รายการอ้างอิง

<u>ภาษาไทย</u>

ชูเกียรติ วิเชียรเจริญ. กรกฎาคม 2531. งานรังวัดดาวเทียม : ระบบการทำงานรังวัดในอนาคต. <u>งาน 8 รอบเจ้าคุณศิลฯ</u> : (งานสดุดีเทอดเกียรติศาสตราจารย์พลโทพระยาศัลวิธารนิเทศ)

ชูเกียรติ วิเชียรเจริญ. 2532. <u>จีพีเอสเบื้องต้น</u>. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ภุชงค์ วงษ์เกิด. 2525. <u>การปรับแก้โครงข่ายระดับของประเทศไทยพร้อมกันทั้งโครงโดยวิธีการของลีสท์สแควร์</u>. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาวิศกรรมสำรวจ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วัชราภรณ์ สุริยาภิวัฒน์. 2529. <u>สถิติเบื้องต้นและการวิเคราะห์ข้อมูลทางวิทยาศาสตร์</u>. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วิชา จิวาลัย. 2524. <u>Adjustment Computations</u>. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาวิศวกรรมสำรวจ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

<u>ภาษาอังกฤษ</u>

Harvey, B.R. 1986. Transformation of 3D CO-Ordinates. <u>The Australian Surveyor</u>. 33: 105-125.

King,W.G., Masters, E.G., Rizos,C., Stolz, A., and Collins,J., 1987 <u>Survey with GPS</u>. Ferd. Dummlers,Bonn

Mikhail, E.M., 1976. <u>Observations and least squares</u>. New york : Harper & Row publishers.

Sombat Subsuantaeng. 1990. A PC-bases GPS data processing software package. Master's Thesis, University of N.SW.

Wells, D. Guide to GPS positioning. Canadian : GPS Associates.

Knight, W. December 1974. Partial solution of the variance-covariance matrix for geodetic network. The Canadian Surveyor 28 :686-689

"Variance-covariance matrix," 20 Jan 1987. Scher-3388

Vincenty, T. 1980. Height-controlled three -dimensional adjustment of horizontal networks. Bull. Geod. 54 : 37-43

Vincenty, T. 1982. Method of adjusting space systems data and terrestrial measurements. Bull. Geod. 56 : 231-241

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีการปรับแก้โครงข่าย GPS ด้วยวิธีลีสท์สแควร์

กล่าวนำ

ทฤษฎีการคำนวณปรับแก้ที่ปรากฏข้างล่างนี้ สรุปและรวบรวมจาก วิชา จิวาลัย(2524)

การคำนวณปรับแก้ไม่ว่าจะเป็นกรณีใด ๆ ก็ตามจะมีความหมายก็ต่อเมื่อมีข้อมูลมากกว่าจำนวนต่ำสุดที่จำเป็น (redundant observations) โดยทั่วไปแล้วค่าที่แท้จริงของปริมาณใด ๆ ไม่สามารถที่จะทราบได้ ดังนั้นในทางปฏิบัติจึงต้องอาศัยวิธีการวัด (measurement) หรือการสังเกต (observations) จะโดยตรงหรือโดยอ้อมก็ตามเพื่อใช้คาดคะเนหรือคำนวณหาปริมาณที่ต้องการทราบ ข้อมูลที่ได้มาดังกล่าวย่อมเปลี่ยนแปลงหรือขึ้น ๆ ลง ๆ (fluctuate) ได้ตามทฤษฎีของความน่าจะเป็นและสถิติ ซึ่งเรียกว่า "ความคลาดเคลื่อน" (errors)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือระบบทางทฤษฎีหรือมโนทรรศน์ทางนามธรรมที่ใช้แทนหรือบรรยายสถานะทางกายภาพ หรือปรากฏการณ์ โดยที่ไม่จำเป็นต้องสมบูรณ์เสมอไปแต่จะต้องสัมพันธ์กับแง่มุมหรือคุณสมบัติที่กำลังพิจารณาอยู่ แบบจำลองหนึ่ง ๆ จะตอบสนองวัตถุประสงค์เฉพาะปัญหาที่พิจารณาอยู่ ซึ่งสถานะทางกายภาพที่เหมือนกันอาจจะถูกแทนด้วยแบบจำลองที่ไม่เหมือนกัน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มักแยกออกได้เป็น 2 ส่วน คือ

1. ฟังก์ชันนอลโมเดล (Functional model) จะพรรณนาถึงคุณสมบัติที่สามารถทราบได้แน่นอน (deterministic properties) ของสถานะทางกายภาพ หรืออุบัติการณ์ที่พิจารณาอยู่

2. สโตคาสติคโมเดล (Stochastic model) จะพรรณนาถึงคุณสมบัติของส่วนที่ทราบได้ไม่แน่นอน (nondeterministic or stochastic or probabilistic

properties) ของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเป็นค่าที่วัดหรือสังเกตได้

