาพกลับไปยังตำแหน่งเดิมได้ถูกต้องตามความเป็นจริงทุกจุดจะเรียกว่าการรีจิสเตอร์ภาพแบบสมบูรณ์ (perfect registration) ซึ่งเป็นกรณีในอุดมคติ การรีจิสเตอร์ภาพนั้นมีผลต่อคุณภาพของภาพมาก หากการรีจิสเตอร์นั้นห่างไกลจากความเป็นจริงมากเกินไป ภาพความละเอียดสูงที่ได้จากการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้ก็จะมีคุณภาพที่ไม่ดีเช่นกัน

### 2.3.2 การทำพรั่า

การทำพรั่านั้นเกิดขึ้นจากการผิดเพี้ยน (distortion) ค่าที่เป็นจริงหลังจากที่สัญญาณที่ใช้วัดค่าตกกระทบวัตถุ เช่นแสงในกรณีของภาพถ่ายทั่วไป หรือสัญญาณเสียงความถี่สูงในกรณีของภาพอัลตราซาวนด์ สะท้อนมายังตัวรับภาพ การบิดเบือนในกรณีนี้จะทำให้วัตถุในภาพมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปจากสัญญาณแสงเดิม ในภาพถ่ายทั่วไปนั้นอาจเกิดจากเลนส์ของกล้อง หรือการเปิดหน้ากล้องนานทำให้ภาพที่มีการเคลื่อนที่นั้นฉายซ้ำลงไปบนตัวรับภาพ โดยทั่วไปจะเรียกกระบวนการนี้ว่าการทำพรั่า โดยภาพที่ได้จะมีลักษณะที่ไม่คมชัดตามขอบของภาพในส่วนต่าง ๆ เนื่องจากการสะสมข้อมูลจากจุดภาพข้างเคียง

เช่น การทำพรั่าหรือการทำพรั่าที่เกิดจากการเคลื่อนที่โดยจะมีตัวปฏิบัติการการบิดเบือนเรียกว่า ฟังก์ชันกระจายจุด (point spread function: PSF) ซึ่งมักจะจำลองขึ้นตามคุณลักษณะของเลนส์หรือกระบวนการบังคับภาพให้เกิดขึ้นในตำแหน่งของตัวรับภาพ

เมื่อนำฟังก์ชันกระจายจุดมาจัดให้อยู่ในรูปแบบปฏิบัติการจะได้เมทริกซ์ที่มีรูปแบบเป็นแบบ *Toeplitz* ขนาดและรูปแบบของเทริกซ์จะขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของขอบเขตที่ทำให้กับการทำพรั

ตัวอย่างเมื่อภาพที่ต้องการจะทำพรัามีขนาด  $3 \times 3$  และฟังก์ชันกระจายจุดมีขนาด  $3 \times 3$

ให้  $f$  เป็นภาพที่มีขนาด  $3 \times 3$  จุดภาพ

$$\begin{bmatrix} f_{0,0} & f_{1,0} & f_{2,0} \\ f_{0,1} & f_{1,1} & f_{2,1} \\ f_{0,2} & f_{1,2} & f_{2,2} \end{bmatrix}$$

และเคอร์เนลหรือฟังก์ชันกระจายจุดที่มีขนาด  $3 \times 3$

$$\begin{bmatrix} B_{-1,-1} & B_{0,-1} & B_{1,-1} \\ B_{-1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} \\ B_{-1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \end{bmatrix}$$

ในการทำพรัภาพนั้นอาจจะมีการกำหนดเงื่อนไขของขอบแตกต่างกันขึ้นอยู่กับวิธีที่จะนำไปคำนวณดังนี้

ด้วยเงื่อนไขที่ขอบ (*Dirichlet boundary* หรือ *the zero boundary conditions*) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่กำหนดให้จุดภาพที่อยู่นอกเหนือจากที่สนใจทั้งหมดเป็นศูนย์ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือหากจะนำจุดภาพที่ขอบของภาพมาพรัจะต้องนำค่าศูนย์วางไว้ที่ขอบของภาพก่อน [22] และจุดภาพบริเวณขอบก็จะถูกทำพรัด้วยจุดภาพรอบข้างและค่าของขอบซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย ซึ่งในกรณีนี้จะต้องใช้เมทริกซ์  $\mathbf{B}_k$  ซึ่งมีรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{1,0} & 0 & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{-1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{-1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{-1,0} & B_{0,0} & 0 & B_{-1,1} & B_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ B_{0,-1} & B_{1,-1} & 0 & B_{0,0} & B_{1,0} & 0 & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 \\ B_{-1,-1} & B_{0,-1} & B_{1,-1} & B_{-1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{-1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \\ 0 & B_{-1,-1} & B_{0,-1} & 0 & B_{-1,0} & B_{0,0} & 0 & B_{-1,-1} & B_{0,1} \\ 0 & 0 & 0 & B_{0,-1} & B_{1,-1} & 0 & B_{0,0} & B_{1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{-1,-1} & B_{0,-1} & B_{1,-1} & B_{-1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{-1,-1} & B_{0,-1} & 0 & B_{-1,0} & B_{0,0} \end{bmatrix}$$

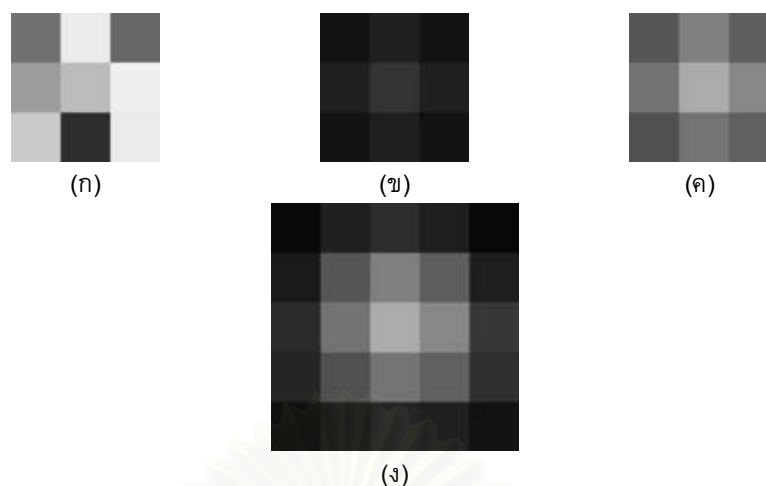
ซึ่งเมื่อรูปแบบของเคอร์เนลหรือฟังก์ชันกระจายจุดมีลักษณะสมมาตร เช่นในกรณีเคอร์เนลของเกาส์

$$\begin{bmatrix} B_{-1,-1} & B_{0,-1} & B_{1,-1} \\ B_{-1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} \\ B_{-1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \\ B_{1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} \\ B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \end{bmatrix}$$

จะได้เมทริกซ์  $\mathbf{B}_k$  ซึ่งมีรูปแบบสมมาตรด้วย

$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{1,0} & 0 & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,0} & B_{0,0} & 0 & B_{1,1} & B_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & B_{0,0} & B_{1,0} & 0 & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 \\ B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} & B_{1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} & B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} \\ 0 & B_{1,1} & B_{0,1} & 0 & B_{1,0} & B_{0,0} & 0 & B_{1,1} & B_{0,1} \\ 0 & 0 & 0 & B_{0,1} & B_{1,1} & 0 & B_{0,0} & B_{1,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{1,1} & B_{0,1} & B_{1,1} & B_{1,0} & B_{0,0} & B_{1,0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{1,1} & B_{0,1} & 0 & B_{1,0} & B_{0,0} \end{bmatrix}$$

สังเกตว่าเมื่อเมทริกซ์  $\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k^T$  จะทำให้หาตัวปฏิบัติการของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้ง่าย ซึ่งในกรณีนี้จะหมายถึงการทำพรัด้วยฟังก์ชันกระจายจุดเดียวกัน นอกจากนั้นการทำพรัในกรณีนี้จะไม่ทำให้ขนาดของภาพเปลี่ยน แตกต่างจากนิยามของการคูณประสานโดยทั่วไปที่ขนาดของ



รูปที่ 2.7: ภาพที่ผ่านการทำพรั้าโดยใช้เงื่อนไขขอบเขตศูนย์และฟังก์ชันกระจายจุด (ก) รูปที่จะนำมาผ่านการทำพรั้า  $f$ , (ข) ฟังก์ชันกระจายจุด  $b$ , (ค) รูป  $g$  ที่ผ่านการทำพรั้าด้วยเมทริกซ์  $B_k$  หรือผ่านการตัดขอบแล้ว และ (ง) รูป  $g$  ที่ยังไม่ผ่านการตัดขอบ และมีเงื่อนไขขอบเขตศูนย์

ภาพที่ถูกทำพรั้าใหญ่ขึ้น

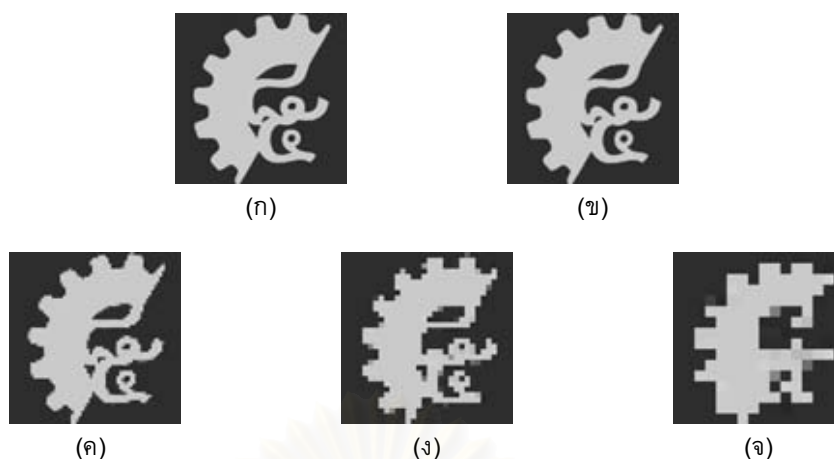
$$g(x, y) = b(x, y) * f(x, y) \quad (2.18)$$

โดยที่  $b(x, y)$  เป็นฟังก์ชันกระจายจุดที่มีขนาด  $i \times j$  ที่คูณประสานอยู่กับ  $f(x, y)$  ซึ่งเป็นภาพที่มีความละเอียดสูงมีขนาด  $I \times J$  จุดภาพ ทำให้ได้  $g(x, y)$  เป็นภาพที่ถูกทำพรั้ามีขนาด  $(I + i - 1) \times (J + j - 1)$  จุดภาพซึ่งมีขนาดใหญ่ขึ้น ในกรณีที่ให้การทำพรั้านั้นมีเงื่อนไขขอบภาพ จะเห็นเป็นภาพที่มีขอบสีดำล้อมรอบอยู่กับภาพที่ผ่านการทำพรั้า เมื่อนำผลของภาพที่ได้จากการทำพรั้าโดยวิธีการคูณประสานนี้  $g(x, y)$  มาลบขอบออกจนได้ภาพที่มีขนาดเท่ากับภาพตั้งต้น  $f(x, y)$  แล้วก็จะสมมูลกับการทำพรั้าภาพด้วยวิธีที่ใช้เมทริกซ์แบบกำหนดเงื่อนไขขอบที่ กล่าวไปข้างต้น ตามรูปที่ 2.7

ส่วนในกรณีที่การทำพรั้ามีขอบเขตแตกต่างจากเงื่อนไขขอบภาพ เช่น เงื่อนไขขอบเขตรายคาบ (periodic boundary conditions) หรือเงื่อนไขขอบเขตแบบสะท้อน (Neumann boundary conditions หรือ reflected boundary conditions) [20, 22] ซึ่งการทำพรั้าโดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ กันนั้นสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบสมมาตรหรือไม่สมมาตรได้เช่นเดียวกัน [22]

นอกจากเงื่อนไขขอบที่กล่าวไปแล้ว การทำพรั้าเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้ปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนี้เป็นปัญหาตั้งไว้แล้ว [12, 14, 22] และการทำให้ภาพกลับมาชัดจากการทำพรั้านั้นมีความไวต่อสัญญาณรบกวน [22] เพราะเมทริกซ์ของการทำพรั้านั้นมีค่าลักษณะเฉพาะที่กระจายตัวอยู่ช่วงที่กว้าง ทำให้สามารถขยายผลของสัญญาณรบกวนเป็นไปได้อย่างมาก ซึ่งปัญหาตั้งไว้แล้วดังกล่าวมานั้นจำเป็นต้องใช้กระบวนการเรกูลารีไรซ์ซึ่งจะกล่าวในบทที่ 4 ช่วยปรับปรุง





รูปที่ 2.8: ภาพที่ผ่านการชักตัวอย่างลงด้วยอัตราส่วน (a) 1 เท่า, (b) 2 เท่า, (c) 4 เท่า, (d) 8 เท่า และ (e) 16 เท่า

สภาวะทำให้การหาคำตอบนั้นเป็นไปได้ยิ่งขึ้น [22]

### 2.3.3 การชักตัวอย่างลง

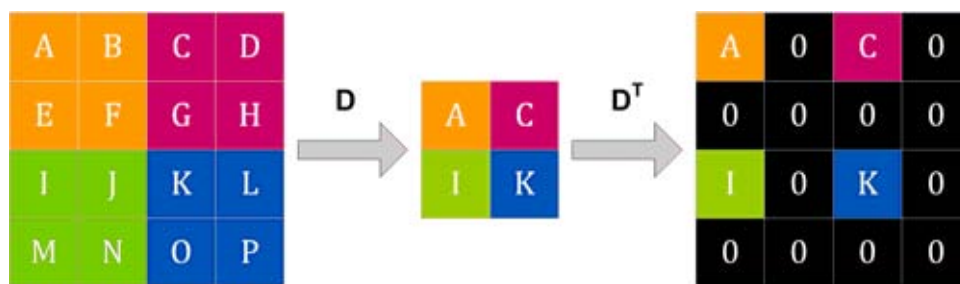
การชักตัวอย่างลงนั้นเกิดจากการที่ตัวรับภาพที่ใช้ในกระบวนการเก็บภาพ นั้นมีขนาดเชิงพื้นที่จำกัดไม่สามารถจัดเก็บข้อมูลต่อเนื่องไว้ได้ จึงจำเป็นต้องมีการสุ่มข้อมูลต่อเนื่องเหล่านั้นมาเก็บไว้ในขนาดจำกัด ส่งผลให้ภาพที่ถูกจัดเก็บด้วย ตัวรับภาพแบบดังกล่าวมีความละเอียดด้อยลงไปจากเดิม จากรูปที่ 2.8 แสดงตัวอย่างการชักตัวอย่างลงเมื่อเปลี่ยนให้อัตราส่วนลดลง ซึ่งเป็นตัวแทนของการใช้ตัวรับภาพที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่ที่มีความหนาแน่นแตกต่างกัน หากมีความละเอียดเชิงพื้นที่มากก็จะได้ภาพที่มีความละเอียดที่สูง ในขณะที่หากมีตัวรับภาพที่มีความละเอียดเชิงพื้นที่น้อยลงก็จะได้ภาพที่มีความละเอียดต่ำลง

ถ้าหาก  $\mathbf{D}$  นั้นเป็นเมทริกซ์ตัวแทนการชักตัวอย่างลงของภาพความละเอียดสูงภาพหนึ่งให้กลายเป็นภาพความละเอียดต่ำภาพหนึ่งด้วยอัตราส่วน  $\frac{M}{m}$  และ  $\frac{N}{n}$  ตามแกนทั้งสองของภาพตามลำดับ ก็อาจจะสามารถกล่าวได้อีกเช่นกันว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวแทนการชักตัวอย่างลง  $\mathbf{D}^T$  สมมูลกับตัวปฏิบัติการชักตัวอย่างขึ้น (Upsampling) ด้วยอัตราส่วนเดียวกันคือ  $\frac{M}{m}$  และ  $\frac{N}{n}$  ตามแกนทั้งสองของภาพตามลำดับ [12, 14]

#### ตัวอย่างการชักตัวอย่างลงและขึ้นของภาพ

ให้ภาพที่ต้องการจะชักตัวอย่างลงมีขนาด  $4 \times 4$  จุดภาพ โดยต้องการชักตัวอย่าง ลงในอัตราส่วน 2 เท่าทั้งสองแกนของภาพ จะได้ภาพที่มีขนาด  $2 \times 2$  จุดภาพ ให้  $f$  เป็นเวกเตอร์

$$f = [f_{1,1} \ f_{1,2} \ f_{1,3} \ f_{1,4} \ f_{2,1} \ f_{2,2} \ f_{2,3} \ f_{2,4} \ f_{3,1} \ f_{3,2} \ f_{3,3} \ f_{3,4} \ f_{4,1} \ f_{4,2} \ f_{4,3} \ f_{4,4}]^T$$



รูปที่ 2.9: แสดงการทำงานของตัวปฏิบัติการ  $D$  แสดงถึงการชักตัวอย่างลงของรูป ในขณะที่ตัวปฏิบัติการ  $D^T$  แสดงถึงการชักตัวอย่างขึ้นของรูป เมื่ออัตราส่วนการชักตัวอย่างลงและขึ้นนั้นมีค่าเท่ากับ 2 เท่ากัน การชักตัวอย่างลงของภาพขนาด  $4 \times 4$  จุดภาพด้วยอัตราส่วน 2 เท่านั้นจะได้ภาพที่มีความละเอียดต่ำลงเท่ากับ  $2 \times 2$  จุดภาพ เช่นเดียวกันในการชักตัวอย่างขึ้นด้วยอัตราส่วน 2 เท่านั้นจากภาพที่มีความละเอียดต่ำ  $2 \times 2$  จุดภาพก็จะได้ภาพที่มีความละเอียดสูงเท่ากับ  $4 \times 4$  จุดภาพ

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f \quad (2.19)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,3} \\ f_{3,1} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

จะได้ภาพที่ถูกชักตัวอย่างลงตามรูปที่ 2.9 สังเกตว่าเมทริกซ์  $D$  มีขนาดไม่เป็นจัตุรัสเนื่องจากการชักตัวอย่างลง แต่เมื่อนำไปสร้างเป็นเมทริกซ์การลดทอนภาพแล้วจะได้เมทริกซ์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในแนวนอน แนวตั้ง หรือเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งจะนำไปเปลี่ยนระบบปัญหาตามหัวข้อที่ 2.2.1 - 2.2.3 แบบใดก็ได้

หากต้องการชักตัวอย่างภาพขนาด  $2 \times 2$  ขึ้น ด้วยอัตรา 2 เท่าทั้งสองแกน จะใช้เมทริกซ์  $D^T$  ตามรูปที่ 2.9 เช่นกัน

$$D^T Df = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,3} \\ f_{3,1} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ 0 \\ f_{1,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_{3,1} \\ 0 \\ f_{3,3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

ข้อสังเกตอีกอย่างหนึ่งก็คือทั้ง  $D$  และ  $D^T$  นั้น จะมีลักษณะเหมือนกันสำหรับ ทุกภาพ ไม่ว่าภาพนั้นจะเคลื่อนที่ด้วยเวกเตอร์เคลื่อนที่ใด

การชักตัวอย่างลงและขึ้นนั้นจะไม่มีผลของการเปลี่ยนแปลงความเข้มของแต่ละจุดภาพ หรืออีกนัยหนึ่งคือแต่ละค่าของเวกเตอร์ แต่เป็นการเพิ่มศูนย์เข้าไปทำให้ภาพที่มีขนาดเล็กกลายเป็น

เป็นภาพมีขนาดใหญ่ขึ้น ตามรูปที่ 2.9 [12, 14]

การนำไปสร้างจริงเพื่อจะนำไปแก้ปัญหาค้นหาด้วยวิธีการทำซ้ำที่กล่าวถึงในบทที่ 3 นั้น ไม่จำเป็นต้องกำหนดเมทริกซ์ปฏิบัติการการทอนภาพเหล่านี้อย่างชัดเจน เนื่องจากว่าการกำหนดอย่างชัดเจนนั้นจะทำให้สิ้นเปลืองทรัพยากรของระบบเช่นหน่วยความจำโดยไม่จำเป็น เพราะแม้ว่าเมทริกซ์นั้นจะมีรูปแบบที่มีศูนย์มากก็ตาม [11] สิ่งที่จะต้องปฏิบัติก็คือการกำหนดตัวปฏิบัติการที่สมมูลกับเมทริกซ์รวมถึงเมทริกซ์สลับเปลี่ยนเหล่านี้แทน

## 2.4 นอร์มของปัญหา

ไม่ว่าจะเป็นงานวิจัยทางด้านการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดหรืองานวิจัยโดยทั่วไปนั้น มักจะคุ้นเคยกันกับปัญหาค้นหาสองน้อยที่สุด ตัวอย่างการสร้างปัญหาให้เป็นนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  นั้นเช่นการให้สมการ (2.1) และ  $p$  ซึ่งเป็นลำดับของปริภูมิของนอร์มของปัญหาเท่ากับ 2 ซึ่งการใช้นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  นั้นมักจะมีข้อจำกัดบางอย่าง ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษาการใช้ทั้งนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  และนอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  ในกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด

### 2.4.1 การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยปัญหาเป็นนอร์มบนปริภูมิ $L^2$

การให้นอร์มของระบบเป็นนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  นั้นมีข้อได้เปรียบกว่านอร์มแบบอื่นก็คือจะทำให้ปัญหานั้นเป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งจะทำให้เมื่อต้องใช้วิธีการทำซ้ำเพื่อหาคำตอบในบทที่ 3 นั้นก็จะสามารถเลือกวิธีการทำซ้ำที่เป็นแบบเชิงเส้นได้ ซึ่งมีความซับซ้อนน้อยกว่าการทำซ้ำด้วยวิธีการทำซ้ำแบบไม่เชิงเส้น

แต่การที่นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  นั้นมีข้อจำกัดในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด คือมักจะให้ภาพที่ไม่คมชัด มีลักษณะพัว หรือราบเรียบกลืนกันมากเกินไป ซึ่งจะทำให้ขอบของภาพนั้นไม่คมชัดตามไปด้วย ซึ่งอาจจะสามารถแสดงตัวอย่างการสร้างภาพความละเอียดสูงแบบนี้ได้ตามรูปที่ 2.10ก

