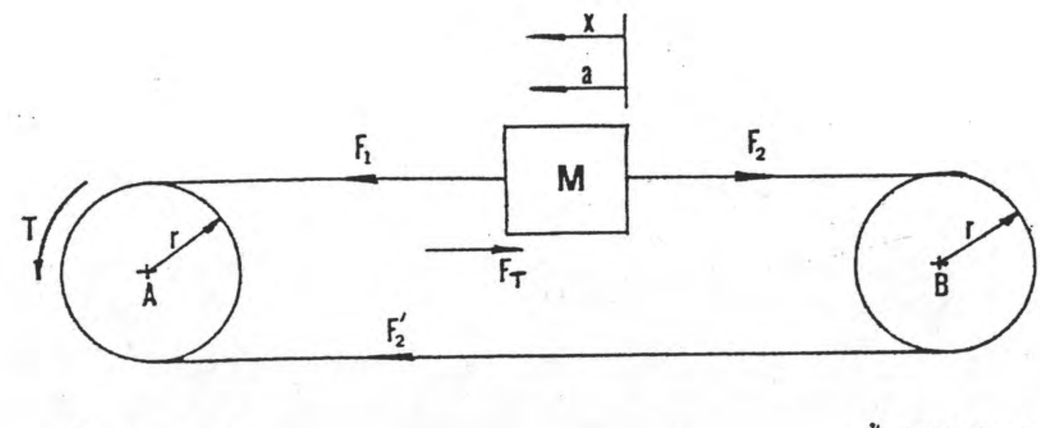
บทที่ 4

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโต๊ะตัดแผ่นเหล็ก

ในการหาค่าเกน(gain) ของตัวควบคุม(controller) จะต้องมีการทดสอบดูว่าค่าเกนที่หาได้ให้ผลของการเคลื่อนที่เป็นอย่างไร ซึ่งการทดสอบถ้าทำการทดสอบกับระบบจริง ถ้าค่าเกนที่ใช้ไม่สามารถควบคุมระบบได้อาจทำให้ระบบเกิดสภาวะไม่เสถียร(unstable) อาจทำให้ระบบเสียหายได้ง่าย ดังนั้นในขั้นแรกของการหาค่าเกนเราจะใช้วิธีการทำการจำลองแบบ (simulation) ระบบทั้งหมดด้วยคอมพิวเตอร์ โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนระบบและทดลองควบคุมเพื่อหาค่าเกน ที่ให้ผลลัพธ์ของการควบคุมที่ดีที่สุด

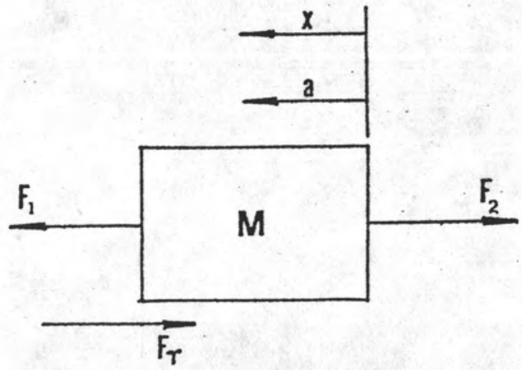
ในการออกแบบระบบควบคุมเราจะถือว่าการเคลื่อนที่ในแนวแกนหนึ่งจะไม่มีผลกระทบต่อการเคลื่อนที่ของอีกแกนหนึ่ง สำหรับสมการทางคณิตศาสตร์ที่จะใช้แทนระบบสามารถหาได้ดังนี้



รูปที่ 4.1 free body diagram ของระบบขับเคลื่อน

จากรูปที่ 4.1 แสดงถึง free body diagram ของระบบการเคลื่อนที่ โดยมีมอเตอร์และชุดเฟืองทดติดอยู่กับแกนของล้อสายพาน A ส่งกำลังผ่านลวดสลิงทำให้ระบบแกนซึ่งมีมวล M เคลื่อนที่ มีแรงต้านทานการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ F_T ซึ่งเกิดจากแรงเสียดทานของลูกปืนที่ใช้ทำลูกล้อของระบบแกน

