บทที่ 2

ฟัซซีเซตและฟัซซีลอจิก

ทฤษฎีฟัซซีเซตเป็นเครื่องมือพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการจัดการกับข้อมูลซึ่งไม่ชัดเจน คลุมเครือ หรือ กำกวม ซึ่งพบได้ทั่วไปในโลกความเป็นจริง ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานของทฤษฎีฟัซซีเซตที่จำเป็นในการทำความเข้าใจในส่วนอื่นต่อไปในวิทยานิพนธ์นี้ เนื้อหาประกอบด้วยสองส่วนสำคัญคือ พื้นฐานเกี่ยวกับฟัซซีเซต และพื้นฐานเกี่ยวกับฟัซซีลอจิก ในส่วนของฟัซซีเซตเริ่มจากนิยามและคุณสมบัติเบื้องต้นของฟัซซีเซต ต่อมาแนะนำถึงหลักการยืดขยายซึ่งเป็นหลักสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟัซซีเซต การดำเนินการเชิงทฤษฎีเซตและความสัมพันธ์ฟัซซีถูกกล่าวถึงตามลำดับ ต่อมาเป็นส่วนของฟัซซีลอจิกซึ่งเริ่มด้วย การแนะนำตัวแปรเชิงภาษา ประพจน์ฟัซซี และกฎเงื่อนไขฟัซซี ซึ่งเป็นองค์ประกอบที่สำคัญของฟัซซีลอจิก จากนั้นเป็นการใช้เหตุผลในฟัซซีลอจิก

<u>นิยามและคุณสมบัติเบื้องต้นของฟัซซีเซต</u>

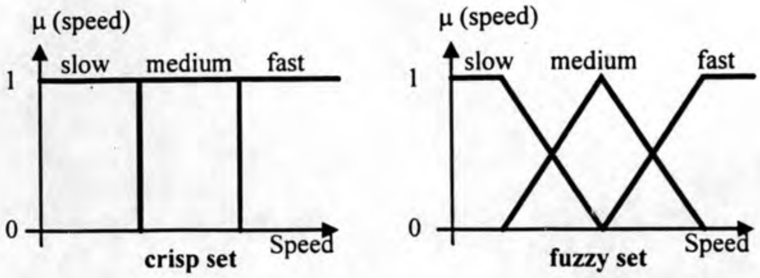
นิยาม 2.1 *ฟัซซีเซต* : ให้ U เป็นกลุ่มของวัตถุหรือปริมาณที่สนใจเช่น $U=\mathbf{R}^n$ และเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ ฟัซซีเซต F ใน U กำหนดลักษณะสมบัติโดยฟังก์ชันการเป็นสมาชิก $\mu_F : U \rightarrow [0,1]$ โดยที่ $\mu_F(u)$ แสดงระดับการเป็นสมาชิกในฟัซซีเซต F ของ $u \in U$ ดังนั้นฟัซซีเซต F ใน U อาจแสดงได้ด้วยคู่ลำดับของสมาชิกใดๆในเอกภพสัมพัทธ์กับค่าระดับการเป็นสมาชิกของสมาชิกตัวนั้น $F = \{(u, \mu_F(u)) \mid u \in U\}$ หรืออาจเขียนโดยย่อได้โดย

ถ้า U เป็นเซตต่อเนื่อง $\qquad F = \int_U \mu_F(u)/u$

ถ้า U เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง $\qquad F = \sum_U \mu_F(u)/u$

หรือ $\qquad F = \mu_F(u_1)/u_1 + \mu_F(u_2)/u_2 + \ldots + \mu_F(u_n)/u_n$

หมายเหตุ: เครื่องหมายผลรวมและอินทิกรัลในความสัมพันธ์ข้างต้นแทนการผนวกสมาชิก $(u,\ \mu_F(u))$ แต่ละตัวเข้าด้วยกันเป็นเซต มิได้หมายถึงการหาผลรวมหรืออินทิกรัลในทางคณิตศาสตร์แบบปกติ และ “/” เป็นเพียงเครื่องหมายคั่นแยกมิได้หมายถึงการดำเนินการหาร



รูปที่ 2.1 ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของเซตแบบเดิมและ ฟัซซีเซต

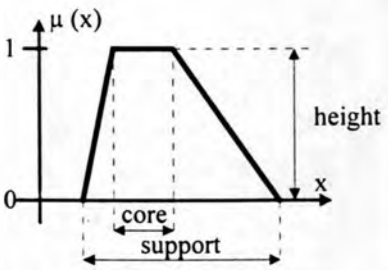
ฟัซซีเซตเป็นการขยายแนวคิดของเซตแบบปกติ(ซึ่งคือ crisp set) ที่มีค่าของฟังก์ชันการเป็นสมาชิกเพียงสองค่าคือ {0,1} รูปที่ 2.1 แสดงตัวอย่างของเซตแบบปกติเทียบกับฟัซซีเซต

จากการที่ฟัซซีเซตถูกกำหนดลักษณะสมบัติโดยฟังก์ชันการเป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ ดังนั้นในบทความโดยทั่วไปเกี่ยวกับระบบฟัซซีมักจะมีการเรียก *ฟัซซีเซต* โดยหมายถึง *ฟังก์ชันการเป็นสมาชิก* หรือกลับกัน ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกใช้ทั้งสองคำนี้โดยหมายถึงสิ่งเดียวกัน หากมิได้ระบุชี้เป็นอย่างอื่น

นิยาม 2.2 *ซัพพอร์ต(Support) และ แกน(Core)* : ซัพพอร์ตของฟัซซีเซต F คือเซตแบบดั้งเดิมของทุกๆจุด $u \in U$ ที่มีค่าระดับการเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต F มากกว่าศูนย์ และแกนของฟัซซีเซต F คือเซตแบบดั้งเดิมของทุกๆจุด $u \in U$ ที่มีค่าระดับการเป็นสมาชิกของฟัซซีเซต F เท่ากับหนึ่ง

$$\mathrm{supp}(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) > 0\}$$
$$\mathrm{core}(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) = 1\}$$

นิยาม 2.3 *ความสูง(Height)และนอร์แมล(Normal)* : ความสูงของฟัซซีเซต F คือค่าสูงสุดของ $\mu_F(u)$ ใน U และจะเรียกฟัซซีเซต F ว่าเป็นนอร์แมล ถ้าความสูงของ F เป็น 1.0



รูปที่ 2.2 ซัพพอร์ต แกน และ ความสูงของฟัซซีเซต

นิยาม 2.4 *เซตโทนฟัซซี(Fuzzy Singleton)* : ถ้าซัพพอร์ตของฟัซซีเซต F เป็นเพียงจุดๆเดียวโดยที่มีค่าระดับการเป็นสมาชิกเท่ากับ 1 จะเรียก F นี้ว่าเป็นเซตโทนฟัซซี

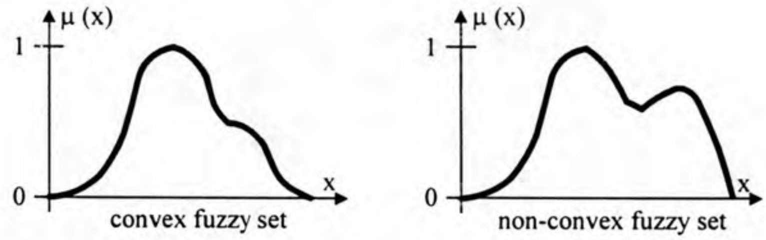
นิยาม 2.5 *α-cut* : α-cut ของฟัซซีเซต F เขียนแทนด้วย F_α คือเซตแบบดั้งเดิมของทุกจุด $u \in U$ ที่มีค่าระดับการเป็นสมาชิกมากกว่าหรือเท่ากับ α สังเกตว่าเซตα-cutจะตัดเอาจุดที่มีระดับการเป็นสมาชิกต่ำกว่า αที่สนใจ ออกจากการพิจารณา α-cutของฟัซซีเซตบางครั้งเรียกว่า *เซตระดับ* (level set) นอกจากนี้ strong α-cut เขียนแทนด้วย $F_{\bar{\alpha}}$ นิยามได้เช่นเดียวกันแต่ให้ตัดกรณีที่ค่าระดับการเป็นสมาชิกเท่ากับ α ออกไปด้วย

$$F_\alpha = \alpha - cut(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) \geq \alpha\}$$
$$F_{\bar{\alpha}} = \bar{\alpha} - cut(F) = \{u \in U \mid \mu_F(u) > \alpha\}$$

นิยาม 2.6 *เซตนูนฟัซซี(Convex Fuzzy Set)* : เราจะเรียกฟัซซีเซต F ว่าเป็นเซตนูนฟัซซี ถ้าสำหรับ $\forall u_1, u_2, u_3 \in U$ และ $u_1 < u_2 < u_3$ แล้ว $\mu_F(u_2) \geq \min\left(\mu_F(u_1),\ \mu_F(u_3)\right)$ หรือหากซัพพอร์ตของมันเป็นเซตของจำนวนจริง และสำหรับทุกๆ u ในช่วง $[u_1, u_2]$ ใดๆ

$$\mu_F(u) \quad \geq \quad \min[\ \mu_F(u_1),\ \mu_F(u_2)\ ]$$

หรือ $\quad \forall u_1, u_2 \in U \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \mu_F(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq \min\left(\mu_F(u_1),\ \mu_F(u_2)\right)$



รูปที่ 2.3 เซตนูนฟัซซี

นิยาม 2.7 *จำนวนฟัซซี(Fuzzy Number)* : จำนวนฟัซซีเป็นเซตนูนฟัซซีซึ่งนอร์แมล

<u>หลักการยืดขยาย</u>

หลักการยืดขยายเสนอโดย Zadeh (1975a, 1975b, 1976) เป็นเครื่องมือสำคัญอย่างหนึ่งในทฤษฎีฟัซซีเซตที่ช่วยให้สามารถขยายเครื่องมือทางคณิตศาสตร์แบบเดิมไปสู่เครื่องมือทางคณิตศาสตร์แบบฟัซซีได้

นิยาม 2.8 *หลักการยืดขยาย (The extension principle)* : กำหนดให้ U เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเอกภพสัมพัทธ์ $U=U_1 \times \ldots \times U_r$ และ $A_1, \ldots, A_r$ เป็น r ฟัซซีเซตใน $U_1, \ldots, U_r$ ตามลำดับ และ f เป็นการส่งจาก U ไปเอกภพสัมพัทธ์ V โดยที่ $v = f(u_1, \ldots, u_r)$ แล้วหลักการยืดขยายทำให้การส่ง f ของฟัซซีเซต A ใน U ได้เป็นฟัซซีเซต B ใน V โดย

$$B = \left\{ v, \mu_B(v)) \;\middle|\; v = f(u_1, \cdots, u_r), (u_1, \cdots, u_r) \in U \right\}$$