### 2.4.2 การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยปัญหาเป็นนอร์มบนปริภูมิ $L^1$

การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยการทำให้ปัญหาเป็นนอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  นั้นมีการพิสูจน์แล้วว่าให้ภาพที่คมชัดกว่าการใช้นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  [12, 14] แต่ในอีกมุมมองหนึ่งนั้นก็ทำให้ปัญหากลายเป็นปัญหาไม่เชิงเส้นซึ่งยากในการหาคำตอบ และยากแก่การที่จะหาวิธีในการหาคำตอบด้วย ซึ่งจะนำเสนอในตอนท้ายของบทที่ 3 ซึ่งอาจจะสามารถแสดงตัวอย่างการสร้างภาพความละเอียดสูงแบบนี้ได้ตามรูปที่ 2.10ข

รายละเอียดในตารางที่ 2.1 แสดงผลให้เห็นว่าฟังก์ชันมูลค่าที่สร้างด้วยนอร์มในปริภูมิ

$L^1$  นั้นจะใช้การทำซ้ำที่ใช้เวลาน้อยกว่าฟังก์ชันมูลค่าที่สร้างด้วยนอร์มในปริภูมิ  $L^2$  ที่มีการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟในอันดับที่สองเช่นเดียวกัน ในขณะที่ได้ค่า MSE และ PSNR เมื่อเทียบกับภาพต้นฉบับที่ดีกว่า ข้อดีของการใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่สร้างด้วยนอร์มในปริภูมิ  $L^1$  และผลของการเรกูลาร์ไรซ์แบบต่าง ๆ จะกล่าวอีกครั้งในตอนท้ายของบทที่ 4

	LR frames	$\lambda$	จำนวนรอบการทำซ้ำ	เวลาที่ใช้	MSE	PSNR
นอร์มบนปริภูมิ $L^2$	5	0.01	19 รอบ	44 วินาที	17.31	35.75
นอร์มบนปริภูมิ $L^1$	5	0.06	28 รอบ	16 วินาที	12.98	36.99

ตารางที่ 2.1: ตารางแสดงรายละเอียดพารามิเตอร์และผลของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดตามรูปที่ 2.10 รายละเอียดของระบบที่ใช้อยู่ในภาคผนวก ข



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



รูปที่ 2.10: ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ norms ต่างกัน รายละเอียดการสร้างอยู่ในตารางที่ 2.1  
 (ก) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ Norm บนปริภูมิ  $L^2$  (ผลเฉลยกำลังสองน้อยที่สุด) ที่มีการ  
 เรกูลาร์ไรซ์แบบดิโคโนฟอันดับที่สอง (ข) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ Norm บนปริภูมิ  $L^1$  ที่  
 มีการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิโคโนฟอันดับที่สอง

สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## บทที่ 3

### วิธีทำซ้ำที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด

การแก้สมการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่เช่นในงานทางวิศวกรรมนั้น จะแก้ไขได้ง่ายโดยอาศัยคอมพิวเตอร์ ในการช่วยหาผลเฉลย ซึ่งในการแก้สมการหาผลเฉลยนั้นมีอยู่ด้วยกันสองวิธีใหญ่ ๆ คือวิธีตรง (direct method) จากการแยกตัวประกอบเมทริกซ์ LU (รายละเอียดต่าง ๆ สามารถดูได้จาก [23] เป็นต้น) หรือวิธีการที่คล้ายกัน และวิธีอ้อม (indirect method) การใช้วิธีตรงนั้นหากจากระบบสมการมีขนาดใหญ่และเมทริกซ์มีความหนาแน่นมากจะทำให้เวลาที่ใช้ในการการคำนวณผลเฉลยยาวนาน [24] การใช้การแก้สมการด้วยวิธีทางอ้อม หรือโดยใช้หลักการซ้ำ เช่น การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ หรือ เกรเดียนต์สังยุค นั้น มีความเหมาะสมกว่าเพราะมักใช้หน่วยความจำได้อย่างคุ้มค่าและทำงานได้รวดเร็ว [24] สมการเชิงเส้นในรูปแบบอย่างง่ายสามารถเขียนได้ว่า

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
$$b = Ax \quad (3.1)$$

โดยที่  $x$  คือเวกเตอร์ของผลเฉลยไม่ทราบค่าที่ต้องการหา  $A$  และ  $b$  คือเมทริกซ์และเวกเตอร์ที่ทราบค่าของระบบตามลำดับ และ  $A$  เป็นเมทริกซ์ที่มีลักษณะบวกแน่นอน (positive definite) เมื่อ  $x^T Ax > 0$  สำหรับสมการที่มีรูปแบบกำลังสอง

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c \quad (3.2)$$

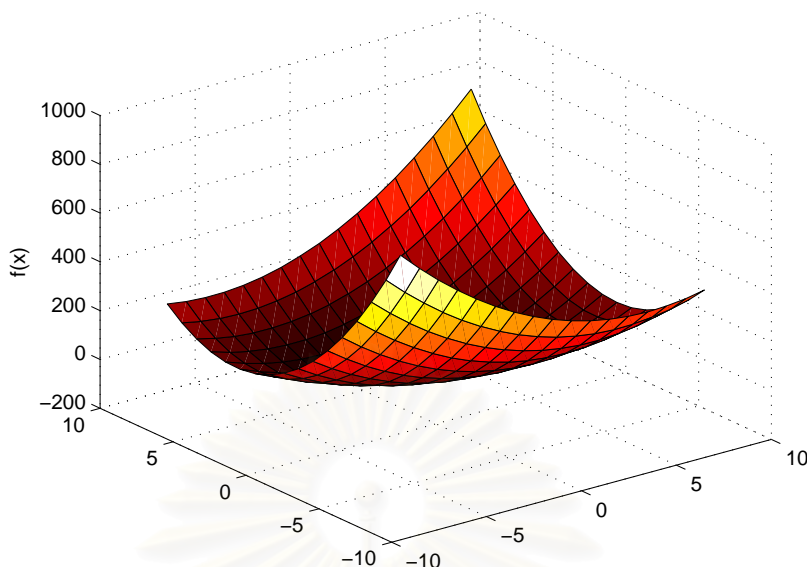
ซึ่งมีเกรเดียนต์

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2}A^T x + \frac{1}{2}Ax - b \quad (3.3)$$

โดยที่หาก  $A$  มีลักษณะสมมาตรแล้วจะทำให้สามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น  $\nabla f(x) = Ax - b$

#### 3.1 การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ (steepest descent)

การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ [25] เป็นกระบวนการแบบซ้ำเพื่อใช้หาจุดต่ำสุดเฉพาะที่ (local minimum) ของ ฟังก์ชันซึ่งเป็นที่รู้จักก่อนวิธีเกรเดียนต์สังยุค [26] โดยที่ตั้งต้นที่จุดกำหนดเองใด ๆ  $x_0$  และระเบียบวิธีจะให้กำเนิดลำดับของเวกเตอร์  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ในทุกรอบการทำซ้ำ และจะเลิกกระบวนการหากได้  $x_k$  ที่ใกล้จุดต่ำสุดของฟังก์ชันเพียงพอ เช่นจากรูปที่ 3.2 มีจุด



รูปที่ 3.1: รูปแบบกำลังสองของเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

ต่ำสุดอยู่ที่ตำแหน่ง  $(2, -2)$

ระเบียบวิธีจะให้กำเนิด  $x_k$  ในแต่ละรอบโดยการค้นตามเส้นทางที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่า (cost function)  $f(x)$  มีค่าต่ำสุด นั่นคือทิศตรงกันข้ามกับ  $\nabla f(x)$

$$s_k = -\nabla f(x_k) \quad (3.4)$$

โดยที่  $s_k$  เป็นทิศทางที่ทำให้ค่า  $x_{k+1}$  มีค่าต่ำสุด เมื่อนำมารวมเข้ากับ  $x_k$  ที่จุดเดิมจะได้

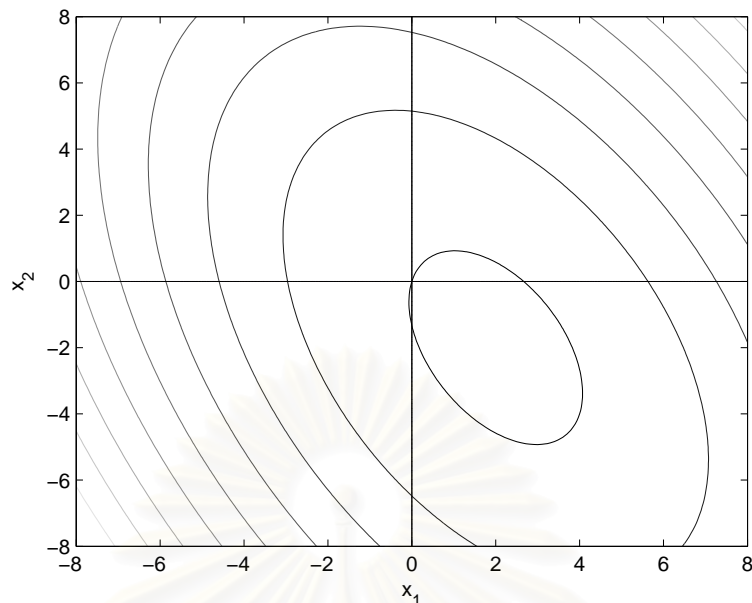
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k \quad (3.5)$$

ในขณะที่  $\alpha_k$  เป็นระยะทางช่วงก้าว (step size) ที่ทำให้ได้ค่าของ  $x_{k+1}$  ที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่าต่ำสุด โดยระยะทางช่วงก้าว  $\alpha_k$  ได้จากการหาจุดที่มีค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งกระบวนการนี้เรียกว่า การค้นหาตามเส้น (line search)

### 3.2 การค้นหาตามเส้น

การค้นหาตามเส้นนั้นเป็นการหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันแบบมิติเดียว ซึ่งหาได้โดยอาศัยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเพื่อหาจุดต่ำสุด ที่มีความชันของฟังก์ชันมูลค่าที่จุด  $x_{k+1}$  เป็นศูนย์ จากฟังก์ชันมูลค่า:

$$\phi(\alpha) \triangleq f(x_k + \alpha s_k) \quad (3.6)$$



รูปที่ 3.2: คอนทัวร์ของฟังก์ชันซึ่งแสดงค่าต่ำสุด

จุดประสงค์คือการหาจุดต่ำสุดของสมการ (3.6)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} \phi(\alpha) \quad (3.7)$$

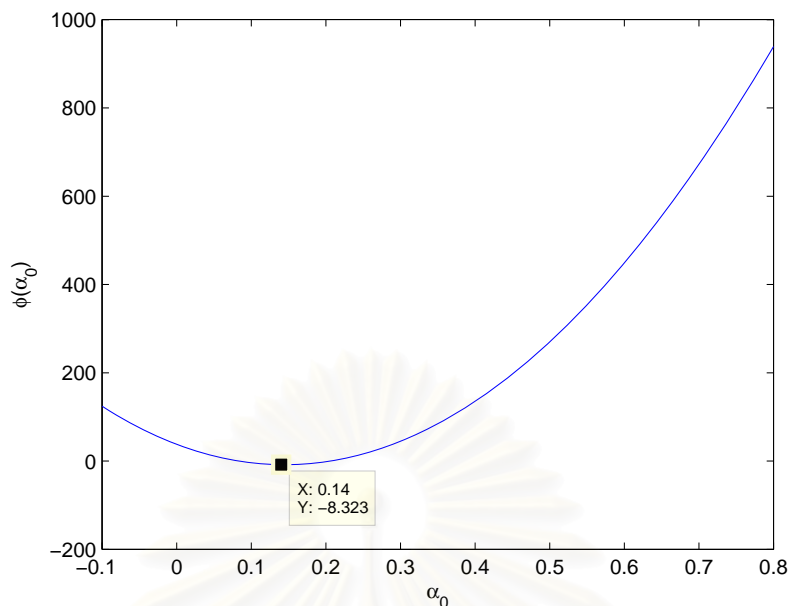
โดยหาตำแหน่งที่ความชันของฟังก์ชัน  $\phi$  เท่ากับศูนย์

$$\phi'(\alpha) = 0 \quad (3.8)$$

ในกรณีที่สามารถหาคำอธิบายวิเคราะห์ที่สามารถหาค่าระยะทางช่วงก้าว  $\alpha_k$  ได้จากการแก้สมการ

การค้นหาค่าตามเส้นนั้นสามารถแบ่งได้เป็นสองวิธีคือแบบแม่นยำ (exact line search) และแบบประมาณ (inexact line search) โดยที่หากฟังก์ชันมูลค่าเป็นแบบสมการกำลังสองจะมีนิพจน์วิเคราะห์ (analytical expression) สำหรับการหาระยะช่วงก้าว ในขณะที่หากปัญหาเป็นไม่เป็นฟังก์ชันดังกล่าวมักไม่มีนิพจน์วิเคราะห์ซึ่งการนำไปสร้างจริงนั้นจะซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

การหาระยะทางช่วงก้าวโดยที่ไม่มีนิพจน์วิเคราะห์นั้นสามารถทำได้หลายวิธี โดยวิธีหนึ่งที่เป็นสามารถทำได้คือการใช้การประมาณค่า ในช่วง (interpolation) ซึ่งประมาณฟังก์ชันมูลค่า  $\phi(\alpha)$  ด้วยฟังก์ชันเส้นโค้งเช่นแบบกำลังสองหรือแบบกำลังสาม จากนั้นจะนำจุดต่ำสุดของฟังก์ชันที่ประมาณขึ้นมาแทนค่าในฟังก์ชันมูลค่าเพื่อหาความแตกต่างระหว่างค่าของฟังก์ชันมูลค่า จุดนั้นกับจุดต่ำสุดที่ได้จากการประมาณ หากจุดต่ำสุดที่ได้จากการประมาณสามารถเป็นตัวแทนของจุดต่ำสุดของฟังก์ชันมูลค่าแล้ว ก็แสดงว่าการประมาณค่าในช่วงนี้สามารถยอมรับได้และจุดต่ำสุด



รูปที่ 3.3: ค่าของระยะทางช่วงก้าวที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่าต่ำสุด

ของฟังก์ชันประมาณที่หาได้ก็จะเป็นระยะทางช่วงก้าว แต่หากจุดต่ำสุดที่สร้างขึ้นจากฟังก์ชันที่ประมาณนั้นไม่สามารถเป็นตัวแทนของจุดต่ำสุดของฟังก์ชันมูลค่าในทิศทางที่ค้นหาแล้ว จะต้องประมาณค่าในช่วงใหม่ซึ่งในขั้นตอนนี้ก็สามารถมีกลวิธีย่อยที่แตกต่างกัน ยกตัวอย่าง เช่นการนำจุดต่ำสุดจากการประมาณค่าในช่วงครั้งแรกนั้นไปเป็นจุดที่สร้างฟังก์ชันประมาณ อีกครั้ง หากจุดต่ำสุดของฟังก์ชันจากการประมาณครั้งที่สองสามารถยอมรับได้<sup>1</sup>จึงหยุด มิเช่นนั้นแล้วจึงประมาณค่าในช่วงซ้ำอีกครั้งด้วยกลวิธีเดิมจนได้จุดต่ำสุดของฟังก์ชันจากการประมาณที่สามารถยอมรับได้

### 3.2.1 การค้นหาตามเส้นอย่างถูกต้องแม่นยำ

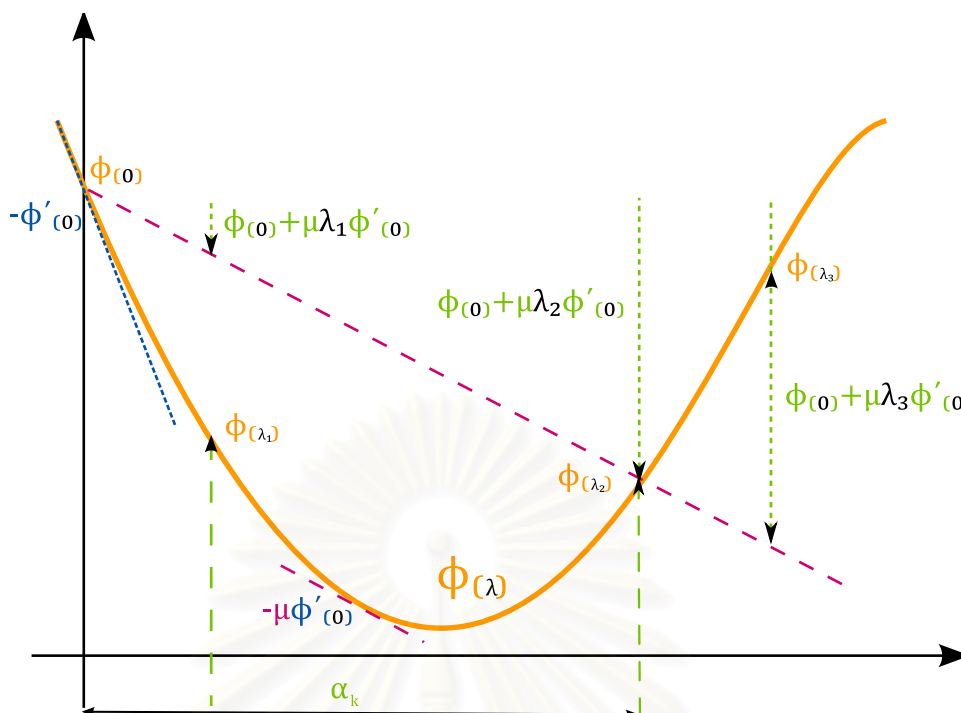
ในกรณีนี้ที่ฟังก์ชันมูลค่าเป็นฟังก์ชันกำลังสองเช่นตามสมการ (3.2) เราสามารถหาหาค่าวิเคราะห์ของระยะทางช่วงก้าวนี้จากการค้นหาตามเส้นได้ว่า

$$\alpha_k = \frac{s_k^T s_k}{s_k^T A s_k} \quad (3.9)$$

$$s_k = -(A x_k - b) \quad (3.10)$$

แต่หากเราไม่ได้มีฟังก์ชันเป็นรูปแบบกำลังสองตามสมการ (3.2) จำเป็นต้องหาค่าระยะทางช่วงก้าว  $\alpha$  จากวิธีการต่าง ๆ เช่นวิธีการสุ่มหรือค้นหาตามเส้นด้วยวิธีประมาณ และอาจใช้ความชัน  $\phi'(\alpha_k)$  เป็นตัวตัดสินว่าค่าระยะทางช่วงก้าวนั้นเป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่าต่ำสุดหรือไม่ซึ่งมักใช้เวลา

<sup>1</sup>การประมาณที่สามารถยอมรับได้นั้นจะเกิดขึ้นเมื่อพิจารณาช่วงที่แคบพอที่จะทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ประมาณขึ้นมาั้นเทียบได้กับฟังก์ชันมูลค่าในทิศทางที่ค้นหาพอดี



รูปที่ 3.4: แสดงช่วงของระยะก้าว  $\alpha_k$  ที่ยอมรับได้ตามเงื่อนไขของ Armijo

กว่าที่จะหาค่าระยะทางช่วงก้าวที่เหมาะสม

### 3.2.2 การค้นหาตามเส้นด้วยวิธีประมาณ

โดยทั่วไปนั้นการที่ได้ค่าระยะทางช่วงก้าวที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่ามีค่าต่ำสุดนั้นเป็นสิ่งที่ดี แต่เนื่องจากการหาระยะทางช่วงก้าวอย่างถูกต้องแม่นยำนั้นใช้เวลานาน และพบว่าระยะทางช่วงก้าวที่ดีนั้นอาจไม่จำเป็นต้องทำให้ฟังก์ชันมูลค่าต่ำสุดก็ได้ แต่ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่ามีค่าน้อยลง

Armijo (ดู [27]) ได้เสนอเงื่อนไขที่ทำให้ระยะทางช่วงก้าวนั้นไม่ใหญ่จนเกินไปดังนี้

$$f(x_k + \alpha_k s_k) \leq f(x_k) + \mu \alpha_k \nabla f(x_k)^T s_k \quad (3.11)$$

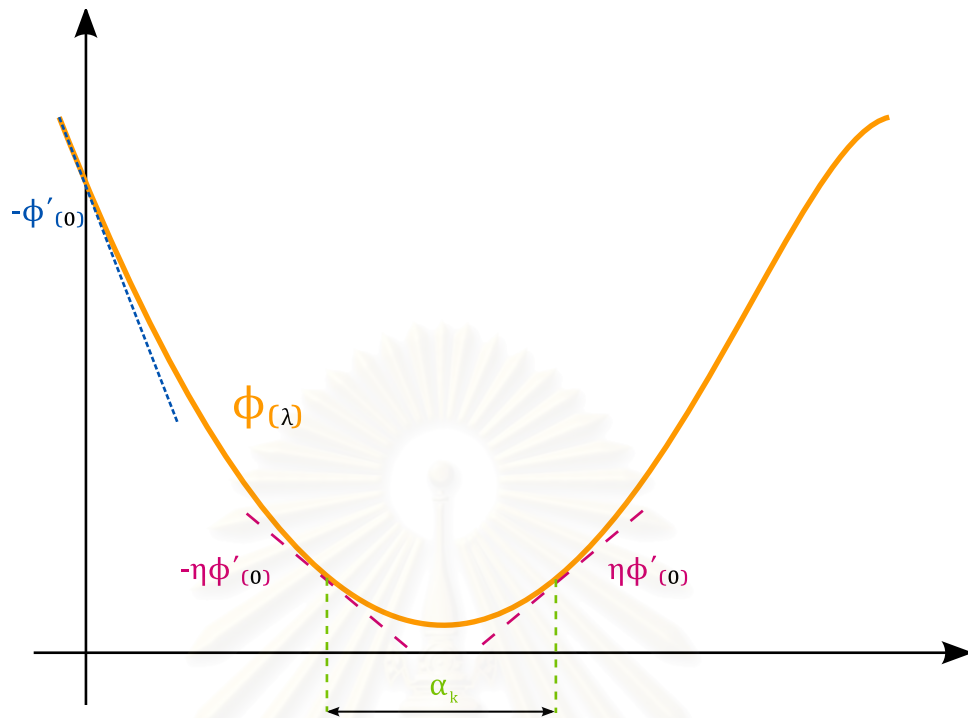
และ Wolfe (ดู [27]) ได้เสนอเงื่อนไขที่ทำให้ระยะทางช่วงก้าวนั้นไม่เล็กจนเกินไป

$$\nabla f(x_k + \alpha_k s_k)^T s_k \geq \eta \nabla f(x_k)^T s_k \quad (3.12)$$