ก่อนที่จะวางแผนเพื่อสังเกตหรือวัดค่าจะต้องกำหนดฟังก์ชันนอลโมเดลของระบบนั้น ๆ เสียก่อน ซึ่งจะหาได้โดยอาศัยตัวแปรจำนวนหนึ่ง (อาจเป็นพารามิเตอร์หรือค่าสังเกตหรือทั้งสองอย่างผสมกัน) และความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเหล่านั้น

แบบจำลองใด ๆ ที่เลือกมานั้นจะนำไปสู่จำนวนตัวแปรต่ำสุดจำนวนหนึ่งซึ่งแทนด้วยปริมาณ n_o ถ้าแทนจำนวนค่าสังเกตด้วย n ซึ่งเป็นค่าที่อิสระต่อกันคือ จะต้องไม่มีค่าสังเกตค่าใดค่าหนึ่งที่สามารถหาได้จากค่าสังเกต ($n-1$) ค่าที่เหลือ เมื่อ n มีขนาดใหญ่กว่า n_o จะมีข้อมูลเกินมา (redundancy) จึงจำเป็นต้องมีการปรับแก้เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นเอกภาพสำหรับเซ็ทของค่าคาดคะเนของตัวแปรในแบบจำลองนั้น ๆ ซึ่งในกระบวนวิธีการปรับแก้ทั้งหลายนั้น "วิธีลีสท์สแควร์" เป็นวิธีที่แพร่หลายในงานวิศวกรรมสำรวจและสาขาอื่น ๆ

บริมาณของข้อมูลที่เกินมาจะแทนด้วย r

โดยที่ $r = n - n_o$ (ก-1)

และมีค่าเท่ากับลำดับชั้นของความเป็นอิสระ (degree of freedom)

<u>หลักการของลีสท์สแควร์</u> (The Least Squares Principle)

ให้เซ็ทของค่าสังเกตที่ได้มาแทนด้วยเวคเตอร์ L_b และเป็นกลุ่มที่ประกอบด้วยจำนวนต่ำสุดที่จำเป็น ซึ่งหลังจากการปรับแก้แล้วจะได้เซ็ทของค่าคาดคะเน (estimates) ที่แทนด้วยเวคเตอร์ L_a ที่สอดคล้องกับแบบจำลอง โดยที่ผลต่างของทั้งสองเซ็ทคือ

$$V = L_a - L_b$$

ซึ่งมีชื่อเรียกว่า "residual" หรือ เศษคงเหลือ

โดยทั่วไปแล้วหลักการของลีสท์สแควร์จะพยายามทำให้ค่าคาดคะเน L_a ใกล้เคียงกับค่าสังเกต L_b ให้มากที่สุดโดยคำนึงถึงคุณสมบัติทางสโตคาสติค (สถิติ) ซึ่งพิจารณาแล้วมีทางที่จะเป็นไปได้คือ ค่าสังเกตที่ได้มาย่อมเป็นข้อมูลที่ดีที่สุด ฉะนั้นถ้าหากเกิดการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับ L_b จนเป็นเหตุให้เกิดความเข้ากันไม่ได้กับแบบจำลองแล้วค่าสังเกตที่เกินมาก็ควรมีขนาดเล็กที่สุดเท่าที่จะเป็นได้ และเมื่อถึงจุดที่ $r = 0$ แล้ว L_a จะเท่ากับ L_b และเศษคงเหลือทั้งหมดก็จะเป็นศูนย์

หลักการของลีสท์สแควร์คือ

$$\emptyset = V^{T}PV \rightarrow \text{minimum} \quad (ก-2)$$

โดยที่ $P = Q_{Lb}^{-1}$ หรือ Σ_{Lb} เป็นเมตริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (weight matrix of the observations) โดย Q เป็นโคแฟคเตอร์เมตริกซ์ และ Σ เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวน

เมื่อค่าสังเกตไม่มีสหสัมพันธ์กัน จะมีผลให้เมตริกซ์น้ำหนักมีโครงสร้างเป็นเมตริกซ์ทะแยงมุม (diagonal matrix) ซึ่งจะทำให้สมการ (ก-2) เป็น

$$\emptyset = \sum_{i=1}^{n} (P_i V_i^2) \rightarrow \text{minimum} \quad (ก-3)$$

โดยที่ P_i เป็น diagonal element ที่ i ของเมตริกซ์ P

V_i เป็นเศษคงเหลือของค่าสังเกตตัวที่ i ซึ่งสอดคล้องกัน

และในกรณีที่ค่าสังเกตไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกันแล้วยังมีน้ำหนักเท่ากันด้วย (ความถูกต้องเท่ากัน) จะทำให้ P กลายเป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ (I) ซึ่งจะทำให้สมการ (ก-2) ลดรูปเป็น

$$\emptyset = \sum_{i=1}^{n} (V_i^2) \rightarrow \text{minimum} \quad (ก-4)$$

หลักการของลีสท์สแควร์ดังที่กล่าวมา ไม่จำเป็นต้องทราบรูปแบบของการแจกแจงทางสถิติ สิ่งที่จำเป็นต้องทราบเป็นเพียงเมตริกซ์ P ของค่าสังเกต หรือ cofactor matrix Q ในกรณีที่ค่าสังเกตมีการแจกแจงปกติ ค่าคาดคะเนที่ได้จากลีสท์สแควร์จะมีคุณสมบัติบางประการ เช่น จะเป็นค่าเดียวกับที่ได้จาก "method of maximum likelihood"

