บทที่ 2

ทฤษฎีของการวัดพลังงาน

เนื่องจากอนุภาคBeta ที่มีประจุลบ จึง สามารถที่จะถูกเบนให้มีทางเดินเป็นเส้นโค้งได้ด้วยสนามแม่เหล็ก ทั้งนี้เป็นไปตามกฎมือขวา ดังแสดงในรูป

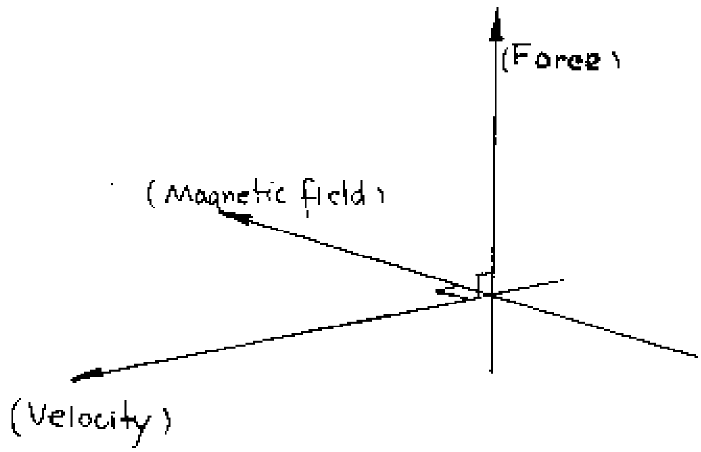

Fig.1.

หรือตามลักษณะของเครื่องมือที่ใช้ ดังนี้

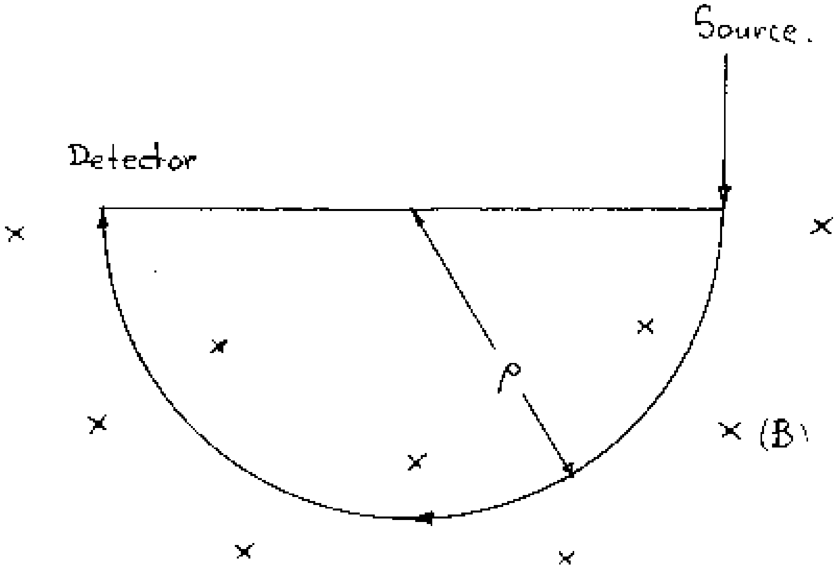

Fig 2.

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปในสนามแม่เหล็กที่สม่ำเสมอ (Uniform) ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก จะทำให้ทางเดินของมันเป็นส่วนโค้งของวงกลม ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กกับอนุภาคที่ถูกเบนไปโดยถือว่าไม่คิด Relativistic จะเป็นไปดังนี้

ให้ m = มวลของอนุภาคที่เคลื่อนที่

e = ประจุของอนุภาค

v = ความเร็วในการเคลื่อนที่ของอนุภาค

B = ความเข้มสนามแม่เหล็กที่อนุภาควิ่งผ่าน

ρ = รัศมีความโค้งของวงกลมที่เกิดจากส่วนโค้งของทางเดินของอนุภาค

แรงที่เกิดจากแรงหนีศูนย์กลางของอนุภาค $= F_1$

แรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็กที่จะเบนอนุภาคให้วิ่งเป็นส่วนโค้งวงกลม $= F_2$

$$F_1 = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$F_2 = evB$$

เมื่อเดินทางเป็นส่วนโค้งได้พอดี และเนื่องจากมีเพียง 2 แรงนี้เท่านั้น

$$F_1 = F_2$$

จะได้

$$\frac{mv^2}{\rho} = evB$$

$$mv = eB\rho \quad \text{-------------------- (1)}$$

ซึ่งค่า $mv = p$ คือ Momentum ของอนุภาค

จาก (1) จะได้ $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}(eB\rho)^2$ -------------- (2)

