บรรณานุกรม

Green, A.E. & Zerna, W. Theoretical Elasticity. 2nd edn. Oxford:Clarendon Press. 1968

Naghdi, P.M. The Theory of Shells and Plates. Flugge's Handbuch der Physik,Vol. VIa/2, edited by Truesdell,C.,Springer-Verlag,(1972):425-640.

______."Fluid Jet and Fluid Sheets: A Direct Formulation." Proc. 12th Symp. on Naval Hydrodynamics. National Academy of Sciences, Wash., D.C. (1979): 500-515

Green, A.E. & Naghdi, P.M. "Directed fluid sheets." Proc. R. Soc. London series A. 347,(1976): 447-473.

______. "Water Wave in a Nonhomogeneous Incompressible Fluid." J. Applied Mechanics. 44,(1977): 523-528

Naghdi,P.M. & Rubin M.B. "On the transition to of a boat." J. Fluid Mech. 103, (1981):345-374

Naghdi, P.M. & L. Vongsarnpigoon "The downstream flow beyond and obstacle." J. Fluid Mech. 162(1986): 233-248

ภาคผนวก ก

```
program obstfho ;

type
    oneary = array [1..1200] of real ;   { type result buffer var      }
    twoary = array [1..2] of real;       { type runkutta var           }
    eigary = array [1..8] of real;       { type runkutta var           }
    strt   = string[14]          ;       { type read & write file name }
    fivart = text  ;                     { type read & write file      }
    strt5  = string[5]           ;

var
    ho,Q,f,fb,fe,uo      : real    ;    { far up stream condition    }
    xl,x2,ls,lsx,lsxx    : real    ;    { obstruct  limit & surface  }
    x,delx,delho         : real    ;    { x, delta x , delta ho      }
    s3,s3p,s3m,s3b       : real    ;    { s3 ,s3+ , s3-              }
    bp,bpm,rfp           : real    ;
    ercl,erc2,is,ir      : integer ;    { errer code, index of xr;yr }
    y,dy                 : twoary  ;    { top surface, derfun var    }
    wk                   : eigary  ;    { runkutta var               }
    rfile,rfilel,wfile   : fivart  ;    { read & write file var      }
    rfname,rfnamel,wfname : strt    ;     { read & write file name var }
    srcode               : string[2] ;  { serie code name            }
    loop                 : boolean   ;
    obcd                 : strt5     ;  { code of obstacle           }
    alm,alp              :   real    ;  { const of parabolic shape   }
    scd,bat              :   char    ;  { type of sinusidal shape    }
    ocd                  :   char    ;  { first char obstacle code   }
    obnum,iob            : integer   ;  { number of obstacle for cal.}
    xml,xpl              : real    ;    { xml,xpl value of maximum  -x,+x }
    xconm,xconp          : real    ; { xconm value of- x which curve convex}
                                     { xconp value of+ x which curve convex}
    zetam,zetap          :real     ;{ zeta angle of line between centers
                                      vs x-axis  +-}
    rm, rp               :real     ;    { rm = radias of - circlr/rc}
                                        { rp = radias of + circle/rc}
    rc                   :real     ;    { rc = radias of center circle }


function create(var fi : fivart):boolean;

  begin  {$i-} reset(fi) ; {$i+}  create := ioresult =0 ;    end;

procedure readf;

begin
   assign(rfile,'obst.dat');
   reset(rfile);
end;

procedure getintdata;

begin  ho := 4.6 ; delho := 0.8 ; fb := 0.3 ; fe :=0.01 ; end ;

procedure setwfn;

  begin
     writeln ('  PUT YOUR DATA DISK IN DRIVE B:            ');
     writeln ('  your data filename inform  b: obcd_??.prn');
     write   ('  enter filename__(2 letter)_b:#####_')       ;delay(2000);
     readln(srcode);writeln('.prn');
  end;

procedure openf;

  begin
     wfname := concat(obcd,'_',srcode,'.prn');
     assign(wfile,wfname);
     rewrite(wfile);
  end;
```

```
procedure decd(cd : strt5);

var
    temp  : string[2]  ;  code : integer ;

  begin
    ocd  := copy(cd,1,1) ;
    if upcase(ocd) = 'P' then
    begin
      temp := copy(cd,2,2) ; val(temp,alm,code); alm := alm/100 ;
      temp := copy(cd,4,2) ; val(temp,alp,code); alp := alp/100 ;
    end
    else
      if upcase(ocd) = 'C' then
        begin
          temp := copy(cd,2,2) ; val(temp,rm,code);
          temp := copy(cd,4,2) ; val(temp,rp,code);
        end
      else
        scd := copy(cd,5,1) ;
  end;

procedure xlimit;                               { cal. limit of  x  in region II }

  begin
    case  upcase(ocd)  of
    'P' :begin
           xl := -sqrt(1.0/alm) ;
           x2 :=  sqrt(1.0/alp) ;
         end;
    'S' :begin
           if scd='1' then xl := -1
                      else xl := -2 ;
           x2 := -xl ;
         end;
    'C' :begin
           rc := 0.5 ;
           zetam := arctan(rc*(rm-1)/(sqrt(sqr(rc*(rm+1))-sqr(rc*(rm-1)))));
           zetap := arctan(rc*(rp-1)/(sqrt(sqr(rc*(rp+1))-sqr(rc*(rp-1)))));
           xml  :=  -rc*(rm+1)*cos(zetam);
           xpl  :=   rc*(rp+1)*cos(zetap);
           xl   :=  xml ;
           x2   :=  xpl ;
           xconm := -rc*cos(zetam);
           xconp :=  rc*cos(zetap);
      {     writeln(' xml xpl ',xml:5:3,'  ',xpl:5:3);
           writeln(' xcon     ',xconm:5:3,'  ',xconp:5:3);
           writeln(' zeta     ',zetam:5:3,'  ',zetap:5:3);}
         end;
    end ;                                                        { end case }
  end;

procedure los(u : real; var v,vx,vxx : real) ;   { top surf. funct. of obst. }
                                                 { u = x , v = z , vx = dz/dx}
var  dx   : real    ;
     s   : integer ;

procedure cx ;
  begin
  if  u <= xl  then
