

AN ANALYTICAL STUDY OF THE GENERALIZED  
BINOMIAL THEOREM USING GAMMA FUNCTIONS  
IN THE SERIES COEFFICIENTS

(การศึกษาแบบอนาลิติกของทฤษฎีทวินาม เมื่อใช้แกมมาฟังก์ชันในอนุกรมสัมประสิทธิ์)

by

Nuanchan Intaravichra

B.Sc. (Hons.) Chulalongkorn University, 1968

006970

Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the

Degree of Master of Science

in

The Chulalongkorn University Graduate School

Department of Mathematics

March, 1970

(B.E. 2513)

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn  
University in partial fulfillment of the requirements for  
the Degree of Master of Science.

T. Nitavithi

Dean of the Graduate School

Thesis Committee

..... Prabhat Vairablaya Chairman

..... R.B. Zell

..... Surasit Kaysama

..... Somsorn Palang

Thesis Supervisor Dr. R.H.B. EXELL.

Date March, 17 th, 1970.

## ABSTRACT

The binomial coefficients  ${}^n C_r$  which are defined for integral values of  $n$  and  $r$ , may be represented by gamma functions thus :

$${}^n C_r = f(r,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}.$$

The function  $f(r,n)$  is defined at all points of the  $r,n$  - plane except on the singular lines  $n = -1, -2, -3, \dots$ . The singularities of  $f(r,n)$  at the lattice points of the  $r,n$  - plane may be removed along the straight lines through the lattice points. But the values of  $f(r,n)$  at the lattice points required to remove the singularity depends on the slope of the line. The singularities cannot be removed between the lattice points on the singular lines.

In the fourth quadrant, the formula for removing the singularities is

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(r+\epsilon, -k+m\epsilon) = (-1)^r {}^{k+r-1} C_r \left(1 - \frac{1}{m}\right),$$

where  $k$  is a positive integer,  $r$  is a non-negative integer, and  $m$  is the slope of the line. In the third quadrant, we have two formulas:

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(-j+\epsilon, -k+m\epsilon) = \begin{cases} (-1)^{j-k} {}^{j-1} C_{k-1} \left(\frac{1}{m}\right), & \text{where } j \geq k \\ 0, & \text{where } j < k. \end{cases}$$

and both  $j$  and  $k$  are positive integers.

Pascal 's rule  $f(r,n)+f(r+1, n) = f(r+1, n+1)$

is shown to hold for all non-singular points  $(r,n)$  and for the singular lattice points provided a constant value of  $m$  is used to remove the singularities.

It is further shown that the binomial series generated by the coefficients at the singular lattice points is convergent only when  $m$  equals 1 or  $\infty$

Three-dimensional graphs are depicted to show the binomial coefficients at the lattice points, and the shape of the function  $f(r,n)$  in the region  $-1 \leq r \leq +1, -1 < n \leq +1$ .

## บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์เรื่องนี้ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับค่า  ${}^n C_r$  ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของกาอรรกระจายแบบทวินาม โดยการนำแกมมาฟังก์ชันมาเกี่ยวข้องกับตัว ดังนี้

$${}^n C_r = f(r,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)}$$

จากสูตรใหม่นี้ เราไม่สามารถหาลงฟังก์ชัน  $f(r,n)$  ณ จุดที่อยู่บนเส้น **Singular lines** ได้คือ บนเส้น  $kn = -1, -2, -3, \dots$  เหตุการณ์เช่นนี้ เราเรียกว่าเกิด **Singularity**

การเกิด **Singularity** บนจุดแลตทิซ (**lattice Points**) สามารถแก้ไขได้ โดยการหาค่าลิมิต ของฟังก์ชันความแนวเส้นตรงที่ลากผ่านจุดนั้น ซึ่งค่าลิมิตนี้จะขึ้นอยู่กับค่าความชันของเส้นตรงที่ลากผ่าน แต่เราไม่สามารถจะหาค่าลิมิต ของฟังก์ชัน ณ จุดที่อยู่ระหว่างจุดแลตทิซสองจุดได้

สูตรสำหรับหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน แบ่งออกเป็นสองส่วน คือ จุดที่อยู่ใน **quadrant** ที่ ๔ มีสูตรเป็น

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(r+\epsilon, -k+m\epsilon) \\ = (-1)^r {}^{k+r-1} C_r \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

เมื่อ  $k$  เป็นเลขจำนวนเต็มบวก,  $r$  เป็นเลขจำนวนเต็มบวกและ  $0$ ,  $m$  เป็นค่าความชันของเส้นตรง ส่วนจุดที่อยู่ใน **quadrant** ที่ ๓ จะมีสูตรเป็น

$$f(r,n) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(-j+\epsilon, -k+\epsilon)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{j-k} j^{-1} C_{k-1} \left( \frac{j}{m} \right) & j \geq k \\ 0, & j < k \end{cases}$$