เมื่อ E = Kinetic energy ของอนุภาคนั้น ๆ

สูตร (1) และ (2) เหมาะที่จะใช้สำหรับอนุภาคที่มีความเร็วต่ำ ๆ เพราะมวลจะมีการเปลี่ยนแปลงแต่น้อย แต่ถ้าเป็นอนุภาคที่มีความเร็วสูงมาก ๆ คือ

v มีค่าเกือบเท่ากับ c

เมื่อ c คือความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ สูตร (1) และ (2) จะใช้ไม่ได้เลย จึงต้องคิด Relativity เข้าไปด้วย ยิ่งในกรณีของ Electron ยิ่งเห็นแตกต่างได้ดี มวลของอิเล็คตรอนเมื่ออยู่นิ่ง (Rest mass) มีค่าน้อยมาก ถ้าให้อิเล็คตรอนมี Kinetic energy สูงขึ้น มวลก็จะเพิ่มขึ้นเป็น 1 เปอร์เซนต์ คือ Energy 5 Kev. ที่เพิ่มขึ้น ดังนั้น ในกรณีเช่นนี้ สูตร (1) และ (2) เมื่อนำมาใช้กับ Electron จะได้ค่าผิดพลาดมาก.

ให้ c = ความเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสูญญากาศ, cm/sec

v = ความเร็วของอนุภาค, cm/sec

β = v/c ความเร็วของอนุภาคในหน่วยของ c

m_o = มวลขณะอยู่นิ่งของอนุภาค, gm.

m = มวล = มวลทั้งหมด = Relativistic mass

p = mv = Momentum ของ particle gm-cm/sec

m_oc = หน่วยปรกติของ Momentum.

η = $\frac{p}{m_oc}$ = Momentum ของอนุภาคในหน่วยของ m_oc

E = Kinetic energy ของอนุภาคเป็น MeV.

T = Kinetic energy ของอนุภาคเป็น ergs.

mc^2 = $T + m_oc^2$ = Energy ทั้งหมดของอนุภาคเป็น ergs

ให้ $m_o c^2$ = หน่วยปรกติของ Energy

$$W = \frac{mc^2}{m_o c^2} = \frac{T}{m_o c^2} + 1$$

= Energy ทั้งหมดของอนุภาคในหน่วย $m_o c^2$

B = ความเข้มสนามแม่เหล็ก , gauss

ρ = รัศมีความโค้งของทางเดินของอนุภาคที่ถูกเบนไป, cm

e = ประจุ, e s u.

$\frac{e}{c}$ = ประจุ, e m u.

Ze = ประจุของอนุภาค

M = มวลขณะอยู่นิ่งของอนุภาค, a m u.

N = Avogadro's number, (Physics scale)

F = Ne = Faraday constant = 96,520 coulombs/gm-mole

ก.) ความสัมพันธ์ระหว่าง Momentum และ Total Energy.(3)

จากหลักเบื้องต้นของ Theory of Relativity คือ

$$m = \frac{m_o}{(1-\beta^2)^{1/2}} \quad \text{------------------------ (1)}$$

$$p = mv \quad \text{------------------------ (2)}$$

$$T = mc^2 - m_o c^2 \quad \text{------------------------ (3)}$$

จากสมการ (1) $$m^2 \left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right) = m_o^2$$

หรือ $$(mc)^2 - (m_oc)^2 = (mv)^2 = p^2$$

หรือ $$(pc)^2 = (mc^2)^2 - (m_oc^2)^2 \text{ -------------- } (4)$$

สมการที่ (4) เป็นสมการ[illegible]ของ momentum ของอนุภาคในเทอมของ (pc) ซึ่งมีค่าในหน่วยของ Energy (MeV)

ให้ $$\eta = \frac{p}{m_oc}$$

และ $$W = \frac{mc^2}{m_oc^2}$$ จากสมการที่ (4) จะได้เป็น

$$\eta^2 = W^2 - 1$$

หรือ $$W^2 = \eta^2 + 1 \text{ ------------------------ } (5)$$

จากสมการ (4) และ (5) สมการจะเขียนแทนได้ด้วยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้

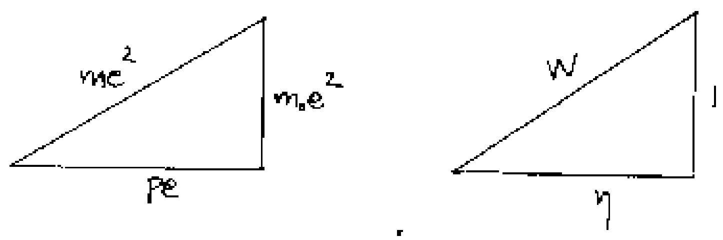

Fig 3

และเมื่อเปลี่ยนให้อยู่ในค่าของ β จะได้

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{P}{mc} = \frac{\eta}{W} \quad \text{------------------------} \quad (6)$$

$$\beta^2 = \frac{\eta^2}{1 + \eta^2} = 1 - \frac{1}{W^2} = 1 - \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 \quad \text{---------} \quad (7)$$