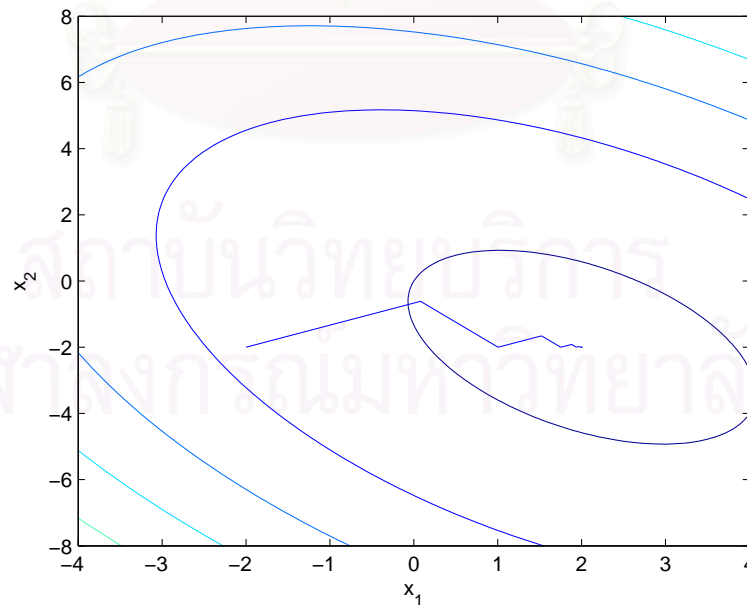
อสมการ (3.11) และ (3.12) คือเงื่อนไขของ Armijo และเงื่อนไขของ Wolfe ตามลำดับซึ่งสามารถอธิบายได้ตามรูปที่ 3.4 และ รูปที่ 3.5 ถ้าต้องการช่วงการค้นหาแคบลงอาจใช้ เงื่อนไขของ Wolfe







รูปที่ 3.6: แสดงช่วงของระยะก้าว  $\alpha_k$  ที่ยอมรับได้ตามเงื่อนไขของ Wolfe แบบผูกมัด



รูปที่ 3.7: การลู่เข้าของวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์เมื่อระบบเป็นเชิงเส้น และมีจุดเริ่มต้นที่  $x_0 = [-2, 2]^T$

เฉพาะ (eigenvector) ของเมทริกซ์  $A$  จะทำให้ในการทำซ้ำของวิธีลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ ครั้งต่อไปได้ผลเฉลยพอดี [24] ซึ่งสิ่งนี้แสดงให้เห็นว่าการเลือกจุดตั้งต้นกำหนดเองนั้นมีผลมาก ต่อความเร็วในการลู่เข้าของระเบียบวิธี

แนวคิดของการนำเอาทิศทางสังยุคที่นำมาใช้ในการปรับปรุงวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ให้เป็นระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคเพื่อลดความซ้ำซ้อนของทางเดินของผลเฉลยนั้นสามารถนำมาสร้างจริงได้หลายรูปแบบ โดยที่สามารถจำแนกตามรูปแบบปัญหาที่นำไปใช้ได้เป็นสองประเภทใหญ่ ๆ คือ เกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น และ เกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้น

### 3.4 เกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น

การจำแนกวิธีการเกรเดียนต์สังยุค เป็นแบบ เชิง เส้นและไม่ เชิง เส้น นั้น ไม่ใช่เพราะตัวระเบียบวิธีเองเป็นรูปแบบเชิงเส้นหรือไม่ใช่เชิงเส้น หากแต่จำแนกจากรูปแบบของปัญหาตั้งต้นว่าเป็นแบบใด ในกรณีที่มีปัญหาตั้งต้นเป็นการแก้สมการแบบเชิงเส้นตามสมการ (3.1) หรือไปตามรูปแบบกำลังสองตามสมการ (3.2) ก็จะใช้ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น

1. หาทิศทางของเกรเดียนต์ โดยที่

$$g_0 = \nabla f(x_0) = Ax_0 - b$$

$$g_k = g_{k-1} - \alpha_k A s_k$$

2. หาทิศทางสังยุคของทิศทางเดิม

$$s_0 = -g_0$$

$$s_k = -g_k + \beta_k s_{k-1} \text{ โดยที่}$$

$$\beta_k = \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}}$$

3. หาระยะทางช่วงก้าว  $\alpha_k$  ที่มีนิพจน์วิเคราะห์

$$\alpha_k = \frac{g_k^T g_k}{s_k^T A s_k}$$

4. เปลี่ยนแปลงค่าของ  $x$

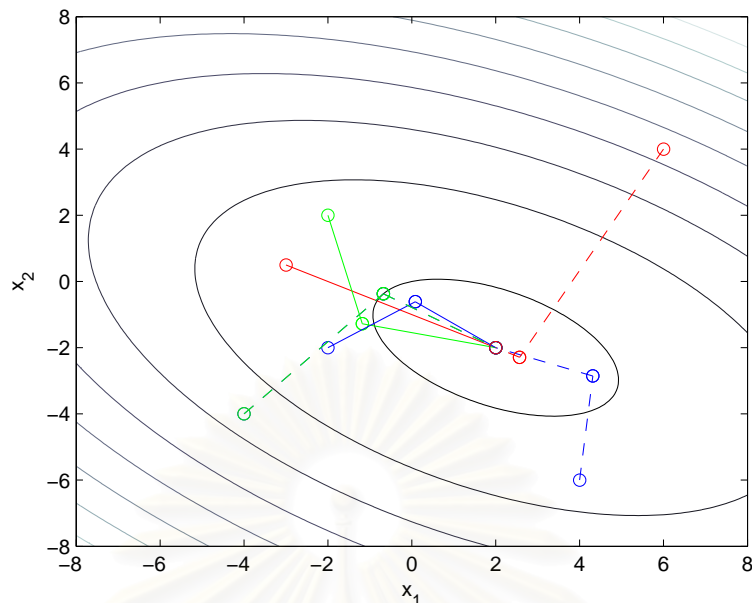
$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$$

5. เปลี่ยนแปลงค่าของ  $k$

$$k = k + 1$$

หลังจากนั้นให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1 จนถึง 5 จนกระทั่งได้ผลเฉลย  $x_k$  เป็นที่น่าพอใจหรือ  $g_k$  มีค่าน้อยเพียงพอ

ตาม ทฤษฎีนั้น [24] พบว่าระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคนั้นให้ผลตอบที่รวดเร็วกว่าวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์มาก ซึ่งสามารถเปรียบเทียบได้จากรูปที่ 3.7 กับรูป 3.8



รูปที่ 3.8: การลู่เข้าของวิธีเกรเดียนต์สังยุค เมื่อมีระบบเป็นระบบเชิงเส้นและมีจุดเริ่มต้นที่  $x_0 = [-2, 2]^T, [-4, -4]^T, [2, -2]^T, [-3, 1]^T, [-2, 2]^T, [6, 4]^T$  และ  $[4, -6]^T$

2 ซึ่ง เป็นปัญหาเดียวกัน โดยที่ ตั้งจุดตั้งต้นกำหนดเองไว้ที่  $[-2, -2]^T$  เช่นเดียวกัน แต่ ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคนั้นสามารถเข้าสู่ผลตอบได้รวดเร็วกว่าระเบียบวิธีการลดระดับตาม แนวเกรเดียนต์มาก

### 3.5 เกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้น

โดยทั่วไปปัญหาทางวิศวกรรมนั้นหากถูกจัดรูปแบบมาให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้นอย่าง ง่ายเช่นในกรณีของสมการ (3.2) นั้นสามารถใช้เกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้นหาจุดต่ำสุดของ ฟังก์ชันและได้ผลดีมากเนื่องจากการค้นหาตามเส้นหรือการหาระยะทางช่วงก้าวที่เหมาะสมนั้น สามารถทำได้อย่างแม่นยำโดยมีนิพจน์วิเคราะห์ที่แน่นอนและคำนวณได้อย่างไม่ซับซ้อนนัก นอกจากนั้นระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคนั้นยังสามารถนำไปหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันแบบต่อเนื่องแบบ อื่น ๆ ได้อีก โดยเฉพาะงานประยุกต์ทางด้านกรังจ๋าโดยใช้โครงข่ายเส้นประสาท (neural network training) หรือการถดถอยไม่เชิงเส้น (nonlinear regression) [24] แต่หากปัญหาที่สร้างแบบ จำลองขึ้นนั้นเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้นหรืออยู่ในกรณีที่หากเป็นระบบไม่เชิงเส้นแล้วจะได้ผลตอบ ที่เป็นที่พอใจมากกว่าสร้างแบบจำลองเป็นระบบเชิงเส้นแล้ว การหาผลตอบด้วยวิธีเกรเดียนต์-สังยุคแบบเชิงเส้นนั้นจะทำได้ โดยต้องเปลี่ยนแปลงกระบวนการในการทำเกรเดียนต์สังยุคใหม่ และไม่มีนิพจน์วิเคราะห์สำหรับการหาระยะทางช่วงก้าวที่แน่นอน

<sup>2</sup>ข้อสังเกตคือการลู่เข้าของเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้นนั้นใช้จำนวนการทำซ้ำในการลู่เข้าอย่างมากที่สุดเท่ากับ จำนวนของมิติของข้อมูลเท่านั้น ในกรณีนี้จำนวนมิติของข้อมูลเท่ากับ 2 เกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้นก็จะลู่เข้าโดยมี จำนวนของการกระทำซ้ำอย่างมากคือ 2 ครั้งเท่านั้นขึ้นกับจุดตั้งต้นกำหนดเอง

ในปัจจุบันมีการนำเสนอการหาทิศทางสังยุคของเกรเดียนต์ของระบบไม่เชิงเส้นหลายวิธี วิธีแรกที่จะนำเสนอคือ เกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves ซึ่งมีการพิสูจน์การลู่เข้าแบบวงกว้าง (global convergence) [24, 27] และอีกวิธีที่เป็นที่นิยมที่จะกล่าวถึงก็คือวิธีเกรเดียนต์-สังยุคแบบ Polak-Ribière ซึ่งการพิสูจน์การลู่เข้าแบบวงกว้างนั้นทำได้ยากกว่า แต่มักให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves โดยมีลู่เข้าด้วยจำนวนรอบที่น้อยกว่า ทำให้ระเบียบวิธีโดยรวมนั้นทำได้รวดเร็วกว่า [27]

ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้นนั้นมีหลักการคล้ายกับเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น แต่แตกต่างกันที่สูตรของการคำนวณ  $\beta_k$  และวิธีการหาระยะช่วงก้าว  $\alpha_k$  เป็นจุดใหญ่โดยที่ในแต่ละวิธีนั้นไม่เหมือนกัน แต่โดยภาพรวมแล้วกระบวนการเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้นเริ่มต้นโดยการ

1. หาทิศทางของเกรเดียนต์เช่นเดิม โดยที่

$$g_k = \nabla f(x_k)$$

2. หาทิศทางสังยุคของทิศทางเดิม

$$s_0 = -g_0$$

$$s_k = -g_k + \beta_k s_{k-1}$$

3. หาระยะทางช่วงก้าว<sup>3</sup>  $\alpha_k$  จากการค้นหาตามเส้นโดยที่ไม่มีนิพจน์วิเคราะห์ที่แน่นอน การหา นั้นเป็นไปตามแบบแมนย่าหรือโดยประมาณก็ได้

4. เปลี่ยนแปลงค่าของ  $x$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$$

5. เปลี่ยนแปลงค่าของ  $k$

$$k = k + 1$$

หลังจากนั้นให้ทำซ้ำขั้นตอนที่ 1 จนถึง 5 จนกระทั่งได้ผลเฉลย  $x_k$  เป็นที่น่าพอใจหรือ  $g_k$  มีค่าน้อยเพียงพอ เช่นเดียวกับกรณีเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น

### 3.5.1 การหาค่าระยะทางช่วงก้าว $\alpha_k$ เมื่อระบบเป็นแบบไม่เชิงเส้น

ในการหาระยะช่วงก้าวแบบแมนย่าตามหัวข้อที่ 3.2.1 นั้นเหมาะสมกับระบบที่เป็นเชิงเส้น เพราะสามารถหานิพจน์วิเคราะห์ที่แน่นอนของระยะช่วงก้าวได้ ในขณะที่หากระบบเป็นแบบไม่เชิงเส้นนั้น การหานิพจน์ที่แน่นอนของระยะช่วงก้าวนั้นเป็นเรื่องที่ยาก จึงต้องใช้การหาระยะทางช่วงก้าวด้วยวิธีประมาณตามหัวข้อที่ 3.2.2 แต่การที่ได้ระยะช่วงก้าวเพื่อนำมาทดสอบเพื่อให้ผ่าน

<sup>3</sup>ข้อสังเกตคือ  $\alpha_k$  ไม่สามารถหานิพจน์วิเคราะห์ได้แบบเดียวกับเกรเดียนต์สังยุคแบบเชิงเส้น



เงื่อนไข ของ Armijo และ Wolfe ตามสมการ (3.11)–(3.13) ซึ่งเป็นการหาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันแบบหนึ่งมิติ ในกรณีแบบนี้มักสนใจค่าของฟังก์ชัน  $\phi$  ในช่วงสั้น ๆ ทำให้สามารถนำมาประมาณหาจุดต่ำสุดโดยใช้ฟังก์ชันเส้นโค้งแบบต่าง ๆ หากไม่ต้องการคงค่าระยะช่วงก้าวเป็นค่าคงที่เพื่อที่จะหาจุดต่ำสุด

สิ่งที่น่าสนใจในประเด็นการหาระยะช่วงก้าวคือกลวิธีในการหาช่วงก้าวเริ่มต้นที่จะนำไปหาจุดต่ำสุดอีกที และการหาฟังก์ชันเส้นโค้งเพื่อจะนำไปหาจุดต่ำสุด

### 3.5.1.1 การหาช่วงก้าวเริ่มต้นและช่วงก้าวต่อไป

ก่อนที่จะเริ่มกระบวนการหาระยะทางช่วงก้าวที่เหมาะสมนั้น ในกรณีของเกรเดียนต์สังยุค จะต้องมีการตรวจสอบสมบัติการลดลงของฟังก์ชัน (descent property) เสียก่อนเนื่องจาก ไม่สามารถรับประกันฟังก์ชันตามสมการ (3.6) นั้นจะมีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ เมื่อ ค่า  $\alpha$  เพิ่มขึ้น โดยการตรวจสอบสมบัติการลดลงของฟังก์ชันนั้นจะต้องหาให้ได้ว่า

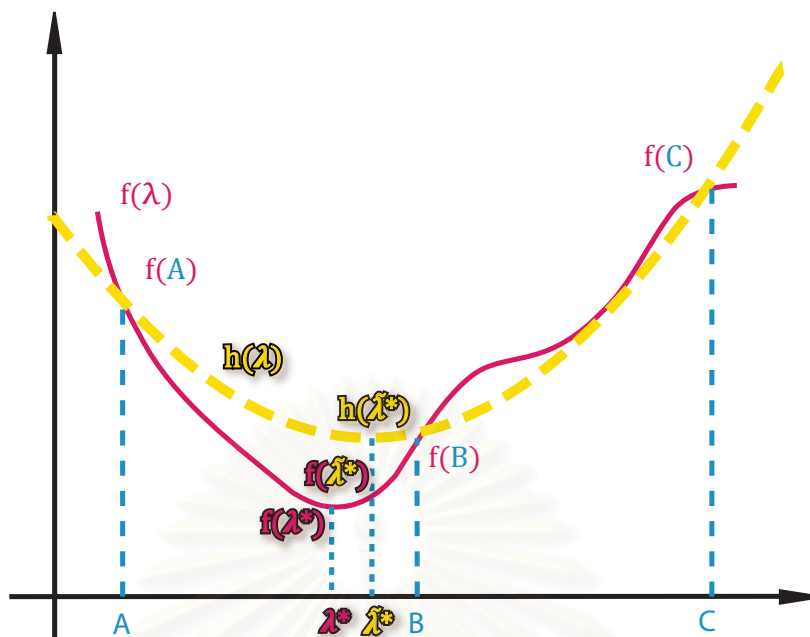
$$\phi'(0) < 0 \quad (3.14)$$

หากไม่เป็นไปตามสมการ (3.14) แสดงว่า  $\phi$  ไม่มีคุณสมบัติการลดลงของฟังก์ชัน จำเป็นจะต้องเปลี่ยนทิศทางการก้าวเข้าสู่ คำตอบต่อไปของกระบวนการทำซ้ำ เช่นการเปลี่ยนรอบการทำซ้ำในรอบนั้นเป็นวิธี การลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ เพื่อรับประกันคุณสมบัติการลดลงของฟังก์ชันเป็นต้น

### 3.5.1.2 การประมาณช่วงของฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบควอดราติก

การประมาณฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบควอดราติก (รายละเอียดต่าง ๆ ดูได้จาก [28] เป็นต้น) นั้นใช้เพียงแค่ค่าของฟังก์ชันเท่านั้น และเหมาะสมมากในกรณีที่ไม่สามารถหาค่าของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหรือในกรณีที่อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้นหายาก การประมาณช่วงของฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบควอดราติกนั้น สามารถแบ่งออกได้เป็นสามขั้นตอนคือ

1. หาทิศทาง  $s_k$  ที่จะทำให้เข้าสู่คำตอบของการทำซ้ำในรอบต่อไป ทำให้ได้ ฟังก์ชันที่เหลือเพียงหนึ่งมิติ  $\phi(\lambda)$  โดย ที่  $\lambda = \alpha_k$  เพื่อที่จะหาค่า  $\lambda^*$  ที่ทำให้ฟังก์ชัน  $\phi$  ต่ำสุดตามทิศทาง  $s_k$
2. ประมาณฟังก์ชัน  $\phi(\lambda)$  ในขั้นตอนแรกด้วยควอดราติกฟังก์ชัน  $h(\lambda)$  ที่มี  $\tilde{\lambda}^*$  เป็นจุดต่ำสุดของ ฟังก์ชัน
3. หาก  $\tilde{\lambda}^*$  ไม่สามารถเป็นตัวแทนของจุดต่ำสุด จริง  $\lambda^*$  ได้ใกล้เคียงเพียงพอ จะต้องประมาณ



รูปที่ 3.9: การประมาณค่าเส้นโค้งโดยใช้เส้นโค้งแบบควอดราติก

เส้นโค้ง  $h$  ใหม่อีกครั้งจนกว่าจะได้จุดต่ำที่สุด  $\tilde{\lambda}^*$  ที่ให้ค่าของฟังก์ชัน  $h(\tilde{\lambda}^*)$  ใกล้เคียงกับ  $\phi(\lambda^*)$  เพียงพอ

ในกรณีการประมาณฟังก์ชันเส้นโค้งด้วยฟังก์ชันควอดราติกนี้ให้

$$h(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 \quad (3.15)$$

ซึ่งเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (3.15) และให้เท่ากับ 0 จะได้ว่า

$$\frac{dh}{d\lambda} = b + 2c\lambda = 0$$

ซึ่งจะทำให้หาจุดต่ำสุดของฟังก์ชันได้

$$\tilde{\lambda}^* = -\frac{b}{2c} \quad (3.16)$$

เพื่อที่จะหาค่าพารามิเตอร์  $a, b$  และ  $c$  จะต้องหาค่าฟังก์ชันในสามจุด คือ  $A, B$  และ  $C$  โดยที่  $A < B < C$  และ  $f(A) > f(B)$  และ  $f(B) < f(C)$  [28] ตามรูปที่ 3.9 และค่าพารามิเตอร์จะ

หาได้จาก

$$a = \frac{f(A)BC(C-B) + f(B)CA(A-C) + f(C)AB(B-A)}{(A-B)(B-C)(C-A)} \quad (3.17)$$

$$b = \frac{f(A)(B^2 - C^2) + f(B)(C^2 - A^2) + f(C)(A^2 - B^2)}{(A-B)(B-C)(C-A)} \quad (3.18)$$

$$c = -\frac{f(A)(B-C) + f(B)(C-A) + f(C)(A-B)}{(A-B)(B-C)(C-A)} \quad (3.19)$$

จากสมการ (3.17), (3.18) และ (3.19) จะทำให้สามารถหา  $\tilde{\lambda}^*$  ในรูปพารามิเตอร์ของจุดต่าง ๆ ได้

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^* &= -\frac{b}{2c} \\ &= \frac{f(A)(B^2 - C^2) + f(B)(C^2 - A^2) + f(C)(A^2 - B^2)}{2[f(A)(B-C) + f(B)(C-A) + f(C)(A-B)]} \end{aligned} \quad (3.20)$$

ในการที่จะหาจุด  $A, B$  และ  $C$  ในกรณีนี้จะหาเพียงสองจุดคือ จุด  $B$  และ  $C$  เพราะจะให้ค่าของจุด  $A$  เป็น 0 และ ค่า  $f(A) = f(\lambda = 0)$  เป็นค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำรอบก่อนหน้า<sup>4</sup> ซึ่งจะทำให้ประหยัดการหาค่าของฟังก์ชันไปครึ่งหนึ่งซึ่งเป็นผลดีหากค่าของฟังก์ชัน หายากหรือใช้เวลานาน ในกรณีจะหาเพียงแค่ว่าค่าของจุด  $B$  และ  $C$  และฟังก์ชันของ ทั้งสองจุดคือ  $f(B)$  และ  $f(C)$  ที่ตรงตามเงื่อนไขตั้งข้างต้นเท่านั้น