โดยที่
$$\mu_B(v) = \sup_{\substack{u_1, \cdots, u_r \\ v = f(u_1, \cdots, u_r)}} \min\left(\mu_{A_1}(u_1), \cdots, \mu_{A_r}(u_r)\right)$$

เพื่อให้เห็นภาพชัดเจนขึ้นลองดูตัวอย่างง่ายๆเช่น กำหนดให้ A เป็นจำนวนฟัซซี(ฟัซซีเซต) "ประมาณ 3"กำหนดบนเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็ม โดยที่ $A = 0.5 / 2 + 1 / 3 + 0.5 / 4$ และ f เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(x) = x^2 + 3$ ถ้าใช้หลักการยืดขยายจะสามารถสร้างจำนวนฟัซซีซึ่งเป็นผลลัพธ์จากฟังก์ชัน f ของจำนวนฟัซซี"ประมาณ 3"ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(A) &= 0.5 / (2^2 + 3) + 1 / (3^2 + 3) + 0.5 / (4^2 + 3) \\ &= 0.5 / 7 + 1 / 12 + 0.5 / 19 \end{aligned}$$

<u>การดำเนินการเชิงทฤษฎีเซต</u>

เพื่อให้สอดคล้องกับการดำเนินการเชิงเซตแบบปกติ ฟัซซีเซตก็มีการดำเนินการผลผนวก ผลตัด และ คอมพลีเมนต์ ซึ่งมีการนิยามโดยเริ่มแรกโดย Zadeh (1965) ก่อนที่จะกล่าวถึงการดำเนินการเหล่านี้ จะกล่าวถึงนิยามของความเท่ากันและการบรรจุ (containment หรือ inclusion) ซึ่งมีบทบาทสำคัญในการศึกษาฟัซซีเซต

นิยาม 2.9 *ความเท่ากัน(Equality)* : ฟัซซีเซต A เท่ากับฟัซซีเซต B ($A=B$) ก็ต่อเมื่อ

$$\forall u \in U \qquad \mu_A(u) = \mu_B(u)$$

นิยาม 2.10 *การบรรจุ หรือ เซตย่อยฟัซซี(Fuzzy Subset)* : เราจะกล่าวว่า ฟัซซีเซต A ถูกบรรจุอยู่ (contained) ในฟัซซีเซตB หรือ A เป็นเซตย่อยของB หรือ A เล็กกว่าหรือเท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$ หรือเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $A \subseteq B \leftrightarrow \mu_A(u) \le \mu_B(u) \quad \forall u \in U$

นิยาม 2.11 *คอมพลีเมนต์(Complement)* : ให้ A เป็นฟัซซีเซตใน U คอมพลีเมนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\overline{A}$ คือฟัซซีเซตใน U ซึ่งกำหนดค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $u \in U$ โดย

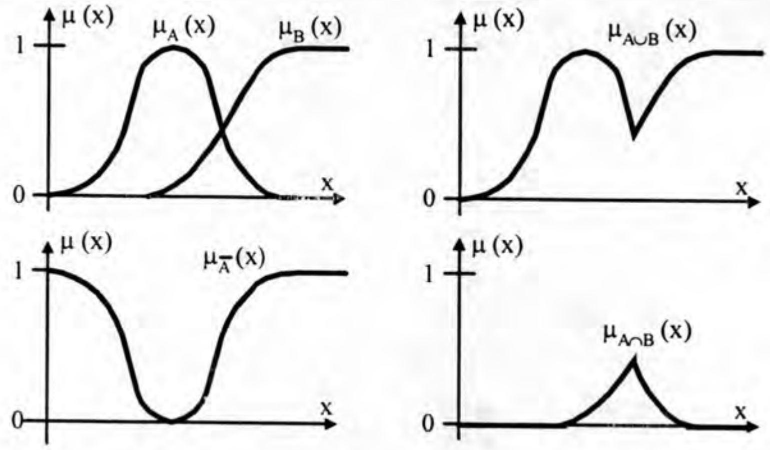
$$\mu_A(u) = 1 - \mu_A(u)$$

นิยาม 2.12 *ผลตัด(Intersection)* : ให้ A และ B เป็นฟัซซีเซตใน U ผลตัด $A \cap B$ ของ A และ B คือฟัซซีเซตใน U ซึ่งกำหนดค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $u \in U$ โดย

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

นิยาม 2.13 *ผลผนวก(Union)* : ให้ A และ B เป็นฟัซซีเซตใน U ผลผนวก $A \cup B$ ของ A และ B คือฟัซซีเซตใน U ซึ่งกำหนดค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิกสำหรับทุกๆ $u \in U$ โดย

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$



รูปที่ 2.4 การดำเนินการคอมพลีเมนต์ ผลผนวก และผลตัด

Zadeh (1965) ได้ชี้ให้เห็นว่าจากนิยามของผลผนวกข้างต้น ผลผนวกที่ได้เป็นฟัซซีเซตที่เล็กที่สุดที่บรรจุได้ทั้ง A และ B ส่วนนิยามของผลตัดดังกล่าว ผลตัดที่ได้เป็นฟัซซีเซตที่ใหญ่ที่สุดที่ถูกบรรจุอยู่ได้ในทั้ง A และ B อย่างไรก็ตามนิยาม 2.11 ถึง 2.13 เป็นเพียงตัวอย่างหนึ่งของการกำหนดตัวดำเนินการต่างๆเหล่านั้นซึ่งไม่สามารถกำหนดให้เป็นอย่างหนึ่งเดียวได้ เนื่องจากเซตแบบดั้งเดิมสามารถมองว่าเป็นกรณีเฉพาะของฟัซซีเซต การดำเนินการที่กำหนดขึ้นข้างต้นจะต้องยังคงต้องใช้ได้อยู่ด้วย แต่กรณีที่นอกเหนือไปจากเซตแบบเดิมนั้นสามารถมองได้จากหลายแง่มุม ซึ่งสัจพจน์(axiom)ที่ใช้กำหนดคุณสมบัติของตัวดำเนินการดังกล่าวได้มีอธิบายไว้โดยละเอียดโดย Klir และ Folger (1988) และ Dubois และ Prade (1980) การเลือกกำหนดตัวดำเนินการให้เป็นอย่างไรก็ขึ้นกับลักษณะการตีความและการนำไปใช้(Zimmermann, 1991) ซึ่งได้มีการกำหนดตัวดำเนินการอื่นอีกมาก แต่ที่สำคัญได้แก่ตัวดำเนินการในกลุ่มของ Triangular norm (t-norm) และ Triangular conorm (t-conorm หรือ s-norm) เพื่อใช้เป็นการดำเนินการผลตัดและผลผนวกตามลำดับ

นิยาม 2.14 *t-norm และ t-conorm* : t-norm เขียนแทนด้วย $*$ เป็นตัวดำเนินการจาก $[0,1]\times[0,1]$ไปยัง$[0,1]$ ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

(1) $a*b = b*a$ (คุณสมบัติการสลับที่)

(2) $(a*b)*c = a*(b*c)$ (คุณสมบัติการจัดหมู่)

(3) ถ้า $a \le c$ แล้ว $a*b \le c*b$ (คุณสมบัติการไม่ลดลง)

(4) $a*1 = a$ (เงื่อนไขขอบเขต)

ตัวอย่างของ t-norm เช่น min $a \wedge b = \min(a,b)$

algebraic product $a \cdot b = ab$

bounded product $a \otimes b = \max(0, a+b-1)$

drastic product $a \underset{\blacklozenge}{\,} b = \begin{cases} \min(a,b) & \text{if} \quad \max(a,b)=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

ส่วน t-conorm เขียนแทนด้วย $\dot{+}$ เป็นตัวดำเนินการจาก $[0,1]\times[0,1]$ ไปยัง$[0,1]$ ซึ่งมีคุณสมบัติตามข้อ(1)ถึง(3) เหมือน t-norm โดยเปลี่ยนสัญลักษณ์จาก $*$ เป็น $\dot{+}$ และ

(4) $a \dot{+} 0 = a$

ตัวอย่างของ t-conorm เช่น max $a \vee b = \max(a,b)$

algebraic sum $a \hat{+} b = a+b-ab$

bounded sum $a \oplus b = \min(1, a+b)$

drastic sum $a \oplus b = \begin{cases} \max(a,b) & \text{if} \quad \min(a,b)=0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

t-norm และ t-conorm ที่เลือกใช้หากต้องใช้ร่วมกัน โดยทั่วไปแล้วจะเลือกใช้ในลักษณะของตัวดำเนินการที่เป็นคู่ที่มีคุณสมบัติร่วมเป็น *ทวิภาวะ*(duality)ของกันและกัน ซึ่งจะสอดคล้องกันกับการทำให้เป็นทั่วไปของ DeMorgan's laws ตามความสัมพันธ์

$$a*b = c\big(c(a) \dot{+} c(b)\big)$$

และ

$$a \dot{+} b = c\big(c(a)*c(b)\big)$$

โดยที่ c เป็นตัวดำเนินการคอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซต สำหรับตัวดำเนินการคอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซตในทางวิศวกรรมส่วนมากแล้วจะใช้เป็นการดำเนินการตามนิยามข้างต้น แต่คอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซตในกรณีทั่วไปเขียนแทนด้วย $c(.)$ เป็นตัวดำเนินการจาก$[0,1]$ไปยัง$[0,1]$ ซึ่งมีคุณสมบัติหลักที่จำเป็นของการดำเนินการคอมพลีเมนต์คือ

(1) $c(0)=1$ และ $c(1)=0$ (เงื่อนไขขอบเขต)

(2) ถ้า $a<b$ แล้ว $c(b)>c(a)$

(3) $c(c(a))=a$ (involutive)

จากนิยามของฟัซซีเซตและการเลือกกำหนดตัวดำเนินการทางทฤษฎีเซตดังกล่าวข้างต้นที่เหมาะสม กฎทางคณิตศาสตร์ต่างๆที่ใช้ในทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิมยังคงสามารถใช้ได้ในทฤษฎีฟัซซีเซต ยกเว้น law of contradiction กับ law of excluded-middle กล่าวคือ

$$A \cup \overline{A} \neq U$$
$$A \cap \overline{A} \neq \phi$$

<u>ความสัมพันธ์ฟัซซีและผลประกอบ</u>

นิยาม 2.15 *ผลคูณคาร์ทีเซียน(Cartesian Product)* : ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A_1 , ... , A_n เป็นฟัซซีเซตในปริภูมิผลคูณ (product space) $U_1 \times ... \times U_n$ โดยที่ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกนิยามด้วย

$$\mu_{A_1 \times \cdots \times A_n}(u_1, \cdots, u_n) = \min\{\mu_{A_1}(u_1), \cdots, \mu_{A_n}(u_n)\}$$