<u>เทคนิคของลีสท์สแควร์</u> (The Techniques of Least Squares)

จุดเริ่มต้นที่เป็นแนวคิดพื้นฐานของการปรับแก้คือ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical model) ซึ่งจะเป็นแนวทางในการเลือกวิธีการคำนวณและความเหมาะสมจากเทคนิคของลีสท์สแควร์รูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง การคำนวณของลีสท์สแควร์จะให้ค่าคาดคะเนใหม่ของตัวแปรทั้งหมดของแบบจำลองพร้อม ๆ กับเมตริกซ์ของโคแฟคเตอร์ หรือของความแปรปรวนของค่าใหม่ นอกจากนี้แล้วจะต้องมีการประเมินผลทางสถิติของค่าที่ได้มา ในบางครั้งอาจนำไปสู่การปรับปรุงแบบจำลองใหม่ และปรับแก้ใหม่ได้ ถ้าหากพบว่าแบบจำลองเดิมไม่เหมาะสมทั้งนี้ขึ้นอยู่กับเหตุผลหลาย ๆ ด้านที่จะต้องพิจารณาอย่างรอบคอบ

ในแบบจำลองนอกเหนือจากมีค่าสังเกตแล้วยังมีกลุ่มของตัวแปรอื่น ซึ่งเป็นปริมาณสโตคาสติคที่เรียกว่า "พารามิเตอร์" (Parameters) ซึ่งจะเป็นตัวไม่ทราบค่าในตอนเริ่มต้นแต่การปรับแก้จะนำไปสู่ค่าคาดคะเนของแต่ละตัวพร้อมด้วยคุณสมบัติทางสถิติ จำนวนพารามิเตอร์ที่ปรากฏในการปรับแก้จะแทนด้วยอักษร u โดยเวคเตอร์ $X_{u,1}$ จะแทนพารามิเตอร์เหล่านั้น

หลังจากสร้างแบบจำลองแล้วเทคนิคของวิธีการทางลีสท์สแควร์จะดำเนินการกับเซ็ทของฟังก์ชัน หรือสมการทางคณิตศาสตร์ที่พรรณาถึงแบบจำลองของปัญหาตามลักษณะของสมการ เช่น สมการที่มีค่าสังเกตล้วน ๆ เรียกว่า "สมการสภาวะ" (Condition Equations) สมการที่มีค่าสังเกตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์เรียกว่า "สมการค่าสังเกต" (Observation Equations)

<u>วิธีการปรับแก้</u>

<u>แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการค่าสังเกต</u>

มีลักษณะดังนี้

$$L_a = F(X_a)$$

สมการเชิงเส้น $V = AX + L \; ; \; A = \partial F/\partial X \, ,$ (ก-5)

$$L_a = L_b + V \, ,$$

$$L = F(X_o) - L_b$$

สมการนอร์แมล $NX + U = 0 \; ; \; N = A^T PA \, , \; U = A^T PL$

$$X = -N^{-1}U$$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

เป็นวิธีการปรับแก้ที่มีค่าสังเกตเพียงค่าเดียวในแต่ละสมการ โดยค่าสังเกตเป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ดังนั้นจะมีจำนวนสมการทั้งสิ้นในแบบจำลอง n สมการ

<u>แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการเงื่อนไข</u>

มีลักษณะดังนี้

$$F(L_a) = 0$$

สมการเชิงเส้น $BV + W = 0 \; ; \; B = \partial F/\partial L_a \, ,$ (ก-6)

$$W = F(L_b)$$

สมการนอร์แมล $PV - B^TK = 0$

$$BV + W = 0$$

เวคเตอร์ของ Lagrange multiplier $K = -M^{-1}W$; $M = BP^{-1}B^T$

$$V = P^{-1}B^TK$$

ค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว $L_a = L_b + V$

เป็นวิธีการปรับแก้ที่ระบุว่านอกจากค่าคงที่ (Constant) แล้วแต่ละสมการจะมีแต่เฉพาะค่าสังเกตปรากฏอยู่เท่านั้น แบบจำลองจะมีสมการอิสระทั้งสิ้น r สมการ มีจำนวนค่าสังเกต n ค่า

แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการทั่วไป

เป็นแบบจำลองที่รวมเอาวิธีของสมการค่าสังเกตและวิธีสมการเงื่อนไขเข้าด้วยกัน มีลักษณะดังนี้

$$F(L_a, X_a) = 0$$

สมการเชิงเส้น $BV + AX + W = 0$ (ก-7)