### 3.5.1.3 การประมาณช่วงของฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบคิวบิก

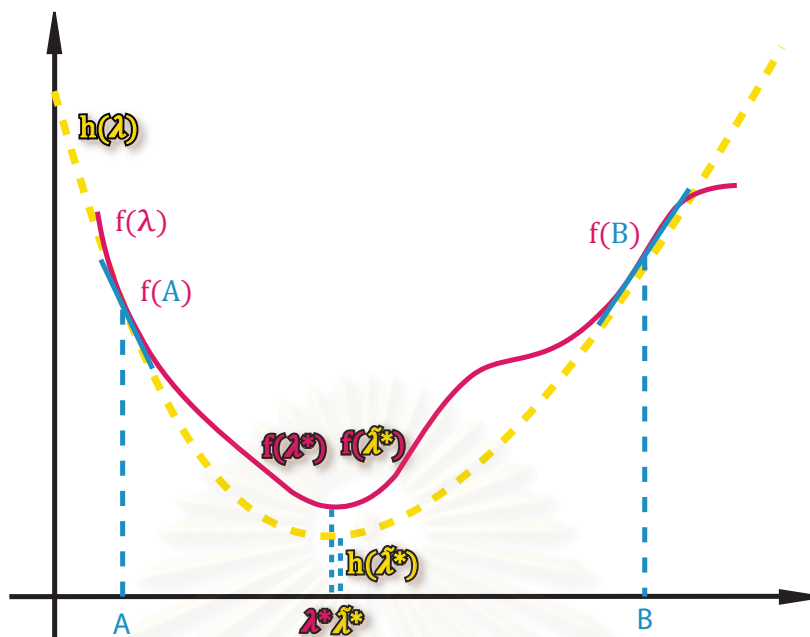
ในการประมาณฟังก์ชันเส้นโค้งด้วยฟังก์ชันเส้นโค้งแบบคิวบิก (รายละเอียดต่าง ๆ ดูได้จาก [27] เป็นต้น) นั้นจะทำตามขั้นตอนทั้งสาม ขั้นตอนเหมือนกันกับวิธีประมาณเส้นโค้งด้วยฟังก์ชันเส้นโค้งแบบควอดราติก แต่ฟังก์ชัน ที่นำมาใช้ประมาณเปลี่ยนจากฟังก์ชันเส้นโค้งแบบคิวบิกมาเป็นฟังก์ชันเส้นโค้งแบบ คิวบิก

$$h(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3 \quad (3.21)$$

เพื่อที่จะหาค่าพารามิเตอร์  $a, b, c$  และ  $d$  จะต้องหาค่าฟังก์ชันและ อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่สองจุดคือ  $A$  และ  $B$  โดยที่  $A < B$  และ  $f'(A) < 0$  และ  $f'(B) > 0$

$$a = f(A) - bA - cA^2 - dA^3 \quad (3.22)$$

<sup>4</sup>จะต้องตรวจสอบก่อนว่าฟังก์ชันนั้นมีคุณสมบัติการลดลงที่จุดเริ่ม ต้น ซึ่งในกรณีนี้คือต้องตรวจสอบว่าหากผลตอบเคลื่อนที่ไปตามทิศ ทาง  $s_k$  จะทำให้ฟังก์ชันมูลค่าลดลงเสมอ



รูปที่ 3.10: การประมาณค่าเส้นโค้งโดยใช้เส้นโค้งแบบคิวบิก

โดยที่

$$b = \frac{1}{(A-B)^2} (B^2 f'(A) + A^2 f'(B) + 2ABZ) \quad (3.23)$$

$$c = -\frac{1}{(A-B)^2} ((A+B)Z + Bf'(A) + Af'(B)) \quad (3.24)$$

$$d = \frac{1}{3(A-B)^2} (f'(A) + f'(B) + 2Z) \quad (3.25)$$

และ

$$Z = \frac{3f(A) - f(B)}{B-A} + f'(A) + f'(B) \quad (3.26)$$

$$Q = (Z^2 - f'(A)f'(B))^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

ซึ่งเป็นสามารถนำไปสร้างสมการตามเส้นโค้งแบบคิวบิกที่มีจุดต่ำสุด

$$\tilde{\lambda}^* = A + \frac{f'(A) + Z + Q}{f'(A) + f'(B) + 2Z} (B - A) \quad (3.28)$$

หรือสมมูลกันกับ [29]

$$\tilde{\lambda}^* = B + \frac{f'(B) - Z + Q}{f'(B) - f'(A) + 2Q} (B - A) \quad (3.29)$$

จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยเส้นโค้งแบบคิวบิกนั้นต้องหาค่าของฟังก์ชัน ทั้งหมด 2 ค่า เมื่อเปรียบเทียบกับแบบควอดราติกที่ต้องหาถึงสามค่า แต่เส้นโค้งแบบ คิวบิกนั้นจะต้องใช้ค่าของ

ความชันของฟังก์ชันที่จุดที่สนใจด้วย

### 3.5.2 การหาค่า $\beta_k$ ด้วยวิธีการของ Fletcher-Reeves และ Polak-Ribière

ในการหาค่าของ  $\beta_k$  สำหรับเกรเดียนต์สังยุคก็เช่นกัน จะไม่อาจหาได้เช่นเดียวกันกับปัญหาที่ถูกสร้างมาด้วยแบบจำลองแบบเชิงเส้นตามหัวข้อที่ 3.3 โดยในส่วนของหาค่าของ  $\beta_k$  นี้จะเป็นตัวกำหนดวิธีการของการทำเกรเดียนต์สังยุคว่าเป็นแบบใด ในที่นี้จะกล่าวถึงสองชนิดคือเกรเดียนต์สังยุคแบบของ Fletcher-Reeves และ เกรเดียนต์สังยุคแบบของ Polak-Ribière

#### 3.5.2.1 เกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves

ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves นั้นกำหนดให้

$$\beta_k = \frac{g_k^T g_k}{g_{k-1}^T g_{k-1}} \quad (3.30)$$

พบว่าการทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves นั้นอาจจะเกิดบางกรณีที่ทำให้การซ้ำไม่สามารถวนไปหาผลเฉลยได้ หรือใช้การวนรอบจนได้คำตอบเป็นเวลานานจนเกินไป หรืออาจจะเกิดขึ้นจากทิศทาง  $s_k$  ที่หาได้จากระเบียบวิธีนั้นมีคุณสมบัติไม่ทำให้ฟังก์ชันมูลค่าลดลง

วิธีการแก้ไขปัญหาดังกล่าว อาจจะทำให้ค่าใน รอบ หนึ่ง ของ การ ทำ ซ้ำ ของ ระเบียบ วิธี เกรเดียนต์สังยุค มีทิศทางค้นหา

$$s_k = -\nabla f(x_k) \quad (3.31)$$

ซึ่ง  $s_k$  เป็นตรงกันข้ามกับทิศทางเกรเดียนต์เช่นเดียวกับในกรณีของระเบียบวิธีลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ซึ่งรับประกันว่าในการทำซ้ำรอบต่อไปจะทำให้ค่าของฟังก์ชันมูลค่าลดลง จากนั้นจึงกลับมาทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุค แบบ Fletcher-Reeves อีกในรอบต่อ ๆ ไปเท่ากับเป็นการเริ่มต้นทำซ้ำด้วยเกรเดียนต์สังยุคใหม่ตั้งแต่เริ่มต้น

การตัดสินใจว่าจะเริ่มต้นการทำซ้ำใหม่ด้วยทิศทางเกรเดียนต์นั้น อาจจะทำให้ได้โดยการ เฝ้า มอง มุม ระหว่าง  $-g_k$  กับ  $\beta_k s_{k-1}$  ว่าตั้งฉากกันหรือไม่แต่ใน ทางปฏิบัติ นั้นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองนั้นไม่ควรเกิน 80 ถึง 85 องศา



### 3.5.2.2 เกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière

ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière นั้นแตกต่างจาก ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves โดยกำหนดให้

$$\beta_k = \frac{g_k^T(g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T g_{k-1}} \quad (3.32)$$

หรือสามารถใช้ระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière ที่ปรับปรุงโดย Powell [27, 30, 31] ที่มีการกำหนดให้

$$\beta_k^+ = \max \left\{ 0, \frac{g_k^T(g_k - g_{k-1})}{g_{k-1}^T g_{k-1}} \right\} \quad (3.33)$$

$\beta_k^+$  ตามสมการ (3.33) จะมีค่าเป็นบวกเพียงอย่างเดียว และหากค่าของ  $\beta_k^+$  มีค่าเท่ากับ 0 จะมีค่าเท่ากับการเป็นการเริ่มต้นทำซ้ำแบบเกรเดียนต์สังยุคใหม่ตั้งแต่ต้น โดยไม่ต้องกำหนดค่าของ  $s_k$  ใหม่เช่นระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves ตามสมการ (3.31) ในกรณีที่ต้องการความรวดเร็วในการคำนวณและความซับซ้อนของระเบียบวิธีไม่มากนักนั้น ระเบียบวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์แบบคงค่าระยะก้าวมักจะให้ผลตอบที่ดี เนื่องจากการคิดระยะทางช่วงก้าวนั้นมักจะใช้เวลาในการคำนวณพอสมควรในแต่ละรอบ ซึ่งในการสร้างจริงนั้น อาจจะใช้วิธีคิดระยะทางช่วงก้าวอย่างหยาบ ๆ เพื่อให้การคำนวณรวดเร็วยิ่งขึ้น ส่วนระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคนั้นปรับปรุงโดยมีการเพิ่มความซับซ้อนของกระบวนการ และการเพิ่มหน่วยความจำจากวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ไม่มากนัก และให้ผลตอบในจำนวนรอบการทำงานที่น้อยกว่ามาก แม้ว่าจะต้องคำนวณระยะทางช่วงก้าวในแต่ละรอบของการทำซ้ำก็ตาม แต่เนื่องจากการทำซ้ำนั้นมีจำนวนน้อยกว่าจึงทำให้ได้ผลตอบที่รวดเร็วกว่า ในขณะที่หากใช้การคำนวณหาระยะทางช่วงก้าวด้วยวิธีประมาณก็สามารถทำให้การทำงานโดยรวมนั้นรวดเร็วยิ่งขึ้น

### 3.6 การใช้กระบวนการซ้ำกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด

จะเห็นได้ว่าการหาผลเฉลย  $f$  ในสมการ (2.10) นั้นทำได้ยากมากเนื่องจากเมทริกซ์ของระบบที่มีขนาดใหญ่ เช่นหากใช้รูปขนาด 64x64 จุดภาพจำนวน 25 รูปและขนาดรูปความละเอียดสูงที่ต้องการจะทำกลับนั้นมีขนาด 256x256 จุดภาพ เมทริกซ์  $\mathbf{H}$  จะมีขนาดใหญ่ถึง 102,400 x 65,536 แม้ว่าเมทริกซ์ จะมีขนาดใหญ่แต่ก็มีลักษณะที่ว่างมาก (sparse matrix) เนื่องจากเมทริกซ์มีสมาชิกที่เป็นศูนย์มาก แต่ลักษณะของเมทริกซ์ผกผันเทียมทางขวา  $\mathbf{H}^T(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}$  หรือเมทริกซ์ผกผันเทียมทางซ้าย  $(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T$  ซึ่งจำเป็นต่อการหาค่า  $f$  นั้นกลับไม่มีที่ว่างมากนัก ทำให้การเก็บเมทริกซ์ดังกล่าวไว้ในหน่วยความจำนั้นเป็นไปได้ยาก สาเหตุที่เมทริกซ์ทั้งสองไม่มีที่ว่างมากนักเพราะเมทริกซ์  $\mathbf{H}$  มีลักษณะใกล้เคียงกับเมทริกซ์เอกฐานซึ่งให้ผลผกผันที่สมาชิกมีค่ามาก

ในงานสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนี้จะแก้ปัญหาที่เกิดจากการเก็บเมทริกซ์ขนาดใหญ่นี้โดยใช้วิธีทำซ้ำเช่น วิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ [9, 12, 14, 15] หรือเกรเดียนต์สังยุค [10, 11] เพื่อที่จะหาผลเฉลย  $f$  โดยให้การคูณเวกเตอร์ใด ๆ กับเมทริกซ์  $H$  นั้นเป็นการนำเวกเตอร์ไปปฏิบัติการกับโอเปอเรเตอร์กับ  $H$  โดยทำตามลำดับดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2.3 กล่าวคือการเลื่อนที่  $S$ , การทำพรั้า  $B$ , และ การซັกดัวอย่างลง  $D$  นั้นจะสมมูลกับ โอเปอเรเตอร์  $H$  และโอเปอเรเตอร์  $H^T$  จะเป็นแบบย้อนกลับ  $(S^T B^T D^T)$  เช่น  $D$  คือ โอเปอเรเตอร์สำหรับการซັกดัวอย่างขึ้น  $D^T$  เป็นต้น

เป็นที่รู้กันดีว่าระเบียบวิธีเกรเดียนต์สังยุคเป็นระเบียบวิธีเพื่อที่จะสามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยการทำซ้ำได้ดีวิธีหนึ่งเช่นเดียวกับ ระเบียบวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ แต่ได้รับการยอมรับว่ามีความเหนือกว่าด้านจำนวนการทำซ้ำเพื่อที่จะได้คำตอบที่ต้องการนั้นน้อยกว่า ดังนั้นระเบียบวิธีการเกรเดียนต์สังยุคจึงเหมาะกับการที่จะแก้ปัญหาเมทริกซ์ที่มี ขนาดใหญ่และมีที่ว่างมากเช่นในกรณีนี้เป็น ระบบที่กำหนดเป็นบวกเท่านั้นโดยมีความสมมาตรและมีที่ว่างมาก (sparse symmetric positive definite linear system)

การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้กระบวนการทำซ้ำสองชนิด เพื่อมาเปรียบเทียบกันคือวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์และเกรเดียนต์สังยุค ซึ่งเกรเดียนต์สังยุคนั้นจะใช้เกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้น

ผลของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยเปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างวิธีทำซ้ำโดยใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ نرمอนปริภูมิ  $L^1$  ซึ่งมีลักษณะที่ไม่เชิงเส้นจึงใช้การทำซ้ำวิธีการลดระดับตามแนวเกรเดียนต์แบบคงค่าระยะก้าว (SD) [12] เปรียบเทียบกับวิธีการเกรเดียนต์สังยุคไม่เชิงเส้นแบบ Fletcher-Reeves (FR-CG) และแบบ Polak-Ribière-Powell (PRP-CG) แสดงรายละเอียดได้ตามตารางที่ 3.1 และรูปที่ 3.11 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการทำซ้ำแบบ PRP-CG นั้นผลดีที่สุดคือมีการทำซ้ำจำนวนน้อยที่สุด ซึ่งในขณะเดียวกันเวลาที่ใช้น้อยที่สุดในขณะที่ได้ผลจากค่า PSNR ดีที่สุด จะเห็นได้ว่าการทำซ้ำที่นำมาเปรียบเทียบนั้นได้ผลต่างกันเล็กน้อย แต่ลักษณะของภาพความละเอียดสูงที่ได้นั้นมีลักษณะเดียวกัน เมื่อใช้พารามิเตอร์ในการทดลองแบบเดียวกัน ลักษณะของภาพความละเอียดสูงที่ได้จะเปลี่ยนแปลงไปเมื่อใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่แตกต่างกัน เช่น نرمอนที่ใช้หรือการเรกูลาร์ไรซ์มากกว่า

	$\lambda$	จำนวนรอบการทำซ้ำ	เวลาที่ใช้	ค่าตกค้าง	PSNR
SD	0.01	200 รอบ	165.75 วินาที	0.071	15.97 dB
FR-CG	0.01	26 รอบ	32.91 วินาที	0.114	15.26 dB
PRP-CG	0.01	19 รอบ	20.77 วินาที	0.069	16.21 dB

ตารางที่ 3.1: แสดงรายละเอียดการสร้างภาพความละเอียดสูงโดยเปรียบเทียบด้วยวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ บนฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ نرمอนปริภูมิ  $L^1$



(ก)



(ข)



(ค)



(ง)



(จ)

รูปที่ 3.11: ผลการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยเปรียบเทียบเรื่องการทำซ้ำ (ก) ภาพต้นฉบับ (ข) ภาพความละเอียดต่ำต้นฉบับ (ค) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้จากการทำซ้ำด้วยวิธีลดระดับตามแนวเกรเดียนต์ (SD) (ง) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้จากการทำซ้ำด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Fletcher-Reeves (FR-CG) (จ) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้จากการทำซ้ำด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière-Powell (PRP-CG)

## บทที่ 4

### กระบวนการเรกูลาร์ไรซ์

ปัญหาผกผันบางประเภทนั้นมักจัดอยู่ในกลุ่มปัญหาตั้งไว้แล้ว ซึ่ง Hadamard ได้เสนอการ จัดกลุ่มปัญหาชนิดนี้แยกไว้จากปัญหาตั้งไว้ดี (well-posed problem) โดยที่ปัญหาที่มีสภาวะดีนั้น หากใช้ระเบียบวิธีที่มีเสถียรภาพแล้ว ก็มีโอกาที่จะพบกับผลเฉลยที่ถูกต้อง แต่หากปัญหานั้นไม่ ใช้ปัญหาตั้งไว้ดีก็จำเป็นที่จะต้องจัดระเบียบกระบวนการ การแก้ปัญหานั้น และเสนอให้นิยามปัญหา ตั้งไว้ดีได้โดยสังเกตที่ ผลเฉลยของปัญหานั้นจะต้องมีคุณสมบัติสามประการ [32–34] คือ

#### 1. ผลเฉลยจะต้องหาได้ (existence)

ปัญหาที่ไม่มีผลเฉลยนั้นอาจจะเป็นไปตามตัวอย่างดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

จะเห็นจากสมการที่ 4.1 ว่าเราไม่สามารถหาผลเฉลย  $x$  ที่ทำให้  $x = 1$  และ  $x = 2.2$  ในเวลา เดียวกันได้ อย่างไรก็ตามก็ตามปัญหากำหนดมากเกินไปดังกล่าวนี้สามารถแก้ได้โดยใช้วิธีการ กำลังสองน้อย ที่สุดตามหัวข้อที่ 2.9

$$\arg \min_x \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = 1.08 \quad (4.2)$$

#### 2. ผลเฉลยมีเพียงผลเฉลยเดียว (uniqueness)

ปัญหาเรื่องผลเฉลยมีหลายค่านี้มักจะยกตัวอย่างง่าย ๆ ได้โดยการตั้งปัญหากำหนดน้อย เกินไปดังนี้

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (4.3)$$

จะเห็นได้อีกว่าจำนวนของผลเฉลย  $x_1$  และ  $x_2$  นั้นมีอย่างไม่จำกัดเพราะ มีค่าของ  $x_1$  และ  $x_2$  หลายชุดที่แทนค่าได้ตามสมการ ซึ่งหากเพิ่มเกณฑ์เข้าไปเพื่อที่จะแก้ปัญหานี้ให้หา ผลเฉลยได้ค่าเดียวเช่น

$$\min \|x\|_2^2 \quad (4.4)$$

ซึ่งจะต้องทำให้  $x_1^2 + x_2^2$  ได้ค่าที่น้อยที่สุด ทำให้ได้คำตอบจากปัญหานี้คือ  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

#### 3. ผลเฉลยจะต้องมีเสถียรภาพ (stability)

<sup>1</sup>นำตัวอย่างมาจาก [34]



ผลเฉลยที่มีเสถียรภาพนั้นสามารถขยายความได้ว่า เมื่อข้อมูลที่ให้กับระบบมีลักษณะ ผิดไปจากค่าจริงที่ควรจะเป็น เช่น ในกรณีที่เราสร้างแบบจำลองของระบบไม่ตรงกับความจริง, ในกรณีที่ค่าที่วัดได้จากระบบมีความผิดพลาด, หรือ ค่าที่วัดได้จากระบบมีสัญญาณรบกวน ผลเฉลยจะมีลักษณะที่ไม่อยู่ตัว เปลี่ยนแปลงต่อความผิดพลาดที่เกิดขึ้นดังกล่าว ข้างต้นมากจนเกินไป

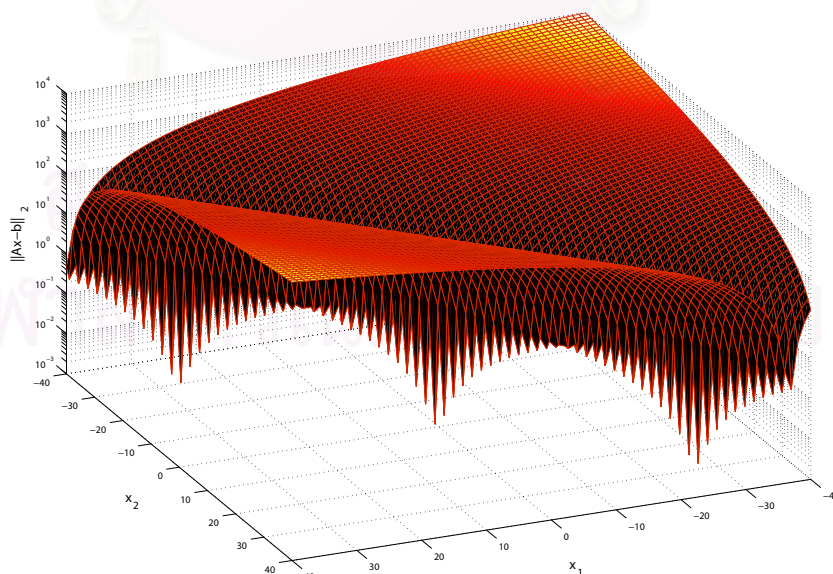
ปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ไขได้โดยการจัดระเบียบปัญหาใหม่ให้มีเสถียรภาพมากขึ้นซึ่ง อาจเรียกกระบวนการดังกล่าวนี้ว่า การเรกูลาร์ไรซ์ นั่นเอง ในที่นี้จะขอยกตัวอย่างปัญหากำลังสองน้อยที่สุด ที่เป็นแบบกำหนดมากเกินไป  $\|Ax - b\|_2^2$  โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0.86 & 0.83 \\ 0.85 & 0.82 \\ 0.28 & 0.27 \end{bmatrix}, \quad \text{และ } b = \begin{bmatrix} 1.6900 \\ 1.6700 \\ 0.5500 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

ซึ่งมีคำตอบจริง ๆ คือ  $x = [1, 1]^T$

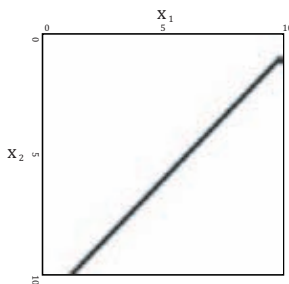
แต่หากเรามีสัญญาณรบกวน  $\eta = [0.01, -0.03, 0.02]^T$  เข้าไปในระบบดังเช่น

$$\tilde{b} = Ax + \eta = b + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.03 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7000 \\ 1.6400 \\ 0.5700 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$



รูปที่ 4.1: ค่าของลอการิทึมของนอร์มของระบบในสมการที่ 4.5 และ 4.6





รูปที่ 4.2: ภาพแสดงบริเวณที่เป็นแก่นกลาง (kernel) ที่ทำให้คำตอบเป็นเวกเตอร์ศูนย์ภาพ (null vector) จากระบบตามสมการที่ 4.5 และ 4.6