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \eta^2$$

$$= W^2 - 1$$

$$= (W - 1)(W + 1)$$

$$= (W - 1)^2 \cdot \frac{(W + 1)}{W - 1}$$

$$= (W - 1)^2 \left(1 + \frac{2}{W - 1}\right)$$

$$= \left(\frac{mc^2}{m_o c^2} - 1\right)^2 \left(1 + \frac{2}{\frac{mc^2}{m_o c^2} - 1}\right)$$

$$= \left(\frac{mc^2 - m_o e^2}{m_o c^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2 m_o c^2}{mc^2 - m_o c^2}\right)$$

$$\therefore \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \eta^2 = \left(\frac{T}{m_o c^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2m_o c^2}{T}\right) \quad \text{----------} \quad (8)$$

จากสมการที่ (5) จะได้

$$dW = \frac{\eta}{W} d\eta = \beta d\eta \quad \text{-----------------} \quad (9)$$

เป็นสมการแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลง momentum และการเปลี่ยนแปลง Energy และ จากสมการที่ (9) จะได้

$$dT = m_o c^2 \beta \frac{dp}{m_o c} = v\,dp \qquad \text{------------------ (10)}$$

สมการแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง momentum และ Kinetic Energy ได้มาจากสมการที่ (3) และ (4) คือ

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2m_o c^2)} = \frac{T}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_o c^2}{T}} \qquad \text{--------- (11)}$$

หรือ

$$T = \sqrt{(pc)^2 + (m_o c^2)^2} - m_o c^2 \qquad \text{-------------------- (12)}$$

สมการ (12) แสดงให้ทราบว่า อนุภาคใด ๆ ที่มีมวลขณะอยู่กับที่เป็น 0 (เช่น photon, Neutrino) momentum จะมีค่าเป็น $p = \frac{T}{c}$ และจากสมการ (3) จะได้ค่า Relativistic mass $m = \frac{T}{c^2}$ และ จากสมการ (7) จะได้ $\beta = 1$ นั้น แสดงว่า

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{T}{c} \\ m &= \frac{T}{c^2} \\ v &= c \end{aligned}\right\} \qquad \text{สำหรับ} \quad m_o = 0 \text{ ----(13)}$$

ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว อนุภาคที่ m_o ไม่เท่ากับ 0 เมื่อไม่คิด Relativity จะได้จากสมการ (1) (2) และ (3) คือ เมื่อ

$$m = m_o$$

$$p = m_o v$$

และ $$T = \tfrac{1}{2} m_o v^2$$

ข.) การเบนทางเดินของ Relativistic Particle ในสนามแม่เหล็ก[4]

Momentum ของอนุภาคที่มีประจุใด ๆ จะสามารถวัดได้ด้วยการวัดรัศมีความโค้ง ρ ของทางเดินของอนุภาคที่อยู่ในระนาบตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก B ถ้าทราบ Rest mass ของอนุภาค ก็จะสามารถทราบ Energy ได้จากการวัด Momentum ของอนุภาคนั้น

เราทราบว่า เมื่ออนุภาคถูกเบนให้เดินทางเป็นส่วนโค้งของวงกลม จะได้สมการ

$$B \frac{Ze}{c} v = \frac{m v^2}{\rho}$$

หรือ $$B \rho \frac{Ze}{c} = m v = p$$

$$(B \rho)(Ze) = pc = \sqrt{T(T + 2 m_o c^2)} \quad \text{------------} \quad (14)$$

ค่า $B\rho$ มีหน่วยเป็น gauss-cm. และอาจจะวัด Momentum ได้โดยตรงในหน่วยประจุ, $p \propto (Ze)$ เมื่อคิด $\frac{B\rho}{c}$ เป็นค่าคงที่

และโดยทั่วไป $B\rho$ มักจะถูกเรียกว่าเป็น "Momentum" และบางทีก็ถูกเรียกว่าเป็น "Magnetic rigidity"

การที่จะเปลี่ยนค่า "Momentum" $B\rho$ ในหน่วย Gauss.cm. ที่วัดได้เป็น Kinetic Energy ในหน่วย MeV. อาศัยสมการ (14).

$$\frac{p}{m_o c} = B \rho \frac{Ze}{m_o c^2} \quad \text{------------------------} \quad (15)$$

สำหรับอนุภาคต่าง ๆ เช่น Electrons, protons, Deuterons, Alpha paticles ฯลฯ จะสามารถเขียน Rest mass m_o เป็น M amu. ได้.