        begin  v := 0;  vx:= 0 ; vxx := 0 ; end
  else
    if  u<= xconm  then
        begin
          v  := -sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u+rc*(rm+1)*cos(zetam))))+rm*rc ;
          vx := -(1/2)*(1/sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u+rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                *(-2*(u+rc*(rm+1)*cos(zetam)))       ;
          vxx:=  (1/4)*(sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u+rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                *(1/sqr(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u+rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                *sqr(-2*(u+rc*(rm+1)*cos(zetam)))
                +(1/sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u+rc*(rm+1)*cos(zetam))))) ;
        end
    else
      if u < xconp    then
        begin
          v   := sqrt(rc*rc-u*u) + rc ;
          vx  := (1/2)*(1/sqrt(rc*rc-u*u))*(-2*u)    ;
          vxx := (-1/4)*(sqrt(rc*rc-u*u))*(-2*u)*(1/sqr(rc*rc-u*u))*(-2*u)
```

```
                    *(sqr(-2*u)) - (1/sqrt(rc*rc-u*u))    ;
         end
       else
         if x<x2  then
          begin
           v  := -sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u-rc*(rm+1)*cos(zetam))))+rm*rc ;
           vx := -(1/2)*(1/sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u-rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                  *(-2*(u-rc*(rm+1)*cos(zetam)))  ;
           vxx:=  (1/4)*(sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u-rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                  *(1/sqr(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u-rc*(rm+1)*cos(zetam)))))
                  *sqr(-2*(u-rc*(rm+1)*cos(zetam)))
                  +(1/sqrt(abs(sqr(rc*rm)-sqr(u-rc*(rm+1)*cos(zetam))))) ;
         end
         else
          begin  v := 0;  vx:= 0 ; vxx := 0 ; end

   end;

   begin
      if (u >= x1) and (u <= x2) then                          { region II }
      begin
         case upcase(ocd)  of
         'P' : begin
               if u<=0 then
                  begin v := 1-alm*u*u ; vx := -2*alm*u ; vxx := -2*alm ; end
               else
                  begin v := 1-alp*u*u ; vx := -2*alp*u ; vxx := -2*alp ; end ;
               end;
         'S' : begin
               if scd= '1' then  s :=  1
                           else  s := -1     ;
               v   :=  0.5*(1+s*cos(pi*u))    ;
               vx  := -0.5*pi*s*sin(pi*u)     ;
               vxx := -0.5*pi*pi*s*cos(pi*u) ;
               end;
        'C' : begin
              cx ;
     { writeln(' x ',x:5:3,'  y ',v:5:3,'  yx ',vx:5:3,'  yxx ',vxx:5:3);}
              end;

         end ;                                                  { end case }
      end
      else
         begin  v := 0.0 ; vx := 0.0 ; vxx := 0.0 ;  end;        { region III }
   end;

 procedure derfun(xf,yl,y2 :real);            { integrate function of rkfour }

   begin
      los(xf,ls,lsx,lsxx) ;
      dy[1] := y2;
      dy[2] := 0.5*y2*y2/yl - 1.5*(1.0/yl-yl/(ho*ho))
               - 3.0*yl*(yl+ls-ho)/(f*ho*ho*ho)
               - 1.5*(lsxx+lsx*lsx/yl) ;
   end;

 procedure rkfour(n :integer ; var x,delx : real);
                                                    { rungkutta four order }
                                    { y[1] : thickness of fluid , y[2]  : dy[1]/dx }
 var
      i,il,i2          : integer ;
      wk               :  eigary ;

   begin
      il:= 2*n ;     i2 := 3*n ;

      derfun(x,y[1],y[2])  ;
      for i:=1 to n  do
         begin    wk[i] := y[i] +delx*dy[i]/2.0 ; wk[i+n]:= dy[i] ; end;
      x := x+delx/2.0;

      derfun(x,wk[1],wk[2]) ;
      for i :=1 to n do
         begin    wk[i] := y[i]+delx*dy[i]/2.0   ; wk[i+il] := dy[i]; end;

      derfun(x,wk[1],wk[2]) ;
      for i :=1 to n do
         begin    wk[i] := y[i]+delx*dy[i]       ; wk[i+i2] := dy[i]; end;
```

```
    x := x + delx/2.0;

    derfun(x,wk[1],wk[2]);
    for i :=1 to n do
       y[i] := y[i]+(wk[i+n]+2.0*wk[i+i1]+2.0*wk[i+i2]+dy[i])*delx/6.0 ;

     {writeln('ls ',ls:7:4,' lsx ',lsx:7:4,' lsxx ',lsxx:7:4,' x ',x:7:4
            ,' y[1] ',y[1]:7:4,' y[2] ',y[2]:7:4);  }
    if y[1] <0  then                          { check thickness of fluid }
       begin
          x     := x2+0.01 ;
          ercl  := 1       ;
       end ;
  end;

procedure jump(vm,vxm,lsxm,lsxp : real ; var vp,vxp : real );
                                              { jump condition at x1, x2 }
  begin                                       { vm       top surf at x-  }
     vp   := vm              ;                { vxm      top surf at x-  }
     vxp  := vxm +1.5*(lsxm-lsxp)  ;          { lsxm     bot surf at x-  }
                                              { lsxp     bot surf at x+  }
                                              { vp       top surf at x+  }
                                              { vxp      top surf at x+  }
  end;

procedure chks3(v,vx :real) ;                          { cal. s3-, s3, s3+ }

var
    gm  : real  ;                                                { grama }

  begin
     gm   :=  (f/4.0)*(1.0+sqrt(1.0+8.0/f))                      ;
     s3p  :=  (3.0)*(2.0+1.0/f)                                  ;
     s3m  :=  (3.0/gm)*(2.0+gm*gm*gm/f)                          ;
     s3   :=  (3.0*ho/v)*(1.0+(1.0+2.0/f)*(v*v/(ho*ho))
              -v*v*v/(f*ho*ho*ho)-vx*vx/3.0)                     ;