นิยาม 2.16 *ความสัมพันธ์ฟัซซี(Fuzzy Relation)* : ความสัมพันธ์ฟัซซี R ใน $U_1 \times ... \times U_n$ เป็นฟัซซีเซตใน $U_1 \times ... \times U_n$ กำหนดโดย

$$R = \int_{U_1 \times \ldots \times U_n} \mu_R(u_1, \cdots, u_n)/(u_1, \cdots, u_n)$$

เช่นให้ U และ V เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่พิจารณา ความสัมพันธ์ฟัซซี R เป็นฟัซซีเซตในปริภูมิ $U \times V$ และมีค่าฟังก์ชันการเป็นสมาชิก $\mu_R(u,v)$ โดยที่ $u \in U$ และ $v \in V$ เขียนความสัมพันธ์ฟัซซีได้เป็น

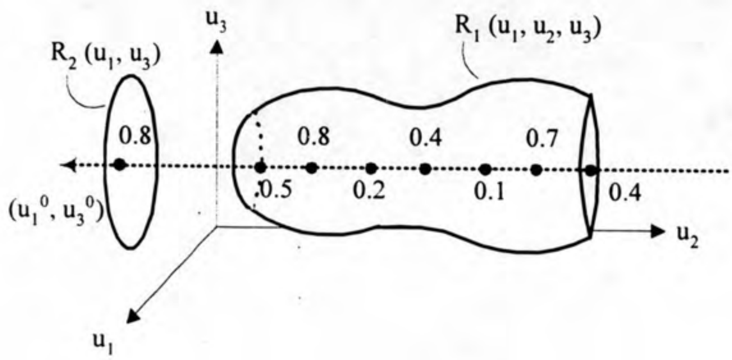
$$R = \int_{U \times V} \mu_R(u,v)/(u,v)$$

สังเกตว่าความสัมพันธ์ฟัซซียังคงเป็นฟัซซีเซต แต่อาจเป็นในรูปของตัวแปรที่มีหลายมิติขึ้น ดังนั้น คุณสมบัติรวมทั้งการดำเนินการต่างๆของการเป็นฟัซซีเซต ก็สามารถขยายขึ้นมาใช้ได้กับความสัมพันธ์ฟัซซี เช่นถ้า R และ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งกำหนดบนปริภูมิผลคูณเดียวกัน ก็จะสามารถสร้างความสัมพันธ์ฟัซซีใหม่ในปริภูมิเดิมได้ เช่น ถ้ากำหนดความสัมพันธ์ฟัซซี R = "x มีสีเหมือนกับ y", S = "x มีขนาดใกล้เคียงกับ y" บนปริภูมิ $X \times Y$แล้วความสัมพันธ์ "x มีสีเหมือน<u>หรือ</u>ขนาดใกล้เคียงกับ y" กำหนดได้โดย $R \cup S$ หรือ ความสัมพันธ์ "x มีสีเหมือน<u>และ</u>ขนาดใกล้เคียงกับ y" กำหนดได้โดย $R \cap S$ เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีการดำเนินการพื้นฐานอื่นอีกที่สำคัญสำหรับเรื่องของความสัมพันธ์ฟัซซี ซึ่งเป็นการฉายความสัมพันธ์ฟัซซีจากปริภูมิหนึ่งไปยังปริภูมิย่อยที่กำหนด และการดำเนินการในทางกลับกัน

นิยาม 2.17 *โพรเจกชัน(projection)* : ถ้า R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีของ n สิ่งใน $U=U_1 \times \ldots \times U_n$ แล้ว S เป็นโพรเจกชันของ R บน $V=U_{i1} \times \ldots \times U_{ik}$ เป็น ความสัมพันธ์ฟัซซีของ k สิ่ง ใน U ซึ่งนิยามโดย

$$S = \mathrm{proj}_V(R)$$
$$= \int_V \sup_{(u_{ik+1},\cdots,u_{in})} \mu_R(u_1,\cdots,u_n)/(u_{i1},\cdots,u_{ik})$$

โดยที่ $\{i_{i1}, \ldots, i_{ik}\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ และ $\{i_{ik+1}, \ldots, i_n\}$ เป็นคอมพลีเมนต์ของ $\{i_{i1}, \ldots, i_{ik}\}$ บน $\{1, 2, \ldots, n\}$

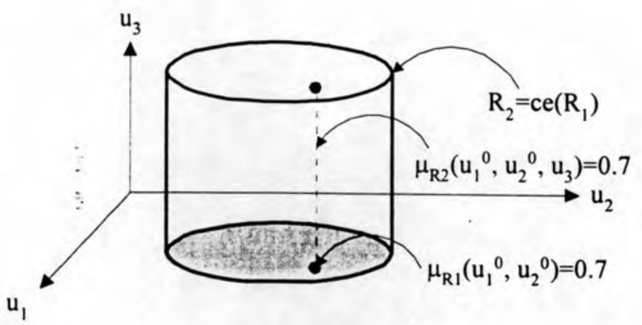


รูปที่ 2.5 โพรเจกชันจาก$R_1(u_1,u_2,u_3)$ ไปบน$R_2(u_1,u_3)$

นิยาม 2.18 *การยืดขยายทรงกระบอก(cylindrical extension)* : ถ้า S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $V=U_{i1} \times \ldots \times U_{ik}$ แล้ว R เป็นการยืดขยายทรงกระบอกของ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีไปยัง $U=U_1 \times \ldots \times U_n$ นิยามโดย

$$R = \mathrm{ce}_U(S)$$
$$= \int_U \mu_S(u_{i1},\cdots,u_{ik})/(u_1,\cdots,u_n)$$

โดยที่ $\{i_{i1}, \ldots, i_{ik}\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$



รูปที่ 2.6 การยืดขยายทรงกระบอกจาก $R_1(u_1,u_2)$ ไปเป็น $R_2(u_1,u_2,u_3)$

ถึงแม้ว่าการยืดขยายทรงกระบอกจะเป็นการดำเนินการตรงข้ามกับโพรเจกชัน อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้ว ce_U ($\mathrm{proj}_Y(R)$) ไม่เท่ากับ R นั่นคือมันไม่ได้เป็นการดำเนินการผกผันของกันและกัน ดังแสดงในตัวอย่าง

ตัวอย่าง ให้ $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ และ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซี "x ใหญ่กว่า y" ซึ่งแสดงได้ด้วยเมตริกซ์ความสัมพันธ์ฟัซซี

	y_1	y_2	y_3	y_4	**Proj on X**
x_1	.8	1	.1	.7	**1**
x_2	0	.8	0	0	**.8**
x_3	.9	1	.7	.8	**1**
Proj on Y	**.9**	**1**	**.7**	**.8**	

A เป็นโพรเจกชันของ R บน X จะได้ $A = 1/x_1 + .8/x_2 + 1/x_3$

$\mathrm{ce}_{X\times Y}(A) =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	1	1
x_2	.8	.8	.8	.8
x_3	1	1	1	1

B เป็นโพรเจกชันของ R บน X จะได้ $B = .9/y_1 + 1/y_2 + .7/y_3 + .8/y_4$

$\mathrm{ce}_{X\times Y}(B) =$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	.9	1	.7	.8
x_2	.9	1	.7	.8
x_3	.9	1	.7	.8

เห็นได้ชัดเจนว่าทั้ง $\mathrm{ce}_{X\times Y}(A)$ และ $\mathrm{ce}_{X\times Y}(B)$ ต่างไม่ได้กลับคืนมาเป็นความสัมพันธ์ฟัซซี R ◊

เมื่อความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งกำหนดในปริภูมิที่ต่างกันแต่มีการใช้ฟัซซีเซตในปริภูมิย่อยร่วมกัน เมื่อต้องการสร้างความสัมพันธ์ใหม่อันเกิดจากการรวมกันของความสัมพันธ์ฟัซซีเหล่านั้น โดยอาศัยการยืดขยายทรงกระบอกและโพรเจกชันเข้าช่วย ทำให้เกิดการดำเนินการผลประกอบซึ่งเป็นพื้นฐานสำคัญที่จะนำไปใช้งานได้อย่างกว้างขวางต่อไป

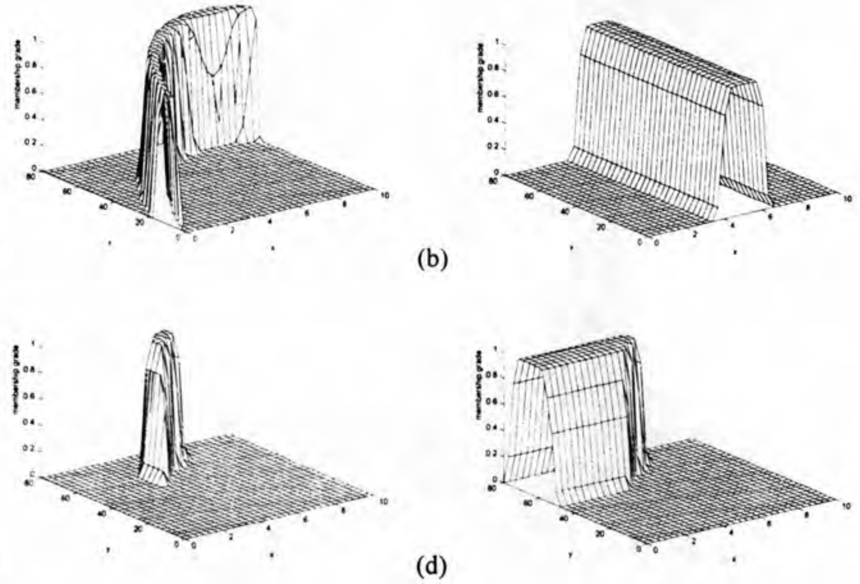
นิยาม 2.19 *ผลประกอบ(Composition)* : ให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $U\times V$ และ $V\times W$ ตามลำดับ ผลประกอบ ของ R กับ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบน $U\times W$ กำหนดโดย

$$R \circ S = \mathrm{proj}_{U\times W}\left(\mathrm{ce}_{U\times V\times W}(R) \cap \mathrm{ce}_{U\times V\times W}(S)\right)$$

โดยที่ $ce_{U\times V\times W}(R)$ และ $ce_{U\times V\times W}(S)$ เป็นการยืดขยายทรงกระบอกไปยังปริภูมิ $U\times V\times W$ ของ R และ S ตามลำดับ

โดยทั่วไปแล้ว $R\circ S\neq S\circ R$ นอกจากนี้ยังเป็นไปได้อีกด้วยว่า R อาจเป็นเพียงฟัซซีเซตใน V การดำเนินการข้างต้นยังคงใช้งานได้ตามนิยาม

ตัวอย่าง ให้ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีบนปริภูมิ $X\times Y$ และ A เป็นฟัซซีเซตบน X ฟัซซีเซต B บน Y เกิดจากผลประกอบ $R\circ S$ แสดงการดำเนินการได้ดังรูปที่ 2.7