เมื่อนำ  $A$  และ  $\tilde{b}$  มาหาคำตอบด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้

$$x_{LS} = \begin{bmatrix} -32.5714 \\ 35.7857 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งให้ norms ของระบบ} \quad \|Ax_{LS} - \tilde{b}\|_2 = 0.0347 \quad (4.7)$$

นอกจากจุดที่เป็นผลเฉลยของวิธีการกำลังสองน้อยที่สุดแล้ว ยังอาจหาจุดที่มีค่าของเวกเตอร์ตกค้าง (residual) น้อยได้อีกเช่น

$$x_{LS} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7.3 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งให้ norms ของระบบ} \quad \|Ax^{(1)} - \tilde{b}\|_2 = 0.0371 \quad (4.8)$$

หรือ

$$x_{LS} = \begin{bmatrix} -7.5 \\ 9.8 \end{bmatrix} \quad \text{ซึ่งให้ norms ของระบบ} \quad \|Ax^{(2)} - \tilde{b}\|_2 = 0.0357 \quad (4.9)$$

ซึ่งจะเห็นว่าคำตอบของ  $x_{(LS)}$ ,  $x^{(1)}$ , และ  $x^{(2)}$  ในสมการที่ 4.7, 4.8, และ 4.9 ตามลำดับนั้นห่างไกลจากคำตอบที่ต้องการคือ  $[1, 1]^T$  มาก

สาเหตุเนื่องมาจากว่าเมทริกซ์  $A$  นั้นเป็นเมทริกซ์ที่มีเงื่อนไขเลข [34] จะเห็นได้ว่าเมื่อมีสัญญาณรบกวนต่อระบบเพียงเล็กน้อยก็ทำให้คำตอบนั้นถูกเลื่อนไปไกลมาก เพราะอย่างเช่นจุด

$$A \begin{bmatrix} -7 \\ 9.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.036 \\ -0.019 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเวกเตอร์  $[-7, 9.33]^T$  นั้นเกือบจะทำให้คำตอบเป็นเวกเตอร์ศูนย์ภาพ (null vector) ซึ่งสามารถทำให้เพิ่มการรบกวนกับระบบได้มากโดยไม่ทำให้เวกเตอร์ตกค้างเปลี่ยนแปลงมากนัก และทำให้ระบบกำหนดมากเกินไปนั้นก็มีลักษณะคล้ายระบบกำหนดน้อยเกินไป

แม้ว่างานของ Hadamard นั้นจะมีจุดผิดพลาดอยู่บ้าง [34] แต่การจัดกลุ่มปัญหาเป็นสองแบบดังกล่าวคือ *ปัญหาที่มีสภาวะดี* และ *ปัญหาตั้งไว้แล้ว* นั้นช่วยทำให้นักวิจัยในเวลาต่อมาสามารถจัดระเบียบกระบวนการแก้ปัญหาใหม่ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากการศึกษาที่ผ่านมา มา [16–18] ทำให้ ทราบว่าในกระบวนการสร้างภาพดิจิทัลความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำ หลาย ๆ ภาพนั้นเป็นปัญหาตั้งไว้แล้วซึ่งมีการกระจายตัวของค่าลักษณะเฉพาะของระบบ มากหรืออาจจะเรียกได้ว่าเมทริกซ์ของระบบ มีเงื่อนไขเลขเนื่องจากข้อมูลของภาพความละเอียดสูงที่ได้จากภาพความละเอียดต่ำซึ่งอาจจะมีข้อมูลไม่เพียงพอ ทำให้ต้องประมาณค่าช่วงของจุดบนภาพทำให้สามารถมีคำตอบได้หลายคำตอบ จึงทำให้ปัญหานี้ต้อง การการปรับปรุงแก้ไขเพื่อที่จะหาคำตอบผ่านกระบวนการเชิงเลข โดยการใช้อนุมัติ บางอย่างเช่นความราบเรียบของคำตอบ (solution smoothness)

ในการแก้ปัญหาตั้งไว้แล้วนั้นจะต้องใช้กระบวนการปรับปรุง สภาวะของระบบให้มีคุณสมบัติที่ดียิ่งเสียก่อนที่จะแก้ปัญหา โดยผู้ที่นำ กระบวนการเรกูลาร์ไรซ์เพื่อปรับสภาพของปัญหานี้ เป็นคือ *ติโฮนอฟ (Tikhonov)* [19] และกระบวนการเรกูลาร์ไรซ์ที่ติโฮนอฟเสนอเรียกว่า *การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟ* ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมนำไปปรับสภาพเนื่องจาก มีความซับซ้อนไม่มาก และได้ผลตอบที่ดี

การเรกูลาร์ไรซ์นั้นจะเข้าไปปรับสภาพของการแก้ปัญหาผกผัน ในเชิงสถิติแล้ว แนวคิดนี้จะคล้ายกับกระบวนการถดถอยด้วยริดจ์ (ridge regression) [35] ซึ่งเป็นการ เพิ่มค่าของค่าตามแนวทแยงของเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่าแตกต่างกันมาก ให้กลายเป็นเมทริกซ์ที่กลุ่มของค่าลักษณะเฉพาะมีค่าที่กระจัดกระจายน้อยลง และทำให้สามารถหาค่าผกผันของเมทริกซ์ได้ง่ายขึ้น

นอกจากการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟ ยังมีการเรกูลาร์ไรซ์แบบไม่เชิงเส้นแบบอื่น เช่นการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชัน ซึ่งเป็นที่นิยมในปัจจุบัน ซึ่งจะกล่าว ในหัวข้อ 4.2

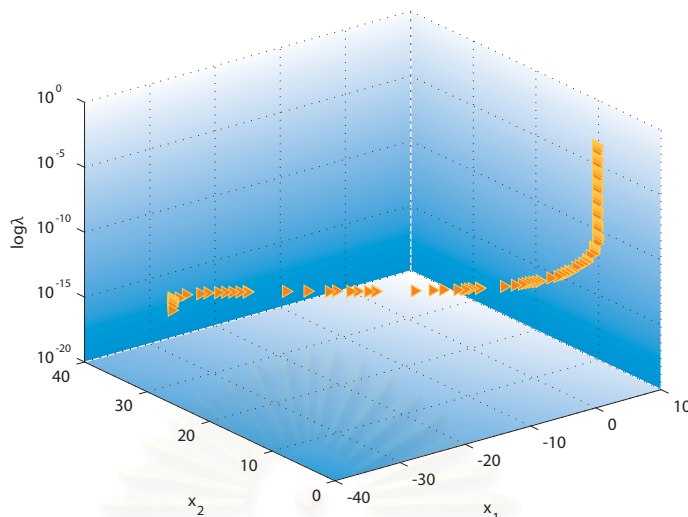
#### 4.1 การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟ

การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟนั้นเป็นวิธีการแก้ไขปัญหาเชิงเส้นตั้งไว้แล้วที่นิยมมากที่สุดวิธีหนึ่ง โดยเพิ่มพจน์การเรกูลาร์ไรซ์ลงในสมการที่ 2.10 เพื่อที่จะได้คำตอบที่ดีขึ้น

$$x = \arg \min_x \|Ax - b\| + \lambda \|Lx\|_2^2 \quad (4.11)$$

ค่าพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  จะทำหน้าที่เป็นเกณฑ์ควบคุมของทั้งสองเทอมดังนี้ [34]

- $\|Ax - b\|$  เทอมแรก นั้นทำหน้าที่วัดค่าความเหมาะสมของผลเฉลยเมื่อรู้ข้อมูลที่ให้ อีกนัย



รูปที่ 4.3: ผลของการเรกูลาร์ไรซ์ผลเฉลย ตามสมการที่ 4.5 และ 4.6 โดยปรับค่าพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  ตั้งแต่  $1 \times 10^{-16}$  ถึง 1

หนึ่งคือหาค่าของ  $x$  นั้นเหมาะสมเพียงใดเมื่อรู้ค่าของ  $b$  ซึ่งหากค่าของเทอมนี้มีค่ามากก็ไม่อาจจะกล่าวได้ว่าสามารถหาผลเฉลยของสมการได้ จึงต้องพยายามทำให้ค่าเทอมแรกนี้น้อย เพื่อผลค่าความผิดพลาดเฉลี่ยเมื่อฟิตข้อมูล

- $\|Lx\|_2^2$  เทอมที่สองนั้นหาก  $L = I$  จะหมายถึงการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟในอันดับที่ศูนย์ และแสดงถึงนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  ของคำตอบ เนื่องจากการหาผลเฉลยแบบตรง ๆ โดยที่ไม่ได้ใช้การเรกูลาร์ไรซ์นั้นผลเฉลยที่ได้จะมีลักษณะที่ถูกครอบโดยความถี่สูงและมีแอมพลิจูดกว้าง โดยที่หวังว่าการที่สามารถควบคุมค่านอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  ของคำตอบได้นั้นจะสามารถลดทอนผลกระทบของสัญญาณรบกวนได้

จากตัวอย่างตอนต้นบทที่ 4 ตามสมการที่ 4.5 และ 4.6 นั้นเมื่อนำมาหาคำตอบใหม่ด้วยการเรกูลาร์ไรซ์โดยที่  $L = I$  และมีการปรับพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  จะได้ผลตามรูปที่ 4.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการเรกูลาร์ไรซ์นั้นสามารถทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นมีความถูกต้องขึ้น เมื่อพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์นั้นมีค่าเหมาะสมซึ่งในตัวอย่างนี้มีค่าอยู่ ระหว่าง  $1 \times 10^{-8}$  ถึง  $1 \times 10^{-5}$  แต่สังเกตว่าหากค่าของพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  มีค่าต่ำมาก ๆ ซึ่งจะส่งผลทำให้เทอมที่สองนั้นหายไปนั้นจะมีค่าเท่ากับการลดผลของการเรกูลาร์ไรซ์ ทำให้ผลตอบนั้นแย่งลง

อีกตัวอย่างหนึ่งที่แสดงผลของการเรกูลาร์ไรซ์ได้อย่างชัดเจน<sup>2</sup> เมื่อต้องการหาผลเฉลยของระบบที่มี

$$A = \begin{bmatrix} 0.3661 & 0.2790 \\ -0.8907 & -0.8575 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

<sup>2</sup>ได้แนวคิดมาจาก [34]

และมีการรบกวนเล็กน้อยที่  $b$

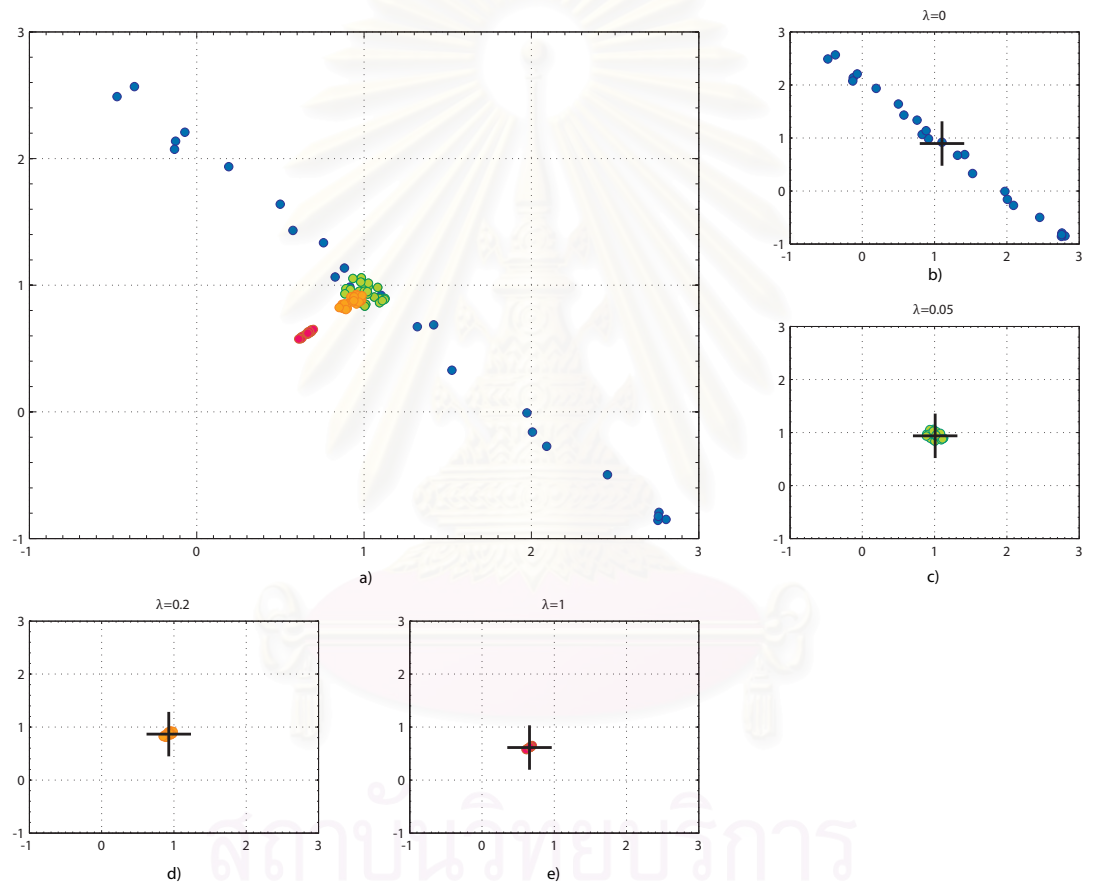
$$\tilde{b} = b + \Delta b = \begin{bmatrix} 0.6451 \\ -1.7482 \end{bmatrix} + \Delta b \quad (4.13)$$

ซึ่งควรจะมีผลเฉลยจริงอยู่ที่  $x = [1, 1]^T$  แต่เนื่องจากการรบกวนของ  $\Delta b$  ทำให้ค่าที่ได้จริงนั้นผิดไป ค่าของระบบที่แสดงตามรูปที่ 4.1 นั้นถูกรบกวนด้วย  $\Delta b$  ที่สุ่มขึ้นมา 25 ค่า โดยที่  $\tilde{b}$  นั้นจะมีความแตกต่างจาก  $b$  กำหนด โดย  $\|\tilde{b} - b\|_2 \leq 0.15$  ซึ่งผลเฉลย  $\tilde{x}$  ต่าง ๆ ที่ได้จากระบบที่ไม่มีการเรกูลาร์ไรซ์หรือในกรณีนี้ ค่าพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์  $\lambda = 0$  นั้นจะมีค่าที่แตกต่างกันมาก แต่หากเพิ่มผลของการเรกูลาร์ไรซ์โดยเพิ่มค่าพารามิเตอร์แล้วจะพบว่าผลเฉลยที่ได้นั้น มีการเกาะกลุ่มกันมากขึ้น

นอกจากรูปที่ 4.1 จะแสดงให้เห็นว่าการเรกูลาร์ไรซ์ช่วยทำให้ ผลเฉลยที่หาได้นั้นมีโอกาสที่จะเกาะกลุ่มกันมากขึ้นแล้วยังแสดงให้เห็นพฤติกรรมของ ผลเฉลยที่มีการเพิ่มผลของการเรกูลาร์ไรซ์อีกด้วย ซึ่งแม้ว่าการเรกูลาร์ไรซ์จะเพิ่ม โอกาสให้การหาผลเฉลยแต่ละครั้งมีการใกล้เคียงผลเฉลยที่เป็นค่าจริงมากขึ้น การเรกูลาร์ไรซ์ที่มากเกินไปจะทำให้ผลเฉลยที่ได้นั้นออกห่างจากความเป็นจริงขึ้น เรื่อย ๆ แม้ว่าผลเฉลยที่ได้นั้นจะมีลักษณะที่เกาะกลุ่มกันมากขึ้นก็ตาม จากตัวอย่างนั้น

- เมื่อไม่มีผลของการเรกูลาร์ไรซ์ หรือ พารามิเตอร์เรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  เท่ากับ 0 นั้น จะได้ค่าเฉลี่ยของ  $\tilde{x}$  เท่ากับ  $[1.1031, 0.8950]^T$  ตามรูปที่ 4.1 b)
- เมื่อ พารามิเตอร์เรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  เท่ากับ 0.05 นั้น จะได้ค่าเฉลี่ยของ  $\tilde{x}$  เท่ากับ  $[1.0087, 0.9379]^T$  4.1 c)
- เมื่อพารามิเตอร์เรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  เท่ากับ 0.2 นั้น จะได้ค่าเฉลี่ยของ  $\tilde{x}$  เท่ากับ  $[0.9285, 0.8676]^T$  4.1 d)
- เมื่อพารามิเตอร์เรกูลาร์ไรซ์  $\lambda$  เท่ากับ 1 นั้น จะได้ค่าเฉลี่ยของ  $\tilde{x}$  เท่ากับ  $[0.6568, 0.6145]^T$  4.1 e)

ซึ่งเรามักจะแยกกลุ่มของผลเฉลยออกเป็นสามกลุ่มได้จากค่าของพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์ คือ ผลเฉลยที่มีการ เรกูลาร์ไรซ์พอดี (regularized solution), ผลเฉลยที่มีการเรกูลาร์ไรซ์มากเกินไป (over-regularized solution), และ ผลเฉลยที่มีการเรกูลาร์ไรซ์มากเกินไป (under-regularized solution)



รูปที่ 4.4: แสดงผลเฉลยเมื่อเพิ่มผลของการเรกูลาร์ไรซ์ด้วยพารามิเตอร์  $\lambda$  โดยที่เมื่อ  $\lambda = 0$  นั้นหมายความว่าไม่มีการเรกูลาร์ไรซ์ในระบบ



#### 4.1.1 การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์

โดยทั่วไปแล้วการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟมักจะนิยมทำในอันดับที่ศูนย์ก่อน เพราะเนื่องจากเมื่อ  $L = I$  จะทำให้เทอมการเรกูลาร์ไรซ์มีค่าเท่ากับนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  ของระบบ ซึ่งเมื่อค่าอนุพันธ์และจัดรูปแล้ว ในกรณีที่มีปัญหาเป็นแบบระบบกำหนดมากเกินไป

$$x = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \lambda\mathbf{I})^{-1}b \quad (4.14)$$

และในกรณีที่มีปัญหาเป็นแบบระบบกำหนดน้อยเกินไป

$$x = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^Tb \quad (4.15)$$

ทั้งสมการที่ 4.14 และ 4.15 จะมีเทอมการเรกูลาร์ไรซ์เพิ่มขึ้นมาจากสมการที่ 2.11 และ 2.13 ตามลำดับ ทำให้เมื่อนำไปแก้ปัญหาวัยวิธีทำซ้ำแล้วเป็นแค่เพียงการบวกเวกเตอร์  $x$  เพิ่มเข้าไปในแต่ละรอบของการทำซ้ำ

ในงานการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์นั้นเป็นที่นิยม [1, 15, 35] เนื่องจากให้ผลดีและเป็นภาระแก่ระบบไม่มากนัก

#### 4.1.2 การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับมากกว่าศูนย์

การเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟในอันดับที่สูงขึ้นนั้นจะทำโดยให้  $L$  เป็นการหาอนุพันธ์เฉพาะส่วนในอันดับที่สูงขึ้น เช่นในกรณีเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟด้วยอันดับที่สอง

$$x = \arg \min_x \|\mathbf{A}x - b\| + \lambda\|\nabla^2 x\|_2^2 \quad (4.16)$$

ในกรณีที่มีปัญหาเป็นแบบระบบกำหนดมากเกินไป

$$x = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \lambda\mathbf{L}_{\nabla^2}\mathbf{L}_{\nabla^2}^T)^{-1}b \quad (4.17)$$

และในกรณีที่มีปัญหาเป็นแบบระบบกำหนดน้อยเกินไป

$$x = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \lambda\mathbf{L}_{\nabla^2}\mathbf{L}_{\nabla^2}^T)^{-1}\mathbf{A}^Tb \quad (4.18)$$

งานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้น ในการคำนวณหาค่าอนุพันธ์เฉพาะส่วนเช่นการคำนวณค่าอนุพันธ์อันดับที่สองเฉพาะส่วนใน การเรกูลาร์ไรซ์อันดับที่สองนั้น

นิยมทำคือการใช้ลาปลาซเคอร์เนลแบบทั่วไป (ordinary Laplacian kernel) [12, 14, 20]

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \mp 8 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

แต่ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทดลองใช้การคำนวณหาค่าอนุพันธ์เฉพาะส่วนด้วยตัวกรองของซาวิตสกี-โกเลย์แทนวิธีใช้เคอร์เนลดังกล่าว ซึ่งการคำนวณหาค่าอนุพันธ์เฉพาะส่วนด้วยวิธีนี้นั้นจะอธิบายในภาคผนวก ก

## 4.2 การเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชัน

การใช้นอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  เช่นการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮोनอฟนั้นจะทำให้คำตอบมีลักษณะราบเรียบ ซึ่งในปัญหาการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นเบลอจนเกินไป จึงมีผู้เสนอการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชันเป็นการเรกูลาร์ไรซ์แบบที่ใช้นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  ในพจน์การเรกูลาร์ไรซ์ แต่การใช้นอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  นั้นจะทำให้ปัญหาเป็นปัญหาไม่เชิงเส้นซึ่งในบางครั้งจะต้องเปลี่ยนกระบวนการแก้ปัญหา

โดยที่จะเปลี่ยนพจน์การเรกูลาร์ไรซ์ในสมการที่ 2.10

$$x = \arg \min_x \|Ax - b\| + \lambda |\nabla x| \quad (4.20)$$

### 4.2.1 การเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอรัล-โททลวาริเอชัน

การเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอรัล-โททลวาริเอชัน [12, 14] นั้นเป็นวิธีที่ปรับปรุงจากการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชันโดยใช้ความรู้เรื่องตัวกรองไบเลเทอรัล ซึ่งจะหาค่าเกรเดียนต์จากตัวกรองดังกล่าว

$$x = \arg \min_x \|Ax - b\| + \lambda \Upsilon_{\text{BTV}} \quad (4.21)$$

โดยที่พจน์การเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอรัล-โททลวาริเอชัน

$$\Upsilon_{\text{BTV}} = \sum_{l=-P}^P \sum_{m=-P}^P \alpha^{|m|+|l|} \|x - S_l^l S_j^m x\|_1 \quad (4.22)$$