สมการนอร์แมล $-PV + B^TK_b = 0$

$$BV + AX = -W$$

$$A^TK_b = 0$$

เวคเตอร์ของ Lagrange multiplier $K_b = -M^{-1}(AX + W)$

$$V = P^{-1}B^TK_b$$

ค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว $L_a = L_b + V$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

เป็นวิธีการปรับแก้ที่มีค่าสังเกตและพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าอยู่ในสมการเดียวกันหลาย ๆ ตัว

ตารางที่ ก.1 การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์จากแบบจำลองเชิงคณิตที่ต่างกัน

Method	Math. Model	Number of Condition	Linear equation	Normal equations	Parameter Correlate Vector	A posteriori variance of unit weight	Cofactor matrix	Check compt.
Observation equations	$L_a = F(X_a)$	n	$V = AX+L$	$NX+U = 0$, $N = A^TPA$, $U = A^TPL$	$X = -N^{-1}U$	$V^TPV = X^TU+L^TPL$ $\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/(n-u)$	$Q_{Xa} = N^{-1}$ $Q_{La} = AN^{-1}A^T$	$A^TPV = 0$
Condition equations	$F(L_a) = 0$	n - u	$BV+W = 0$	$MK+W = 0$, $M=BP^{-1}B^T$	$K = -M^{-1}W$ $V = P^{-1}B^TK$	$V^TPV = -K^TW$ $\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/(n-u)$	$Q_{La} =$ $P^{-1}-P^{-1}B^TM^{-1}BP^{-1}$	$PV-B^TK$ $= 0$
General equations	$F(L_a, X_a) = 0$	r + u	$AX+BV+W = 0$	$-PV+B^TK_L = 0$ $BV+AX = -W$ $A^TK_L = 0$	$K_L = -M^{-1}(AX+W)$ $X = -N^{-1}U$ $V = P^{-1}B^TK_L$	$V^TPV = -K^TLW$ $\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/(c-u)$	$Q_{La} = P^{-1}-P^{-1}B^T$ $(M^{-1}-M^{-1}AN^{-1}A^Tm^{-1})BP^{-1}$ $Q_{Xa} = N^{-1}$	$A^TM^{-1}BV$ $= 0$

ภาคผนวก ข

การพิสูจน์สูตรการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์

กล่าวนำ

หลักการของลีสท์สแควร์

$$\varnothing = V^T PV \rightarrow \text{minimum} \qquad (ข-1)$$

การพิสูจน์สูตรการปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์ ทำได้ดังนี้

1. วิธีสมการค่าสังเกต (Observation equation)

แบบจำลองเชิงคณิต

$$L_a = F(X_a)$$

ให้ X_o เป็นค่าประมาณ (approximate values) ของพารามิเตอร์

X_a เป็นค่าของพารามิเตอร์หลังการปรับแก้

X เป็นค่าตรวจแก้ (correction) ของค่าประมาณของพารามิเตอร์

ดังนั้น จะได้ค่าต่างเป็น

$$X = X_a - X_o \qquad \text{หรือ} \qquad X_a = X_o + X$$

ให้ L_b เป็นปริมาณของค่าสังเกต

L_o เป็นปริมาณที่คำนวณได้จากค่าประมาณของพารามิเตอร์ X_o

L_a เป็นปริมาณของค่าสังเกตที่ปรับแก้แล้ว

ดังนั้น จะได้ค่าต่างเป็น

$$L = L_o - L_b$$

$$V = L_a - L_b \qquad \text{หรือ} \qquad L_a = L_b + V$$

แทนค่าในแบบจำลองเชิงคณิต จะได้

$$L_a = F(X_a)$$

$$L_b + V = F(X_o + X)$$

ทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยกระจายด้วยอนุกรมเทเลอร์

$$L_b + V = F(X_o) + \partial F/\partial X \Big|_{X=X_o} X$$

ให้ $L_o = F(X_o)$ และ $A = \partial F/\partial X$

$$L_b + V = L_o + AX$$

$$V = AX + (L_o - L_b)$$

$$V = AX + L \qquad (ข\text{-}2)$$

แทนค่า V ในสมการ (ข-1) จะได้

$$\begin{aligned} \emptyset = V^T PV &= (AX + L)^T P (AX + L) \\ &= (X^T A^T + L^T) P (AX + L) \\ &= X^T A^T PAX + X^T A^T PL + L^T PAX + L^T PL \qquad (ข\text{-}3) \end{aligned}$$

เมื่อ X และ L เป็นเวคเตอร์จะได้

$$X^T A^T PL = L^T PAX$$

ให้ $N = A^T PA$, $U = A^T PL$

ดังนั้นสมการ (ข-3) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\emptyset = V^T PV = X^T NX + 2X^T U + L^T PL \qquad (ข\text{-}4)$$