(a) (b) (c) (d)

รูปที่ 2.7 การดำเนินการผลประกอบ

รูป(a) แสดงความสัมพันธ์ฟัซซี R รูป(b) แสดงการยืดขยายทรงกระบอกของ A บน $X\times Y$ เพื่อให้อยู่ในปริภูมิเดียวกับ R รูป(c) แสดงผลตัดระหว่าง(a)กับ(b) จากนั้นโพรเจกผลที่ได้ไปบน Y เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ของ $R\circ S$ ที่ต้องการ ดังรูป(d) ◊

กำหนดให้ R และ S เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีใน $U\times V$ และ $V\times W$ ตามลำดับ ผลประกอบ $R\circ S$ ที่ใช้โดยทั่วไปอยู่ในรูปแบบของความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งมีฟังก์ชันกำหนดลักษณะเป็น

$$\mu_{R\circ S}(u,w) = \vee_{v\in V}\ [\ \mu_R(u,v)\star\mu_S(v,w)\ ]$$

โดยที่ $u\in U,\ v\in V,\ w\in W$, $\vee$ เป็นตัวดำเนินการในกลุ่มt-conorm ซึ่งโดยทั่วไปกำหนดให้เป็นsup และ $\star$ สามารถเป็นตัวดำเนินการใดๆในกลุ่ม t-norm เช่น ถ้าให้ $\vee$ เป็นsup และ$\star$เป็น min จะได้ผลประกอบsup-min หรือ ให้ $\star$เป็นการคูณ(product) ก็จะได้เป็นผลประกอบsup-product เป็นต้น การดำเนินการผลประกอบ 2 อย่างนี้นิยมใช้ทั่วไปในการควบคุมแบบฟัซซีลอจิกซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไป

ฟัซซีลอจิกและการใช้เหตุผลโดยประมาณ

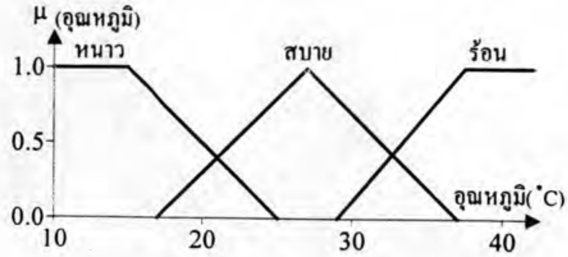
เช่นเดียวกับที่ทฤษฎีเซตแบบดั้งเดิมเป็นรากฐานสำคัญให้กับลอจิกแบบปกติ ทฤษฎีฟัซซีเซตก็เป็นรากฐานที่สำคัญให้กับฟัซซีลอจิก หมายความว่าการดำเนินการทางทฤษฎีฟัซซีเซตจะเป็นพื้นฐานให้กับการดำเนินการเชิงตรรก การดำเนินการที่กำหนดสำหรับเซตเช่น ผลตัด ผลผนวก และคอมพลีเมนต์จะสอดคล้องกับความหมายทางตรรก **และ** **หรือ** และ **นิเสธ** ตามลำดับ อย่างไรก็ตาม ดังที่กล่าวแล้วในก่อนหน้านี้ในกรณีของฟัซซีเซต การดำเนินการเชิงทฤษฎีฟัซซีเซตสามารถกำหนดได้ด้วยหลายรูปแบบแทนที่จะเป็นหนึ่งเดียว แน่นอนว่าลักษณะเช่นนั้นจะเกิดขึ้นเช่นเดียวกันในฟัซซีลอจิก รวมทั้งการอนุมานในฟัซซีลอจิกด้วย ซึ่งได้มีผู้ทำการศึกษาเปรียบเทียบการอนุมานด้วยวิธีการต่างๆ หลายคน (Baldwin and Pilsworth, 1980; Fukami *et al.*, 1980; Mizumoto, 1982; Kiszka *et al.*, 1985; Nakanishi *et al.*, 1993)

ฟัซซีลอจิกเป็นการแก้ปัญหาด้วยการอนุมานโดยผ่านข้อความรู้(knowledge)ในรูปแบบของกฎเงื่อนไข ซึ่งเป็นรูปแบบหนึ่งของ*การใช้เหตุผลโดยประมาณ(approximate reasoning)* (Zadeh, 1979) ต่อไปนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานที่สำคัญของฟัซซีลอจิกคือ กฎฟัซซี และการอนุมานฟัซซี

ตัวแปรเชิงภาษา

นิยาม 2.20 *ตัวแปรเชิงภาษา(Linguistic Variable)* : ตัวแปรเชิงภาษากำหนดลักษณะโดย $(x, T(x), U, G, M)$ โดยที่ x เป็นชื่อของตัวแปร; $T(x)$ เป็นเทอมเซตของ x นั่นคือชุดของชื่อของค่าเชิงภาษาที่เป็นคำของ x โดยที่แต่ละค่าเป็นฟัซซีเซตกำหนดบนเอกภพสัมพัทธ์ U; G เป็นกฎวากยสัมพันธ์ที่ใช้ในการกำหนดชื่อของค่าของตัวแปร x; M เป็นกฎทางความหมายเพื่อกำหนดความหมายของค่าเชิงภาษาแต่ละค่า

หากกล่าวอย่างง่ายๆคือว่าถ้าตัวแปรสามารถมีค่าของตัวแปรเป็นคำในภาษาหนึ่งๆที่มีความหมายก็ให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรเชิงภาษา คำที่ใช้เป็นค่าของตัวแปรภาษานี้ปกติก็จะใช้มาเป็นชื่อของฟัซซีเซตที่กำหนดความหมายของคำนั่นเอง ตัวอย่างเช่นให้ *อุณหภูมิ* เป็นตัวแปรเชิงภาษา โดยมีค่าเชิงภาษาในเทอมเซตเป็น *หนาว* *สบาย* และ *ร้อน* กำหนดค่าอยู่ในช่วง 10°C ถึง 40°C นอกจากนี้ยังมีการกำหนดกฎวากยสัมพันธ์ G เช่นเทอม *ร้อน* ต้องมีความหมายว่ามีค่ามากกว่าเทอม *สบาย* เป็นต้น โดยที่ความหมายของค่าเชิงภาษา M สามารถแสดงได้ด้วยฟังก์ชันการเป็นสมาชิกดังรูปที่ 2.8 ดังนั้นตัวแปรเชิงภาษานี้กำหนดลักษณะโดย (*อุณหภูมิ* , {*หนาว*, *สบาย*, *ร้อน*}, [10°C , 40°C], G, M)



รูปที่ 2.8 ตัวแปรเชิงภาษา "อุณหภูมิ"

จะเห็นได้ชัดเจนว่าค่าจำนวน 27˚C มีความง่ายกว่าฟังก์ชัน*สบาย* แต่ *สบาย* เป็นตัวเลือกหนึ่งจากทั้งหมดสามตัวเลือก ในขณะที่จำนวน 27 อาจเป็นตัวเลือกหนึ่งในค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด 100 ตัวเลือกเป็นต้น จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นรูปแบบการสรุปข้อมูลซึ่งรูปแบบนี้เรียกว่า granulation แม้ว่าการควอนไทซ์แบบปกติก็สามารถให้ผลการย่อข้อมูลดังข้างต้นได้เช่นกัน แต่ในกรณีของการควอนไทซ์ค่าจะเป็นช่วงในขณะที่ granulation ค่าเป็นฟัซซีเซตที่มีการซ้อนเกยกัน ซึ่งมีข้อดีเหนือการควอนไทซ์คือ 1) มีความเป็นทั่วไปกว่า 2) เลียนแบบการตีความค่าเชิงภาษาของมนุษย์ 3) การเปลี่ยนแปลงจากค่าเชิงภาษาหนึ่งไปเป็นอีกค่าหนึ่งซึ่งอยู่ติดกัน จะมีความต่อเนื่องแทนที่จะเปลี่ยนแปลงอย่างเฉียบพลัน

ข้อสังเกตสำคัญประการหนึ่งที่พึงตระหนักในแนวคิดของทฤษฎีฟัซซีเซตในที่นี้คือ แม้ว่าเราสามารถที่จะแทนสารสนเทศที่ไม่ชัดเจนได้โดยกำหนดความหมายให้กับค่าเชิงภาษาด้วยฟัซซีเซต แต่ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่จะกำหนดให้เป็นความหมายนี้ จะเป็นลักษณะขึ้นกับผู้กำหนดหรือผู้สังเกต (subjective) กล่าวคือ ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกที่กำหนดสำหรับแนวคิดถึงสิ่งเดียวกัน เช่นอุณหภูมิที่เย็นสบายของแต่ละบุคคลอาจจะแตกต่างกันออกไปตามเนื้อหา(context)ที่กล่าวถึง สถานการณ์ กิจกรรม หรือแม้แต่เวลาอีกด้วย แต่อย่างไรก็ตามแนวคิดของการใช้ฟัซซีเซตในตัวแปรเชิงภาษาก็ยังเป็นเครื่องมือพื้นฐานสำคัญที่จะสามารถนำไปใช้งานได้อย่างมีประสิทธิผล

<u>ประพจน์ฟัซซี</u>

องค์ประกอบสำคัญอันหนึ่งในฟัซซีลอจิกคือ ประพจน์ฟัซซี ประพจน์ฟัซซีใช้ในการแทนข้อความเช่น "*ค่าผิดพลาด*เป็น*บวกขนาดเล็ก*" ด้วยสัญลักษณ์ "E is PS" โดยที่ E เป็นตัวแปรเชิงภาษาที่ใช้แทน *ค่าผิดพลาด* ในทางกายภาพ และ PS เป็นค่าเชิงภาษาแทนคำว่า *บวกขนาดเล็ก* (Positive Small) ซึ่งสามารถกำหนดความหมายได้โดยอาศัยฟัซซีเซตที่ประกอบกับค่าเชิงภาษานั้นๆ ความหมายของสัญลักษณ์ "E is PS" นี้ จะเป็นตัวแสดงระดับความสอดคล้องระหว่างค่าทางกายภาพของตัวแปร *ค่าผิดพลาด* กับค่าเชิงภาษา *บวกขนาดเล็ก* ในประพจน์ฟัซซี

ประพจน์ฟัซซีเป็นพื้นฐานที่สำคัญของฟัซซีลอจิก ประพจน์ฟัซซีสามารถเชื่อมต่อเข้าด้วยกันโดยใช้ตัวเชื่อมเชิงตรรกเช่น **และ** และ **หรือ** นอกจากนี้ยังสามารถใช้คำขยายเชิงภาษาเข้ามาประกอบกับประพจน์ฟัซซีเพื่อดัดแปลงความหมายของค่าเชิงภาษาที่ใช้ เช่นคำขยายว่า *มาก* ใช้เพื่อเปลี่ยนความหมายของ "x มีอุณหภูมิสูง" ไปเป็น "x มีอุณหภูมิสูง*มาก*"