ตัวดำเนินการ  $S_l^l$  และ  $S_j^m$  นั้นหมายถึงการเลื่อนภาพ  $x$  ตามแกนของภาพ  $i$  และแกนของภาพ  $j$  ไป  $l$  และ  $m$  จุดภาพตามลำดับ ซึ่งตัวดำเนินการทั้งสองนั้นจะทำหน้าที่ในการหาค่าอนุพันธ์เฉพาะส่วนของภาพ ค่าคงที่ถ่วงน้ำหนัก  $\alpha$  ที่มีค่าอยู่ระหว่าง  $0 < \alpha < 1$  นั้นจะทำให้ค่าของอนุพันธ์มีผล

น้อยลงเมื่อค่าของ จุดภาพที่กำลังสนใจจะนำมาหาค่าอนุพันธ์นั้นห่างจากจุดกลางมาก และ  $P$  คืออันดับของ ภาพตามแนวของภาพที่สนใจจะนำมาหาค่าอนุพันธ์

ส่วนค่าเกรเดียนต์ของเทอมการเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์ล-โททัลวาริเอชัน คือ

$$\begin{aligned}\nabla \Upsilon_{\text{BTV}} &= \sum_{l=-P}^P \sum_{m=-P}^P \alpha^{|m|+|l|} \left[ \text{sign}(x - \mathbf{S}_i^l \mathbf{S}_j^m x) - \mathbf{S}_j^{-m} \mathbf{S}_i^{-l} \text{sign}(x - \mathbf{S}_i^l \mathbf{S}_j^m x) \right] \\ &= \sum_{l=-P}^P \sum_{m=-P}^P \alpha^{|m|+|l|} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{S}_j^{-m} \mathbf{S}_i^{-l} \right] \text{sign}(x - \mathbf{S}_i^l \mathbf{S}_j^m x)\end{aligned}\quad (4.23)$$

เมื่อ  $\mathbf{I}$  คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ตัวดำเนินการ  $\mathbf{S}_i^{-l}$  และ  $\mathbf{S}_j^{-m}$  จะดำเนินการกลับกับ ตัวดำเนินการ  $\mathbf{S}_i^l$  และ  $\mathbf{S}_j^m$  คือการเลื่อนภาพ  $x$  ตรงกันข้ามแกนของภาพ  $i$  และแกนของภาพ  $j$  ไป  $l$  และ  $m$  จุดภาพตามลำดับ

### 4.3 ผลของการใช้การเรกูลาร์ไรซ์แบบต่าง ๆ

การใช้เรกูลาร์ไรซ์ที่ต่างกันกับกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดย่อมมีผลกับลักษณะภาพผลลัพธ์ที่ได้ โดยการเรกูลาร์ไรซ์แบบต่าง ๆ กันนั้นก็จะมีเอกลักษณ์ของภาพ ผลลัพธ์ที่ไม่เหมือนกันไปด้วย

ความแตกต่างระหว่างอันดับของการเรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟนั้นจะสามารถสังเกตได้อย่างชัดเจน เมื่อใช้ภาพความละเอียดต่ำเริ่มต้นในจำนวนน้อย หรือในอีกนัยหนึ่งนั้นก็หมายถึงว่า เมทริกซ์ของระบบนั้นมีอันดับต่ำ เมื่อนำมาสร้างภาพความละเอียดสูงจะเห็นว่าจุดของภาพ ความละเอียดสูงนั้นเป็นจุดสีดำอย่างชัดเจน (ข้อมูลในตำแหน่งนั้นมีค่าเป็น 0) อันเนื่องมาจากระบบที่ขาดข้อมูล

ระบบที่จำลองเพื่อทดสอบนั้นเป็นระบบที่ภาพความละเอียดต่ำถูกนำมา 5 ภาพ โดยที่ต้องการจะขยายภาพเป็น 4 เท่า จากภาพขนาด  $64 \times 64$  เป็นภาพขนาด  $256 \times 256$

จากการทดลองตามรูปที่ 4.5ค พบว่าการทำเรกูลาร์ไรซ์ด้วยติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์นั้นไม่ช่วยการขาดข้อมูล ดังกล่าว ภาพความละเอียดสูงที่ได้นั้นจะมีลักษณะเป็นจุดสีดำในบริเวณที่ขาดข้อมูล ซึ่งภาพความละเอียดสูงที่ได้นั้นมีค่า PSNR เท่ากับ 19.59 dB แต่การทำเรกูลาร์ไรซ์ ด้วยติโฮนอฟอันดับสูงขึ้นเช่นอันดับที่สองนั้นจะช่วยในการขาดข้อมูล โดยสังเกตได้จากรูป ที่ 4.5ง และ 4.5จ ที่จะเห็นจุดสีดำ ที่บางลง และมีค่า PSNR ที่สูงกว่า

ส่วนผลของการเรกูลาร์ไรซ์ด้วยติโฮนอฟอันดับสูงนั้นหากใช้ตัวกรองซาวิตสกี-โกเลย์ในการหาค่าอนุพันธ์ก็จะให้ผลที่ดีกว่าโดยรูปที่ 4.5ง และ 4.5จ แสดงภาพความละเอียดสูงที่ดีที่สุดที่สร้างได้จากระบบดัง ข้างต้นโดยใช้เรกูลาร์ไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่สองที่มีการหาอนุพันธ์แบบ

ทั่วไปและหาโดยใช้ตัวกรองซาวิตสกี-โกเลย์ตามลำดับ โดยใช้พารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์เท่ากับ 0.0005 และ 0.008 ซึ่งทำให้ได้ภาพความละเอียดสูงที่มีค่า PSNR 21.67 dB และ 21.98 dB ตามลำดับ เช่นกัน

ภาพต่าง ๆ ในรูปที่ 4.7–4.8 แสดงถึงผลของการเรกูลาร์ไรซ์ในแบบต่าง ๆ โดยที่หากใช้เรกูลาร์ไรซ์ที่ไม่เหมาะสมกับสัญญาณรบกวนจะทำให้ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้นั้น มีคุณภาพที่ไม่ดี โดยที่แสดงรายละเอียดการสร้างภาพในตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.7ก สัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณแสดงให้เห็นว่าแม้จะมีการเรกูลาร์ไรซ์แต่การใช้เรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮอนอฟอันดับศูนย์นั้นได้ผลไม่ดีเช่นเดียวกับผลในรูปที่ 4.5ค ซึ่งจะสังเกตเห็นจุดประในวัตถุที่แสดงในภาพ และรูปที่ 4.7ข ก็ได้ผลคล้ายกับรูปที่ 4.5ง รูปที่ 4.7คซึ่งจะได้ผลเฉลี่ยที่ราบเรียบกว่า และ 4.7ง แสดงผลของการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชันต่าง ๆ โดยรูปที่ 4.7ค เนื่องจากการใช้การเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชันนั้นมีการสร้างได้หลายรูปแบบเพื่อเปรียบเทียบผลจึงใช้การเรกูลาร์ไรซ์ตามแบบไบเลเทอร์ล-โททลวาริเอชัน [12, 14] ที่ไม่มีผลของตัวกรองไบเลเทอร์ล ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลจากการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวาริเอชันนั้นยังสังเกตได้ถึงความไม่ราบเรียบอยู่บ้างเมื่อเทียบกับผลจากการเรกูลาร์ไรซ์ตามแบบไบเลเทอร์ล-โททลวาริเอชัน

	$\lambda$	จำนวนรอบการทำซ้ำ	เวลาที่ใช้	ค่าตกค้าง	PSNR
0 <sup>th</sup> -order Tikhonov	0.2	4 รอบ	17.95 วินาที	0.162	16.48 dB
2 <sup>nd</sup> -order Tikhonov	0.6	6 รอบ	23.82 วินาที	<b>0.118</b>	16.18 dB
TV	0.09	6 รอบ	15.03 วินาที	0.366	18.29 dB
BTV	0.06	6 รอบ	<b>14.63</b> วินาที	0.365	<b>18.50</b> dB

ตารางที่ 4.1: แสดงรายละเอียดการสร้างภาพความละเอียดสูงโดยเปรียบเทียบด้วยวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ บนฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ نرمอนบปริภูมิ  $L^1$

รูปที่ 4.8 จะให้ผลที่ชัดเจนกว่าโดยรูปที่ 4.8ค นั้นทำให้สัญญาณแบบอิมพัลส์ (impulse noise) เกิดกระจายตัวออกมากกว่าเดิมแม้ภาพบางส่วนนั้นจะคมชัดขึ้น อย่างไรก็ตามในการแก้ไขสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์นั้นควรจะใช้วิธีแบบมัลติสแตจ ซึ่งในรูปที่ 4.8ง นั้นจะเห็นได้ว่าผลของสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์หายไป และภาพยังคงความคมชัดเช่นเดิม

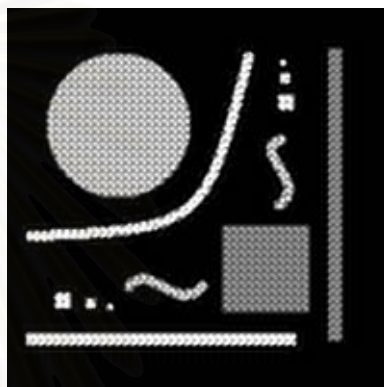
นอกจากนี้ในบทที่ 5 นั้นจะเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการนำวิธีการสร้าง ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดไปใช้กับภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนแบบสัญญาณรบกวนแบบจุดต่าง ซึ่งมักจะถูกกำจัดผลด้วยวิธีทางมัลติสแตจเช่นเดียวกันกับสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ [20] ซึ่งการใช้ نرمอนบปริภูมิ  $L^1$  นั้นเป็นวิธีที่มีเสถียรภาพมากกว่าการใช้ نرمอนบปริภูมิ  $L^2$



(ก) ภาพความละเอียดสูงทดสอบต้นฉบับ  
ขนาด 256 × 256 จุดภาพ



(ข) ตัวอย่างภาพความละเอียดต่ำขนาด  
64 × 64 จุดภาพ



(ค) ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่  
สร้าง จาก ชุด ภาพ ใน รูป ที่ 4.5x โดย  
การใช้ เรกูลาร์ไรซ์ แบบ ดีโคโนฟ อันดับ ที่  
ศูนย์ ที่มีพารามิเตอร์การเรกูลาร์ไรซ์เท่า  
กับ  $3 \times 10^{-4}$



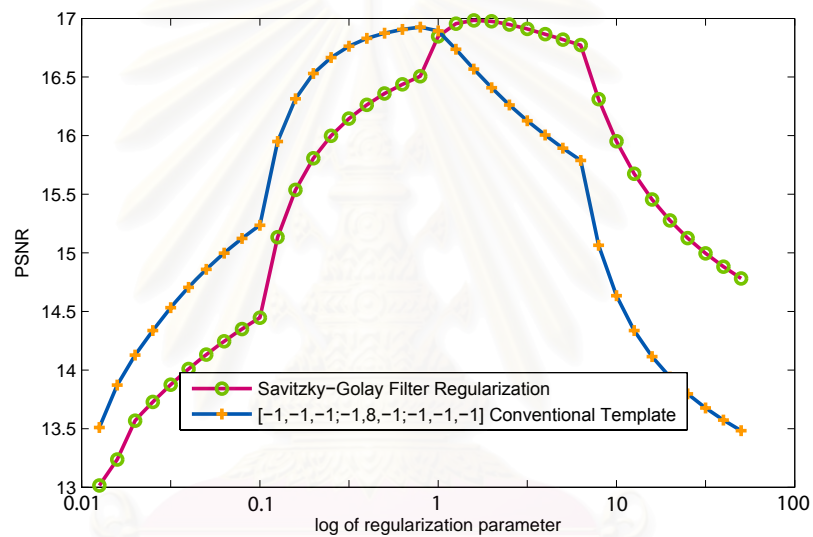
(ง) ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่  
ใช้ เรกูลาร์ไรซ์ แบบ ดีโคโนฟ อันดับ ที่ สอง  
ที่มี พารามิเตอร์ การ เรกูลาร์ไรซ์ เท่า กับ  
 $5 \times 10^{-4}$



(จ) ภาพ ความ ละเอียด สูง ยิ่ง ยวด ที่  
ใช้ เรกูลาร์ไรซ์ แบบ ดีโคโนฟ อันดับ ที่ สอง  
โดย หอนุพันธ์ อันดับ ที่ สอง จาก ตัว กรอง  
ของ ชาวิทสกี-โกเลย์ ที่มี พารามิเตอร์ การ  
เรกูลาร์ไรซ์เท่ากับ  $8 \times 10^{-3}$

รูปที่ 4.5: ผลของแต่ละวิธีในการเรกูลาร์ไรซ์การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่สร้าง จาก ภาพความละเอียดต่ำจำนวน 5 ภาพ ในในรูปที่ 4.5x





รูปที่ 4.6: เปรียบเทียบค่า PSNR ของภาพที่สร้างจากกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด โดยเรกูลาร์ไรซ์ด้วยการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิโอสอนอฟอันดับที่สอง ในแบบทั่วไปและแบบที่ใช้ตัวกรองของซาวิตสกี-โกเลย์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



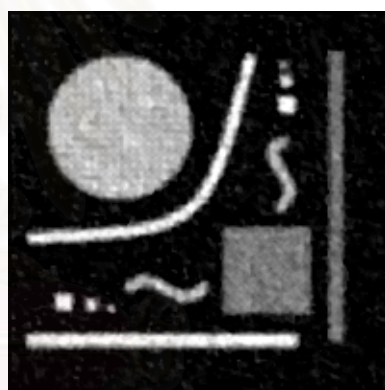
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.7: ตัวอย่างภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณโดยเปรียบเทียบวิธีการเรกูลาร์ไรซ์ (ก) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ผ่านการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮोनอฟอันดับที่ศูนย์ (ฟังก์ชันมูลค่าใช้นอร์มในปริภูมิ  $L^2$ ) (ข) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ผ่านการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮोनอฟอันดับที่สอง (ฟังก์ชันมูลค่าใช้นอร์มในปริภูมิ  $L^2$ ) (ค) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ผ่านการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวารีเอชัน (ฟังก์ชันมูลค่าใช้นอร์มในปริภูมิ  $L^1$ ) (ง) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ผ่านการเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์ล-โททลวารีเอชัน (ฟังก์ชันมูลค่าใช้นอร์มในปริภูมิ  $L^1$ )



(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 4.8: ตัวอย่างภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ (ก) ภาพความละเอียดต่ำขนาด  $60 \times 80$  (ข) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ไม่ได้ผ่านการเรกูลารีไรซ์ (ค) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ตั้งปัญหาไว้แบบนอร์มบนปริภูมิ  $L^2$  และใช้การเรกูลารีไรซ์แบบติโฮนอฟอันดับที่ศูนย์ (ง) ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ตั้งปัญหาไว้แบบนอร์มบนปริภูมิ  $L^1$  และใช้การเรกูลารีไรซ์แบบ BTV

## บทที่ 5

### ผลการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพที่ถูกרבกวนด้วย สัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลีแบบคูณ

ทั้งภาพอัลตราซาวด์ทางการแพทย์และภาพที่ได้จากช่องเปิดสังเคราะห์นั้น มักถูกสร้างแบบจำลองให้มีสัญญาณรบกวนแบบคูณซึ่งแตกต่างจากภาพถ่ายโดยทั่วไปที่มีแบบจำลองของสัญญาณรบกวนแบบบวก เนื่องจากข้อจำกัดของอุปกรณ์และกระบวนการรับภาพ ทำให้ภาพดังกล่าวเป็นภาพที่มีความละเอียดต่ำทั้งยังไม่อาจสังเกตเห็นรายละเอียดของภาพได้ชัดเจน กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดช่วยให้ภาพความละเอียดต่ำที่ได้มีความละเอียดสูงยิ่งขึ้น ทำให้สามารถสังเกตเห็นรายละเอียดได้ชัดเจนซึ่งสามารถนำภาพเหล่านี้ไปใช้ประโยชน์ได้ดียิ่งขึ้น

ภาพที่ถูกרבกวนด้วยสัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลีแบบคูณมักถูกจำลอง [36] โดยกำหนดให้

$$j = i \odot n + \eta \quad (5.1)$$

โดยที่  $i$  เป็นเวกเตอร์ของภาพต้นฉบับก่อนถูกรบกวน,  $n$  และ  $\eta$  เป็นเวกเตอร์ของสัญญาณรบกวนเรย์ลีในแบบคูณและบวกตามลำดับ,  $\odot$  เป็นการคูณแบบตัวต่อตัว, และ  $j$  คือเวกเตอร์ผลลัพธ์ของภาพที่ถูกרבกวน แบบจำลองในสมการที่ 5.1 นั้นใช้กันอย่างแพร่หลายในวงการภาพอัลตราซาวด์ทางการแพทย์และภาพที่ได้จากช่องเปิดสังเคราะห์โดยที่  $\eta$  ซึ่งมีผลกับภาพน้อยนั้นสามารถละเลยจากสมการ (5.1) ได้เป็น

$$j \simeq i \odot n \quad (5.2)$$

อย่างไรก็ตามทั้งภาพอัลตราซาวด์และภาพที่ได้จากช่องเปิดสังเคราะห์เช่นค่า  $i$  และ  $j$  ซึ่งเป็นภาพก่อนการถูกรบกวนและภาพที่ถูกสัญญาณรบกวนที่ได้จากกระบวนการในสมการ (5.2) นั้นเป็นภาพที่มีช่วงพลวัตกว้างยากแก่การนำมาสังเกตจึงต้องนำมาผ่านกระบวนการลอการิทึมได้เป็น

$$\begin{aligned} \log(j) &= \log(i) + \log(n) \\ j &= i + n \end{aligned} \quad (5.3)$$

ฟังก์ชันลอการิทึมทำให้สัญญาณรบกวนแบบคูณกลายเป็นสัญญาณรบกวนแบบบวก ในขณะที่  $n$  เป็นสัญญาณรบกวนชนิดเรย์ลี,  $n$  ในสมการ (5.3) สามารถประมาณเป็นสัญญาณรบกวนชนิดเกาส์แบบขาวได้ [36]

## 5.1 แบบจำลองการสร้างภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ

ในงานวิจัยอื่น ๆ นั้นสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนแบบด้วยสัญญาณรบกวนแบบบวก ซึ่งมักถูกจำลองด้วยสัญญาณรบกวนชนิดเกาส์แบบบวกหลาย ๆ ภาพ งานวิจัยนี้แตกต่างจากงานวิจัยที่เคยมีมาดังกล่าวด้วยการนำภาพความละเอียดต่ำที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบคูณหลาย ๆ ภาพมาใช้

เริ่มด้วยการนำภาพความละเอียดต่ำมาเรียงต่อกันตั้งแต่เฟรมที่ 1 ถึง  $p$  เช่นเดียวกันกับขั้นตอนการกำเนิดภาพความละเอียดต่ำจากการถ่ายภาพ ในสมการ (2.7)

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_p \end{bmatrix} x$$

$$z = \mathbf{H}x \quad (5.4)$$

แต่กระบวนการรับภาพของตัวรับภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณนั้น แตกต่างจากสมการของกระบวนการรับภาพกรณีทั่วไปดังเช่นในสมการ (2.7) เนื่องจากสัญญาณรบกวนนั้นมาคูณอยู่กับสัญญาณภาพตามสมการ (5.2)

การกำเนิดสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณนั้นเกิดจากการเคลื่อนที่ตัวนำของการกำเนิดภาพผ่านตัวกลางที่มีการสะท้อนและส่งผ่านหลายชั้น เช่นในกรณีของภาพอัลตราซาวด์นั้นคลื่นตัวนำคือคลื่นอัลตราซาวด์และตัวกลาง เป็นชั้นของผิวหนังเป็นต้น หลังจากนั้นภาพในมุมมองที่แตกต่างกันเหล่านั้นถูกรวมผ่านตัวรับที่มีฟังก์ชันกระจายจุด และทำให้มีความละเอียดเชิงพื้นที่จำกัดคล้ายกันกับกรณีการรับภาพโดยทั่วไป เมื่อนำผลของการถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณมารวมกันเพื่อสร้างขั้นตอนการกำเนิดภาพความละเอียดต่ำคล้ายกับสมการที่ 5.2 โดยที่ให้  $i = \mathbf{H}_k f$  ได้ผลดังนี้

$$z_k = (\mathbf{H}_k f) \odot n_k \quad (5.5)$$

ในขณะที่  $f$  เป็นวัตถุหรือภาพที่มีความละเอียดสูง,  $z_k$  เป็นภาพความละเอียดต่ำที่ถูกสัญญาณแบบเรย์ลีรบกวน,  $\mathbf{H}_k$  เป็นกระบวนการลดทอนคุณภาพของภาพเช่นเดียวกันกับสมการ (2.6), และ  $n_k$  เป็นสัญญาณรบกวนเรย์ลีที่รบกวนในภาพที่  $k$



## 5.2 กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่เหมาะสมกับภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลี

ภาพประเภทที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีนั้นมักใช้ฟังก์ชันลอการิทึมในการบีบอัดช่วงพลวัตของภาพ ซึ่งสามารถเขียนสมการ (5.5) ในฟังก์ชันลอการิทึมเช่นเดียวกับในสมการที่ 5.3 ได้เป็น

$$z_k = \log \{(\mathbf{H}_k f) \odot n_k\} \quad (5.6)$$

เพื่อให้การหาผลเฉลยจากสมการ (5.7) ฟังก์ชันลอการิทึมสามารถแยกผลของส่วนที่เป็นภาพและส่วนที่เป็นสัญญาณรบกวนได้

$$z_k = \log \mathbf{H}_k f + n_k \quad (5.7)$$

ในกรณีสัญญาณรบกวนแบบคูณเปลี่ยนเป็นสัญญาณรบกวนแบบบวก ในขณะที่  $\log \eta_k$  สามารถประมาณเป็นสัญญาณรบกวนชนิดเกาส์แบบขาว  $n_k$  ได้ [36] และหากตั้งต้นจากสมการ (5.7) สามารถหาผลเฉลยได้โดยหาค่าที่น้อยที่สุดของ  $f$  จากฟังก์ชันมูลค่าที่เปลี่ยนเป็น

$$\arg \min_f \|\log \mathbf{H}_k f - z_k\|_1 \quad (5.8)$$

การหาผลเฉลยจากฟังก์ชันมูลค่า (5.8) นั้นหาได้ไม่ถ่วงน้ำหนักเนื่องจากฟังก์ชันมูลค่ามีฟังก์ชันลอการิทึมประกอบอยู่ เมื่อนำมาคิดค่าเกรเดียนต์พบว่าหารูปแบบนิพจน์วิเคราะห์เพื่อสร้างเป็นกระบวนการทางภาพหรือตัวปฏิบัติการทางภาพไม่ได้ การหาผลเฉลยด้วยฟังก์ชันมูลค่าดังกล่าวใช้วิธีการหาผลต่างแบบจำกัด (finite difference) [37] ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะพิจารณาสูตรการหาเกรเดียนต์สองชนิด คือสูตรผลต่างข้างหน้า (forward-difference formula) ในอันดับที่หนึ่ง

$$\nabla_F f(x, h_F) = \frac{f(x + h_F) - f(x)}{h_F} \quad (5.9)$$

และสูตรผลต่างกลาง (central-difference formula) ในอันดับที่หนึ่ง

$$\nabla_C f(x, h_C) = \frac{f(x + h_C) - f(x - h_C)}{2h_C} \quad (5.10)$$

ซึ่งมีวิธีการเลือกค่าระยะห่างที่ได้ผลดีที่สุด (optimal step size)  $h_F$  และ  $h_C$  จากการวิเคราะห์เชิงเลข [37, 38] พบว่าแตกต่างกันในปัญหาที่มีมาตราส่วนดี (well-scaled problem) [37] สำหรับกรณีผลต่างชนิดก้ำกั้วหน้าจะได้ระยะห่างที่คาดว่าได้ผลดีที่สุด

$$h_F^* \sim \sqrt{\epsilon_R} \quad (5.11)$$

และกรณีผลต่างชนิดกึ่งกลางจะได้

$$h_C^* \sim \sqrt[3]{\epsilon_R} \quad (5.12)$$

เมื่อ  $\epsilon_R$  เป็นนัยสำคัญในการวัดความถูกต้องของฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งในระบบจำลองที่ใช้ตามภาคผนวก ข มีค่าอยู่ที่  $\sim 2.22 \times 10^{-16}$  จากนั้นนำค่าเกรเดียนต์เข้ากระบวนการทำซ้ำเพื่อหาคำตอบได้ การหาผลต่างของฟังก์ชันเช่นนี้เป็นวิธีทางเชิงเลขซึ่งทำบนสมาชิกทุกตัวของเวกเตอร์ซึ่งใช้เวลานาน เช่นหากต้องการหาเกรเดียนต์ของฟังก์ชันมูลค่าที่เวกเตอร์มีขนาด 100 ในกรณีเมื่อใช้สูตรผลต่างข้างหน้าต้องหาค่าของฟังก์ชันมูลค่า 100 ครั้ง และในกรณีใช้สูตรผลต่างกลางต้องหาฟังก์ชันมูลค่า 200 ครั้ง

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงขอเสนอวิธีการหนึ่งคือสลับตัวปฏิบัติการทำพราและตัวปฏิบัติการเลื่อนตำแหน่งใน  $\mathbf{H}_k$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $\mathbf{DB}_k \mathbf{S}_k$  [10–12, 14] เพื่อลดเวลาในการแก้ไขปัญหาให้รวดเร็วยิ่งขึ้นโดยไม่ต้องหาเกรเดียนต์ด้วยวิธีการเชิงเลขโดยวิธีที่หนึ่งสลับที่ตัวปฏิบัติการทำพราและตัวปฏิบัติการเลื่อนตำแหน่งเป็น

$$\arg \min_f \|\log \mathbf{DS}_k(\mathbf{B}_k f) - \mathfrak{z}_k\|_1 \quad (5.13)$$

ทำให้ฟังก์ชันลอการิทึมสามารถผ่านตัวปฏิบัติการซัคตัวอย่างลงและตัวปฏิบัติการเลื่อนที่ได้จากคุณสมบัติความไม่ขึ้นทางพื้นที่ของตัวปฏิบัติการ  $\mathbf{DS}_k$  ทำให้สามารถหาผลเฉลยได้จาก

$$\arg \min_b \|\mathbf{DS}_k b - \mathfrak{z}_k\|_1 \quad (5.14)$$

เมื่อ  $b = \log \mathbf{B}_k f$  ซึ่งเมื่อได้ผลเฉลย  $b$  แล้วจึงนำมาผ่านกระบวนการเพิ่มความคมชัดของภาพอีกครั้งหนึ่งได้คล้ายกับวิธีใน [12]

### 5.3 ผลการทดลองจากภาพที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ

ผลการทดลองจากภาพหลอน (phantom image) ที่ถูกสร้างเลียนแบบกระบวนการอัลตราซาวนด์โดยใช้สัญญาณรบกวนแบบเรย์ลีแบบคูณ การทดลองใช้ภาพความละเอียดต่ำ 16 เพื่อเพิ่มความละเอียดขึ้น 4 เท่า ภาพที่มีสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณที่มีค่าความแปรปรวน 0.7979 โดยใช้ฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ نرمบนปริภูมิ  $L^1$  ใช้การเรกูลาร์ไรซ์แบบ BTV ที่ตั้ง  $\alpha = 0.7$  และขนาดหน้าต่าง  $p = 2$  โดยการทำซ้ำด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière+ จำนวนรอบที่มากที่สุดคือ 50 ครั้ง และ نرمของเวกเตอร์ตกค้าง ( $\tau$ ) น้อยกว่า  $1 \times 10^{-3}$  หรือลดลงจากรอบการทำซ้ำก่อนหน้าไม่เกินร้อยละ 1 รายละเอียดของผลการทดลองเป็นไปตามตารางที่ 5.1 และภาพที่ได้จากกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดเป็นไปตามรูปที่ 5.1 โดยเปรียบเทียบผลระหว่าง

	$\lambda$	จำนวนรอบ	เวลาที่ใช้(วินาที)	ค่า PSNR (dB)
16-look	-	-	-	10.02
วิธี A	0.1	9	8963	15.97
วิธี B	0.25	17	39	13.35
วิธี C	0.1	5	4752	15.23

ตารางที่ 5.1: รายละเอียดผลการจำลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ภาพหลอนความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ simpat โดยเปรียบเทียบผลระหว่างวิธี 16-look, วิธี A, วิธี B และวิธี C

	$\lambda$	จำนวนรอบ	เวลาที่ใช้(วินาที)	ค่า PSNR (dB)
16-look	-	-	-	8.52
วิธี A	0.1	8	21233	11.82
วิธี B	0.2	18	22	8.12
วิธี C	0.3	2	4850	10.99

ตารางที่ 5.2: รายละเอียดผลการจำลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ภาพหลอนความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ squarevary โดยเปรียบเทียบผลระหว่างวิธี 16-look, วิธี A, วิธี B และวิธี C

- วิธี 16-look<sup>1</sup>
- วิธี A คือการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดด้วยฟังก์ชันมูลค่า (5.8)
- วิธี B คือวิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดด้วยฟังก์ชันมูลค่า (5.14)
- วิธี C คือวิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยนำคำตอบจากวิธี B ไปหาคำตอบต่อด้วยวิธี A

พบว่าวิธีการ A ใช้เวลานานมากในการทำงานและให้ผลที่ไม่ดีนักซึ่งสังเกตได้จากช่วงพลวัตที่ไม่แตกต่างกันมากนัก หากทำการวนรอบต่อเนื่องจะเกิดการวนรอบเกินซึ่งจะทำให้ได้ค่า P-SNR น้อยลงและภาพมีสัญญาณรบกวนมากขึ้น ส่วนวิธีการ B ให้ภาพที่มีลักษณะต่างออกไปคือมีลักษณะที่ค่อนข้างคมชัดแต่มีสัญญาณรบกวนที่ขอบของวัตถุมากเนื่องจากการไม่ทำพัวไนกระบวนการแรก และเมื่อมาทำการลดความพัวไนกระบวนการที่สองจึงทำให้สัญญาณรบกวนในภาพนั้นเด่นชัดขึ้นมา สาเหตุเกิดเนื่องจากการ A มีฟังก์ชันลอการิทึมซึ่งทำให้ความไวของกระบวนการลดลง อีกทั้งยังมีเงื่อนไขทำให้ต้องกำหนดช่วงของคำตอบเพิ่มเติมอย่างเช่น  $f \geq 0$  และ  $\mathbf{H}_k f \geq 0$  ทำให้กระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนี้ติดขัด

วิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากวิธีการ A สามารถสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดได้คือให้ความละเอียดสูงขึ้นและมีสัญญาณรบกวนลดลงมาก โดยมีข้อจำกัดคือใช้เวลามาก

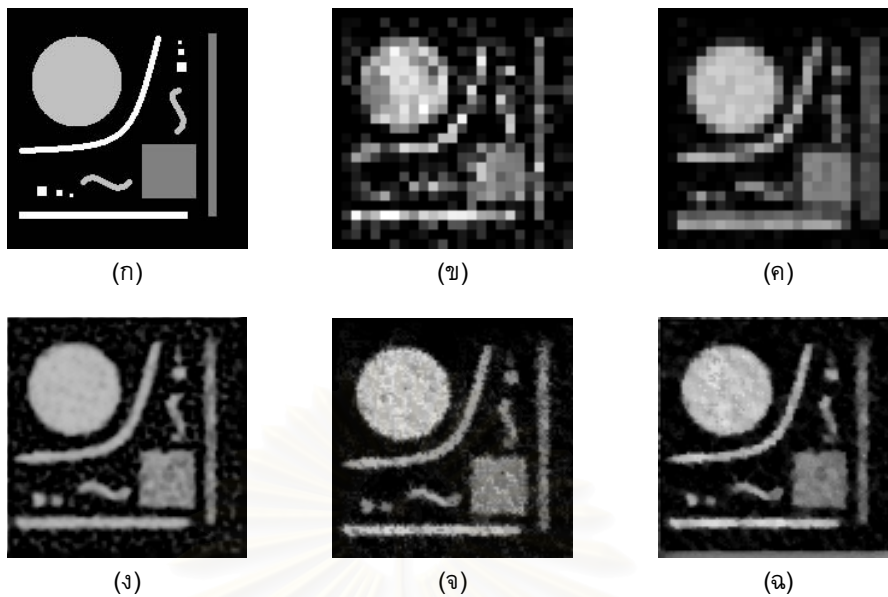
<sup>1</sup>วิธีเฉลี่ยจากหลายรูป (multilook) : เป็นวิธีที่นิยมทำกับภาพที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนแบบจุดต่าง [39-41] โดยเฉลี่ยสัญญาณที่วัดได้จำนวน  $L$  ภาพและเรียกว่าข้อมูลหรือภาพที่  $L$  ว่า  $L$ -look

	$\lambda$	จำนวนรอบ	เวลาที่ใช้(วินาที)	ค่า PSNR (dB)
16-look	-	-	-	9.57
วิธี A	0.1	7	16910	9.45
วิธี B	0.25	5	7	11.34
วิธี C	0.1	6	16013	10.27

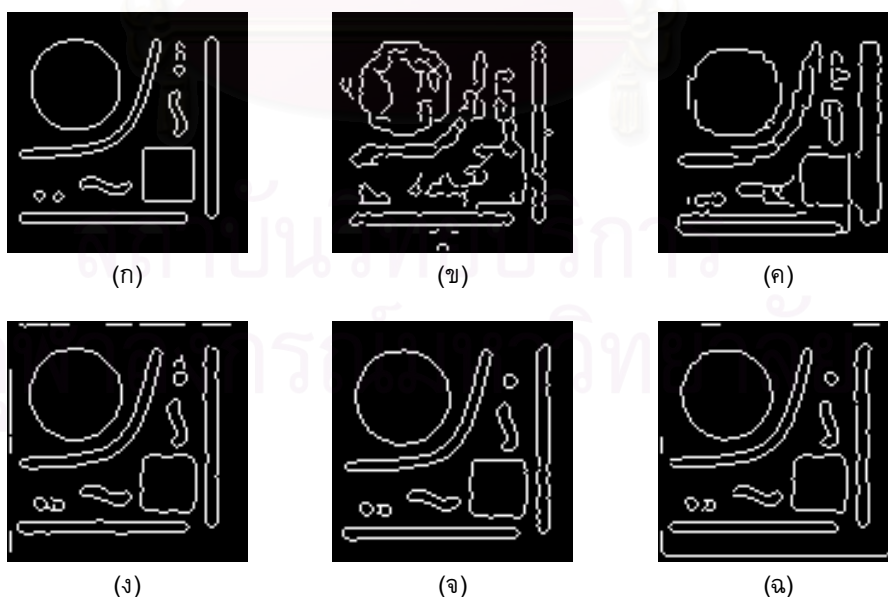
ตารางที่ 5.3: รายละเอียดผลการจำลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ภาพหลอนความละเอียดต่ำที่ถูกปรับด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ `invertsquarevary` โดยเปรียบเทียบผลระหว่าง วิธี 16-look, วิธี A, วิธี B และวิธี C

เนื่องจากการหาค่าผลต่างแบบจำกัดใช้เวลานาน ในขณะที่หากสังเกตช่วงพลวัตของภาพที่ได้จากวิธีการนี้พบว่าไม่กว้างนัก วิธีการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากวิธีการ B นั้นใช้เวลาน้อยกว่าวิธีแรกมากเนื่องจากผลต่างจำกัดนั้นหาด้วยวิธีนิพจน์วิเคราะห์ได้ แต่มีข้อจำกัดที่เป็นกระบวนการที่ไม่รวมกระบวนการทำพราตั้งแต่แรกจึงทำให้ได้ภาพความละเอียดสูงเริ่มต้นก่อนนำมาจำกัดความพราที่มีสัญญาณรบกวนอยู่ เมื่อนำมาผ่านการจำกัดการทำพราทำให้สัญญาณรบกวนเหล่านั้นมีความชัดเจนมากขึ้นซึ่งจะได้ผลที่ไม่ดีนัก วิธีการ C ซึ่งนำคำตอบจากวิธีการ B มาหาคำตอบต่อด้วยวิธีการ A พบว่าสามารถลดเวลาในการทำงานลงเพื่อให้ได้คำตอบที่ใกล้เคียงกับคำตอบจากวิธีการ A แม้ว่าในรูปที่ 5.5 ซึ่งมีพื้นที่ส่วนใหญ่เป็นสีเข้ม (ผลตอบมีค่าเป็น 0) นั้นจะมีผลของสัญญาณรบกวนแบบคูณน้อยทำให้ผลของฟังก์ชันมูลค่า (5.14) นั้นได้ผลดีกว่า (5.8) เมื่อนำมาทำด้วยวิธีการ C จะทำให้คำตอบที่ได้นั้นไปคล้ายกับวิธีการ A ซึ่งจะได้ผลแยงเล็กน้อย

เมื่อพิจารณาที่ผลของการหาขอบภาพซึ่งเป็นงานประยุกต์ที่นิยมใช้กับการประมวลผลภาพโดยใช้วิธีของแคนนี่ (Canny) ตามรูปที่ 5.2 และ 5.4 เนื่องจากวิธีการนี้มีการหาค่าของผลต่างเชิงอนุพันธ์ย่อยของภาพซึ่งมีความไวต่อสัญญาณรบกวนมาก จึงทำให้สามารถสังเกตผลกระทบของสัญญาณรบกวนได้ชัดเจนยิ่งขึ้น พบว่าสัญญาณรบกวนแบบคูณนั้นจะมีผลกระทบกับภาพที่มีพื้นหลังเป็นสีขาวเป็นส่วนใหญ่เช่นรูปที่ 5.3 ซึ่งทำให้ภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ได้นั้นมีสัญญาณรบกวนมากขึ้นเมื่อเทียบกับการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดในรูปที่ 5.1 ซึ่งมีพื้นหลังเป็นสีเข้ม ส่งผลให้การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดตามวิธีการ B มีความแตกต่างกันเมื่อหาขอบจากภาพทั้งสองตามรูปที่ 5.2จ และรูปที่ 5.4จ แต่มีผลแตกต่างกันน้อยเมื่อใช้วิธีการ A ที่มีข้อได้เปรียบเรื่องการจำกัดสัญญาณรบกวนซึ่งได้ภาพขอบตามรูปที่ 5.2ง และรูปที่ 5.4ง ในส่วนของผลของขอบภาพจากวิธีการ C จะคล้ายกับแบบที่หาจากวิธีการ A เพียงอย่างเดียวยกเว้นในกรณีที่ภาพที่มีสีของภาพอ่อนซึ่งคำตอบจากวิธีการ B มีสัญญาณรบกวนมากจะทำให้สัญญาณรบกวนเพิ่มขึ้นเล็กน้อย

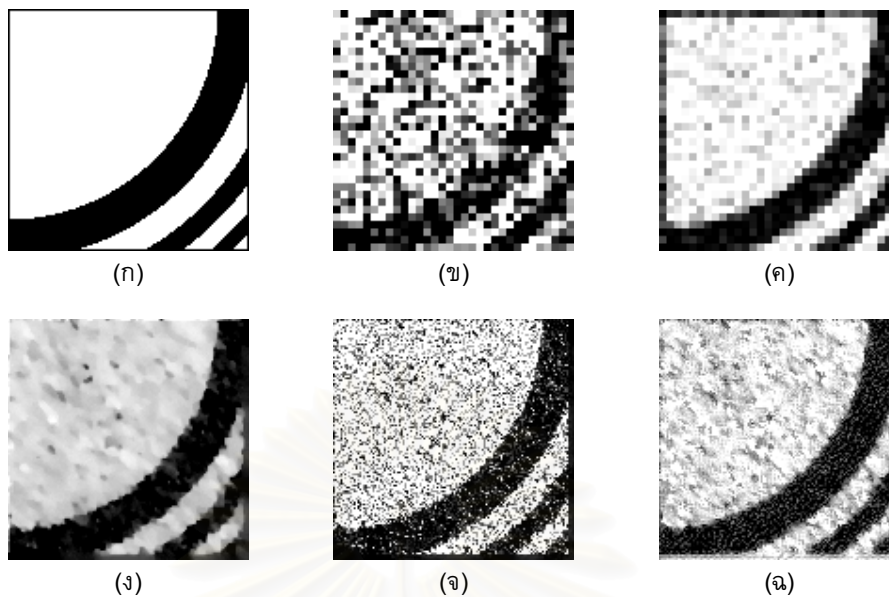


รูปที่ 5.1: ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูก  
 ครอบงวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ simpat ก) ภาพความละเอียดสูงต้นฉบับ ข) ภาพ  
 ความละเอียดต่ำต้นฉบับที่ถูกครอบงวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ค) ภาพจากวิธี 16-look  
 ง) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่สุดที่จากฟังก์ชันมูลค่า (5.8) โดยหาค่า  
 เกรเดียนต์ด้วยวิธีผลต่างจำกัด จ) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่สุดที่จาก  
 ฟังก์ชันมูลค่า (5.14) โดยการสำหรับตำแหน่งตัวปฏิบัติการ  $B_k$  และ  $S_k$  ฉ) นำคำตอบจาก จ) มา  
 หาค่าตอบต่อโดยฟังก์ชันมูลค่าแบบใน ง)

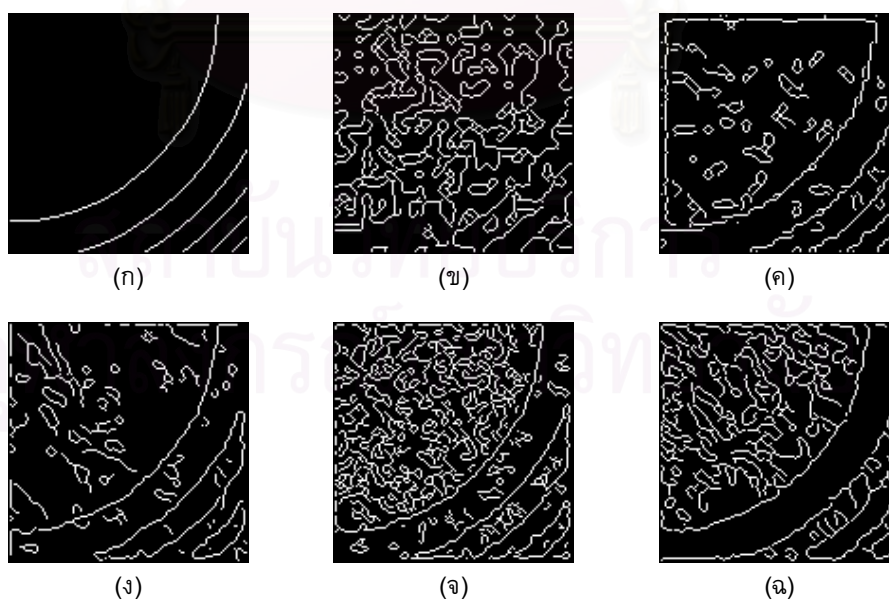


รูปที่ 5.2: ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปที่ 5.1 ก) ขอบของรูปที่ 5.1ก ข) ขอบของรูปที่  
 5.1ข ค) ขอบของรูปที่ 5.1ค ง) ขอบของรูปที่ 5.1ง จ) ขอบของรูปที่ 5.1จ ฉ) ขอบของรูปที่ 5.1ฉ

