ROTATION IN FOUR DIMENSIONS

การหมุนในสี่มิติ

by

Peamsri Tusovan

B.Sc., Chulalongkorn University, 1965

006992

Thesis

Submitted in partial fulfilment of requirements for the

Degree of Master of Science

in

The Chulalongkorn University Graduate School

Department of Mathematics

April , 1970

(B.E. 2513)

118361304

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of master of Science.

T. Nilanidhi

.....

Dean of the Graduate School

Thesis Committee .....K. Na Sylvanta..... Chairman

.....R.H.B. Exell.....

.....C. Ingkaninan.....

.....

Thesis Supervisor Dr. R.H.B. Exell

Date 14th April 1970

ABSTRACT

Thesis Title : Rotations in Four Dimensions

The aim of this thesis is to study the properties of quaternions, orthogonal transformations, and geometrical rotations in two, three and four dimensions, and to find their relationships. A quaternion is a special type of hypercomplex number which contains four basis elements. The quaternion equation $q' = p.\ q.\ \bar{p}$, where p is a constant quaternion, $\bar{p}$ is the conjugate value of p, and q', q are pure vectorial quaternions, represents an orthogonal transformation in three dimensions. The quaternion equation $q' = p.\ q.\ \bar{\bar{\pi}}$, where p and $\bar{\bar{\pi}}$ are two constant quaternions, transform the quaternion q into the quaternion q'. This transformation represents an orthogonal transformation in four dimensions. These orthogonal transformations represent geometrical transformations. In three dimensional space the rotation is described by Euler's angles. In this thesis the mathematical relationship between the elements of the quaternions and Euler's angles is calculated. Similar results are also found for rotations in four dimensions.

บทคัดย่อ

การหมุนในสี่มิติ

ความมุ่งหมายของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เพื่อจะศึกษาคุณสมบัติและหาความสัมพันธ์ของ quaternion , การแปลงแบบ orthogonal, และการหมุนแบบเรขาคณิตใน สอง, สาม, และสี่มิติ quaternion เป็นจำนวนเลขประเภท hypercomplex ที่มี basis element ในสามมิติสมการ quaternion ที่แทนการแปลงแบบ orthogonal คือ $q' = p.q.\bar{p}$ เมื่อ p เป็น quaternion ที่คงที่ $\bar{p}$ เป็นค่า conjugate ของ quaternion p , q',q เป็น quaternion ที่มีแต่ ส่วนที่เป็น vector สมการ quaternion $q' = p.q.\bar{p}$ เมื่อ p และ $\bar{p}$ เป็น quaternion ที่คงที่ จะแปลง quaternion q ให้เป็น quaternion q' การแปลงนี้จะแทนการแปลงแบบ orthogonal ในสี่มิติ การแปลงทั้งสองที่กล่าวถึงนี้จะแทน การแปลงแบบเรขาคณิตได้ด้วย ในสามมิติการหมุนจะบอกได้ด้วย Euler's angles ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้หาความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่าง element ของ quaternion และ Euler's angles และผลที่คล้ายกันนี้ได้หาได้จากการหมุนใน สี่มิติ

ACKNOWLEDGEMENTS

I wish to express here my gratitude to Dr.R.H.B. Exell , my thesis supervisor, who has generously provided the advice and assistance not only in mathematical ideas but also in English usage which made this thesis possible.

I also wish to express my gratitude to all my lecturers who taught me in the undergraduate and graduate courses at Chulalongkorn University.

Peamsri Tusovan

TABLE OF CONTENTS

Page

ABSTRACT iii

ACKNOWLEDGEMENTS iv

CHAPTER I : EULER'S ANGLES AND THE QUTERNIONS 1

1.1 EULER'S ANGLES 1

1.2 THE QUATERNIONS 3

1.3 THE RELATION BETWEEN EULER'S ANGLES AND THE QUATERNIONS ... 4

CHAPTER II : THE GEOMETRICAL ROTATIONS IN TWO, THREE AND FOUR DIMENSIONS 16

CHAPTER III : THE ORTHOGONAL TRANSFORMATIONS AND THE QUATERNION EQUATIONS 21

3.1 THE QUATERNION EQUATION $q' = p.q.\bar{p}$ WHERE $|p| = 1$ REPRESENTS AN ORTHOGONAL TRANSFORMATION IN THREE DIMENSIONS 21

3.2 THE QUATERNION EQUATION $q' = p.q.\bar{\pi}$ WHERE $|p| = |\bar{\pi}| = 1$ REPRESENTS AN ORTHOGONAL TRANSFORMATION IN FOUR DIMENSIONS 24

CHAPTER IV : THE QUATERNIONS REPRESENT A GEOMETRICAL ROTATION IN FOUR DIMENSIONS. 26