บทที่ 3

การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น

การวิเคราะห์โครงสร้างเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักที่กระทำกับการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง หรือเพื่อหาการเคลื่อนที่และหน่วยแรงที่แน่นอนเมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำ จำเป็นต้องพิจารณาถึงความสมดุลและสอดคล้องในตำแหน่งที่โครงสร้างเกิดการเคลื่อนที่ไปแล้ว ซึ่งวิธีการส่วนมากที่ใช้ในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นนี้ เป็นการใช้อนุกรมของการวิเคราะห์เชิงเส้น (Linear Analysis) ที่ให้ผลใกล้เคียงกับความเป็นจริง

ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่กับน้ำหนักที่กระทำ สามารถเขียนเป็นสมการในรูปของเมตริกซ์ ตามวิธีการรวมสติฟเนสโดยตรงได้เป็น

$$[K]\{D\} = \{R\} \tag{3.1}$$

เมื่อ $[K]$ เป็นสติฟเนสเมตริกซ์ของโครงสร้าง

$\{D\}$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง และ

$\{R\}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

สำหรับการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นจะพิจารณาผลของการเคลื่อนที่และแรงภายในที่เกิดขึ้น รวมอยู่ในการคำนวณหาสติฟเนสของโครงสร้าง แต่การคำนวณจะแตกต่างกันไปตามวิธีที่ใช้ ซึ่งวิธีที่นิยมใช้กันมีอยู่ 3 วิธีคือ

1. วิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct Iteration Method)
2. วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method)
3. วิธีเพิ่มทีละขั้น (Incremental Method)

1. <u>วิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct Iteration Method)</u>

เป็นวิธีทำซ้ำโดยใช้สติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นคอร์ด (Secant Stiffness, $[K_s]$) และการเคลื่อนที่ทั้งหมด (Total Displacements) โดยเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้เป็น

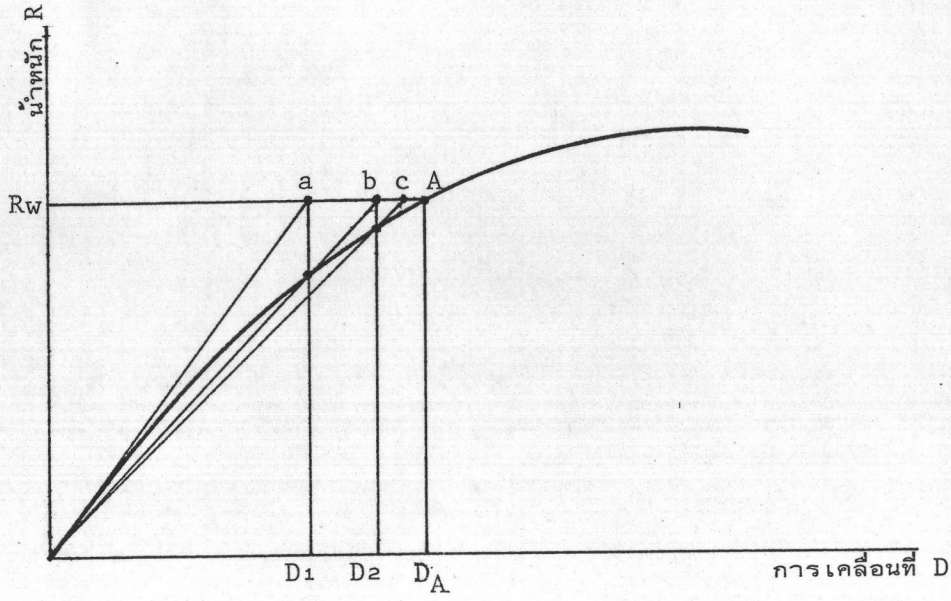
$$[K_s]_i \{D\}_{i+1} = \{R\} \qquad (3.2)$$

เมื่อ $[K_s]_i$ เป็นสติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นคอร์ดในรอบการทำซ้ำที่ i

$\{D\}_{i+1}$ เป็นการเคลื่อนที่ทั้งหมดของโครงสร้างที่คำนวณได้จากการใช้สติฟเนสในรอบที่ i และ

$\{R\}$ เป็นน้ำหนักทั้งหมดที่กระทำต่อโครงสร้าง

ซึ่งขั้นตอนในการคำนวณจะเริ่มต้นที่ $\{D\}_0 = 0$ หรือโครงสร้างยังไม่เกิดการเคลื่อนที่ ค่าสติฟเนสที่ได้จะเป็นค่าสติฟเนสเชิงเส้น และใช้คำนวณหาการเคลื่อนที่ $\{D\}_1$ ซึ่งค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นนี้จะทำให้ค่าสติฟเนสของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงไปเป็น $[K_s]_1$ และจะคำนวณหาค่าการเคลื่อนที่ $\{D\}_2$ ต่อไป ดังรูปที่ 3.1 และจะกระทำซ้ำกันไปจนกระทั่งสมการที่ (3.2) มีค่าเท่ากันทั้งสองข้างหรือใกล้เคียงกันภายในพิกัดที่กำหนด