$$m_o c^2 = \frac{Mc^2}{N} \quad \text{------------------------} \quad (16)$$

และ $eN = \frac{Fc}{10}$ จะได้

$$\frac{Ze}{m_o c^2} = \frac{ZeN}{Mc^2} = \frac{ZF}{10Mc}$$

ดังนั้นในขั้นสุดท้ายจะได้

$$\eta = B\rho \frac{ZF}{10Mc} = B\rho \left(3.2196 \times 10^{-7} \frac{Z}{M}\right) \quad \text{-------} (18)$$

และสมการเกี่ยวข้องระหว่าง Kinetic energy T ในหน่วย ergs กับ E ในหน่วย MeV. จะได้

$$T = e(10^6 E)\frac{10^8}{c} = 10^{14} E \frac{e}{c} \text{ ergs.} \quad \text{------------} (19)$$

และเราใช้

$$1 \text{ Volt} = \frac{10^8}{c} \text{ statvolts } \left(\simeq \frac{1}{300} \text{ statvolts}\right) \text{-} (20)$$

$$\therefore \frac{T}{m_o c^2} = 10^{14} E \frac{e}{c} \frac{N}{Mc^2} = E \frac{10^{13} F}{Mc^2} \quad \text{-----------------} (21)$$

$$= E \times \frac{1.0739 \times 10^{-3}}{M} \quad \text{----------------------} (22)$$

ความเกี่ยวข้องระหว่าง $B\rho$ และ E จะได้จากสมการที่ (5)

$$\frac{T}{m_o c^2} + 1 = W = (\eta^2 + 1)^{1/2} \quad \text{---------------------} (23)$$

เอาสมการ (18) และ (21) แทนค่าลงในสมการ (23) จะได้

$$E \times \frac{10^{13} F}{Mc^2} + 1 = \left[\left(B\rho \frac{ZF}{10Mc}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \quad \text{-----------} (24)$$

สำหรับอนุภาคหนัก ๆ ที่มีพลังงานต่ำ เมื่อเทียบกับพลังงานเมื่อตอนอยู่นิ่ง ,

$T \ll m_o c^2$ ดังนั้น $\eta^2 \ll 1$

จึงสามารถจะกระจายข้างขวาของสมการที่ (23) ได้ดังนี้

$$1+\frac{T}{m_o c^2} = 1 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta^4 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \frac{T}{m_o c^2} = \frac{1}{2}\eta^2\left(1 - \frac{1}{4}\eta^2 + \cdots\cdots\cdots\right) \text{-------}(25)$$

ดังนั้น จากสมการ (18), และ (21) จะทำให้สมการ (25) เป็น

$$E\,\frac{10^{13}F}{Mc^2} = \frac{1}{2}(B\rho)^2\left(\frac{ZF}{10Mc}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\eta^2 + \cdots\cdots\right)$$

$$E = (B\rho)^2\,\frac{Z^2}{M}\left(\frac{F}{2 \times 10^{15}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\eta^2 + \cdots\cdots\right) \text{-------}(26)$$

$$E = (B\rho)^2\,\frac{Z^2}{M}\,(4.8260 \times 10^{11})\left(1 - \frac{1}{4}\eta^2 + \cdots\right) \text{---}(27)$$

จะเห็นว่ามีเทอม $\frac{1}{4}\eta^2$ เท่านั้นที่เข้ามาเกี่ยวข้องเนื่องจาก Relativity เทอมอื่น ๆ เป็น Nonrelativistic หมด และมีค่าประมาณ 0.1% สำหรับอนุภาค proton ที่มีพลังงาน 2 MeV., 4 MeV ของ Deuterons หรือ 7 MeV ของ Alpha particles.

จากสมการ (24) ถึง (27) เมื่อนำมาใช้กับ particle ที่มีมวลมาก ๆ . M จะต้องเป็นมวลของ ion มิใช่เป็นมวลของอะตอมที่เป็นกลางทั้งหมด จะต้องหักออกด้วยมวลของ Electron เสียก่อน.

ดังนั้น สำหรับ proton M = 1.008142-0.000549

= 1.007593 amu.

Alpha particle M = 4.003873-0.001098

= 4.002775 amu.

เมื่อไม่คิดถึงส่วนแก้ไขของ Relativity (% η^2) สำหรับอนุภาคหนัก ๆ สมการที่ (27) จะทำให้ได้ค่า E ในหน่วย MeV. และ B ρ ในหน่วย gauss.cm.