ฟังก์ชัน $\emptyset$ จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $\partial\emptyset/\partial X = 0$

จะได้ $\partial\emptyset/2\partial X = X^T N^T + U^T = 0$

หรือ $NX + U = 0 \qquad (ข\text{-}5)$

สมการ (ข-5) เรียกว่า สมการนอร์แมล (normal equation)

จากสมการ (ข-5) จะได้

$$X = -N^{-1}U$$

แทนค่า X ในสมการ (ข-4) จะได้

$$\begin{aligned} V^T PV &= (-N^{-1}U)^T N(-N^{-1}U) + 2(-N^{-1}U)^T U + L^T PL \\ &= (-N^{-1}U)^T (-NN^{-1}U+2U) + L^T PL \end{aligned}$$

$$= (-N^{-1}U)^TU + L^TPL$$

$$V^TPV = X^TU + L^TPL \tag{ข-6}$$

$$\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/(n-u) \tag{ข-7}$$

<u>การคำนวณหาโคแฟคเตอร์</u>

การหาความละเอียดของปริมาณต่าง ๆ ที่ได้หลังการปรับแก้จะอยู่ในรูปของโคแฟคเตอร์เมตริกซ์ หรือบางครั้งอยู่ในรูปเมตริกซ์ของความแปรปรวน ซึ่งหาได้จากกฎของการแพร่ (rule of propagation) ก่อนการปรับแก้สิ่งที่ทราบก่อนแล้วคือ เมตริกซ์น้ำหนัก P ซึ่งเป็นส่วนกลับของ Q หรือ Σ ดังนั้นการหาโคแฟคเตอร์ของปริมาณสโตคาสติคอื่น ๆ เช่น X, L_a, V ก็เริ่มจาก P^{-1} หรือ Q_{Lb} ได้ดังนี้

ความสัมพันธ์และสิ่งที่กำหนดให้

$$L_b = IL_b \qquad (QL_b = P^{-1})$$

$$L = L_o - L_b$$

$$X = -N^{-1}A^TPL$$

$$V = AX + L = (-AN^{-1}A^TP+I)L$$

$$L_a = L_b + V$$

อาศัยกฎของการแพร่สามารถหาโคแฟคเตอร์ต่าง ๆ ได้ดังนี้

<u>Autocofactor Matrices</u>

$$Q_L = Q_{Lb} = P^{-1}$$

$$Q_X = (-N^{-1}A^TP)\ Q_L\ (-N^{-1}A^TP)^T$$

$$= N^{-1}A^TPP^{-1}PAN^{-1}$$

$$= N^{-1}A^TPAN^{-1}$$

$$= N^{-1}NN^{-1}$$

$$= N^{-1}$$

$$Q_V = (-AN^{-1}A^TP+I)\ Q_L\ (-AN^{-1}A^TP+I)^T$$

$$= (-AN^{-1}A^TPP^{-1}+P^{-1})(-PAN^{-1}A^T+I)^T$$

$$= AN^{-1}A^TPAN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1}$$

$$= AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T - AN^{-1}A^T + P^{-1}$$
$$= P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$Q_{La} = Q_{Lb} + Q_V + Q_{LbV} + Q_{VLb}$$
$$= Q_{Lb} - Q_V \qquad (Q_{LbV} = Q_{VLb} = - Q_V)$$
$$= P^{-1} - (P^{-1} - AN^{-1}A^T)$$
$$= AN^{-1}A^T$$

2. <u>วิธีสมการเงื่อนไข</u> (Condition Equation)

แบบจำลองเชิงคณิต

$$L(L_a) = 0 \tag{ข-8}$$

หรือ $$F(L_b + V) = 0$$

แทนค่า L_a ในสมการ (ข-8) ด้วย L_b จะได้ค่าตัวเลขซึ่งมักจะไม่เป็นศูนย์เรียกว่า "ค่าคลาดบรรจบ" (misclosurse) แทนด้วย W จะได้

$$F(L_b) = W \tag{ข-9}$$

ทำสมการ (ข-8) ให้เป็นเชิงเส้นโดยการกระจายด้วยอนุกรมเทเลอร์

$$F(L_b + V) = F(L_b) + \partial F/\partial L_a \Big|_{La = Lb} V + . . .$$

$$= W + BV \quad ; \quad B = \partial F/\partial L_a$$

จะได้สมการเชิงเส้นเป็น

$$BV + W = 0 \tag{ข-10}$$

ค่าของ V จะต้องสอดคล้องกับสมการและมีคุณสมบัติที่ทำให้ V^TPV มีค่าน้อยที่สุด โดยจะใช้ Method of Lagrange multipliers

ดังนั้นฟังก์ชัน ø จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$ø = V^TPV - 2K^T (BV + W) \tag{ข-11}$$

พาเชียลดิฟเฟอร์เรนติเอท (partial differentiate) ฟังก์ชัน ø เทียบกับ V และ K และให้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้