1. <u>ตัวเชื่อมเชิงตรรก</u>

ในลอจิกแบบดั้งเดิม ประพจน์สามารถเชื่อมต่อกันได้ทำให้ได้เป็นประพจน์ใหม่ด้วยตัวเชื่อมเชิงตรรก **และ** และ **หรือ** ในฟัซซีลอจิก ก็สามารถแทนได้โดยใช้ *ตัวเชื่อมการร่วมกัน* และ *ตัวเชื่อมการเลือก* ตามลำดับ

นิยาม 2.21 *ตัวเชื่อมการร่วมกันฟัซซี(Fuzzy Conjunction)* : ตัวเชื่อมการร่วมกันฟัซซี ($\wedge$) สำหรับฟัซซีเซต A ใน U และ B ใน V ทำให้เกิดความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งกำหนดสำหรับทุก $u \in U$ และ $v \in V$ ด้วย

$$\begin{aligned} A \wedge B &= A \times B \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) * \mu_B(u)/(u,v) \end{aligned}$$

โดยที่ $*$ เป็นตัวดำเนินการในกลุ่มของ t-norm

นิยาม 2.22 *ตัวเชื่อมการเลือกฟัซซี(Fuzzy Disjunction)* : ตัวเชื่อมการเลือกฟัซซี($\vee$) สำหรับฟัซซีเซต A ใน U และ B ใน V ทำให้เกิดความสัมพันธ์ฟัซซี กำหนดสำหรับทุก $u \in U$ และ $v \in V$ ด้วย

$$\begin{aligned} A \vee B &= A \times B \\ &= \int_{U \times V} \mu_A(u) \dotplus \mu_B(u)/(u,v) \end{aligned}$$

โดยที่ $\dotplus$ เป็นตัวดำเนินการในกลุ่มของ t-conorm

ดังที่กล่าวแล้วว่า t-norm และ t-conorm สามารถกำหนดได้หลายรูปแบบ โดยที่ยังไม่สามารถกำหนดแนวทางทั่วไปที่จะเลือกว่าควรจะกำหนดเป็นเช่นใดในกรณีต่างๆบ้าง ทั่วไปแล้วมักจะใช้ตัวดำเนินการซึ่งเสนอตั้งแต่เริ่มแรกโดย Zadeh (1965) ซึ่งมีข้อดีในการใช้เป็นตัวเชื่อมเชิงตรรกในกรณีที่ความซ้ำซ้อนจะถูกละเลย กล่าวคือเมื่อเชื่อม 2 ประพจน์ฟัซซีซึ่งเท่ากันจะให้ผลออกมาดังเดิม

$$\mu_{A \wedge A}(u) = \min\big(\mu_A(u), \mu_A(u)\big) = \mu_A(u)$$

$$\mu_{A \vee A}(u) = \max\big(\mu_A(u), \mu_A(u)\big) = \mu_A(u)$$

ซึ่งถ้าเลือกตัวดำเนินการอื่นในกลุ่มของ t-norm และ t-conorm จะไม่ได้คุณสมบัตินี้ อย่างไรก็ตามเมื่อประพจน์ฟัซซีที่จะมาเชื่อมกันไม่ได้เท่ากัน แต่มีความสัมพันธ์ร่วมหรือมีปฏิสัมพันธ์กัน

ก็เป็นสาเหตุที่ทำให้เลือกใช้ตัวดำเนินการอื่นแทน max หรือ min ความสัมพันธ์ร่วมหรือปฏิสัมพันธ์ของประพจน์ฟัซซีแสดงกรณีซึ่งมีความขึ้นแก่กันระหว่างประพจน์ฟัซซี

and	or	หมายเหตุ
$\min(a,b)$	$\max(a,b)$	Zadeh
$\max(a+b-1,0)$	$\min(a+b,1)$	Lukasiewicz
ab	$a+b-ab$	probability

ตารางที่ 2.1 ตัวดำเนินการที่นิยมใช้สำหรับตัวเชื่อมเชิงตรรก

2. <u>นิเสธและคำขยายในประพจน์ฟัซซี</u>

เช่นเดียวกันกับตัวเชื่อมเชิงตรรกที่สามารถโยงเข้ากับผลตัดและผลผนวกของฟัซซีเซตได้ นิเสธของประพจน์ฟัซซีก็สามารถโยงเข้าสู่คอมพลีเมนต์ของฟัซซีเซต ตัวอย่างของประพจน์ฟัซซีที่มีนิเสธเช่น "ค่าความผิดพลาด*ไม่สูง*" โดยใช้ตัวดำเนินการคอมพลีเมนต์แบบมาตรฐาน $c(a) = 1-a$ จะได้ $\mu_{\text{ไม่สูง}}(u)=1-\mu_{\text{สูง}}(u)$

ในทำนองคล้ายกันกับนิเสธสำหรับประพจน์ฟัซซี เราสามารถใช้คำขยายเพื่อดัดแปลงประพจน์ฟัซซีได้ โดยการเพิ่มคำขยายสำหรับค่าเชิงภาษาที่เรียกว่า hedge ลงไปประกอบกับค่าเชิงภาษาในประพจน์ฟัซซีอีก เช่น *เกือบ*, *มาก*, *มากๆ* เป็นต้น แล้วปรับปรุงความหมายของค่าเชิงภาษาซึ่งกำหนดโดยฟัซซีเซต เช่น

$$m_p(A) = \int_U \mu_A^p(u)/u$$

โดยที่ m_p เป็นความหมายของค่าเชิงภาษาที่เปลี่ยนไปเป็น และ p เป็นพารามิเตอร์สำหรับการเปลี่ยนค่าเชิงภาษานั้น โดยที่ $p>0$ โดยทั่วไปแล้วมักจะใช้เพียงให้ $p=2$ สำหรับคำขยายว่า *มาก* และ $p=0.5$ สำหรับคำขยายคำว่า *เกือบ* สำหรับผลของ p ค่าอื่น ก็จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหมายในลักษณะต่างๆดังนี้

$0<p<1$: ฟัซซีเซตจะขยายออก (dilate) $m_p(A) \supset A$

$p=1$: ฟัซซีเซตไม่ถูกเปลี่ยนแปลง

$p>1$: ฟัซซีเซตจะบีบเข้า (concentrate) $m_p(A) \subset A$

<u>กฎฟัซซี</u>

เพื่อที่จะใช้เหตุผลด้วยฟัซซีลอจิก กฎฟัซซีต้องแสดงด้วยฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผล (implication) ในลอจิกแบบดั้งเดิม การแจงเหตุสู่ผลเขียนแทนด้วย $A \to B$ ซึ่งสามารถแสดงด้วยข้อความ "**if** A **then** B" ซึ่งมีตารางความจริงแสดงได้ดังตารางที่ 2.2

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ตารางที่ 2.2 ตารางความจริงของการแจงเหตุสู่ผลในแบบดั้งเดิม

ในตอนย่อยต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า กฎฟัซซีสามารถแทนด้วยความสัมพันธ์ฟัซซีโดยใช้ฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี และกล่าวถึงการแจงเหตุสู่ผลในฟัซซีลอจิก

1. <u>กฎเงื่อนไขฟัซซี</u>

กฎฟัซซีอยู่ในรูปแบบ ข้อความเงื่อนไขถ้า-แล้ว (if-then statement)

IF (ส่วนเงื่อนไข) **THEN** (ส่วนผล)

โดยที่ในส่วนหน้าและส่วนหลังของกฎถ้า-แล้วนี้ ประกอบด้วยแนวคิดของฟัซซี(ประพจน์ฟัซซี) โดยส่วนหน้าอาจประกอบด้วยประพจน์ฟัซซีหลายอันเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมเชิงตรรก **และ** และ **หรือ** นอกจากนี้โดยความเป็นทั่วไปแล้วประพจน์ฟัซซียังอาจประกอบด้วยนิเสธหรือคำขยายได้อีกด้วย แต่เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจต่อไปนี้พิจารณากฎ

$$\textbf{if}\ \ x_1 \text{ is } A_1 \ \ \textbf{and}\ \ x_2 \text{ is } A_2 \ \ \textbf{then}\ \ y \text{ is } B$$

เมื่อ A_1, A_2 และ B เป็นฟัซซีเซตซึ่งกำหนดลักษณะสมบัติด้วยฟังก์ชันการเป็นสมาชิก $\mu_{A_1}(x_1)$, $\mu_{A_2}(x_2)$ และ $\mu_B(y)$ตามลำดับ ความสัมพันธ์ฟัซซีแทนกฎฟัซซีซึ่งสร้างขึ้นมา

$$R = (A_1 * A_2) \to B$$

โดยที่ $*$ เป็นตัวเชื่อมประพจน์ฟัซซีอิงตาม t-norm เพื่อใช้แทนตัวเชื่อมทางตรรก **and** และ $\to$ เป็นฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี ซึ่งเป็นการเชื่อมแบบเงื่อนไข ดังนั้นกฎฟัซซีสามารถแทนด้วยความสัมพันธ์ฟัซซี ฟังก์ชันการเป็นสมาชิกของ R ในตัวอย่างข้างต้นกำหนดโดย

$$\mu_R = (\mu_{A_1}(x_1) * \mu_{A_2}(x_2)) \to \mu_B(y)$$

ฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี แทนด้วย $a \to b$ โดยที่ $a, b \in [0,1]$ ซึ่งกล่าวถึงในตอนถัดไป

2. <u>การแจงเหตุสู่ผลฟัซซี</u>

นิยาม 2.23 *การแจงเหตุสู่ผลฟัซซี(Fuzzy Implication)* : ให้ A และ B เป็นฟัซซีเซตใน U และ V ตามลำดับ $*$ กับ $\dot{+}$ เป็นตัวดำเนินการ t-norm และ t-conorm ตามลำดับ การแจงเหตุ A สู่ผล B เขียนแทนด้วย $A \to B$ เป็นกรณีพิเศษของความสัมพันธ์ฟัซซีใน $U \times V$ โดยที่มีฟังก์ชันการเป็นสมาชิกอาจกำหนดได้เป็น

fuzzy conjunction:	$A \to B = A * B$
fuzzy disjunction:	$A \to B = A \dot{+} B$
material implication:	$A \to B = (not\ A) \dot{+} B$
propositional calculus:	$A \to B = (not\ A) \dot{+} (A * B)$
generalization of modus ponens:	$A \to B = \sup \{c \in [0,1], A * c \le B\}$
generalization of modus tollens:	$A \to B = \inf \{t \in [0,1], B \dot{+} t \le A\}$

เหมือนดังการดำเนินการอื่นในทฤษฎีเซตและลอจิกแบบดั้งเดิมที่สามารถถูกแทนได้ในหลากรูปแบบในทฤษฎีฟัซซีเซตและฟัซซีลอจิก กรณีของการแจงเหตุสู่ผลก็เช่นเดียวกัน นิยามที่ต่างกันก็แล้วแต่การตีความหรือเลือกใช้งานของผู้ใช้ เช่นนอกเหนือจากการแจงเหตุสู่ผลฟัซซีที่สอดคล้องกับการแจงเหตุสู่ผลในลอจิกแบบดั้งเดิม(เช่น $a \to b \equiv \neg a \vee b$)แล้ว การแจงเหตุสู่ผลสำคัญอีกกลุ่มหนึ่งซึ่งสอดคล้องกับการใช้ *ตัวเชื่อมการร่วมกัน* $(a \to b \equiv a \wedge b)$ ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในการควบคุมฟัซซี การแจงเหตุสู่ผลฟัซซีแบบนี้เป็นกรณีที่ "ความเป็นเหตุเป็นผล(causality)"ของข้อความถ้า-แล้ว ไม่ถูกดำรงไว้ในความสัมพันธ์ฟัซซีที่ใช้แทนการแจงเหตุสู่ผล เนื่องจากตัวเชื่อมการร่วมกันของ 2 ประพจน์จะสูญเสียความเป็นเหตุเป็นผลของกฎฟัซซี เหลือเพียงความสัมพันธ์ร่วมกัน ตัวอย่างของการแจงเหตุสู่ผลในกลุ่มนี้ เช่น การแจงเหตุสู่ผลด้วยตัวดำเนินการ min เสนอโดย Mamdani มักเขียนแทนด้วย R_c ในขณะที่ Larsen(1980) เสนอการแจงเหตุสู่ผลด้วยการคูณเขียนแทนด้วย R_p นอกจากนี้ R_{bp} และ R_{dp} นิยามได้โดยใช้ตัวดำเนินการ bounded product และ drastic product ตามลำดับ เป็นต้น

3. <u>การรวมกลุ่มกฎฟัซซี</u>

ในตอนที่แล้วได้แสดงถึงวิธีการที่จะแปลข้อความถ้า-แล้วหนึ่งๆ ไปเป็นความสัมพันธ์ฟัซซี จากจุดนี้ต่อไปเราจะสามารถแปลชุดของกฎฟัซซีหลายๆกฎซึ่งเรียกว่า ฐานกฎ (Rule Base) ไปเป็นความสัมพันธ์ฟัซซีเดียวได้ โดยทั่วไปแล้วกฎต่างๆอาจจะประกอบด้วยตัวแปรเอาต์พุตหลายตัวในส่วนผลของแต่ละกฎ และตัวแปรเอาต์พุตเหล่านี้อิสระจากกัน ทำให้สามารถแยกกฎออกเป็นชุดๆตามตัวแปรในประพจน์ในส่วนผลได้ ดังนั้นในที่นี้จะกล่าวถึงกฎที่มีตัวแปรเอาต์พุตเดียวโดยไม่เสีย

ความเป็นทั่วไป ขั้นตอนต่อไปนี้เป็นการรวมกลุ่มชุดของกฎให้เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีเดียว กฎฟัซซีถูกพิจารณาว่าเป็นชุดของ N_r กฎขนานกัน ซึ่งมีส่วนเงื่อนไขอ้างอิงถึงตัวแปรอินพุต N_X ตัว

$$
\begin{array}{ll}
r_1 : & \textbf{if} \quad x_1 \; is \; A_{1,1} \quad \textbf{and} \quad \cdots \quad \textbf{and} \quad x_{N_X} \; is \; A_{N_X,1} \quad \textbf{then} \quad y \; is \; B_1 \\
 & \textbf{also} \\
 & \cdots \\
 & \textbf{also} \\
r_k : & \textbf{if} \quad x_1 \; is \; A_{1,k} \quad \textbf{and} \quad \cdots \quad \textbf{and} \quad x_{N_X} \; is \; A_{N_X,k} \quad \textbf{then} \quad y \; is \; B_k \\
 & \textbf{also} \\
 & \cdots \\
 & \textbf{also} \\
r_{N_r} : & \textbf{if} \quad x_1 \; is \; A_{1,N_r} \quad \textbf{and} \quad \cdots \quad \textbf{and} \quad x_{N_X} \; is \; A_{N_X,N_r} \quad \textbf{then} \quad y \; is \; B_{N_r}
\end{array}
$$

การแปลชุดของกฎขนานกันนี้ไปเป็นความสัมพันธ์ฟัซซีเดียวทำได้โดย สร้างความสัมพันธ์ฟัซซี R_k สำหรับแต่ละกฎฟัซซี r_k แล้วรวมความสัมพันธ์เหล่านี้เข้าเป็นความสัมพันธ์ฟัซซีเดียว R การรวมกฎฟัซซีหลายๆกฎเข้าเป็นความสัมพันธ์ฟัซซีเดียวนี้เรียกว่า *การรวมกลุ่มกฎ(rule aggregation)* ซึ่งวิธีการที่จะทำนี้จะแตกต่างกันไปตามประเภทของการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี สำหรับการแจงเหตุสู่ผลซึ่งสอดคล้องกับตัวเชื่อมการร่วมกันแบบดั้งเดิม ตัวดำเนินการที่ใช้ในการรวมกลุ่มกฎซึ่งเป็นการตีความคำเชื่อม **also** จะเป็น *ตัวเชื่อมการเลือก(disjunction)* ถ้ามีกฎฟัซซี r_k จำนวน N_r กฎแทนด้วยความสัมพันธ์ฟัซซี R_k ความสัมพันธ์ซึ่งเป็นผลการรวมกลุ่มกฎของความสัมพันธ์ R_k กำหนดโดย

$$R = \bigcup_k R_k$$

สำหรับการแจงเหตุสู่ผลพวกที่สอดคล้องกับการแจงเหตุสู่ผลแบบดั้งเดิม จะใช้ *ตัวเชื่อมการร่วมกัน (conjunction)* ในการรวมกลุ่มกฎ

$$R = \bigcap_k R_k$$

อย่างไรก็ตามยังไม่ปรากฏว่ามีทฤษฎีใดที่บังคับให้การรวมความสัมพันธ์ระหว่างกฎต้องถูกจำกัดด้วย t-norm หรือ t-conorm เท่านั้น ดังนั้นในทางวิศวกรรมโดยใช้มุมมองและการตีความที่แตกต่างออกไป ปรากฏว่ามีการดำเนินการเชื่อมระหว่างกฎเป็นการบวก ซึ่งมิได้เป็นตัวดำเนินการโดยตรงในทฤษฎีฟัซซีเซต ระบบดังกล่าวเรียกว่าระบบฟัซซีแบบบวก(additive fuzzy system) ซึ่งจะได้กล่าวถึงต่อไปในบทที่ 3

<u>การใช้เหตุผลฟัซซี</u>

ในตอนนี้จะกล่าวถึงการใช้เหตุผลด้วยฟัซซีลอจิก ดังที่ได้อธิบายในตอนก่อนหน้านี้ว่าการจำลองแบบกฎฟัซซีด้วยการแจงเหตุสู่ผลฟัซซีเป็นไปได้หลายรูปแบบ กฎฟัซซีสามารถถูกใช้เพื่ออนุมานความรู้เกี่ยวกับผลของกฎ โดยใช้ข้อมูลซึ่งเป็นเซตย่อยฟัซซีในเอกภพสัมพัทธ์เดียวกันกับใน

ส่วนเงื่อนไขของกฎ ในตอนแรกเราจะเน้นที่การอนุมานกฎเดี่ยว หลังจากนั้นจะพิจารณาการอนุมานชุดของกฎหลายๆข้อพร้อมกัน

1. <u>กฎการอนุมานผลประกอบ</u>

กฎการอนุมานผลประกอบ(Compositional Rule of Inference) หรือ CRI เป็นวิธีการที่จะอนุมานฟัซซีเซตอินพุตกับความสัมพันธ์ฟัซซี เพื่อที่จะได้ฟัซซีเซตผลสรุปซึ่งเสนอโดย Zadeh (1973) สมมุติว่ากฎฟัซซี "**if** *x is A* **then** *y is B*" ถูกแทนด้วยความสัมพันธ์ฟัซซี R ผลลัพธ์ B' สามารถอนุมานผ่านผลประกอบของ A' และ R โดย

$$B' = A' \circ R$$

โดยที่ $\circ$ เป็นตัวดำเนินการผลประกอบของความสัมพันธ์ฟัซซีดังอธิบายก่อนหน้านี้ ดังนั้น CRI จะสมมุติว่าความสัมพันธ์ฟัซซีซึ่งแทนกฎฟัซซีมีอยู่แล้ว ความสัมพันธ์ฟัซซีนี้อาจเป็นหนึ่งในบรรดาฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลฟัซซีที่อธิบายไปแล้ว เมื่อเลือกฟังก์ชันการแจงเหตุสู่ผลที่เหมาะสมแล้ว ก็ควรเลือกการดำเนินการผลประกอบด้วย ปกติแล้วจะใช้ ผลประกอบsup-min ดังที่ Zadeh ได้เสนอไว้ แต่อาจเลือกใช้เป็นการดำเนินการผลประกอบอย่างอื่น เช่น sup-product ก็ได้

2. <u>การแจงผลตามเหตุแบบทั่วไปและการแจงผลค้านเหตุแบบทั่วไป</u>

ในลอจิกแบบดั้งเดิมมีการอนุมานความสัมพันธ์ของกฎเงื่อนไขถ้า-แล้วที่รู้จักกันดี 2 อย่างคือ การแจงผลตามเหตุ(modus ponens) และการแจงผลค้านเหตุ(modus tollens) ฟัซซีลอจิกก็มีใช้การอนุมานในลักษณะดังกล่าว แต่มีการขยายให้มีความเป็นทั่วไปยิ่งขึ้น เป็น การแจงผลตามเหตุแบบทั่วไป และ การแจงผลค้านเหตุแบบทั่วไป ตามลำดับ

นิยาม 2.24 *การแจงผลตามเหตุแบบทั่วไป(Generalized Modus Ponens; GMP)* : GMP นิยามโดยขั้นตอนการอนุมานดังนี้

บทตั้ง 1:	ถ้า x เป็น A แล้ว y เป็น B
บทตั้ง 2:	x เป็น A'
บทสรุป :	y เป็น B'

A, A', B และ B' เป็นฟัซซีเซตผ่านตัวแปรเชิงภาษา x กับ y โดยที่ A' เป็นข้อมูล B' เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการอนุมาน

A'	$A \to B$	B'
1	1	1
0	1	?