(5)

สำหรับ protons $E = \left(\frac{B\rho}{1.445 \times 10^5}\right)^2$ ---------------(28)

Deuteron $E = \left(\frac{B\rho}{2.043 \times 10^5}\right)^2$ ---------------(29)

Alpha ray $E = \left(\frac{B\rho}{1.440 \times 10^5}\right)^2$ ---------------(30)

สำหรับ อีเล็กตรอน จะต้องใช้ Relativity เสมอ จากสมการที่ (24) แทนค่า M = 0.000549 amu. และ ค่าประจุ e , specific charge $\left(\frac{e/c}{m_o}\right)$ ใช้ค่าที่ได้จากการทดลองวัดจริง ๆ โดยเอามาจากค่าคงที่ทาง physics ซึ่ง Du Mond และ Cohen รวบรวมไว้

$$e = (4.80288 \pm 0.00021) \times 10^{-10} \quad \text{esu.}$$

$$\frac{e/c}{m_o} = (1.75888 \pm 0.000,05) \times 10^7 \quad \text{emu/gm.} \qquad \text{------(31)}$$

$$c = (2.997929 \pm 0.000,008) \times 10^{16} \quad \text{cm/sec}$$

ในกรณีของ Electron. จากสมการ (15) และ (31) จะได้

$$\eta = B\rho\left(\frac{e/c}{m_o}\right)\frac{1}{c} = \frac{B}{1704.4} \qquad \text{-------------(32)}$$

เมื่อ $B\rho$ ในหน่วย gauss.cm. พลังงานของอีเล็กตรอนจะได้จากสมการ (19) คือ

$$\frac{T}{m_o c^2} = 10^{14} E \frac{e}{c} \frac{1}{m_o c^2} = 10^{14} E \left(\frac{e/c}{m_o} \right) \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{E}{0.51098}$$

เมื่อ E เป็นพลังงานในหน่วย MeV. และจาก

$$W^2 = \eta^2 + 1$$

$$\left(\frac{E}{0.51098} + 1 \right)^2 = \left(\frac{B\rho}{1704.4} \right)^2 + 1$$

หรือ

$$\therefore E = 0.51098 \left[\sqrt{ \left(\frac{B\rho}{1704.4} \right)^2 + 1 } - 1 \right] \quad \text{---------(33)}$$

อันเป็นสมการขั้นสุดท้ายที่จะหาพลังงาน E ของอีเล็กตรอน หรืออนุภาค Beta ที่ถูกส่งออกมาจากสารกัมมันตรังสีในหน่วย MeV. เข้าสู่สนามแม่เหล็ก B มีหน่วยเป็น gauss และถูกเบนให้เดินทางเป็นส่วนโค้งของวงกลมรัศมี ρ เป็น cm.

เครื่องมือ

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองเรียกว่า Beta ray spectrometer ที่นิยมกันทั่วไปมี 2 แบบ คือ

(1) ชนิด High intensity เป็นแบบที่วัดอนุภาคได้สูงแม้แต่จะใช้ source ที่มีปริมาณน้อย แต่ถ้าจัดสนามแม่เหล็กหรือตำแหน่งของ counter ผิดไปเล็กน้อย จะวัดได้น้อยลงมาก ข้อเสียก็คือจัดได้ยากมาก

(2) ชนิด High resolution คือ ชนิดที่แยกได้ดี ให้มีพลังงานเป็นกลุ่ม ๆ แม้ว่าจะจัดสนามแม่เหล็ก หรือตำแหน่งของ counter พลาดเคลื่อนไปเล็กน้อยก็จะยังคงวัดได้ แต่ก็มีข้อเสียที่ว่าการคำนวณก็จะผิดตามไป

ด้วยเล็กน้อย.

โดยทั่วไปแล้วชนิด High intensity spectrometer ใช้สนามแม่เหล็กประเภท Solenoidal magnetic lenses และเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็ก โดยให้ Detector อยู่ตำแหน่งคงที่ ส่วนชนิด High resolution spectrometer เป็นแบบครึ่งวงกลม ใช้สนามแม่เหล็กคงที่ แต่ให้รัศมีความโค้งของทางเดินอนุภาค Beta เปลี่ยนแปลงไป หรืออาจจะเป็นชนิด รัศมีความโค้งตั้งไว้คงที่ แล้วเปลี่ยนสนามแม่เหล็กก็ได้ ซึ่งวิธีหลังนี้สะดวกกว่า ทั้งนี้ เพราะเมื่อใส่สนามแม่เหล็กเข้าไป เปลี่ยนค่าไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ทางเดินโค้งมีรัศมีเท่ากับที่ได้กำหนดไว้ แล้วก็จะวัดได้ด้วย Detector ที่อยู่กับที่ได้

<u>Spectrometer ของ Lawson และ Tyler.</u> (6)

มีรูปร่างเป็นครึ่งวงกลม และเป็นแบบแรกที่สุดที่ J.L Lawson และ A.W. Tyler ได้ร่วมมือกันสร้างขึ้น.

002028

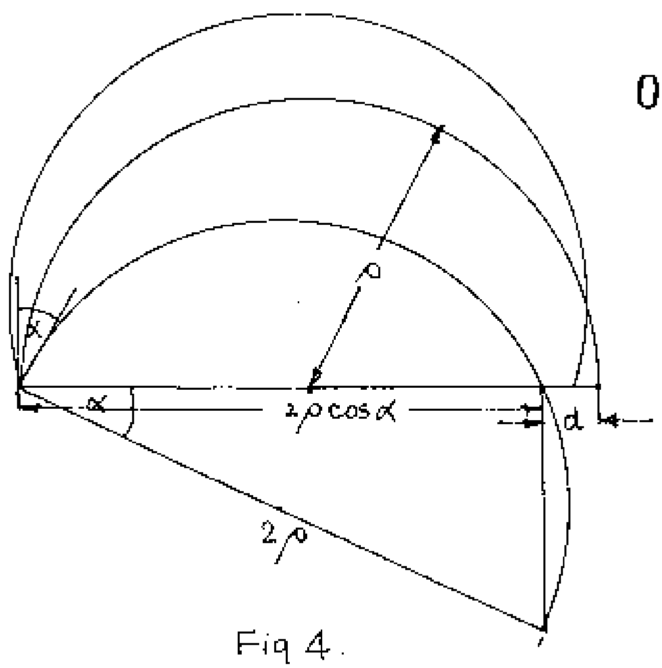

Fig 4.

หลักการสำคัญ ๆ คือ เมื่อสนามแม่เหล็ก B ตั้งฉากกับกระดาษ และ Uniform อิเล็กตรอนที่อยู่ในแนวกลางจะออกจาก source ในทิศทางตั้งได้ฉากกับเส้นผ่าศูนย์กลาง จะโค้งไปทางขวามือ (ตามกฎของมือขวา) จะทำให้เดินเป็นเส้นโค้ง เป็นครึ่งวงกลม

จากการพิสูจน์ได้ว่า $B\rho \propto p$

เมื่อ B = ความเป็นสนามแม่เหล็ก

ρ = รัศมีความโค้ง

p = Momentum

Electron ตัวอื่น ๆ ที่มี p เท่ากัน ทำมุม α เล็ก ๆ กับ Electron ตัวที่อยู่กลางก็จะเดินทางเป็นครึ่งวงกลม ต่างออกไปจากทางเดินเดิม และจะไปถึงแนวเส้นผ่าศูนย์กลางที่จุดต่างออกไป แต่จะไม่เลยออกไปเกินไปกว่าจุดที่ Electron ตัวที่อยู่กลางไปถึง

ให้ d เป็นระยะทางบนปลายข้างหนึ่งของเส้นผ่าศูนย์กลางที่มี Electron ไปถึงโดยขณะที่ออกจาก source ทำมุม α กับ Electron ตัวที่อยู่กลาง

$$d = 2\rho\,(1 - \cos\alpha)$$

หรือ $$d = 2\,\alpha^2$$

ถ้า source slit มีความกว้าง d'

จะทำได้ $$d = d' + 2\rho\,(1 - \cos\alpha)^{(7)}$$

จาก $$p \propto B\rho$$

$$\Delta p \propto B\Delta\rho$$

ค่า Resolution ของเครื่องมือ คือ อัตราส่วนของค่า Momentum ของอนุภาคที่แตกต่างออกไป ต่อ ค่า Momentum ของอนุภาคที่วัดได้

$$\therefore \text{ ค่า Resolution } = \frac{\Delta p}{p}$$

$$= \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

แต่จากรูปจะทราบว่า

$$\Delta 2\rho = d$$

$$\therefore \Delta\rho = \frac{d}{2}$$

$$= \frac{d'}{2} + \rho\,(1 - \cos\alpha)$$

$$\therefore \text{ Resolution } = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{d'}{2\rho} + (1 - \cos\alpha)$$

ค่า Resolution นี้ เป็นค่าเฉพาะของเครื่องมือแต่ละอันที่จัดสร้างขึ้น ซึ่งขึ้นอยู่กับ