พิจารณา free body diagram ที่มวล M



รูปที่ 4.2 free body diagram ของมวล M

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\Sigma F = Ma$$

$$F_1 - F_2 - F_T = Ma$$

$$F_1 - F_2 - \mu Mg = Ma \qquad (4.1)$$

แทนค่าความเร่งเชิงมุม a ซึ่งมีค่าเท่ากับ $r\ddot{\theta}$ ลงในสมการที่ 4.1

$$F_1 - F_2 = M(r\ddot{\theta} + \mu g) \qquad (4.2)$$

โดยที่

μ = ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงเสียดทานของตลับลูกปืน

= 0.015

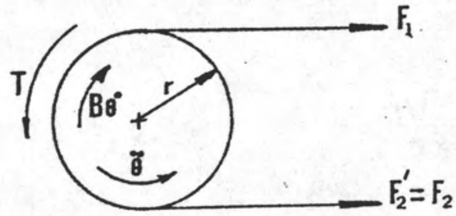
g = ค่าความเร่งของแรงดึงดูดโลก

= 9.81 m/sec^2

r = รัศมีของล้อสายพาน

= 0.025 เมตร

พิจารณา free body diagram ที่ล้อสายพาน A



รูปที่ 4.3 free body diagram ของล้อสายพาน A

ถ้าไม่คิดความเสียดทานที่แกนของล้อสายพาน B จะได้ว่า $F_2 = F_2'$ และจากสมการ

$$\Sigma \text{Moment} = J\ddot{\theta}$$

$$T - r(F_1 - F_2) - B\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \qquad (4.3)$$

กำหนดให้

T = แรงบิดที่ได้จากมอเตอร์

J = โมเมนต์ของแรงเฉื่อยของล้อสายพานและมอเตอร์

B = สัมประสิทธิ์ของวิสคอสแด้มปิ้งของมอเตอร์

จากสมการที่ 4.2 แทนค่าลงในสมการที่ 4.3 จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการที่ 4.4

$$T - r^2M\ddot{\theta} - \mu rMg = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}$$

$$(J + r^2M)\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = T - \mu rMg \qquad (4.4)$$

ถ้ากำหนดให้ Initial Condition $\theta(0) = \theta_i$ และ $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_i$ และกำหนดให้ T เป็นสัญญาณอินพุทแบบ step function เราสามารถแก้สมการที่ 4.4 หาค่า $\theta(t)$,$\dot{\theta}(t)$ ได้ตามสมการที่ 4.5 และ 4.6 ตามลำดับ

$$\theta(t) = [(C_1C_3-C_1C_2\dot{\theta}_i)e^{-t(C_2/C_1)}+C_2C_3t-C_1C_3+C_1C_2\dot{\theta}_i+C_2^2\theta_i]/C_2^2 \quad (4.5)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_i+[(C_1C_3-C_1C_2\dot{\theta}_i)(1-e^{-t(C_2/C_1)}]/C_1C_2 \quad (4.6)$$

กำหนดให้

$C_1 = (J + r^2M)$

$C_2 = B$

$C_3 = (T - \mu rMg)$

จากสมการที่ 4.5 และ 4.6 เราสามารถหาค่าของตำแหน่งและค่าของความเร็วเชิงเส้นที่เวลา t ใดๆได้จากความสัมพันธ์ตามสมการที่ 4.7 และ 4.8 ตามลำดับ

$$P(t) = r\theta(t) \quad (4.7)$$

$$V(t) = r\dot{\theta}(t) \quad (4.8)$$

กำหนดให้

$P(t)$ = ค่าตำแหน่งที่เวลา t ใดๆ

$V(t)$ = ค่าความเร็วที่เวลา t ใดๆ