รูปที่ 3.1 การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีทำซ้ำโดยตรง

2. <u>วิธีนิวตัน-ราฟสัน หรือ วิธีเส้นสัมผัส (Tangent Method)</u>

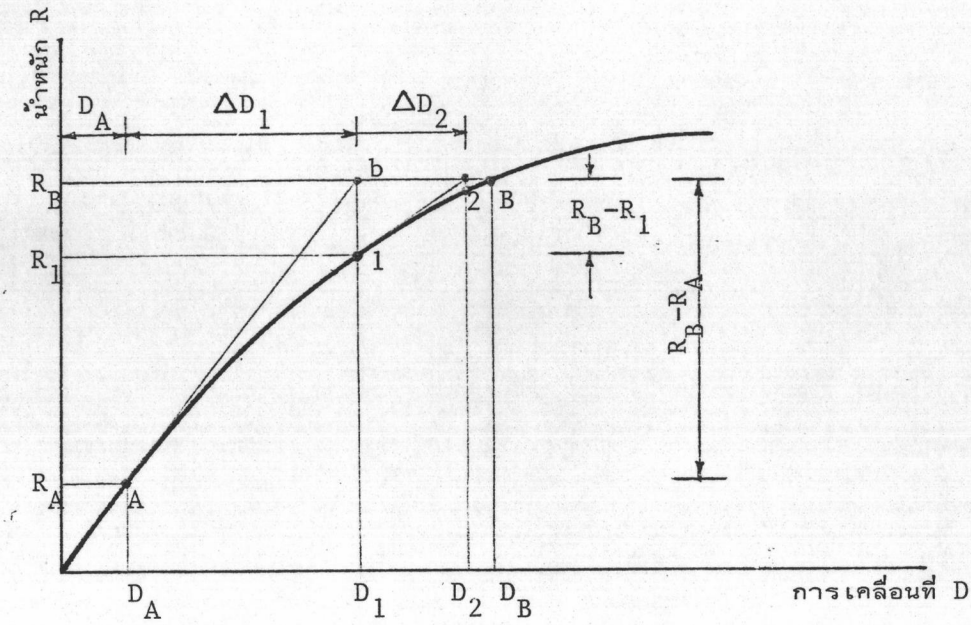
เป็นวิธีทำซ้ำเช่นเดียวกับวิธีแรกแต่ต่างกันที่ใช้สติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นสัมผัส (Tangent Stiffness, $[K_t]$) และ น้ำหนักที่ขาดการสมดุล โดยเขียนเป็นสมการรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$[K_t]_i \{\Delta D\}_{i+1} = \{\Delta R_c\}_i \qquad (3.3)$$

เมื่อ $[K_t]_i$ เป็นสติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นสัมผัสในรอบการคำนวณที่ i

$\{\Delta D\}_i$ เป็นการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้นของโครงสร้าง

$\{\Delta R_c\}_i$ เป็นน้ำหนักที่ขาดสมดุล ซึ่งเมื่อเริ่มต้นการคำนวณจะมีค่าเท่ากับน้ำหนักที่กระทำทั้งหมด ดังรูปที่ 3.2 เมื่อ i = 0 ค่าน้ำหนักที่ขาดสมดุลจะมีค่าเป็น $\{\Delta R_c\}_o = \{R_B\}-\{R_A\}$ และค่าสติฟเนสของโครงสร้างจะเป็นสติฟเนสเชิงเส้น ซึ่งสามารถคำนวณหาการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้น $\{\Delta D\}_i$ ได้ และจากการเคลื่อนที่นี้จะทำให้สติฟเนสของโครงสร้างเปลี่ยนแปลงไปและความสมดุลของโครงสร้างในตำแหน่งที่โครงสร้างเคลื่อนที่แล้วนี้จะเกิดการไม่สมดุลขึ้นด้วย ซึ่งในภาวะสมดุลในตำแหน่งนี้จะมีน้ำหนักกระทำเป็น $\{R_1\}$ นั่นคือน้ำหนักที่ขาดสมดุล $\{\Delta R_c\}_1 = \{R_B\} - \{R_1\}$ และจะกระทำซ้ำกันไปจนกระทั่งค่าน้ำหนักที่ขาดสมดุลนี้มีค่าน้อยมาก สำหรับค่าการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นทั้งหมด จะมีค่าเท่ากับผลรวมของการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้นทั้งหมด นั่นคือ