d' ความกว้างของ Source slit

ρ รัศมีความโค้งของทางเดิน Electron

α มุมที่อนุภาค Beta ที่ส่งมารอบนอก ทำกับอนุภาค Beta ตัวที่อยู่กลาง

Intensity ของอนุภาคที่วัดได้ จะได้ดังแสดงไว้ใน Graph ข้างล่างนี้

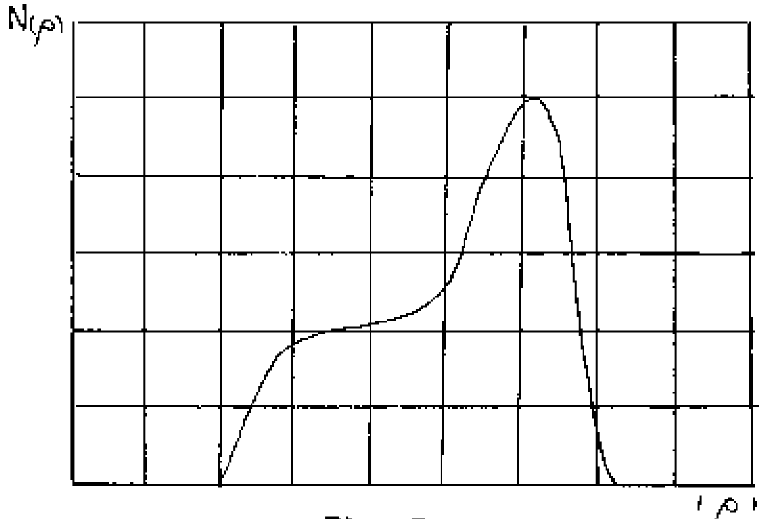

Fig. 5

N (ρ) = จำนวน cpm ที่วัดได้เมื่อใช้ค่า ρ ต่าง ๆ กัน

จาก Graph แสดงถึงว่าเมื่อทำ Source ให้เล็ก ๆ และ ρ โตพอสมควร จะลดการกระจัดกระจายของทางเดินของ Electron ได้

ทฤษฎีการ Decay ของอนุภาค Beta ของ Fermi

ในปี ค.ศ. 1934 Enrico Fermi ได้เขียนทฤษฎีการ Decay ของ Electron ที่ถูกส่งออกมาจาก Nuclei ใด ๆ ว่าเป็นผลมาจากการที่ Neutron เปลี่ยนไปเป็น proton ซึ่งจะให้ e^- และ Neutrino หรือ proton เปลี่ยนไปเป็น Neutron ซึ่งจะให้ e^+ และ Neutrino แม้ว่าการสลายตัวให้ e^- หรือ e^+ ออกมานี้ Nuclei จะมี state ซึ่งเป็น Discrete state ก็ตาม แต่ probability ในการที่ Electron และ Neutrino จะมี Energy แตกต่างกันออกไป อันเป็นสาเหตุที่ทำให้ Electron ที่ถูกส่งออกมาจากสารกัมมันตรังสีอันหนึ่ง ๆ มี Energy ต่าง ๆ กัน ทฤษฎีของเขาที่กล่าวถึง Energy distribution ของอนุภาค Beta สำหรับ Spectrum คือ

$$N(W)dW = WF(W,Z)(W^2-1)^{1/2}(W_0 - W)^2 dW \text{ ---------------- } (1)$$ [8]

เมื่อ W_0 เป็น Maximum energy ของ Beta particle (รวมทั้ง Rest mass energy ด้วย) ในหน่วยของ m_0c^2

W เป็น Energy ที่ของ particle ที่ถูกส่งออกมา

F (W,Z) เรียกว่าเป็น "Fermi function" อันเป็นผลเนื่องมาจาก Coulomb field ที่มีต่อ Beta particle จะมีค่าประมาณ 1 เมื่อ Coulomb effect น้อยมาก ดังนั้น สำหรับกรณีที่สารที่มี Z น้อย ๆ หรือ Energy ของ Electron มาก ;

ค่า η ซึ่งเป็น $\frac{p}{m_o c}$ = ค่า Momentum ในหน่วยของ $m_o c$ จะเขียนได้เป็น

$$\eta = (W^2 - 1)^{1/2} \quad \text{--------------------(2)}$$

ดังนั้น จึงสามารถจะเขียน (1) ได้เป็น

$$(W_o - W)^2 \simeq \frac{N(W)}{W \eta F(W)} \quad \text{---------------(3)}$$

และถ้าเขียนในเทอมของ Momentum spectrum $N(\eta)$ ก็จะเขียนได้เป็น

$$(W_o - W)^2 \simeq \frac{N(\eta)}{\eta^2 F(\eta)} \quad \text{---------------(4)}$$

(9)

หรือถ้าพิจารณาจาก graph ที่จะเขียนขึ้น ระหว่างค่า $\left[\frac{N(\eta)}{\eta^2 F(\eta)}\right]^{1/2}$ และ ค่าของ $(W_o - W)$ แล้วก็จะได้กราฟเป็นเส้นตรง

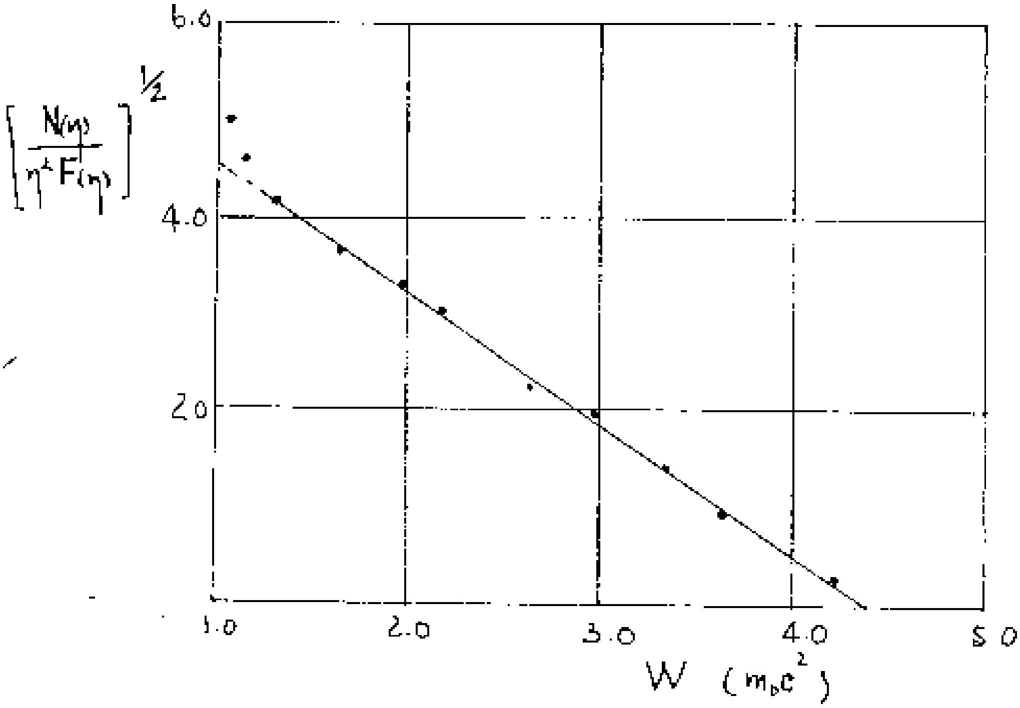

Fig 6

Kurie plot ของ O^{15} (Ref. Phys. Rev, 76 689 (1949))

กราฟอันนี้ เรียกว่า "Fermi Plot" หรือ "Kurie plot" ของ Momentum spectrum ของ Beta particle ที่ส่งมาจาก O^{15} เมื่อต่อเส้นตรงออกไปตัดแกนของ Energy จะได้ค่า W_{max} ของ Beta Spectrum

ในการหา W_{max} โดยวิธีนี้ เป็นวิธีที่ดีมาก เพราะเหตุว่า ถ้า Energy ของ Beta particle ที่ถูกส่งออกมาจาก Source มีค่าไม่มากนัก ตอนที่ Intensity ในการวัดมีน้อย จะหา End point ได้ยากมาก เนื่องจากมี Absorption ที่ Source และ ที่ Window ของหลอด Geiger-Muller Counter ที่ใช้นับ. การต่อ Curve เส้นตรงออกไปจึงจะได้ค่าที่แน่นอนกว่า

ในการเขียน Graph นั้น เขียนค่า $\left[\frac{N(\eta)}{\eta^2 F(\eta)}\right]^{1/2}$ บนแกน y

และ W บนแกน x เมื่อเขียนแล้ว และหา End-point energy ได้ในหน่วยของ m_oc^2 ค่านี้จะต้องลบออกด้วย m_oc^2 คือค่า Rest energy ของ อีเล็กตรอน จึงจะเป็นค่า E_{max} ที่แท้จริงของอนุภาค Beta เพราะเหตุว่า

$$W = mc^2 + m_oc^2$$

Fermi ได้ให้ค่าอย่างประมาณของค่า $\eta^2 F(\eta)$ ซึ่งเรียกว่า (10) "Fermi distribution function" หรือ "Transition probability function" ไว้ และจะปรากฏว่าเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยตามค่าของ Z, Atomic number ของสารกัมมันตรังสีนั้น η ; จึงเขียนเป็น $\eta^2 F(Z,\eta)$ และ ให้เขียน $f(Z,\eta)$ แทน $\eta^2 F(Z,\eta)$ สำหรับ Z = 82.2

$$f(82.2,\eta) \simeq 4.5\eta + 1.6\eta^2$$

และต่อมา Bethe และ Bacher ได้ดัดแปลงให้ถูกต้องใช้ได้สำหรับค่า Z ที่ไม่เกิน 84 ได้อย่างถูกต้องมาก โดยให้ไว้เป็น

$$f(Z,\eta) = \eta^2 \frac{2\pi y}{1 - e^{-2\pi y}} (1 - 2S)\, \eta^{2S}$$

เมื่อ $$y = \frac{Z}{137} \frac{(1 - \eta^2)^{1/2}}{\eta}$$

และ $$S = \left[1 - \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \right]^{1/2} - 1$$

สำหรับค่า $f(Z,\eta)$ ที่ถูกต้อง ที่คิด Relativity อย่างถูกต้องแล้วนั้น ได้แสดงไว้ใน Table หน้า 47-48 ซึ่งเป็นค่าที่ NBS. Computation Laboratory ได้คำนวณไว้สำหรับ Beta$^-$ emission โดยตรง