ตารางที่ 2.3 ตารางความจริงสำหรับการแจงผลตามเหตุ

ตารางที่ 2.3 แสดงตารางความจริงสำหรับการแจงผลตามเหตุ(แบบดั้งเดิม) ซึ่งประพจน์ที่ใช้จะเป็นประพจน์ในลอจิกแบบดั้งเดิม การแจงผลตามเหตุแบบทั่วไปเป็นการขยายให้ประพจน์เป็นฟัซซีได้ รูปแบบการใช้เหตุผลแบบนี้เป็นลักษณะการอนุมานไปข้างหน้าโดยอาศัยข้อมูลสภาวะปัจจุบัน เป็นลักษณะที่ใช้โดยทั่วไปในตัวควบคุมฟัซซีลอจิก ซึ่งอาจใช้การดำเนินการผลประกอบในการอนุมาน(CRI)ได้ $B' = A' \circ R$ โดยที่ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีที่แทนการแจงเหตุสู่ผลในกฎที่กำหนด ในลอจิกแบบดั้งเดิมกรณีที่ $A'=A$ แล้วจะสามารถสรุปได้ว่า $B'=B$ แต่ในกรณีของ GMP ผลลัพธ์ B' อาจจะไม่เท่ากับแต่เป็นการประมาณผลลัพธ์ B ก็ได้

นิยาม 2.25 *การแจงผลค้านเหตุแบบทั่วไป(Generalized Modus Tollens; GMT)* : GMT นิยามโดยขั้นตอนการอนุมานดังนี้

บทตั้ง 1: ถ้า x เป็น A แล้ว y เป็น B
บทตั้ง 2: y เป็น B'

บทสรุป: x เป็น A'

A, A', B และ B' เป็นฟัซซีเซตผ่านตัวแปรเชิงภาษา x กับ y โดยที่ B' เป็นข้อมูล A' เป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการอนุมาน

B'	$A \to B$	A'
1	1	?
0	1	0

ตารางที่ 2.4 ตารางความจริงสำหรับการแจงผลค้านเหตุ

ตารางที่ 2.4 แสดงตารางความจริงสำหรับการแจงผลค้านเหตุ(แบบดั้งเดิม) ซึ่งประพจน์ที่ใช้จะเป็นประพจน์ในลอจิกแบบดั้งเดิม แบบแผนการอนุมานนี้ถูกต้องตามลอจิกแบบเดิมได้เฉพาะกรณีที่ $A' = not\ A$ และ $B' = not\ B$ ซึ่งเป็นการแจงผลค้านเหตุ ส่วนกรณีของฟัซซีก็สามารถขยายจากเซตแบบเดิมเป็นฟัซซีเซตได้ตามแบบแผนการอนุมานเดิม รูปแบบการใช้เหตุผลแบบนี้เป็นลักษณะการอนุมานย้อนกลับจากเป้าหมายไปหาเหตุ เป็นลักษณะที่ใช้ในระบบผู้เชี่ยวชาญ เช่น การวินิจฉัยทางการแพทย์

การแก้ปัญหาการแจงผลค้านเหตุ อาจใช้กฎการอนุมานผลประกอบ(CRI) โดยสมมุติว่า ความสัมพันธ์ฟัซซีสำหรับกฎถ้า-แล้วมีอยู่ ปกติแทนด้วย $A' = R \circ B'$ โดยที่ R เป็นความสัมพันธ์ฟัซซี ที่ใช้แทนกฎฟัซซี "ถ้า x เป็น A แล้ว y เป็น B"

ดังนั้นกฎการอนุมานผลประกอบสามารถมองได้ว่าเป็นกรณีพิเศษของ การแจงผลตามเหตุแบบทั่วไป หรือ การแจงผลค้านเหตุแบบทั่วไป ซึ่งเงื่อนไขหรือคุณสมบัติของการดำเนินการที่จะกำหนดให้เป็นการแจงเหตุตามผลแบบทั่วไปได้มีผู้ทำการศึกษาและเสนอไว้ เช่น Baldwin and Pilsworth, 1980; Fukami *et al.*, 1980; Mizumoto, 1982

3. <u>การอนุมานฐานกฎฟัซซี</u>

ในตอนที่แล้วกล่าวถึงกฎฟัซซีที่แทนด้วยความสัมพันธ์ฟัซซีที่ถูกใช้เพื่อให้ได้ข้อมูลใหม่โดยอาศัยผลประกอบของความสัมพันธ์ที่บรรยายข้อมูลกับความสัมพันธ์ที่อธิบายกฎ ปกติแล้วข้อความรู้มักอยู่ในรูปของชุดของกฎฟัซซีในลักษณะที่ขนานกันนั่นคือลำดับของกฎไม่มีความสำคัญต่อการทำงาน เรียกว่า *ฐานกฎฟัซซี (fuzzy rulebase)* การรวมกลุ่มกฎได้มีการกล่าวถึงในตอนย่อยที่แล้ว การอนุมานกฎในฐานกฎฟัซซีสามารถทำได้ใน 2 แนวทางคือ *การอนุมานโดยรวม (global inference)* ซึ่งจะรวมแต่ละกฎฟัซซีเดี่ยวๆในฐานกฎให้เป็นความสัมพันธ์รวมเดียวเสียก่อน แล้วจึงอนุมานจากความสัมพันธ์รวมนี้ และ *การอนุมานเฉพาะที่ (local inference)* เป็นการอนุมานกฎในฐานกฎทีละข้อ จากนั้นจึงนำผลลัพธ์ที่ได้จากแต่ละกฎย่อยนี้ไปรวมเป็นผลสรุปอีกทีหนึ่ง ซึ่งในบางกรณีการอนุมานฐานกฎทั้งสองแบบจะเท่าเทียมกัน

พิจารณาการอนุมานฐานกฎฟัซซีในกรณีที่ใช้การแจงเหตุสู่ผลเป็นพวกที่ลอดคล้องกับตัวเชื่อมการร่วมกันแบบดั้งเดิม และตัวเชื่อมระหว่างกฎเป็นตัวเชื่อมการเลือก ความสัมพันธ์ R ที่แทนฐานกฎแสดงได้ด้วยการรวมกลุ่มความสัมพันธ์ R_k

$$R = \bigcup_k R_k$$

โดยที่ R_k เป็นความสัมพันธ์ฟัซซีที่แทนกฎ r_k ในบทความของLee(1990) ได้พิสูจน์ว่าเมื่อใช้ max-min หรือ max-product ในการอนุมานผลประกอบ และใช้การเชื่อมระหว่างกฎด้วย ตัวดำเนินการ t-conorm แล้วจะได้ว่า

$$A' \circ \left\{ \bigcup_k R_k \right\} = \bigcup_k A' \circ R_k$$

โดยการใช้ CRI ลงบนชุดของกฎสามารถทำให้ง่ายลงได้เป็น

$$
\begin{aligned}
B' &= A' \circ R \\
&= A' \circ \left\{ \bigcup_k R_k \right\} \\
&= \bigcup_k \left\{ A' \circ R_k \right\} \\
&= \bigcup_k B'_k
\end{aligned}
$$

ดังนั้นผลจากการอนุมานเฉพาะที่กับการอนุมานโดยรวมจะเท่ากัน

หากการแจงเหตุสู่ผลฟัซซีที่ใช้ในแต่ละกฎในฐานกฎฟัซซีเป็นพวกที่สอดคล้องตามการแจงเหตุสู่ผลแบบดั้งเดิม และใช้ตัวเชื่อมการร่วมกันเป็นตัวดำเนินการที่เชื่อมแต่ละความสัมพันธ์ฟัซซี R_k ของแต่ละกฎ สมมุติว่าใช้ตัวดำเนินการ min ในการรวมกฎ ฟัซซีเซตผลลัพธ์ B' จากความสัมพันธ์ R โดยข้อมูลฟัซซีเซต A' หาได้จาก

$$
\begin{aligned}
B' &= A' \circ R \\
&= A' \circ \left\{ \bigcap_k R_k \right\} \\
&\subseteq \bigcap_k \left\{ A' \circ R_k \right\}
\end{aligned}
$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการอนุมานโดยรวมอาจจะแตกต่างจากการอนุมานเฉพาะที่

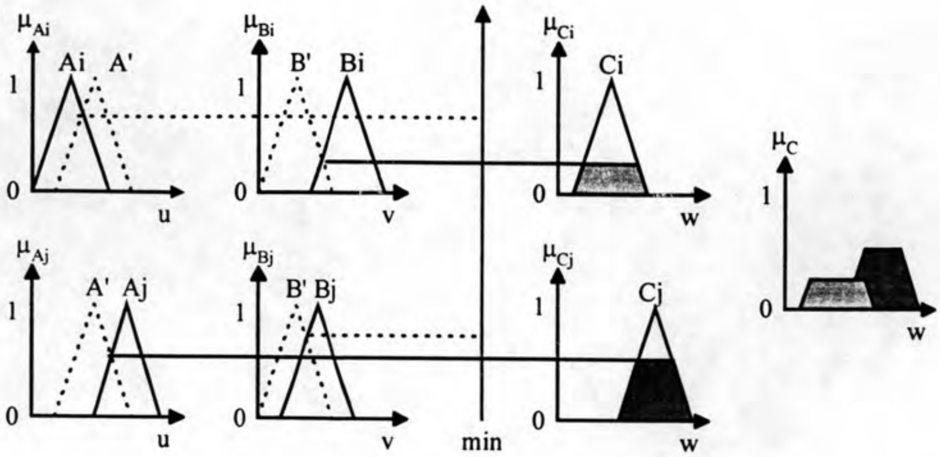
ในการนำไปใช้งานโดยทั่วไปแล้วจะใช้การอนุมานเฉพาะที่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการควบคุมฟัซซี เนื่องจากไม่ต้องเปลืองหน่วยความจำมากในการเก็บความสัมพันธ์รวมฟัซซีไว้ล่วงหน้าเพื่อใช้ในการอนุมานเหมือนการอนุมานโดยรวม ดังนั้นต่อไปในที่นี้จะกล่าวเพียงการอนุมานเฉพาะที่

Lee (1990) ได้พิสูจน์ไว้ว่าสำหรับการแจงเหตุสู่ผลฟัซซี R_c, R_p, R_{bp}, และ R_{dp} และการอนุมานผลประกอบ max-min หรือ max-product ในการอนุมานจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

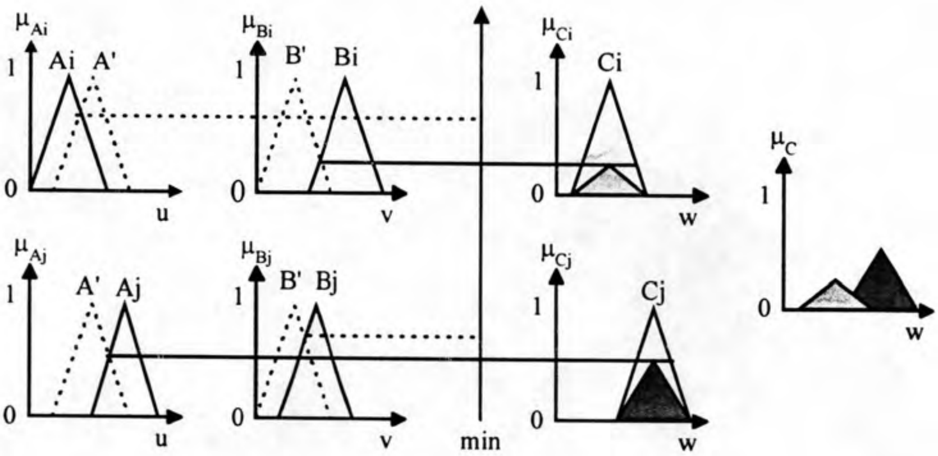
$$(A', B') \circ (A_k \text{ and } B_k \to C_k) = [A' \circ (A_k \to C_k)] \cap [B' \circ (B_k \to C_k)] \quad \text{if} \quad \mu_{A_k \times B_k} = \mu_{A_k} \wedge \mu_{B_k}$$

$$(A', B') \circ (A_k \text{ and } B_k \to C_k) = [A' \circ (A_k \to C_k)] \cdot [B' \circ (B_k \to C_k)] \quad \text{if} \quad \mu_{A_k \times B_k} = \mu_{A_k} \cdot \mu_{B_k}$$

ซึ่งหมายความว่าในการอนุมานกฎแต่ละข้อถ้าในส่วนเงื่อนไขประกอบด้วยประพจน์ 2 ตัวเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมการร่วมกันแล้ว การอนุมานกฎเท่ากับการอนุมานจากทีละประพจน์แล้วมารวมกันอีกทีหนึ่ง การตีความให้เข้าใจง่ายแสดงดังรูปที่ 2.9 และ รูปที่ 2.10



รูปที่ 2.9 การอนุมานผลประกอบ sup-min โดยความสัมพันธ์ R_c และ อินพุตเป็นฟัซซีเซต



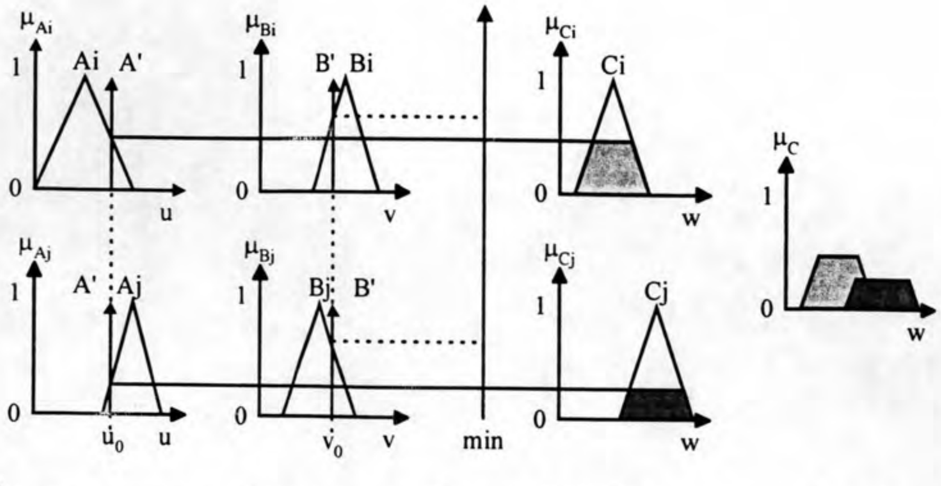
รูปที่ 2.10 การอนุมานผลประกอบ sup-min โดยความสัมพันธ์ R_p และ อินพุตเป็นฟัซซีเซต

นอกจากนี้ในกรณีพิเศษที่ฟัซซีเซตอินพุตเป็นเซตโทนฟัซซี การแจงเหตุสู่ผลฟัซซีเป็น R_c, หรือ R_p จะได้ว่า

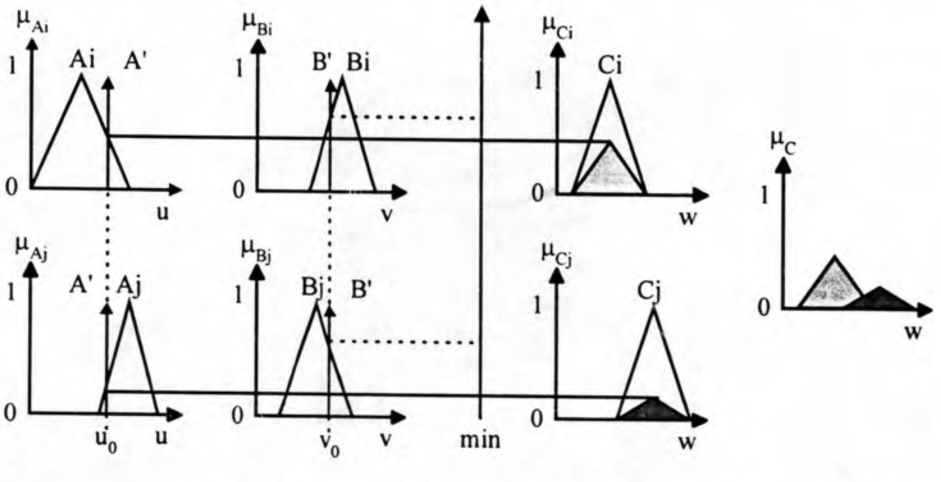
(1) $R_C:\ \alpha_k^{\wedge} \wedge \mu_{C_k}(w)$ $\quad$ $R_p:\ \alpha_k^{\wedge} \cdot \mu_{C_k}(w)$

(2) $R_C:\ \alpha_k^{\bullet} \wedge \mu_{C_k}(w)$ $\quad$ $R_p:\ \alpha_k^{\bullet} \cdot \mu_{C_k}(w)$

โดยที่ $\alpha_k^{\wedge} = \mu_{A_k}(u_0) \wedge \mu_{B_k}(v_0)$ และ $\alpha_k^{\bullet} = \mu_{A_k}(u_0) \cdot \mu_{B_k}(v_0)$ ซึ่งหมายความว่าถ้าอินพุตเป็นเซตโทนฟัซซี การอนุมานจะยิ่งลดความซับซ้อนลง เหลือเป็นเพียงการตรวจค่าระดับการเป็นสมาชิกของฟัซซีเซตในส่วนเงื่อนไขของกฎที่จุดซัพพอร์ตของฟัซซีเซตอินพุต เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายดูรูปที่ 2.11 และรูปที่ 2.12 ประกอบ



รูปที่ 2.11 การอนุมานผลประกอบ sup-min โดยความสัมพันธ์ R_c และ อินพุตเป็นเซตโทนฟัซซี



รูปที่ 2.12 การอนุมานผลประกอบ sup-min โดยความสัมพันธ์ R_p และ อินพุตเป็นเซตโทนฟัซซี

ในตัวอย่างที่กล่าวมาในตอนท้ายนี้พูดถึงการลดความซับซ้อนของการอนุมานให้ง่ายขึ้นนี้ในกรณีของระบบที่มี 2 อินพุต 1 เอาต์พุต สำหรับกรณีหลายอินพุตหลายเอาต์พุตก็สามารถขยายในทำนองเดียวกันได้โดยไม่ยาก

<u>การใช้เหตุผลโดยประมาณเชิงอุปมาน</u>

นอกเหนือจากการอนุมานโดยใช้กฎการอนุมานผลประกอบแล้วยังมีรูปแบบการใช้เหตุผลโดยประมาณอย่างอื่นด้วย เช่น การใช้เหตุผลโดยประมาณเชิงอุปมาน (Approximate Analogical Reasoning; AAR)เสนอโดยTurksen และ Zhong (1988) เป็นวิธีที่หลีกเลี่ยงการใช้ CRI โดยเปลี่ยนเป็นการวัดความคล้ายของฟัซซีเซตว่าฟัซซีเซตมีความคล้ายกับที่กำหนดไว้ในกฎเกินกว่าขีดเริ่มเปลี่ยน

(threshold) τ_0 หรือไม่ เพื่อตัดสินว่ากฎใดควรถูกกระตุ้น แล้วใช้ฟังก์ชันการปรับปรุงที่อนุมานได้จากการวัดความคล้ายนี้เพื่อหาดัดแปลงหาผลสรุปที่ต้องการ ซึ่งมีขั้นตอนการทำงานหลักเป็นดังนี้

1. การหาระดับการกระตุ้นของแต่ละกฎโดยอาศัยการวัดความคล้าย(similarity measure) ระหว่างรูปแบบของอินพุตที่สังเกตกับรูปแบบที่กำหนดไว้ในกฎ

2. ทำการใช้เหตุผลโดยประมาณโดยอาศัยการปรับส่วนผลของแต่ละกฎ โดยอิงตามผลการวัดความคล้ายของรูปแบบ แทนที่จะใช้กฎการอนุมานผลประกอบ

แบบแผนการทำงานของ AAR สามารถใช้ได้ทั้งกรณีของค่าที่สังเกตได้เป็นจุด(Point-Valued AAR; PVAAR)หรือค่าเป็นช่วง(Interval-Valued AAR; IVAAR) สำหรับ PVAAR การวัดความคล้ายของรูปแบบระหว่างค่าที่สังเกตกับค่าที่กำหนดไว้สำหรับกฎที่ k สามารถคำนวณได้เป็น

$$SM_k = \bigwedge_{i=1}^{N_X} SM_{ki}$$

โดยที่ SM_{ki} เป็นการวัดความคล้ายของฟัซซีเซต A_{ki} นิยามสำหรับตัวแปรตัวที่ i กับอินพุตที่สังเกตของมันA'_k N_X เป็นจำนวนของตัวแปรอินพุต SM_{ki} อาจจะนิยามได้โดยเทียบกับการวัดระยะทาง (Distance Measure) DM ระหว่าง A_{ki} กับ A'_k เช่น

$$SM_{ki} = \left(1 + DM(A_{ki}, A'_k)\right)^{-1}$$

ส่วนการปรับเอาต์พุตของส่วนผล B_k ของกฎข้อที่ k ทำได้ 2 อย่างคือ การยุบ(reduction) และการขยาย(expansion)

การขยายนิยามโดย $\quad \mu_{B_k}^{ex} = \min\left(1, \dfrac{\mu_{B_k}}{SM_k}\right)$

การยุบนิยามโดย $\quad \mu_{B_k}^{re} = \mu_{B_k} \cdot SM_k$

ผลสรุปที่ได้จากการอนุมานมักจะนำมาจากการเฉลี่ยระหว่างการยุบและการขยาย เช่นสำหรับกฎที่ k

$$\mu'_{B_k} = \tfrac{1}{2}\left(\mu_{B_k}^{ex} + \mu_{B_k}^{re}\right)$$

รวมผลของแต่ละกฎด้วยตัวดำเนินการ max