     {write('     ');
     write(' s3-  s3  s3+  ',s3m:8:6,'  ',s3:8:6,'  ',s3p:8:6);}
  end;


procedure reg2 ;                 { proc. cal. ho at  critical flow in region III }
                                 { for froude number(f);  0.1 < f < 0.5          }
var
      i   : integer ;

  BEgin
     f := fb ;
     while  f>= fe  do                          { decrease f  loop }
     begin
        loop := true ;
        writeln('_',obcd,'_f= ',f:4:3,'  ');
        while loop =true do                                { decrease ho  loop }
        begin
           ercl := 2 ;
           write(' *');
           write(' ho = ',ho:10:8) ;
           y[1] := ho ;  y[2] :=  0.0 ;                   { far upstream condition }
           x     := x1 ;
           los(x,ls,lsx,lsxx); jump(y[1],y[2],0,lsx,y[1],y[2]) ;
                               { cal. initial value at x=x1(begin at region II) }
           while x<= x2-delx do                  {   integrate region II loop }
           begin
              rkfour(2,x,delx) ;
           end;
                                    { form rkfour pro. if ercl<> 1, y[1] NE 0 }
                                    {                  if ercl = 1, y[1] EQ 0 }
           if ercl<>1   then
                                    { check critical flow  by                 }
                                    { check value of s3 in down stream flow   }
           begin
              los(x2,ls,lsx,lsxx);
              jump(y[1],y[2],lsx,0,y[1],y[2]) ;                { jump condition }
              chks3(y[1],y[2]) ;                               { get s3         }
              if ( ((s3-s3m)<0.0001*(s3p-s3m)) or (delho<0.00000001) )
                 and(s3-s3m>0) then
              begin
                 loop  := false ;
```

```
              delho := 0.2    ;
              write(' s3-  s3  s3+   ',s3m:8:6,'  ',s3:8:6,'  ',s3p:8:6);
              writeln(' ho= ',ho:4:3) ;
            end
            else
            begin
              if s3>s3m then
              begin
                 ho := ho - delho ;
                 write(' +');
                 for is := 1 to 2 do
                   begin sound(800); delay(200); nosound;  end;
              end;
              if s3<s3m then                     { for s3 < s3- adjust ho    }
              begin                              { by                        }
                ho := ho + delho ;
                delho := delho/2 ;
                ho := ho - delho ;
                write(' -');
                for is := 1 to 2 do
                   begin sound(200); delay(200); nosound;  end;
              end;
            end;
          end
          else
          begin
            write(' 0') ;
            for is := 1 to 2 do
                   begin sound(500); delay(200); nosound;  end;
            ho := ho + delho ;
            delho := delho/2 ;
            ho := ho - delho ;
            ercl := 2 ;
          end;
        end;                                     { end loop of decrease ho }
          writeln(wfile,f:10:8,'  ',ho:10:8);
          f := f - 0.01 ;
          for is := 1 to 4  do
            begin sound(100); delay(200); nosound;  end;
     end;                                        { end read loop          }
  ENd;                                           { end of procedure reg2   }

procedure oneobst;

beGIN                    { cal. critical ho for obst which in code tobst  }
    for is := 1 to 10 do
        begin sound(50); delay(200); nosound;  end;
    openf ;
    getintdata ;
    decd(obcd);
    xlimit ;
    delx := (x2-x1)/3000 ;
    reg2 ;
    close(wfile);
enD;

BEGIN
  readf ;                                                          { MAIN }
  clrscr ;
  writeln('  create data file "obst.dat" which have obstacle code    ');
  writeln('  parabolic code     P##**    ; ## = alpha when  x<0       ');
  writeln('                                  ** = alpha when  0<x       ');
  writeln('            z = 1 - alpha*x^2                                ');
  writeln('                   ## and **  = alpha*100 ,                  ');
  writeln('  sinusidal code  now have two code                          ');
  writeln('              1)  SN001  for  z = 0.5*(1+cos(pi*x))          ');
  writeln('              2)  SN002  for  z = 0.5*(1-cos(pi*x))          ');
  writeln;
  writeln('  3 -circle code     C##**    ; ## = mag. radius of - axis ');
  writeln('                                  ** = mag. radius of + axis ');
  writeln('  let  radius of - axis -> r-  :  radius of + axis -> r+ ');
  writeln('  radius of middle circle(rc) = 0.5 , ## =  (r-)/rc        ');
  writeln('                                        ** =  (r+)/rc        ');
  writeln;
  writeln('  please press any key to quit , and create bat file      ');
  writeln('  if you have bat file , press "y" and return              ');
  read(kbd,bat);
  if upcase(bat) = 'Y'   then
```

```
  begin
     setwfn;
     writeln('     don't disturb me  I'm busy ') ; delay(2000);
     clrScr ;
     lowVideo ;
     readf ;
     while not eof(rfile)  do
     begin
        readln(rfile,obcd);
        oneobst;
     end;
     close(rfile);
     clrscr; normVideo; gotoXY(15,12);
     writeln('I'm finished ,  please press any key ! thank you ');
     while keypressed=false do                        { finished sound signal }
     begin sound(80); delay(200); nosound;  end;
  end;

END.
```