$\partial\varnothing/2\partial V = V^TP - K^TB$

$\partial\varnothing/2\partial K = BV + W$

จะได้สมการนอร์แมลเป็น

$$PV - B^TK = 0 \qquad (ข-12)$$

$$BV + W = 0 \qquad (ข-13)$$

จากสมการ (ข-12) ลดรูปได้เป็น

$$V = P^{-1}B^TK \qquad (ข-14)$$

แทนค่า V ในสมการ (ข-10)

$$BP^{-1}B^TK + W = 0 \quad ; \quad BP^{-1}B^T = M$$

$$MK + W = 0$$

$$K = -M^{-1}W \qquad (ข-15)$$

แทนค่า K ในสมการ (ข-14)

$$V = -P^{-1}B^TMW \qquad (ข-16)$$

หาค่า V^TPV ด้วยการแทนค่า $V = P^{-1}B^TK$

$$V^TPV = (P^{-1}B^TK)^T\ P\ P^{-1}B^TK$$

$$= K^TBP^{-1}\ P\ P^{-1}B^TK$$

$$= K^TBP^{-1}B^TK \quad ; \quad BP^{-1}B^T = M$$

$$= K^TMK \quad ; \quad K = -M^{-1}W\ ,\ MK = -W$$

$$= -K^TW$$

<u>คำนวณหาโคแฟคเตอร์</u>

ความสัมพันธ์และสิ่งที่กำหนดให้

$L_b = IL_b \quad (QL_b = P^{-1})$

$W = F(L_b)$

$K = -M^{-1}W \quad = -(BP^{-1}B^T)^{-1}W$

$V = -P^{-1}B^TM^{-1}W = -P^{-1}B^T(BP^{-1}B^T)^{-1}W$

$L_a = L_b + V \quad = L_b - P^{-1}B^TM^{-1}W$

Autocofactor Matrices

$$Q_w = (\partial F/\partial_{Lb})\ Q_{Lb}\ (\partial F/\partial L_b)^T = BP^{-1}B^T = M$$

$$Q_K = (-M^{-1})\ Q_w\ (-M^{-1})^T \quad = M^{-1}MM^{-1} = M^{-1}$$

$$Q_V = (-P^{-1}B^TM^{-1})\ Q_w\ (-P^{-1}B^TM^{-1})^T$$

$$= P^{-1}B^TM^{-1}\ M\ M^{-1}BP^{-1}$$

$$= P^{-1}B^TM^{-1}BP^{-1}$$

$$Q_{La} = [\partial/\partial L_b(L_b - P^{-1}B^TM^{-1}W)]\ Q_{Lb}\ [\partial/\partial L_b(L_b - P^{-1}B^TM^{-1}W)]^T$$

$$= (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)\ Q_{Lb}\ (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)^T$$

$$= (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)\ P^{-1}\ (I - B^TM^{-1}BP^{-1})$$

$$= (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)\ (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)\ P^{-1}$$

$$= (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)^2\ P^{-1}$$

$$= P^{-1} - P^{-1}B^TM^{-1}BP^{-1}$$

$$= P^{-1} - Q_V = Q_{Lb} - Q_V$$

<u>หมายเหตุ</u> : $(I - P^{-1}B^TM^{-1}B)^2 = (I - P^{-1}B^TM^{-1}B)$ เนื่องจากเป็น idempotent matrix

3. <u>วิธีสมการทั่วไป</u> (General Equation)

แบบจำลองเชิงคณิต

$$F(L_a, X_a) = 0 \qquad (ข-17)$$

$$F(L_b + V, X_o + X) = 0$$

ทำให้เป็นเชิงเส้นโดยการกระจายด้วยอนุกรมเทเลอร์

$$\partial F/\partial L_a + \partial F/\partial X_a + F(L_b, X_o) = 0$$

$$F(L_b, X_o) + \partial F/\partial L_a\Big|_{La = Lb}(L_a - L_b) + \partial F/\partial X_a\Big|_{Xa = Xo}(X_a - X_o) = 0$$

ให้ $W = F(L_b, X_o)$, $B = \partial F/\partial L_a$, $A = \partial F/\partial X_a$

$$W + BV + AX = 0 \qquad (ข-18)$$

ค่าของ V และ X จะต้องสอดคล้องกับสมการและมีคุณสมบัติที่ทำให้ V^TPV มีค่าน้อยที่สุดโดยจะใช้ Method of Lagrange Multiplier

ดังนั้นฟังก์ชัน ø จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ

$$ø = V^TPV - 2K_b^T(AX + BV + W)$$

พาเชียลดิฟเฟอร์เรนติเอท (partial differentiate) ฟังก์ชัน ø เทียบกับ V X และ K_b และให้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้

$$\partial ø/2\partial V = V^TP - K_b^TB$$

$$\partial ø/2\partial V = K_b^TA$$

$$\partial ø/2\partial K_b = AX + BV + W$$

จะได้สมการนอร์แมลเป็น

$$PV - B^TK_b = 0 \qquad (ข-19)$$

$$A^TK_b = 0 \qquad (ข-20)$$

$$AX + BV + W = 0 \qquad (ข-21)$$

จากสมการ (ข-19) ลดรูปได้เป็น

$$V = P^{-1}B^TK_b \qquad (ข-22)$$

แทนค่า V ในสมการ (ข-21) จะได้

$$AX + BP^{-1}B^TK_b = -W \quad ; \quad M = BP^{-1}B^T$$

$$AX + MK_b = -W$$

$$K_b = -M^{-1}(AX + W) \qquad (ข-23)$$

แทนค่า K_b ในสมการ (ข-20)

$$-A^TM^{-1}(AX + W) = 0$$

$$-A^TM^{-1}AX = A^TM^{-1}W$$

ให้ $N = A^TM^{-1}A$, $U = A^TM^{-1}W$

ดังนั้น

$$X = -N^{-1}U \qquad (ข-24)$$

หาค่า V^TPV ด้วยการแทนค่า $V = P^{-1}B^TK_b$

$$V^TPV = (P^{-1}B^TK_b)^T \; P \; P^{-1}B^TK_b$$
$$= K^T_b BP^{-1} \; P \; P^{-1}B^TK_b$$
$$= K_b^T BP^{-1}B^TK_b \quad ; \quad BP^{-1}B^T = M$$
$$= K_b^T MK_b$$

แทนค่า K_b โดยอาศัยสมการ (ข-23)

$$V^TPV = - K_b^T MM^{-1}(AX + W)$$
$$= - K_b^T AX - K_b^T W$$

แต่ $A^TK_b = 0 = K_b^TA$

ดังนั้น $V^TPV = - K_b^TW$

<u>คำนวณหาโคแฟคเตอร์เมตริกซ์</u>

ความสัมพันธ์และสิ่งที่กำหนดให้

$$L_b = IL_b \quad (QL_b = P^{-1})$$
$$W = F(L_b, X_o)$$
$$X = - N^{-1}A^TM^{-1}W$$
$$K_b = - M^{-1}(AX + W)$$
$$= - M^{-1}(-AN^{-1}A^TM^{-1}W + W)$$
$$= - M^{-1}(I - AN^{-1}A^TM^{-1})W$$
$$V = P^{-1}B^TK_b$$
$$= - P^{-1}B^TM^{-1}(I + AN^{-1}A^TM^{-1})W$$
$$L_a = L_b + V$$
$$X_a = X_o + X$$

<u>Autocofactor Matrices</u>

$$Q_w = \partial F/\partial L_b \; P^{-1} \; (\partial F/\partial L_b)^T = BP^{-1}B^T = M$$
$$Q_w = (- N^{-1}A^TM^{-1}) \; Q_w \; (- N^{-1}A^TM^{-1})^T$$
$$= N^{-1}A^TM^{-1} \; M \; M^{-1}AN^{-1}$$
$$= N^{-1}A^TM^{-1}AN^{-1} \quad ; \quad N = A^TM^{-1}A$$

$$= N^{-1}NN^{-1} = N^{-1}$$

$$Q_{Xa} = IQ_{X}I = Q_{X} = N^{-1}$$

$$Q_{Kb} = -M^{-1}(I - AN^{-1}A^{T}M^{-1})\ Q_{W}\ (-M^{-1}(I-AN^{-1}A^{T}M^{-1}))^{T}$$

$$= M^{-1}(I - AN^{-1}A^{T}M^{-1})\ M\ M^{-1}(I - AN^{-1}A^{T}M^{-1})$$

$$= (M^{-1} - M^{-1}AN^{-1}A^{T}M^{-1})\ M\ (I - M^{-1}AN^{-1}A^{T})M^{-1}$$

$$= (I - M^{-1}AN^{-1}A^{T})M^{-1}\ M\ (I - M^{-1}AN^{-1}A^{T})M^{-1}$$

$$= (I - M^{-1}AN^{-1}A^{T})^{2}\ M^{-1}$$

$$= (I - M^{-1}AN^{-1}A^{T})\ M^{-1}$$

$$Q_{V} = P^{-1}B^{T}\ Q_{Kb}\ BP^{-1}$$

$$= P^{-1}B^{T}\ (M^{-1}-M^{-1}AN^{-1}A^{T}M^{-1})\ BP^{-1}$$

$$= P^{-1}B^{T}M^{-1}BP^{-1} - P^{-1}B^{T}M^{-1}AN^{-1}A^{T}M^{-1}BP^{-1}$$

$$Q_{La} = Q_{Lb} + Q_{V} + Q_{LbV} + Q_{VLb}$$

$$= Q_{Lb} - Q_{V}\ ;\ Q_{LbV} = Q_{VLb} = -Q_{V}$$

$$= P^{-1} - Q_{V}$$

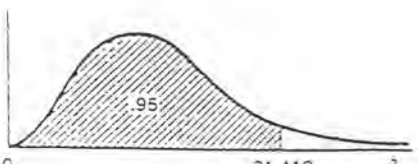
ภาคผนวก ค

ตารางทางสถิติ

ตารางที่ ค.1

Percentiles of the Chi-Square Distribution

(สถิติเบื้องต้นและการวิเคราะห์ข้อมูลทางวิทยาศาสตร์, 2529, ก-39)



d. f.	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$
1	.0000393	.000982	.00393	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0100	.0506	.103	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	.0717	.216	.352	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	.207	.484	.711	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	.412	.831	1.145	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	.676	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	.989	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	4.404	5.226	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	3.565	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	11.688	13.091	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	57.153	60.391	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	74.222	77.929	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

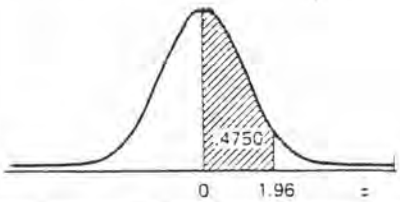
ตารางที่ ค.2

Normal Curve Area

Entries in the Body of the Table Give the Area Under

the Standard Normal Curve from 0 to z

(สถิติเบื้องต้นและการวิเคราะห์ข้อมูลทางวิทยาศาสตร์, 2529, ก-36)

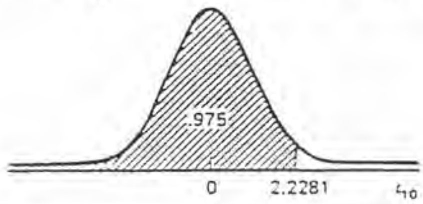


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

ตารางที่ ค.3

Perentiles of the t Distribution

(สถิติเบื้องต้นและการวิเคราะห์ข้อมูลทางวิทยาศาสตร์, 2529, ก-38)



d. f.	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	3.078	6.3138	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.9200	4.3027	6.965	9.9248
3	1.638	2.3534	3.1825	4.541	5.8409
4	1.533	2.1318	2.7764	3.747	4.6041
5	1.476	2.0150	2.5706	3.365	4.0321
6	1.440	1.9432	2.4469	3.143	3.7074
7	1.415	1.8946	2.3646	2.998	3.4995
8	1.397	1.8595	2.3060	2.896	3.3554
9	1.383	1.8331	2.2622	2.821	3.2498
10	1.372	1.8125	2.2281	2.764	3.1693
11	1.363	1.7959	2.2010	2.718	3.1058
12	1.356	1.7823	2.1788	2.681	3.0545
13	1.350	1.7709	2.1604	2.650	3.0123
14	1.345	1.7613	2.1448	2.624	2.9768
15	1.341	1.7530	2.1315	2.602	2.9467
16	1.337	1.7459	2.1199	2.583	2.9208
17	1.333	1.7396	2.1098	2.567	2.8982
18	1.330	1.7341	2.1009	2.552	2.8784
19	1.328	1.7291	2.0930	2.539	2.8609
20	1.325	1.7247	2.0860	2.528	2.8453
21	1.323	1.7207	2.0796	2.518	2.8314
22	1.321	1.7171	2.0739	2.508	2.8188
23	1.319	1.7139	2.0687	2.500	2.8073
24	1.318	1.7109	2.0639	2.492	2.7969
25	1.316	1.7081	2.0595	2.485	2.7874
26	1.315	1.7056	2.0555	2.479	2.7787
27	1.314	1.7033	2.0518	2.473	2.7707
28	1.313	1.7011	2.0484	2.467	2.7633
29	1.311	1.6991	2.0452	2.462	2.7564
30	1.310	1.6973	2.0423	2.457	2.7500
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.438	2.7239
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.423	2.7045
45	1.3007	1.6794	2.0141	2.412	2.6896
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.403	2.6778
60	1.2959	1.6707	2.0003	2.390	2.6603
70	1.2938	1.6669	1.9945	2.381	2.6480
80	1.2922	1.6641	1.9901	2.374	2.6388
90	1.2910	1.6620	1.9867	2.368	2.6316
100	1.2901	1.6602	1.9840	2.364	2.6260
120	1.2887	1.6577	1.9799	2.358	2.6175
140	1.2876	1.6558	1.9771	2.353	2.6114
160	1.2869	1.6545	1.9749	2.350	2.6070
180	1.2863	1.6534	1.9733	2.347	2.6035
200	1.2858	1.6525	1.9719	2.345	2.6006
∞	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

ประวัติผู้เขียน

นายวิชัย ขันติพร้อมผล เกิดวันที่ 25 กรกฎาคม 2504 ที่จังหวัดนครปฐม สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา จากวิทยาลัยเทคโนโลยีและอาชีวศึกษา (สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล) วิทยาเขตเทเวศร์ ปี พ.ศ. 2529 ปัจจุบันรับราชการที่กองรังวัด กรมทรัพยากรธรณี เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร