บทที่ 2

โปรแกรมมิ่ง

โปรแกรมมิ่ง คือวิธีการอย่างหนึ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับ การตัดสินใจอย่างมีแบบแผน ซึ่งจะสามารถคาดคะแนนผลล่วงหน้าของตัวแปรต่าง ๆ ออกมาได้ (output) โดยเปลี่ยนค่าตัวแปรที่เข้าอีกตัวหนึ่ง (input)

โปรแกรมมิ่ง จะเป็นตัวช่วยในการตัดสินใจโครงการต่าง ๆ เพื่อหาความ (จุด) เหมาะสม (optimal) โดยมีเงื่อนไขต่าง ๆ ที่สามารถจะเปลี่ยนแปลงได้ และเข้าเป้าหมายที่เราต้องการ เช่น ตัดสินเลือกทำโครงการที่ได้รับผลตอบแทนสูงที่สุดและใช้งบประมาณที่มีอยู่ต่ำที่สุด

ประโยชน์ของโปรแกรมมิ่ง จะใช้สำหรับการบริหาร (Management) การวิจัย (Operations research) เพื่อการวางแผน และปัญหาของการวางนโยบาย (Policy problems) เพื่อให้ได้สัดส่วนเหมาะสม (Optimal) ที่สุด ซึ่งโปรแกรมมิ่งที่สำคัญที่ได้ใช้ประกอบการศึกษาในงานวิจัยนี้มีสองประเภทคือ

1. Linear Programming
2. Dynamic Programming

2.1 Linear Programming ตัวแปร - คืออักษรหรือเครื่องหมายอย่างหนึ่งที่เราใช้แทนจุดประสงค์ หรือข้อมูลที่เราเก็บจากปรากฏการณ์ ซึ่งจะมีค่าเปลี่ยนแปลงได้ตามลักษณะของความสัมพันธ์ ตัวแปรแต่ละตัวอาจมีความสัมพันธ์กันหรือไม่มีก็ได้

Linear Progromming คือ วิธีการจัดตัวแปร (Variables) X1, X2,...... Xi,..........Xn ที่มีความสัมพันธ์แบบเส้นตรง (linear relationship) และหนึ่งในตัวแปรเหล่านี้สามารถแสดงอยู่ในรูปสมการ

$$Xi = Ao + A1X1 + A2X2 + \dots\dots\dots + AiXi + \dots\dots\dots AnXn$$

โดยที่ A เป็นค่าคงที่ (Constant)

สมการข้างต้นจะเรียกว่า Linear Programming และอาจเขียนอยู่ในรูปทั่วไปจะได้ดังนี้

$$Y = AX + B$$

โดยที่

Y เป็น columm vector ของm (dependent) variables Yi

X เป็น column vector ของn (independent) variables Xi

และ A และ B เป็น column vector ของค่าคงที่ (constant) Aiและ Bi ตามลำดับ

Linear Programming ที่มี n ตัวแปร (variable) และm (equation) จะสามารถหาค่าที่เหมาะสม (optimal) เช่นค่าสูงสุด (maximum), ค่าต่ำสุด (minimum) ของ linear function ของทุก ๆ ค่าตัวแปร ซึ่งจะเขียนในรูปทางคณิตศาสตร์ (mathematical formulation) ได้ดังนี้

ค่า Max หรือ Min ของ

$$Z = (C1X1 + C2X2 + C3X3 + \ldots\ldots + CnXn) \ldots\ldots\ldots (2)$$

โดยที่

A11X1 + A12X2 + A13X3 +.....+ A1nXn = B1 (หรือ ≥ B1 หรือ ≤ B1)

A21X1 + A22X2 + A23X3 + ...+ A2nXn = B2 (หรือ ≥ B2 หรือ ≤ B2)

Am1X1 + Am2X2 + Am3X3 +.....+ AmnXn = Bm (หรือ ≥ Bm หรือ ≤ Bm)

โปรแกรมนี้มีจำนวน Variable n ตัว X1, X2, X3,.....,Xn และมี constraint จำนวน m ตัว และสามารถเขียนอยู่ในรูปย่อ ๆ ได้ดังนี้

Ai1X1 + Ai2X2 +......+ AijXj +.....AinXn = Bi

(หรือ ≤ Bi , ≥ Bi)

ซึ่ง i มีค่าจาก 1 ถึง m

Linear Programming จะสามารถหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของตัว variables เหล่านี้ได้

2.2 ตัวอย่างของการใช้ Linear Programming

สมมุติให้มีบริเวณที่พักอาศัยของงาน 3 แห่งและมีจำนวนคนงานดังนี้ คือ 1,000 , 2,000 , และ 1,500 คน และสมมุติเพิ่มเติมมีโรงงานอยู่ 2 แห่ง ที่คนงานเหล่านี้จะต้องเดินทางไปทำงาน ซึ่งสามารถรับคนงานได้ดังนี้ 3,000 และ 1,500 คน โดยระยะทางระหว่างที่พักอาศัยและโรงงานเป็นดังนี้

ตารางที่ 2.1

ที่พักอาศัย	ที่ทำงาน	
	j = 1	j = 2
i = 1	15	20
i = 2	10	15
i = 3	10	20

ระยะทางเป็น กิโลเมตร

ซึ่งถ้าพิจารณาจากข้อมูลขั้นต้น ถ้าต้องการจะทราบว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดสำหรับคนงานที่จะเดินทางไปทำงานเป็นเท่าใด ปัญหานี้สามารถแสดงในรูปของ Linear Prc-gramming ซึ่งต้องการหาค่าต่ำสุดของผลรวมของระยะทางทั้งหมดจากที่พักอาศัยไปโรงงาน หรือ จากโรงงานกลับที่พักอาศัย โดยสมมุติ

i = เป็นจำนวนที่พักอาศัยของคนงาน (มีค่า 1-3)

j = เป็นจำนวนโรงงานหรือ ที่ทำงาน (มีค่า 1-2)

Xij = เป็นจำนวนคนงานที่เดินทางจากi ไป j

เพราะฉะนั้นจำนวนระยะทางที่เดินทางจากที่พักอาศัยไปโรงงานจะสามารถเขียนได้ดังนี้ (หน่วยเป็นกิโลเมตร)

$$15\ X11 + 20\ X12 + 10\ X21 + 15\ X22 + 10\ X31 + 20X32 \ldots\ldots (2.1)$$

โดยที่คนงานจากที่พักอาศัยทั้ง 3 แห่งต้องเดินทางไปทำงาน และสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการดังนี้

$$\left.\begin{array}{l} X11 + X12 = 1{,}000 \text{ สำหรับที่พักอาศัย 1} \\ X21 + X22 = 2{,}000 \text{ สำหรับที่พักอาศัย 2} \\ X31 + X32 = 1{,}500 \text{ สำหรับที่พักอาศัย 3} \end{array}\right\} (2.2)$$

และจำนวนคนงาน ทั้ง 3 แห่งที่จะต้องไปโรงงาน 2 โรงงานสามารถเขียนได้ในรูปสมการดังนี้

$$X11 + X21 = X31 = 3{,}000 \text{ สำหรับโรงงานที่ 1}$$

$$X12 + X22 + X32 = 1{,}500 \text{ สำหรับโรงงานที่ 2}$$

จำนวนคนงานที่อยู่ในที่พักอาศัยทั้งหมด จะเท่ากับจำนวนคนที่ทำงานอยู่ในโรงงานเขียนได้ดังนี้

$$X11 + X12 + X21 + X22 + X32 = X11 + X21 + X31 + X12 + X22 + X32$$

สมการ (2.1) เป็น objective function (minimized)

และเป็น linear function ของ variables

ซึ่งสมการ (2.2) เป็น linear function ของ variables สมมุติมีที่พักอาศัย n แห่ง (j=1,2,...,m) มีโรงงานจำนวน m โรง (j=1,2,...,m) และระยะทางระหว่างบ้านพัก (i) ไปโรงงาน (j) จะเป็น dij และจำนวนเที่ยว (trips) จากที่พักอาศัย (j) เป็น Oi จำนวนเที่ยว (trips) จากโรงงาน (j) เป็น (Ci) ซึ่งผลรวมจะต้องเท่ากับ เขียนได้ดังนี้

$$\sum_i Di = \sum_j O_j$$

ซึ่ง $$Oj = \sum_i Xij \quad \text{สำหรับที่พักอาศัย } i$$

$$Di = \sum_i Xij \quad \text{สำหรับโรงงาน } j$$

ซึ่งค่าที่ต้องการคือ $\sum_i \sum_j Xij\ dij$ เป็นค่าต่ำสุดซึ่งจะเขียนอยู่ในรูปทั่วไปของ linear programming

2.3 Dynamic Programming

Linear Programming ที่มีหลายกลุ่มต่างมีความสัมพันธ์กันและมีหลายๆ โครงการโดยต้องการการตัดสินใจให้ได้จุดที่เหมาะสม หรือ เข้าเป้าหมาย ตามเงื่อนไขต่างๆ เช่น การตัดสินใจทำโครงการอันหนึ่งอันใด หรือหลายโครงการพร้อมกัน โดยดูจากงบประมาณที่มีอยู่ หรือ การตัดสินใจทำโครงการหลายโครงการพร้อมกันโดยให้ผลตอบแทนมากที่สุด Linear Programing นี้จะเรียกว่า Dynamic Programming

Dynamic Programing เหมาะสำหรับ การตัดสินใจเกี่ยวกับการจัดโครงการหลายๆ โครงการที่มีอยู่ ตามงบประมาณที่มีอยู่ให้ได้ผลตอบแทน หรือ ประโยชน์สูงสุด

ตัวอย่างการใช้ Dynamic Programmingสมมุติรัฐต้องการจะจัดงบประมาณในการวางแผนการ แก้ปัญหาระบบการขนส่งภายในเมือง (Urban Transportation System) โดยมีโครงการหรือแนวทางการแก้ไขดังนี้

1. Mass Transit
2. Arterial Improvement
3. New Dial-a-Ride

หลังจากการศึกษาความเหมาะสม (Fesibility Analyses) ได้หาค่าระดับของการปรับปรุงโดยใช้งบประมาณต่างๆ กัน และ ผลตอบแทนของการปรับปรุงตามตารางดังนี้

ตารางที่ 2.2

Dial-a-Ride		Arterial Improvement		Mass Transit	
X	g1(x)	X	g2(x)	X	g3(x)
0	0	0	0	0	0
1	1	1	2	1	3
2	3	2	4	2	4
3	6	3	5	3	7
4	8	4	6	4	8
5	9	5	7	5	11

โดย x : เป็นงบประมาณที่ใช้หน่วย เป็นสิบล้านบาท

Gi(x) เป็นผลตอบแทนของการปรับปรุง

โดย i= 1,2,3

จากข้อมูลดังกล่าวถ้าสามารถจัดสรรงบประมาณ 50 ล้านบาท รัฐควรจะเลือกใช้งบในโครงการใดบ้างจึงจะทำให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุดในการปรับปรุงในกรณีอาจจะพิจารณาจากทำการลงทุนโดยคิดจาก 2 โครงการแรกซึ่งจะมีให้รัฐเลือก 6 กรณี

คือ โครงการแรก 0,1,2,3,4, หรือ 5 และโครงการที่ 2 อาจทำการลงทุน 5,4,3,2,1, หรือ 0 เราจะได้ค่าตอบแทนออกมาทั้ง 6 กรณี ซึ่งจะมีกรณีหนึ่งหรือหลายกรณีจะให้ผลตอบแทนที่มากที่สุด ระหว่าง 2 โครงการแรก และถ้ารัฐพิจารณาผลของ 2 โครงการกับโครงการที่ 3 มารวมกันเราจะได้ค่าตอบแทนที่มากที่สุดจากทั้ง 3 โครงการ ซึ่งลักษณะนี้เป็นหลักทั่วไปของการค่าเหมาะสม (Optimality) ซึ่งสามารถคำนาณโดยใช้ Dynamic Programming ได้ ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

g12 (x) เป็นผลตอบระหว่าง 2 โครงการที่มากที่สุด

$X1^*$ เป็นระดับการลงทุนของโครงการที่ 1 ที่ให้ผลตอบแทนสูงสุด

$X2^*$ เป็นระดับการลงทุนของโครงการที่ 2 ที่ให้ผลตอบแทนสูงสุดผลของการพิจารณาระหว่าง 2 โครงการจะได้ผลตามตารางนี้

ตารางที่ 2.3

X	g12(x)	$X1^*$	$X2^*$
0	0	0	0
1	2	0	1
2	4	0	2
3	6	3	0
4	8	3	1
5	10	4	1

ค่า g12(x) จะแทนค่าตอบแทนที่มากที่สุดระหว่าง 2 โครงการรวมกัน

คือ $$g12(x) = \text{Max}\,[g1(x)+g2(x2)]$$

โดยที่ $X1+X2 = X$

และถ้าดำเนินการผลรวมของสองโครงการแรกกับโครงการที่ 3 ลักษณะผลลัพธ์จะเป็นดังนี้

g123(x) จะแทนค่าตอบแทนมากที่สุดของทั้ง 3 โครงการ เช่นถ้ารัฐมีงบประมาณ 10 ล้านบาทจะมีได้ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $g12(1) + g3(0) = 2+0=2$

กรณีที่ 2 $g12(0) + g3(1) = 0=3=3$

ซึ่งกรณีที่ 2 จะให้ค่าตอบแทนมากที่สุด เพราะฉะนั้นจะได้

g123 (1) = 3 โครง $X1^* = 0$

$X2^* = 0$

$X3^* = 1$

และผลรวมของทั้ง 3 โครงการสรุปได้ตามตารางนี้

ตารางที่ 2.4

X	g123	$X1^*$	$X2^*$	$X3^*$
0	0	0	0	0
1	3	0	0	1
2	5	0	1	1
3	7	0	0	3
4	9	0	1	3
5	11	0	0	5

สรุปถ้ารัฐมีงบประมาณ 50 ล้านบาท รัฐจะได้ค่าตอบแทนที่มากที่สุดโดยเลือกโครงการที่ 1 และ 2 =0 และโครงการที่ 3 = 5 จึงทำให้สามารถตัดสินใจได้ว่าถ้ารัฐมีงบประมาณ 50 ล้านบาทรัฐจะต้องลงทุนปรับปรุงระบบ Mass Transit ทั้งหมดจึงจะทำให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด

และถ้ามีโครงการอื่นๆ อีก เช่นโครงการที่ 4,5 และต่อๆไป ก็สามารถพิจารณาเปรียบเทียบต่อไปได้อีก ซึ่งจะเขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\text{Max}\left[g1\,(X1) + g2(X2)+\ldots+gi\,(Xi) +\ldots+gn(Xn)\right]$$

$$\text{โดยที่ } X1+X2+\ldots+Xn \leqslant X$$

$$0 \leqslant Xi \leqslant X \quad \text{สำหรับแต่ละ } i$$

2.4 การประยุกต์และประโยชน์ของ Dynamic Programming

ไดนามิคโปรแกรมมิ่งใช้ได้ทั่วๆ ไปในการจัดโครงการให้ได้ผลตอบแทนมากที่สุด ไม่ว่าจะมีโครงการมากเพียงใด และต้องการงบประมาณเท่าไร แต่ถ้างบประมาณ จำกัดอยู่จำนวนหนึ่งแล้ววิธีการนี้ก็ยังสามารถจะใช้จัดสรรงบประมาณที่มีอยู่ในการจัดเลือกโครงการขึ้นมาตามงบที่มีอยู่ให้ได้ผลตอบแทนสูงสุดเพราะฉนั้นไดนามิคโปรแกรมมิ่งจึงมีความสำคัญอย่างยิ่งในการวางแผนการคัดเลือกโครงการและการวางแผนงบประมาณที่จะต้องใช้ล่วงหน้า

และไดนามิคโปรแกรมมิ่งยังสามารถประยุกต์ให้ใช้ได้ในสาขาต่าง ๆ ได้อีก เช่น การงบประมาณต่าง ๆ การวางแผนพัฒนาต่าง ๆ และขณะนี้ได้มีโปรแกรมสำเร็จรูปของ Dynamic Programming ซึ่งปรับปรุงขึ้นโดยสาขาวิศวกรรมการจราจรและการขนส่งคณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สามารถช่วยลดระยะเวลาในการคำนวนและในกรณีมีจำนวนโครงการมาก ๆ จะทำให้สามารถใช้เวลาในการจัดเลือกโครงการน้อยลงมาก