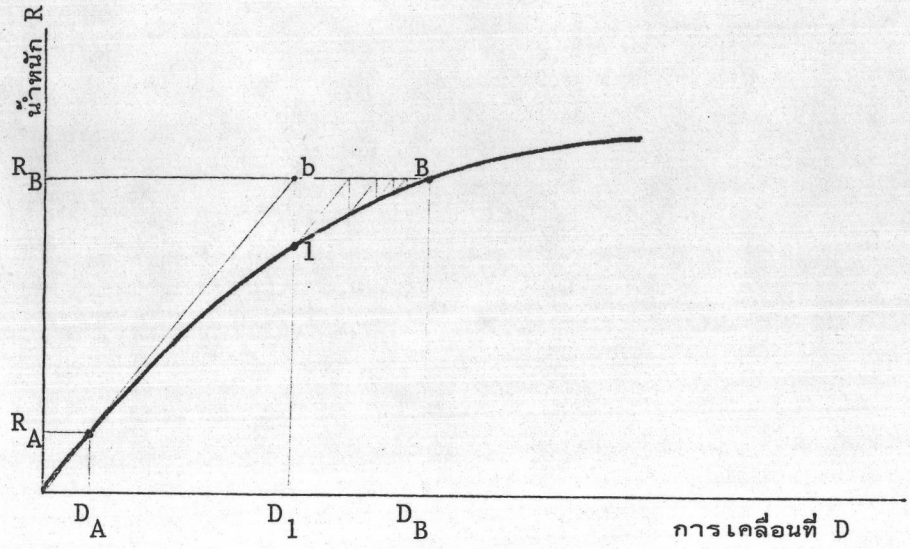
รูปที่ 3.2 การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน ราฟสัน

$$D_B = D_A + \Delta D_1 + \Delta D_2 + ...$$

วิธีนิวตัน-ราฟสันนี้ จำเป็นต้องคำนวณหาสติฟเนสของโครงสร้างทุกรอบที่มีการคำนวณทำให้ต้องใช้เวลามาก จึงมีการปรับปรุงวิธีนิวตัน ราฟสัน โดยการใช้ค่าสติฟเนสให้คงที่ตลอดการคำนวณซึ่งสามารถลดการคำนวณหาสติฟเนสในแต่ละรอบได้ ดังรูปที่ 3.3 แต่จะใช้จำนวนรอบในการคำนวณที่มากกว่า

3. <u>วิธีเพิ่มทีละขั้น หรือ วิธีทำทีละขั้น (Step by Step Method)</u>

เป็นวิธีวิเคราะห์โดยการแบ่งน้ำหนักที่กระทำให้ค่อย ๆ กระทำต่อโครงสร้างทีละน้อยจนถึงน้ำหนักที่ต้องการ และในการคำนวณแต่ละขั้น จะมีการคำนวณหาสติฟเนสของโครงสร้างจากตำแหน่งที่เกิดการเคลื่อนที่แล้ว ซึ่งค่าสติฟเนสของโครงสร้างจะเปลี่ยนไปตามการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นดังรูปที่ 3.4 ถ้าไม่มีการคำนวณความสมดุลของแรงที่กระทำที่ข้อต่อของโครงสร้างจะให้ผลลัพธ์ตามเส้น AXY แต่ถ้ามีการคำนวณความสมดุลของแรงที่ข้อต่อตามวิธีนิวตัน ราฟสัน จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงมากขึ้น ดังเช่นตำแหน่ง A B และ C ในรูปที่ 3.4 ซึ่งคำนวณโดยใช้วิธีเพิ่มทีละขั้น และในแต่ละขั้นใช้วิธี นิวตัน - ราฟสัน ในการปรับความสมดุลของแรงที่ข้อต่อ (Incremental with Newton - Raphson correction) ซึ่งการคำนวณดังกล่าวสามารถเขียนเป็นสมการเมตริกซ์ได้เป็น



รูปที่ 3.3 การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีนิวตัน ราฟสัน ที่ปรับปรุงใหม่

014371

$$[K_t]_i \{\Delta D\}_{i+1} = \{\Delta R\}_{i+1} + \{\Delta R_c\}_i \qquad (3.4)$$

เมื่อ $[K_t]_i$ เป็นสติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นสัมผัส

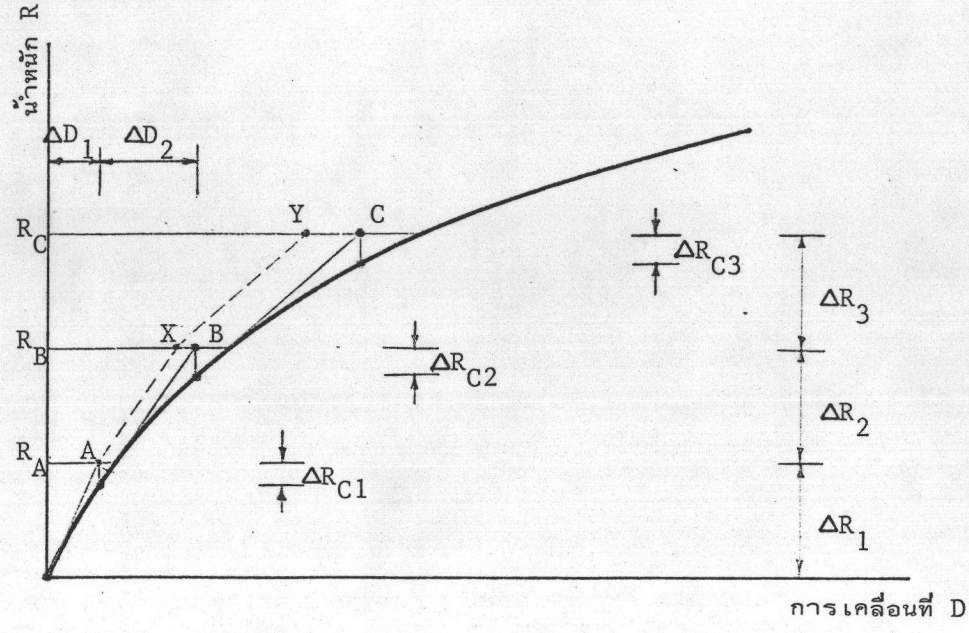
$\{\Delta D\}_{i+1}$ เป็นค่าการเคลื่อนที่ที่เพิ่มขึ้นของโครงสร้าง

$\{\Delta R\}_{i+1}$ เป็นน้ำหนักภายนอกที่กระทำเพิ่มขึ้น

$\{\Delta R_c\}_i$ เป็นน้ำหนักที่ขาดสมดุล

ซึ่งสมการที่ 3.4 นี้เมื่อไม่มีน้ำหนักภายนอกกระทำเพิ่มขึ้น ($\{\Delta R\} = 0$) จะมีค่าเท่ากับสมการที่ 3.3

วิธีการทั้งสามนี้เป็นวิธีที่นิยมใช้กันในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น ซึ่งในการวิจัยนี้เลือกใช้วิธีเพิ่มทีละขั้นที่มีการทำซ้ำด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันในแต่ละขั้นของน้ำหนักที่กระทำ ตามสมการที่ 3.4 โดยที่ค่าสติฟเนสของโครงสร้างจากเส้นสัมผัสคำนวณได้ตามที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 และค่าน้ำหนักที่ขาดสมดุล เป็นค่าจากผลต่างของน้ำหนักที่กระทำกับผลรวมของแรงภายในของทุกชิ้นส่วนซึ่งคำนวณจากสมการที่ 2.5 และ 2.10 ในบทที่ 2 และแปลงพิกัดให้อยู่ในพิกัดของโครงสร้างเช่นเดียวกับน้ำหนักที่กระทำ



รูปที่ 3.4 การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นด้วยวิธีเพิ่มทีละขั้น

ความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้

ในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นที่มีการทำซ้ำไม่ว่าจะด้วยวิธีทำซ้ำโดยตรง หรือวิธีนิวตัน-ราฟสัน จำเป็นต้องกระทำซ้ำกันจนกระทั่งเทอมทั้งสองข้างของสมการมีค่าเท่ากัน ซึ่งอาจจะต้องใช้เวลามาก หรืออาจจะเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ จึงจำเป็นต้องยอมให้มีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นบ้างแต่ไม่มากนัก ความคลาดเคลื่อนนี้มีการตรวจสอบได้ 2 ทางคือ ตรวจสอบจากค่าการเคลื่อนที่ และตรวจสอบจากค่าน้ำหนักที่ขาดสมดุล โดยทั่วไปคำนวณโดยใช้ค่ายูคลิเดียนนอร์ม (Euclidean Norm) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(\Sigma \Delta D_i^2/\Sigma D_i^2)^{1/2}$ สำหรับการตรวจสอบจากค่าการเคลื่อนที่ และ $(\Sigma \Delta R_{ci}^2/\Sigma \Delta R_i^2)^{1/2}$ สำหรับการตรวจสอบจากค่าน้ำหนักที่ขาดสมดุล และจะต้องมีค่าต่ำกว่าพิกัดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ซึ่งปกติแล้วค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมให้เกิดขึ้นได้นี้จะมีค่าระหว่าง 10^{-2} ถึง 10^{-6} ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความถูกต้องที่ต้องการ ถ้ากำหนดค่าให้ต่ำมากก็จะได้คำตอบที่ถูกต้องมากยิ่งขึ้น