เมื่อ  $j$  และ  $k$  เป็นเลขจำนวนเต็มบวกทั้งคู่  
 นอกจากจะหาค่าลิมิตของฟังก์ชันใด ๆ จุด Singular lattice points  
 แล้ว ยังแสดงให้เห็นว่าค่าของฟังก์ชัน บนจุดต่าง ๆ บนพื้นราบ  $(r,n)$  จะลดลงตามกฎของ  
 Pascal (Pascal's rule): เสมอ นั่นคือ

$$f(r,n) + f(r+1, n) = f(r+1, n+1)$$

แม้ว่าจุดนั้นจะเป็นจุด Singular lattice points ก็ตาม

ความรู้ที่ได้อีกอย่างหนึ่งคือ ถ้าเราใช้ความชันของเส้นตรงเท่ากับ 1 หรือ  $\infty$   
 และใช้ค่าลิมิตของฟังก์ชันที่ได้ประกอบกันเป็นอนุกรมทวินาม เราจะได้อนุกรมชนิดคู่เข้า  
 แล้วถ้าเราใช้ค่า  $m$  อื่น ๆ นอกจากสองค่านี้แล้ว เราจะได้อนุกรมชนิดคู่ออกเสมอ

ในบทสุดท้าย ได้แสดงภาพนิคสามมิติ ของค่าสัมประสิทธิ์ทวินาม ณ จุด  
 Singular lattice Points โดยการใช้ความชันเท่ากับ 1 และ  $\infty$   
 และภาพของค่าสัมประสิทธิ์ทวินามในบริเวณใกล้จุดกำเนิด (origin)

## ACKNOWLEDGEMENTS

I have much pleasure in expressing here my gratitude to the following persons.

Dr. R.H.B. Exell, my thesis supervisor, for his kindness and generous help with instruction and many ideas at all times, and also for writing the program mentioned in Chapter IV.

Mrs. Wanida Israngkul Na Ayudhya, for lending me her thesis of which this thesis is the extended work.

## TABLE OF CONTENTS

	Page
ABSTRACT .....	iii
ACKNOWLEDGEMENTS .....	v
LIST OF FIGURES .....	viii
CHAPTER	
I    INTRODUCTION .....	1
II   THE BINOMIAL COEFFICIENT FUNCTION ON THE SINGULAR LINES .....	3
2.1 The Singularity in $f(r, n)$ at the Lattice Point $(3, -4)$ .....	3
2.2 The Nature of $f(r, n)$ at any Singular Lattice Point.....	5
2.3 The Nature of $f(r, n)$ between the Lattice Points on the Singular Lines .....	10
III  PASCAL'S RULE AND THE GENERAL BINOMIAL SERIES .....	12
3.1 Generalization of Pascal's Rule	12
3.2 The Convergence of the General Binomial Series .....	14



IV THE GRAPH OF THE BINOMIAL COEFFICIENT FUNCTIONS IN THREE DIMENSIONS.....	18
4.1 The Graph of $f(r, n)$ Using $m = \infty$ in the Eliminating of the Singularities.....	18
4.2 The Graph of $f(r, n)$ Using $m = 1$ in the Eliminating of the Singularities .....	21
4.3 The Graph of $f(r, n)$ in the Neighbourhood of the Origin .....	23
BIBLIOGRAPHY .....	27

## LIST OF FIGURES

Figure	Page
1. Limit of $f(r,n)$ as $(r,n) \rightarrow (3, -4)$ along Straight Lines with various Slopes.....	4
2. The Values of the Limit of $f(r,n)$ at Lattice Points in the Fourth Quadrant.....	5
3. The Values of the Limit of $f(r,n)$ at the Lattice Points in the Third Quadrant in Case I .....	7
4. The Values of the Limit of $f(r,n)$ at the Lattice Points in the Third Quadrant in Case II .....	8
5. The Values of the Limit of $f(r,n)$ at the Lattice Points taken along the Lines with Slope $\frac{1}{2}$ .....	9
6. The Values of the Limit of $f(r,n)$ on the Lattice Points $(r, -1)$ .....	14
7. The Values of the Binomial Coefficient Function on the Lattice Points of the $(r,n)$ Plane using $m = \infty$ .....	19
8. The Graph of $f(r,n)$ using $m = \infty$ in the Eliminating of the Singularities .....	20
9. The Values of the Binomial Coefficient Function on the Lattice Points of the $(r,n)$ Plane using $m = 1$ .....	21

Figure	Page
10. The Graph of $f(r,n)$ using $m = 1$ in the Eliminating of the Singularities .....	22
11. The Graph of $f(r,n)$ in the Neighbourhood of the Origin .....	26