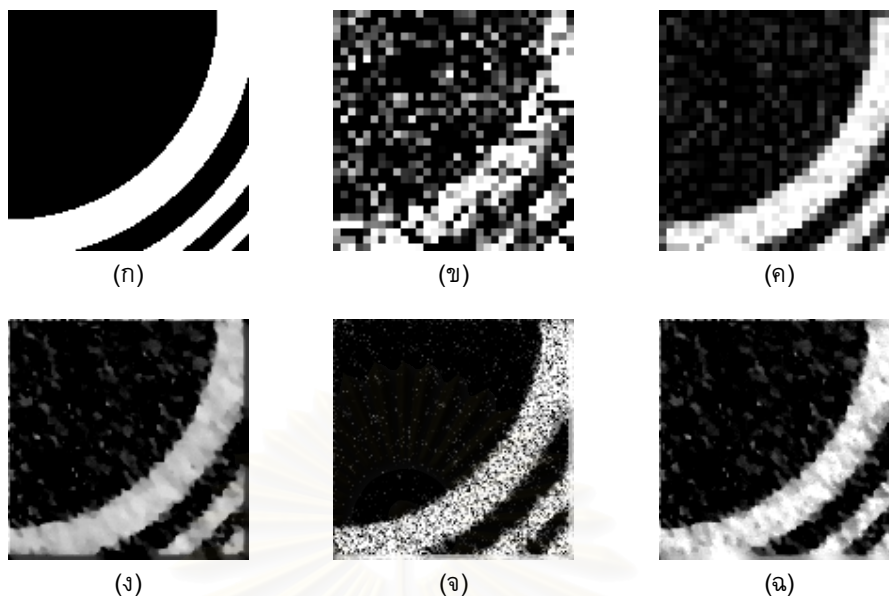




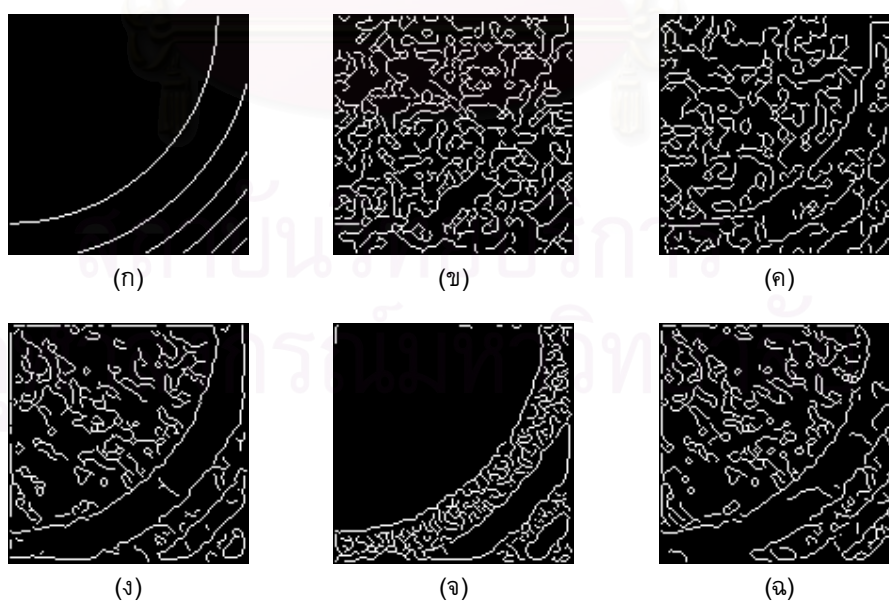
รูปที่ 5.3: ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ squarevary ก) ภาพความละเอียดสูงต้นฉบับ ข) ภาพความละเอียดต่ำต้นฉบับที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ค) ภาพจากวิธี 16-look ง) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่สุดที่จากฟังก์ชันมูลค่า (5.8) โดยหาค่าเกรเดียนต์ด้วยวิธีผลต่างจำกัด จ) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่สุดที่จากฟังก์ชันมูลค่า (5.14) โดยการสำหรับตำแหน่งตัวปฏิบัติการ  $B_k$  และ  $S_k$  ฉ) ภาพความละเอียดสูงที่นำค่าตอบใน จ) ไปหาค่าตอบต่อด้วยฟังก์ชันมูลค่าแบบใน ง)



รูปที่ 5.4: ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปที่ 5.3 ก) ขอบของรูปที่ 5.3ก ข) ขอบของรูปที่ 5.3ข ค) ขอบของรูปที่ 5.3ค ง) ขอบของรูปที่ 5.3ค จ) ขอบของรูปที่ 5.3จ ฉ) ขอบของรูปที่ 5.3ฉ



รูปที่ 5.5: ผลการทดลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูก  
 ครอบงวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ invertsquarevary ก) ภาพความละเอียดสูงต้น  
 ฉบับ ข) ภาพความละเอียดต่ำต้นฉบับที่ถูกครอบงวนด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ค) ภาพจาก  
 วิธี 16-look ง) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่สุดที่จากฟังก์ชันมูลค่า (5.8)  
 โดยหาค่าเกรเดียนต์ด้วยวิธีผลต่างจำกัด จ) ภาพความละเอียดสูงที่สร้างขึ้นจากการหาค่าที่น้อยที่  
 สุดที่จากฟังก์ชันมูลค่า (5.14) โดยการสำหรับตำแหน่งตัวปฏิบัติการ  $B_k$  และ  $S_k$  ฉ) ภาพความ  
 ละเอียดสูงที่นำคำตอบใน จ) ไปหาคำตอบต่อด้วยฟังก์ชันมูลค่าแบบใน ง)



รูปที่ 5.6: ผลการหาขอบจากภาพต่าง ๆ ในรูปที่ 5.5 ก) ขอบของรูปที่ 5.5ก ข) ขอบของรูปที่  
 5.5ข ค) ขอบของรูปที่ 5.5ค ง) ขอบของรูปที่ 5.5ง จ) ขอบของรูปที่ 5.5จ ฉ) ขอบของรูปที่ 5.5ฉ

## บทที่ 6

### บทสรุปและข้อเสนอแนะ

#### 6.1 บทสรุป

การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพที่ถูกครอบงำแบบเรย์ลีนั้นยากกว่าการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพที่ถ่ายจากกล้องดิจิทัลโดยทั่วไป เนื่องจากชนิดของสัญญาณรบกวนและลักษณะของภาพที่มีความพริ้วมากทำให้ความละเอียดเชิงพื้นที่น้อยกว่าความเป็นจริง การเรกูลาร์ไรซ์ด้วยวิธีการที่มีพจน์ของการหาอนุพันธ์เช่นการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮอนอฟอันดับที่สองหรือการเรกูลาร์ไรซ์แบบโททลวารีเอชันสามารถลดผลการรบกวนได้ดีกว่า การเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮอนอฟในอันดับที่ศูนย์

การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดโดยใช้ norms บนปริภูมิ  $L^1$  นั้นมีความเหมาะสมเพราะสามารถนำไปใช้ได้กับภาพความละเอียดต่ำหลายชนิด ไม่ว่าจะเป็นภาพที่มีการรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนเกาส์แบบบวก สัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ หรือสัญญาณรบกวนแบบจุดต่าง ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ทดลองเกี่ยวกับสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างชนิดที่ประมาณเป็นสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณ ซึ่งกระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ norms บนปริภูมิ  $L^1$  ได้ผลดี อย่างไรก็ตามการทำซ้ำด้วยวิธีลดระดับตามแนวเกรเดียนต์นั้นไม่เหมาะสม เนื่องจากใช้รอบการทำซ้ำที่มากและทำให้ได้ผลเฉลยของปัญหาซ้ำ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงเสนอให้ใช้วิธีการทำซ้ำด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบไม่เชิงเส้นด้วยสูตรของ Polak-Ribière ซึ่งจะให้ผลเฉลยได้โดยการทำซ้ำที่ไม่มากและให้ผลเฉลยของปัญหาได้รวดเร็วกว่า นอกจากนี้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยังเสนอเกี่ยวกับการเรกูลาร์ไรซ์แบบดิฮอนอฟในอันดับที่สองที่ใช้ตัวกรองซาวีสกี-โกเลย์ในการคำนวณหาค่าอนุพันธ์ ซึ่งได้ผลดีกว่าการใช้แม่แบบ (template) ที่นิยมใช้กัน

#### 6.2 ข้อเสนอแนะและปัญหาที่เกิดขึ้นในงานวิจัยนี้

แม้ว่ากระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะสามารถลดผลกระทบของการวางตำแหน่งภาพผิด (misregistration) ได้ [12] เนื่องจากเกิดปัญหาที่คล้ายกันกับสัญญาณรบกวนแบบอิมพัลส์ แต่ก็ไม่สามารถลดผลกระทบของการประมาณฟังก์ชันกระจายจุดผิดได้ ซึ่งการประมาณฟังก์ชันกระจายจุดที่แม่นยำย่อมส่งผลที่ดีต่อคุณภาพของภาพทั้งความคมชัด และการลดผลกระทบของสัญญาณรบกวนแบบต่าง ๆ ได้มาก

เนื่องจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูกครอบงำด้วยสัญญาณรบกวนเรย์ลีแบบคูณที่นำมาใช้ในการประมาณสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างนั้นมีลักษณะไม่ขึ้นกับพื้นที่ที่เกิด การสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดที่ใช้จึงได้ผลเป็นอย่างไรดีเยี่ยมในกรณีที่สัญญาณรบกวนนั้นเกิดขึ้นจากการ

จำลองขึ้นโดยคอมพิวเตอร์ ในการทดลองกับสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างที่เกิดขึ้นจริงนั้นผลที่ได้นั้นพบว่ากระบวนการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดนั้นสามารถลดผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีขนาดเล็ก ๆ ได้ แม้จะยังคงเห็นรายละเอียดของภาพมาก แต่สำหรับสัญญาณรบกวนที่มีขนาดใหญ่ นั้นยังสามารถสังเกตเห็นได้อยู่บ้างเนื่องจากต้องการคงรายละเอียดของภาพไว้ให้ได้มากที่สุด

ปัญหาที่สำคัญที่เกิดขึ้นในส่วนของการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณเรย์ลีแบบคุณนั้นคือกระบวนการแก้ปัญหานั้นซ้ำเนื่องจากใช้การหาผลต่างแบบจำกัด กระบวนการที่เสนอแนะเพิ่มเติมอีกวิธีหนึ่งนั้นทำงานได้รวดเร็วกว่าแต่ยังมีจุดที่ปรับปรุงคือคุณภาพของภาพที่ได้

### 6.3 สิ่งที่ต้องทำในการทำงานวิจัยต่อไป

สิ่งที่ควรจะทำในการวิจัยต่อไปจากงานวิจัยนี้คือการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด ที่ทนต่อการประมาณฟังก์ชันกระจายจุดที่ผิด หรือเป็นการประมาณฟังก์ชันกระจายจุดที่แม่นยำจากภาพความละเอียดต่ำที่ได้มาเป็นต้น

เรื่องการทำซ้ำนั้นพบว่าการทำซ้ำด้วยวิธีเกรเดียนต์สังยุคแบบ Polak-Ribière นั้นให้ผลได้รวดเร็วมก อย่างไรก็ตามยังมีเกรเดียนต์สังยุคแบบอื่นอีกที่อาจจะนำมาใช้ได้ รวมถึงการปรับสภาพกระบวนการด้วยวิธีต่าง ๆ ก็สามารถเพิ่มความเร็วให้กับระบบได้

การประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ตัวกรองแบบไบเลเทอร์ลที่นำมาใช้ในการเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์ลโททลวาริเอชันนั้นให้ผลดีมาก อย่างไรก็ตามยังไม่สามารถกำจัดผลของสัญญาณรบกวนแบบจุดต่างได้หมด หากเป็นสัญญาณรบกวนที่มีการกระจายอยู่ในพื้นที่เป็นบริเวณกว้าง การเรกูลาร์ไรซ์แบบไบเลเทอร์ลโททลวาริเอชัน จะต้องกำหนดให้หน้าต่างที่ใช้มีขนาดใหญ่ขึ้นทำให้ผลของภาพที่ได้พร่า และมักจะทำให้ฟังก์ชันมูลค่าที่ไม่เสถียรนัก

ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดจากภาพความละเอียดต่ำที่ถูกรบกวนด้วยสัญญาณเรย์ลีแบบคุณนั้นอาจต้องปรับปรุงฟังก์ชันมูลค่าที่ใช้ในการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวด หรือปรับปรุงกระบวนการที่ใช้ให้มีความรวดเร็วมากยิ่งขึ้นด้วย



## รายการอ้างอิง

1. D. P. Capel. Image Mosaicing and Super-resolution. PhD thesis, University of Oxford, 2001.
2. T. Inouye. The super resolution of gamma-ray spectrum. Nuclear Instruments and Methods 30, 2(1964): 224-228.
3. M. Walter and K. Hasselmann. Super-resolution of tides. Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts 12, 6(1964): 1063.
4. T. S. Huang and R. Y. Tsay. Multiple frame image restoration and registration. In Advances in Computer Vision and Image Processing, volume 1, pp. 317-339, Greenwich. JAI, 1984.
5. S. C. Park, M. K. Park, and M. G. Kang. Super-resolution image reconstruction: A technical overview. IEEE Signal Processing Magazine 20, 3(2003): 21-36.
6. S. P. Kim, N. K. Bose, and H. M. Valenzuela. Recursive reconstruction of high resolution image from noisy undersampled multiframes. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing 38, 6(1990): 1013-1027.
7. M. Irani and S. Peleg. Motion analysis for image enhancement: Resolution, occlusion, and transparency. Visual Communications and Image Representation 4, 4(1993): 324-335.
8. D. Keren, S. Peleg, and R. Brada. Image sequence enhancement using sub-pixel displacements. In Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 742-746, Ann Arbor. 1988.
9. M. Elad and A. Feuer. Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy and undersampled measured images. IEEE Transactions on Image Processing 6, 12(1997): 1646-1658.
10. N. Nguyen, P. Milanfar, and G. H. Golub. A computationally efficient image superresolution algorithm. IEEE transactions on image processing 10, 4(2001): 573-583.
11. N. Nguyen. Numerical Algorithms for Image Superresolution. PhD thesis, Stanford University, 2000.



12. S. Farsiu, D. Robinson, M. Elad, and P. Milanfar. Robust shift and add approach to super-resolution. In Proc. of the 2003 SPIE Conf. on Applications of Digital Signal and Image Processing, 2003.
13. A. Zomet and S. Peleg. Super-resolution from multiple images having arbitrary mutual motion. In S. Chaudhuri, editor, Super-Resolution Imaging, pp. 195–209. Kluwer Academic, 2001.
14. S. Farsiu. A fast and robust framework for image fusion and enhancement. PhD thesis, University of California Santa Cruz, 2005.
15. M. Elad and Y. Hel-Or. A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space invariant blur. IEEE Transactions on Image Processing 10, 8(2001): 1187-1193.
16. S. Baker and T. Kanade. Limits on super-resolution and how to break them. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 24, 9(2002): 1167-1183.
17. Z. Lin and H. Y. Shum. On the fundamental limits of reconstruction-based super-resolution algorithms. IEEE Transaction Pattern Analysis and Machine Intelligence 26, 1(2004): 83-97.
18. D. Robinson and P. Milanfar. Statistical performance analysis of super-resolution. IEEE Transactions on Image Processing 15, 6(2006): 1413-1428.
19. A. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. In Soviet Math. Doklady, volume 4, pp. 1035–1038, 1963.
20. R. C. Gonzalez and R. E. Woods. Digital Image Processing. Prentice-Hall, 2nd edition, 2002.
21. H. Andrews and B. Hunt. Digital Image Restoration. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
22. M. K. Ng. Iterative Methods for Toeplitz Systems (Numerical Mathematics and Scientific Computation). Oxford University Press, USA, 2004.
23. D. C. Lay. Linear Algebra and Its Applications (3rd Edition). Addison Wesley, 2002.
24. J. R. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA, 1994.

25. A. L. Cauchy. Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. Compte Rendu des Séances de L'Académie des Sciences XXV Série A(1847): 536–538.
26. M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. Journal of Research of National Bureau Standards 49(1952): 409–436.
27. J. Nocedal and S. Wright. Numerical Optimization. Springer, 2000.
28. S. S. Rao. Engineering Optimization: Theory and Practice, 3rd Edition. Wiley-Interscience, 1996.
29. R. L. Fox. Optimization methods for engineering design (Addison-Wesley series in mechanics and thermodynamics). Addison-Wesley Pub. Co, 1971.
30. M. J. D. Powell. Convergence properties of algorithms for nonlinear optimization. SIAM Review 28, 4(1986): 487–500.
31. W. W. Hager and H. Zhang. Algorithm 851: Cg\_descent, a conjugate gradient method with guaranteed descent. ACM Trans. Math. Softw. 32, 1(2006): 113–137.
32. J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin 13(1902): 49–52.
33. Wikipedia. Well-posed problem. [Online]. Available: [http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem), 2006.
34. P. C. Hansen. Discrete ill-posed problems - insight and algorithms. A tutorial with matlab exercises, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, November 2005.
35. G. Golub and C. V. Loan. Matrix Computation. The Johns Hopkins University Press, 3 edition, 1996.
36. O. V. Michailovich and A. Tannenbaum. Despeckling of medical ultrasound images. Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on 53, 1(2006): 64–78.
37. P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, and M. H. Wright. Computing forward-difference intervals for numerical optimization. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 4, 2(1983): 310-321.
38. Gill. PRACTICAL OPTIMIZATION. Elsevier, June 1982.

39. H. Xie, L. E. Pierce, and F. T. Ulaby. Statistical properties of logarithmically transformed speckle. Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on 40, 3(2002): 721–727.
40. Y. Yu and S. T. Acton. Edge detection in ultrasound imagery using the instantaneous coefficient of variation. Image Processing, IEEE Transactions on 13, 12(2004): 1640–1655.
41. F. N. S. Medeiros and N. D. A. a. Mascarenhas. An adaptive clustering map algorithm to filter speckle in multilook sar images.
42. C. Chinrungrueng and P. Toonkum. Real-time speckle reduction and coherence enhancement of ultrasound images based on mixture of anisotropic savitzky-golay filters. volume 7, pp. 4212–4216, 2004.
43. C. Chinrungrueng and A. Suvichakorn. Fast edge-preserving noise reduction for ultrasound images. Nuclear Science, IEEE Transactions on 48, 3(2001): 849–854.



ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ภาคผนวก ก

### ตัวกรองซาวิตสกี-โกลีย์ (SAVITZKY-GOLAY FILTER)

ตัวกรองซาวิตสกี-โกลีย์มีประโยชน์ในการทำให้สัญญาณนั้นราบเรียบขึ้น โดยหากต้องการใช้พหุนาม  $p$  เพื่อประมาณค่าของสัญญาณ  $f$  โดยให้ความกว้างของหน้าต่างที่จะใช้ในการประมาณมีขนาด  $(2L + 1) \times (2L + 1)$  และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(i, j)$  [42]

$$D_{i,j} = \{f(i + m, j + n) : -L \leq m \leq L, -L \leq n \leq L\} \quad (ก.1)$$

ให้พหุนาม  $p_{i,j}(m, n)$  อยู่ในรูป [43]:

$$p_{i,j}(m, n) = \sum_{s=0}^S \sum_{t=0}^T a_{s,t}(m, n) m^s n^t \quad (ก.2)$$

$$= \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (ก.3)$$

โดยให้คู่ลำดับ  $i, j$  แสดงถึงคู่ลำดับของดัชนีจุดภาพ,  $(m, n)$  เป็นเลขจำนวนเต็มแสดงถึงดัชนีของหน้าต่าง  $D_{i,j}$ ,  $s, t$  และ  $S, T$  เป็นลำดับของดัชนีของหน้าต่างและลำดับของดัชนีของหน้าต่างที่มากที่สุดของดัชนีของจุดภาพ  $(m, n)$  ตามลำดับ,  $\mathbf{A}$  เป็นเมทริกซ์ที่ออกแบบขึ้น,  $a_{k,l}$  และ  $\mathbf{a}$  เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนามและเวกเตอร์ของตัวกรองที่ออกแบบขึ้นตามลำดับ เพื่อที่จะพหุนามที่เหมาะสมกับการประมาณฟังก์ชันให้พอดีจะกำหนดฟังก์ชันความผิดพลาด

$$\xi = \sum_{s=0}^S \sum_{t=0}^T (p_{i,j}(m, n) - f_{i+m, j+n})^2 \quad (ก.4)$$

$$= \|\mathbf{A} \mathbf{a} - \mathbf{f}\|_2^2 \quad (ก.5)$$

โดยขนาดของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  มักถูกกำหนดเป็นปัญหากำลังสองน้อยที่สุดแบบกำหนดเงื่อนไขคำตอบ

$$\arg \min_{\mathbf{a}} \xi = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} \quad (ก.6)$$

พจน์  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$  สามารถคำนวณเก็บไว้ใช้ได้ในทุกครั้งและใช้เป็นตัวกรองสำหรับประมาณภาพ  $f$  ได้ โดยหากต้องการอนุพันธ์เฉพาะส่วนของสัญญาณ สามารถสร้างตัวกรองสำหรับผ่านภาพแบบอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งหรืออนุพันธ์อันดับที่สองได้ เช่นในกรณีอนุพันธ์เฉพาะส่วนอันดับที่สองนั้นสามารถคำนวณได้โดย

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_{i,j}(m, n) &\approx \nabla^2 p_{i,j}(m, n)|_{m=0, n=0} \\ &= \nabla^2 \left( \sum_{s=0}^2 \sum_{t=0}^2 a_{s,t} m^s n^t \right) |_{m=0, n=0} \\ &= 2a_{0,2} + 2a_{2,0} \end{aligned} \quad (ก.7)$$



## ภาคผนวก ข

### ระบบที่ใช้

ระบบที่ใช้จำลองการสร้างภาพความละเอียดสูงยิ่งยวดเป็นไปตามตารางด้านล่าง

หน่วยประมวลผลกลาง	Intel® Core™2 Duo E6300 <sup>1</sup>
หน่วยความจำสำรอง	1 GB
ระบบปฏิบัติการที่ใช้	Microsoft® Windows® XP SP2
ซอฟต์แวร์ที่ใช้จำลอง	MATLAB® R2006a และ MATLAB® R2006b



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<sup>1</sup>โปรแกรมที่เขียนเพื่อใช้งาน ทำงานในแบบเซร็ดเดี่ยว (single-threaded programming)

## ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายพสุ บุญวิสุทธิ เกิดเมื่อวันที่ 13 ตุลาคม พ.ศ. 2526 จังหวัดกรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาที่โรงเรียนสาธิตจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ฝ่ายมัธยม และสำเร็จการศึกษาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิตจากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า ปีการศึกษา 2547 ปัจจุบันอยู่ระหว่างการศึกษาระดับวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิศวกรรมไฟฟ้า สาขาไฟฟ้าสื่อสารที่ห้องปฏิบัติการวิจัยกรรมวิธีสัญญาณดิจิทัล มีความสนใจทางด้านกรรมวิธีสำหรับภาพดิจิทัล และสัญญาณเสียง นอกจากนี้ยังทำกิจกรรมทางด้านวิชาการโดยสนใจเป็นพิเศษในเรื่องเกี่ยวกับหุ่นยนต์ อิเล็กทรอนิกส์ การเขียนโปรแกรมและระบบเครือข่าย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย