บทที่ 3

การคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS

กล่าวนำ

จุดมุ่งหมายของการคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS มุ่งหวังที่จะให้ได้ค่าพารามิเตอร์ของโครงข่ายที่ได้ข้อมูลจากเครื่องรับสัญญาณดาวเทียมที่ผลิตขึ้นจากต่างบริษัท ซึ่งให้รูปแบบของผลการคำนวณเส้นฐานในการนำเสนอต่างกัน และในขั้นตอนของการคำนวณปรับแก้อาจจะมีการเพิ่มหรือลดจำนวนค่าสังเกต ดังนั้นจึงเลือกใช้วิธีสมการค่าสังเกตในการคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS

แบบจำลองเชิงคณิตของวิธีสมการค่าสังเกต มีลักษณะดังนี้ (วิชา จิวาลัย, 2524)

$$L_a = F(X_a)$$

สมการเชิงเส้น $V = AX + L \;;\; A = \partial F/\partial X \;;\; L_a = L_b + V \;;$

$$L = F(X_o) - L_b$$

สมการนอร์แมล $NX + U = 0 \;;\; N = A^T PA \;,\; U = A^T PL$

$$X = -N^{-1}U$$

พารามิเตอร์ที่ปรับแก้แล้ว $X_a = X_o + X$

การคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS แบบจำลองเชิงคณิตที่ใช้มีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้น ทำให้การสร้างเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (เมตริกซ์ A) ของพารามิเตอร์มีความสะดวกมากขึ้นเพราะไม่ต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชั่น F เทียบกับพารามิเตอร์

เมตริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (Weight Matrix of Observation)

น้ำหนักของค่าสังเกต เป็นค่าคาดคะเน หรือค่าแสดงความน่าเชื่อถือของค่าสังเกต ถ้าความแปรปรวนของค่าสังเกตมีค่าน้อยแสดงว่าค่าสังเกตนั้นดีมีน้ำหนักมาก ในทางตรงกันข้าม ถ้า

ความแปรปรวนของค่าสังเกตมีค่ามากแสดงว่าค่าสังเกตนั้นไม่ดีมีน้ำหนักน้อย

ในทางวิศวกรรมสำรวจส่วนใหญ่จะถือว่าค่าสังเกตเป็นอิสระต่อกันทำให้ค่าสังเกตไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกัน (uncorrelated) สำหรับการคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS ซึ่งเป็นหัวข้อในการทำวิจัยนี้จะนำข้อมูลที่เป็นผลการคำนวณเส้นฐาน (result file) ที่รังวัดได้ในแต่ละ session มารวมกัน จากการรับสัญญาณดาวเทียมด้วยเครื่อง WM101 และ TRIMBLE 4000ST โดยอาศัยซอฟแวร์ที่ติดมากับเครื่องรับ คือ โปรแกรม PoPS สำหรับเครื่องรับ WM101 และโปรแกรม TRIMVEC สำหรับเครื่องรับ TRIMBLE 4000ST คำนวณหาตำแหน่งของจุดที่ตั้งเครื่องรับพร้อมทั้งคำนวณหาค่าของเมตริกซ์ VCV ของเส้นฐานในแต่ละ session โดยที่ค่าของ VCV จะอยู่ในรูปของ full matrix ซึ่งจะนำไปใช้ในการคำนวณน้ำหนักของเส้นฐานในการคำนวณปรับแก้โครงข่าย GPS ซึ่งจะคำนวณปรับแก้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 นำเฉพาะค่าตามแนวทะแยงของเมตริกซ์ VCV มาใช้ โดยถือว่าเส้นฐานไม่มีสหสัมพันธ์ต่อกัน

กรณีที่ 2 นำค่านอกแนวทะแยงของเมตริกซ์ VCV มาคำนวณด้วย ซึ่งจะทำให้เส้นฐานมีค่าสหสัมพันธ์ต่อกัน

สมการนอร์แมล (Normal Equations)

การปรับแก้ด้วยลีสท์สแควร์โดยวิธีสมการค่าสังเกต รูปแบบของสมการนอร์แมลจะมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่าคือ u สมการ ซึ่งในการปรับแก้จะถือว่าค่าพิกัดที่ต้องการทราบค่าเป็นพารามิเตอร์ทั้งหมด เพื่อที่จะสร้างเมตริกซ์ N ของโครงข่ายทั้งโครงข่าย (Global normal matrix) ดังนี้

พิจารณาค่าสังเกต 2 ชุด ที่อิสระต่อกันโดยที่มีพารามิเตอร์เป็นชุดเดียวกัน

$$A_1 \Delta X + L_1 = V_1 \quad \text{มีเมตริกซ์น้ำหนักเป็น } P_1 \qquad (3\text{-}1)$$

$$A_2 \Delta X + L_2 = V_2 \quad \text{มีเมตริกซ์น้ำหนักเป็น } P_2 \qquad (3\text{-}2)$$

เมื่อรวมชุดของเมตริกซ์ A (Design matrix) เข้าด้วยกันจะได้เมตริกซ์เป็น

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{bmatrix}$$

สำหรับชุดของเมตริกซ์น้ำหนักของค่าสังเกต (Global weight matrix) เมื่อรวมเข้าด้วยกันจะได้เมตริกซ์เป็น

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมตริกซ์นอร์แมลรวม (Global normal matrix) ของค่าสังเกตทั้ง 2 ชุด จะคำนวณหาได้จาก

$$N = A^T PA = A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 = N_1 + N_2 \qquad (3\text{-}3)$$

ฉะนั้นถ้าหากชุดของค่าสังเกตมีมากกว่า 2 ชุด และมีค่าพารามิเตอร์เป็นชุดเดียวกัน การคำนวณหาค่าเมตริกซ์นอร์แมลรวม จะหาได้ในทำนองเดียวกับสมการ (3-3) คือ คำนวณหาเมตริกซ์นอร์แมล ของแต่ละชุดของค่าสังเกตแล้วนำมารวมกัน ซึ่งวิธีการนี้จะทำให้ เมตริกซ์ A มีขนาดเล็ก และเป็นการประหยัดเนื้อที่ในหน่วยความจำของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งการคำนวณปรับแก้ในการทำวิจัยนี้ได้ใช้หลักการในทำนองเดียวกันนี้

<u>การสร้างเมตริกซ์ U</u>

การจัดสร้างเมตริกซ์ U ใช้หลักการเช่นเดียวกับสมการ (3-3) คือ

จากสมการ (3-1) และ (3-2) สามารถที่จะเขียนเมตริกซ์ L_1 และ L_2 ในรูปของเมตริกซ์รวมได้เป็น

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \\ L_2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นเมตริกซ์ U ของค่าสังเกตทั้งระบบจะเป็น

$$U = A^T PL = A_1{}^T P_1 L_1 + A_2{}^T P_2 L_2 = U_1 + U_2$$

<u>การจัดเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์</u> $({}_nA_u)$

ความสัมพันธ์ของค่าสังเกตในแต่ละ session จะเขียนได้เป็น

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j$$
$$\Delta Y_{ij} = Y_i - Y_j$$
$$\Delta Z_{ij} = Z_i - Z_j$$

เมื่อ i คือ จุดบังคับในแต่ละ session

เมื่อ j คือ จุดใด ๆ ที่อยู่ในแต่ละ session

จากแบบจำลองเชิงคณิต $L_a = F(X_a)$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} lx_{1a} \\ ly_{1a} \\ lz_{1a} \\ \vdots \\ lx_{n1a} \\ ly_{n1a} \\ lz_{n1a} \end{bmatrix} = {}_{3n1}\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}_{3u} \begin{bmatrix} X_{1a} \\ Y_{1a} \\ Z_{1a} \\ \vdots \\ X_{ua} \\ Y_{ua} \\ Z_{ua} \end{bmatrix}$$

เมื่อ ni คือ จำนวนของเส้นฐานใน session ที่ i , i = 1, 2, 3 ...

u คือ จำนวนจุดของของหมุดที่ต้องการทราบค่าพิกัดทั้งระบบ

กำหนดให้ $A = \partial F/\partial X_a$: แต่เนื่องจากแบบจำลองเชิงคณิตเป็นสมการเชิงเส้น ดังนั้นองค์ (element) ของเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของพารามิเตอร์ (A) ในแต่ละแถว (row) จะมีค่าเป็น +1, -1 และศูนย์ เท่านั้น

การสร้างเมตริกซ์ L

การจัดสร้างเมตริกซ์ L คือ ความต่างระหว่างเวคเตอร์ L_o กับเวคเตอร์ L_b

$L = L_o - L_b$

เมื่อ L_b คือ ค่าต่างของค่าสังเกต

L_o คือ ค่าประมาณของค่าสังเกต ($L_o = F(X_o)$)

ขั้นตอนการคำนวณปรับแก้

เมื่อทราบปริมาณต่าง ๆ (n, u, A_i, P_i, L_i) เราสามารถคำนวณค่าคาดคะเนลีสท์สแควร์ (Least square estimates) โดยวิธีสมการค่าสังเกตได้ดังนี้

ขั้นตอน	ขนาดของเมตริกซ์
- สร้าง $N_i = A_i^T P_i A_i$	(3u, 3u)
$N = N_1 + N_2 + \dots$	(3u, 3u)
- สร้าง $U_i = A_i^T P_i L_i$	(3u, 1)
$U = U_1 + U_2 + \dots$	(3u, 1)
- กำหนดน้ำหนักให้กับจุดที่จะใช้เป็นจุดควบคุมโครงข่ายในเมตริกซ์ N	
- คำนวณ N^{-1}	(3u, 3u)
- $X = -N^{-1}U$	(3u, 1)
- $V = AX + L$	(3n, 1)
- $X_a = X_o + \Delta X$	(3u, 1)
- $L_a = L_b + V$	(3n, 1)
- ตรวจสอบการคำนวณ $NX + U = 0$	(3u, 1)

<u>ขั้นตอน</u>		<u>ขนาดของเมตริกซ์</u>
- คำนวณ	V^TPV	scalar
-	$\hat{\sigma}_o^2 = V^TPV/(n-u)$	scalar

- คำนวณเมตริกซ์ของความแปรปรวน (Variarce - Covariarce matrices)

$$\Sigma X_a = \sigma_o^2 N^{-1}$$

- วิเคราะห์ผลการคำนวณทางสถิติ
- คำนวณหาวงรีของความคลาดเคลื่อน
- วิเคราะห์ผลแตกต่างทางสถิติระหว่างการคำนวณปรับแก้ในกรณีที่ใช้ค่าของเมตริกซ์ VCV ของเส้นฐานในแนวทะแยงและกรณีที่ใช้เมตริกซ์นอกแนวทะแยงร่วมคำนวณด้วย