ภาคผนวก B

B-1 สรุปทฤษฎี Cosserat Surfaces

ในหัวข้อนี้เราจะสรุปทฤษฎี Cosserat Surfaces ซึ่งจำลองวัตถุเป็น Directed two-dimensional continuum ที่ประกอบด้วยพื้นผิว $\mathcal{C}$ (อยู่ใน space 3 มิติ) และ Vector field ที่ทุกๆจุดบนพื้นผิว $\mathcal{C}$ ซึ่งสามารถเปลี่ยนแปลงค่าได้ เราเรียก Vector field นี้ว่า Director การเปลี่ยนแปลงค่าของ Director นี้เปลี่ยนแปลงได้ทั้งการหมุนและยืดหดโดยเป็นอิสระจากการเปลี่ยนแปลงของผิว $\mathcal{C}$ director นี้มีคุณสมบัติคงตัวภายใต้การเคลื่อนที่แบบ superposed rigid body motions (การเคลื่อนที่เพิ่มเติมแบบวัตถุแข็งเกร็ง) สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมของทฤษฎี Cosserat surfaces จะดูได้ใน Naghdi (1972)

ให้จุดต่างๆของวัตถุบนพื้นผิว กำหนดด้วย Convected Coordinate θ^{α} (α = 1,2) นั่นคือค่าที่จุดใดๆไม่เปลี่ยนแปลงไม่ว่าพื้นผิวจะเคลื่อนที่อย่างไร ให้ $\mathscr{S}$ เป็นผิว $\mathcal{C}$ ที่เวลา t, $\mathbf{r}$ เป็น position vector ของจุดใดๆ และ $\mathbf{d}$ เป็น director ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ดังนั้นการเคลื่อนที่ของ Cosserat Surfaces สามารถกำหนดได้ด้วย position vector $\mathbf{r}$ และ director $\mathbf{d}$ นั่นคือ

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^{\alpha},t), \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(\theta^{\alpha},t), \quad [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{d}] = 0 \qquad \text{B1.1}$$

เมื่อ $\mathbf{a}_{\alpha}$ เป็น base vector ของ θ^{α} - curve และ $\mathbf{a}_3$ เป็น unit normal vector ของผิว ซึ่งมีค่าจำกัดความคือ

$$\mathbf{a}_{\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha}(\theta^{\beta},t) = \partial\mathbf{r}/\partial\theta^{\alpha}, \quad a^{1/2}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \quad a = \det a_{\alpha\beta}$$

$$a^{1/2} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] > 0 \qquad \text{B1.2}$$

เนื่องจาก $\mathbf{d}$ เป็นตัวแปรซึ่งอาจกล่าวได้ว่าจำลองความหนาของวัตถุใน 3 มิติ สมการสุดท้ายของ(B.1.1) จึงเป็นสมการที่กำหนดว่าในระหว่างการเคลื่อนที่ปริมาตรของส่วนใดๆจะไม่กลายเป็นศูนย์ นอกจากนี้เราสามารถให้ค่าจำกัดความของ associate base vector $\mathbf{a}^{\alpha}$ ได้ดังนี้

$$\mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^{\alpha}\cdot\mathbf{a}^{\beta}, \quad a^{\alpha\beta}a_{\gamma\lambda} = \delta^{\beta}_{\lambda} \qquad \text{B1.3}$$

เมื่อ δ^{α}_{β} คือ Kronecker delta ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\alpha = \beta$ และเท่ากับ 0 เมื่อ $\alpha \neq \beta$ ในสมการ(B1.3) และที่อื่นๆในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้ Einstein's summation convection นั่นคือ indices ที่ซ้ำกันจะถือว่ามีการบวกกันตลอดค่าที่เป็นไปได้ของ index นั้น velocity และ director velocity จะมีค่าเป็น

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{d}} \qquad \text{B1.4}$$

เมื่อเครื่องหมายจุดข้างบนหมายถึงการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาโดยให้ θ^{α} คงที่

ให้ $\mathcal{P}$ เป็นส่วนหนึ่งของผิว $\mathcal{S}$ ซึ่งเป็นผิว $\mathcal{C}$ ที่เวลา t ถูกล้อมด้วยเส้นโค้งปิด $\partial\mathcal{P}$ และ

$$\underset{\sim}{\nu} = \nu_{\alpha}\underset{\sim}{a}^{\alpha} \tag{B1.5}$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\nu}$ เป็น Outward unit normal vector ของเส้นโค้งปิด $\partial\mathcal{P}$ เราจะกำหนดค่าต่างๆดังต่อไปนี้

$\rho = \rho(\theta^{\gamma},t)$ เป็น ความหนาแน่นมวลสารของผิว $\mathcal{P}$ มีหน่วยเป็นมวลสารต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ในเวลาปัจจุบัน

$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{N}(\theta^{\gamma},t;\underset{\sim}{\nu})$ เป็น Contact force ต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเส้นโค้งในเวลาปัจจุบัน

$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}(\theta^{\gamma},t;\underset{\sim}{\nu})$ เป็น Contact director couple ต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเส้นโค้งในเวลาปัจจุบัน

$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{f}(\theta^{\gamma},t)$ เป็น Assigned force ต่อหนึ่งหน่วยมวลสารของผิว

$\underset{\sim}{l} = \underset{\sim}{l}(\theta^{\gamma},t)$ เป็น Assigned director couple ต่อหนึ่งหน่วยมวลสารของผิว

$\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{m}(\theta^{\gamma},t)$ เป็น Intrinsic director couple ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของผิว

$k = k(\theta^{\gamma})$ เป็น Inertia coefficient ไม่ขึ้นกับเวลา

โดยที่หน่วยของ ρ, $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{f}$ คือ

$\rho = [M\ L^{-2}]$

$\underset{\sim}{N} = [M\ T^{-2}]$

$\underset{\sim}{f} = [L\ T^{-2}]$

เมื่อ M แทนหน่วยของมวลสาร, L แทนหน่วยของความยาว, T แทนหน่วยของเวลา ส่วนหน่วยของ $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{l}$, $\underset{\sim}{m}$ ขึ้นอยู่กับการเลือกหน่วยของ $\underset{\sim}{d}$ ในที่นี้เราเลือกให้ $\underset{\sim}{d}$ มีหน่วยเป็นความยาว ซึ่งทำให้หน่วยของ $\underset{\sim}{M}$ เหมือน $\underset{\sim}{N}$, $\underset{\sim}{l}$ มีหน่วยเหมือน $\underset{\sim}{f}$, และ $\underset{\sim}{m}$ มีหน่วยเป็น $[M\ L^{-1}\ T^{-2}]$

จากคำจำกัดความที่กล่าวมา กฎการคงตัวต่างๆ(Conservation Laws) สำหรับ Cosserat Surfaces สามารถเขียนได้ในรูปดังนี้ (ดู Naghdi 1972)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho\, d\sigma = 0 \tag{B1.6$_a$}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho\, \underset{\sim}{v}\, d\sigma = \int_{\mathcal{P}} \rho\, \underset{\sim}{f}\, d\sigma + \int_{\partial\mathcal{P}} \underset{\sim}{N}\, ds \tag{B1.6$_b$}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\wp} \rho\, k\underset{\sim}{w}\, d\sigma = \int_{\wp} (\rho \underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{m})\, d\sigma + \int_{\partial\wp} \underset{\sim}{M}\, ds \qquad B1.6_c$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\wp} \rho (\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{d}\times k\underset{\sim}{w})\, d\sigma = \int_{\wp} \rho (\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{l})\, d\sigma + \int_{\partial\wp} (\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{d}\times\underset{\sim}{M})\, ds \qquad B1.6_d$$

เมื่อ $d\sigma$ เป็น element of area ของผิว $\wp$

ds เป็น line element ของเส้น $\partial\wp$

จะเห็นได้ว่าสมการ($B1.6_a$)เป็นสมการที่แสดงถึง Conservation of mass, สมการ($B1.6_b$) เป็นสมการที่แสดงถึง Conservation of linear momentum, สมการ($B1.6_c$) เป็นสมการที่แสดงถึง Conservation of director momentum, สมการ($B1.6_d$) เป็นสมการที่แสดงถึง Conservation of moment of momentum ส่วนสมการ Conservation of energy ก็คือ

$$\frac{d}{dt}\int_{\wp} \rho [{}^1/_2(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} + k\underset{\sim}{w}\cdot\underset{\sim}{w}) + \varepsilon]\, d\sigma = \int_{\wp} \rho(\gamma + \underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{l}\cdot\underset{\sim}{w})\, \partial\sigma + \int_{\partial\wp} (\underset{\sim}{N}\cdot\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{M}\cdot\underset{\sim}{w} - h)\, ds \qquad B1.7$$

เมื่อ ε เป็น Specific internal energy

γ เป็น Heat supply

h เป็น Heat flux

ในวิทยานิพนธ์นี้เราจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่อุณหภูมิมีค่าคงที่เท่าๆกันที่ทุกจุด และไม่มีการถ่ายเทความร้อนระหว่างส่วนต่างๆ ดังนั้นไม่มีความจาเป็นต้องพิจารณา สมการ Conservation of energy (B1.7)

เพื่อการเปรียบเทียบกับค่าต่างๆในทฤษฎีสามมิติ เราสามารถให้ความหมายแก่ค่าต่างๆในสมการ (B1.6) และ (B1.7) ได้ ค่า ρ เป็นค่าที่ได้จากการอินทิเกรดมวลสารต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ ค่า $\underset{\sim}{N}$ เป็นแรงรวมต่อหนึ่งหน่วยความยาวซึ่งหาได้จากการอินทิเกรด stress vector ($\underset{\sim}{T}^{\alpha}$) ในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ ค่า $\underset{\sim}{f}$ คือแรงรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุซึ่งประกอบด้วยผลจากการอินทิเกรด body force (เช่นแรงดึงดูดของโลก) ในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ และ แรงที่กระทำบนผิวบนและ ผิวล่างของวัตถุ ค่าความเร็ว $\underset{\sim}{v}$ เป็นค่าความเร็วของจุดบนพื้นผิวหลักซึ่งมักจะเลือกให้เป็นพื้นผิวที่อยู่ตรงกลางระหว่างผิวบน และผิวล่างของวัตถุ ดังนั้นสมการ ($B1.6_b$) จึงอาจจะกล่าวได้ว่าเป็นสมการที่แสดงผลของ conservation of linear momentum ในรูปแบบของแรงรวมที่กระทำต่อพื้นผิว

ค่า $\underset{\sim}{M}$ ในสมการ (B1.6$_c$) นั้นเป็นโมเมนต์รวมของแรงที่กระทำต่อส่วนหนาของวัตถุซึ่งหาได้จากการอินทิเกรด $\xi \underset{\sim}{T}^{\alpha}$ เมื่อ $\underset{\sim}{T}^{\alpha}$ คือ stress vector และ ξ คือ coordinate ในทิศทางความหนาของวัตถุ ค่า $\underset{\sim}{l}$ คือ โมเมนต์รวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุซึ่งประกอบด้วยโมเมนต์รวมของbody force ในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ และโมเมนต์ของแรงที่กระทำบนผิวบนและ ผิวล่างของวัตถุ ส่วนค่า $\underset{\sim}{m}$ คือแรงรวมของ stress vector $\underset{\sim}{T}^3$ (หรือ stress vector ในทิศความหนาของแผ่นวัตถุ) ค่าความเร็ว $\underset{\sim}{w}$ นั้นเป็นค่าการเปลียนแปลงของความเร็วของจุดต่างๆของเนื้อวัตถุในทิศทางความหนา ซึ่งอาจให้ความหมายคร่าวๆเป็นการบิดหรือหมุนของแผ่นวัตถุที่จุดนั้นๆ ดังนั้นสมการ (B1.6$_c$) จึงเป็นสมการที่ แสดงผลของโมเมนต์รวมที่กระทำต่อพื้นผิวจะเห็นได้ว่าสมการ (B1.6$_c$) นี้เป็นสมการที่เพิ่มเติมขึ้นหรือแปลกไปกว่าสมการในทฤษฎีสามมิติ เหตุที่เราจำเป็นจะต้องมีสมการนี้ก็เพราะเรากำลังลดมิติของปัญหาจากปัญหาในสามมิติซึ่งมีตัวแปรของที่ตั้ง 3 ตัวเป็นปัญหาในสองมิติซึ่งมีตัวแปรของที่ตั้งแค่ 2 ตัว(คือจุดต่างๆบนพื้นผิว) จึงต้องเพิ่มสมการขึ้น

สมการ (B1.6$_d$) เป็นสมการ conservation of moment of momentum ซึ่งสามารถหาได้จากการอินทิเกรดสมการ conservation of moment of momentum ในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ และ ใช้คำจำกัดความต่างๆที่ได้กล่าวมาแล้ว ในทำนองเดียวกันสมการ (B1.7) ก็เป็นสมการที่ได้จากการอินทิเกรด conservation of energy ในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ ค่า ε หาได้จากการอินทิเกรด specific internal energy ในสามมิติในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ ค่า γ และ h หาได้จากการอินทิเกรด heat supply และ heat flux ในสามมิติในทิศทางความหนาของแผ่นวัตถุ

สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมของการสร้างสมการจากทฤษฎี 3 มิติหรือการชี้บ่งค่าต่างๆของทฤษฎี Cosserat Surfaces เมื่อเทียบกับทฤษฎี 3 มิติ ดู Naghdi(1972)

B-2 กรณีเฉพาะของทฤษฎี Cosserat Surfaces

จากทฤษฎีทั่วไปของ Cosserat surfaces นั้นเมื่อเรากาหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมก็จะได้กรณีเฉพาะของทฤษฎี Cosserat surfaces ในกรณีพิเศษต่างๆกันไป แต่ในที่นี้เราจะพิจารณากรณีเฉพาะของทฤษฎี Cosserat surfaces ที่สร้างขึ้นโดย Green & Naghdi (1977) ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะที่นามาใช้แก้ปัญหาของ Fluid sheets โดยมีข้อกาหนดต่างๆดังต่อไปนี้

ให้ Director($\underset{\sim}{d}$) มีการเปลี่ยนแปลงเฉพาะความยาว และมีทิศขนานกับ unit vector $\underset{\sim}{b}$ ที่มี

ทิศคงที่ ดังนั้นสมการ(B1.1$_2$), (B1.4$_2$)จึงเขียนได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{d} = h(\theta^{\alpha},t)\underset{\sim}{b} \ , \quad \underset{\sim}{w} = w(\theta^{\alpha},t)\underset{\sim}{b} \ , \quad w = \dot{h} \qquad \text{B2.1}$$

เพื่อความสะดวกเราสามารถแตก $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{m}$, $\underset{\sim}{l}$ ออกเป็นส่วนประกอบที่มีทิศตาม $\underset{\sim}{b}$ และอีกส่วนประกอบที่ตั้งฉากกับ $\underset{\sim}{b}$ ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{M} = M(\theta^{\gamma}, t;\underset{\sim}{v})\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{S}(\theta^{\gamma}, t,\underset{\sim}{v}) \ , \quad \underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{b} = 0 \qquad \text{B2.2}_a$$

$$\underset{\sim}{m} = m(\theta^{\gamma}, t)\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{s}(\theta^{\gamma}, t) \ , \quad \underset{\sim}{s}\cdot\underset{\sim}{b} = 0 \qquad \text{B2.2}_b$$

$$\underset{\sim}{l} = l(\theta^{\gamma}, t)\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{c}(\theta^{\gamma}, t) \ , \quad \underset{\sim}{c}\cdot\underset{\sim}{b} = 0 \qquad \text{B2.2}_c$$

เมื่อ M, m, l เป็น Scalar function และ $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{s}$, $\underset{\sim}{c}$ เป็น Vector function นอกจากนี้เราจะแตก $\underset{\sim}{f}$, l ออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกจะแสดงถึง Body force ใน 3 มิติที่กระทำกับเนื้อวัตถุ ส่วนที่ 2 เป็นผลของแรงที่กระทำกับผิวเราเขียนได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{f} = \hat{\underset{\sim}{f}} + \bar{\underset{\sim}{f}} \ , \quad l = \hat{l} + \bar{l} \qquad \text{B2.3}$$

จากการกำหนดในสมการ (B2.1, B2.2 และ B2.3) เมื่อแทนค่าลงในสมการ Conservation Laws ของ Cosserat Surfaces เราจะได้ Conservation Laws ของกรณีพิเศษของ Cosserat Surfaces ดังนี้

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho \, d\sigma = 0 \qquad \text{B2.4}_a$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho \underset{\sim}{v} d\sigma = \int_{\mathcal{P}} \rho \underset{\sim}{f} d\sigma + \int_{\partial\mathcal{P}} \underset{\sim}{N} ds \qquad \text{B2.4}_b$$

$$\underset{\sim}{b}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho k \underset{\sim}{w} d\sigma = \underset{\sim}{b}\left[\int_{\mathcal{P}} (\rho l - m) d\sigma + \int_{\partial\mathcal{P}} M ds\right]$$
$$+ \underset{\sim}{b}\times\left[\int_{\mathcal{P}} (\rho \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{s}) d\sigma + \int_{\partial\mathcal{P}} \underset{\sim}{S} ds\right] \qquad \text{B2.4}_c$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{P}} \rho \underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{v} d\sigma = \int_{\mathcal{P}} \rho[\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{f} + \underset{\sim}{d}\times(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{c})] d\sigma$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{P}} [\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{d}\times(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{S})] ds \qquad \text{B2.4}_d$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\underset{\sim}{N}$ และ $\underset{\sim}{M}$ มีความสัมพันธ์ในลักษณะเชิงเส้นกับ ν_{α} (ดู Naghdi 1972)ดังนั้น

$$\underset{\sim}{N} = N^{\alpha}\nu_{\alpha} \ , \quad M = M^{\alpha}\nu_{\alpha}$$

$$\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^{\alpha}\nu_{\alpha} \ , \quad \underset{\sim}{S}^{\alpha}\cdot\underset{\sim}{b} = 0 \qquad \text{B2.5}$$

เมื่อแทนค่าสมการ(B2.5)ลงใน Conservation Laws เราจะสามารถเปลี่ยนรูปแบบของสมการ Conservation Laws ทั้ง 4 ให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ ดังนี้

$$\rho a^{1/2} = \gamma(\theta^{\gamma}) \qquad \text{B2.6}_a$$

$$(a^{1/2}\underset{\sim}{N}^{\alpha})_{,\alpha} + \gamma\underset{\sim}{f} = \gamma\dot{\underset{\sim}{v}} \qquad \text{B2.6}_b$$

$$(a^{1/2}\underset{\sim}{M}^{\alpha})_{,\alpha} + \gamma\underset{\sim}{l} = ma^{1/2} - \gamma k\dot{w} \; ; \; (a^{1/2}\underset{\sim}{S}^{\alpha})_{,\alpha} + \gamma\underset{\sim}{e} = a^{1/2}\underset{\sim}{s} \qquad \text{B2.6}_c$$

$$\underset{\sim}{a}_{\alpha}\times\underset{\sim}{N}^{\alpha} + \underset{\sim}{d}\times(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{s}) + \underset{\sim}{d}_{,\alpha}\times(\underset{\sim}{b}\times\underset{\sim}{S}^{\alpha}) = 0 \qquad \text{B2.6}_d$$

เมื่อ $(\;)_{,\alpha}$ เป็น Partial differentiation เทียบกับ θ^{γ}

ถ้าเราตั้งสมมติฐานว่าวัตถุที่ถูกจำลองโดย Cosserat surface มีคุณสมบัติไม่เปลี่ยนแปลงความหนาแน่น (incompressible) เราได้เงื่อนไขดังนี้

$$\frac{d}{dt}[a_1 a_2 d] = 0 \qquad \text{B2.7}$$

สมการ (B2.7) นี้มีความหมายคือปริมาตรเล็กๆที่จุดใดๆบนพื้นผิวไม่เปลี่ยนแปลงค่าแม้ว่าจะมีการเปลี่ยนรูปเนื่องจากการเคลื่อนที่ก็ตาม เราจะสรุปต่อไปได้ว่า $\underset{\sim}{N}^{\alpha}$,m และ M^{α} จะต้องมีรูปดังนี้ (ดู Green & Naghdi 1977)

$$\underset{\sim}{N}^{\alpha} = -p_o' h\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,\underset{\sim}{a}_{\beta}\times\underset{\sim}{b} \; ; \; m = -p_o'\underset{\sim}{a}_3\cdot\underset{\sim}{b} \; ; \; M^{\alpha} = 0 \qquad \text{B2.8}$$

เมื่อ p_o' เป็น Scalar function ใดๆ ของ θ^{γ},t

ถ้าเรากำหนด Position vector $\underset{\sim}{r}$ ในสมการ(B1.1)และ Director $\underset{\sim}{d}$ ในสมการ(B2.1) ให้มีลักษณะดังต่อไปนี้

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{e}_1 + y\underset{\sim}{e}_2 + \phi\underset{\sim}{e}_3 \; ; \; \underset{\sim}{d} = h\underset{\sim}{e}_3 \; ; \; \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.9}$$

เมื่อ x, y, ϕ, h เป็น function ของ θ^1, θ^2, t และ($\underset{\sim}{e}_1$, $\underset{\sim}{e}_2$, $\underset{\sim}{e}_3$)เป็น Base vectors ของ Rectangular Cartesian coordinates (x,y,z) ความเร็วและ ความเร็วของ director จะมีค่า

$$\underset{\sim}{v} = u\underset{\sim}{e}_1 + v\underset{\sim}{e}_2 + \lambda\underset{\sim}{e}_3 \; ; \; \underset{\sim}{w} = w\underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.10}$$

เมื่อ $$u = \dot{x} \; ; \; v = \dot{y} \; ; \; \lambda = \dot{\phi} \; ; \; w = \dot{h} \qquad \text{B2.11}$$

เราจะเห็นได้ว่า u, v, λ, w จะแสดงรูปเป็น function ของ θ^1, θ^2, t หรือ x, y, t ก็ได้ ดังนั้นจากสมการ (B2.10) เราได้

$$\dot{\underset{\sim}{v}} = \dot{u}\underset{\sim}{e}_1 + \dot{v}\underset{\sim}{e}_2 + \dot{\lambda}\underset{\sim}{e}_3 \; ; \; \dot{\underset{\sim}{w}} = \dot{w}\underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.12}$$

โดยที่ $\dot{u} = u_t + uu_x + vu_y$; $\dot{v} = v_t + uv_x + vv_y$

$$\dot{\lambda} = \lambda_t + u\lambda_x + v\lambda_y \; ; \quad \dot{w} = w_t + uw_x + vw_y \qquad \text{B2.13}$$

ซึ่ง subscript x, y, t หมายถึง partial differentiation เทียบกับ x, y, t เมื่อ u, v, λ, w เป็น function ของ x, y, t จากสมการ (B1.2) base vector ($\underset{\sim}{a}_\alpha$) และ unit normal vector $\underset{\sim}{a}_3$ เขียนได้ในรูป

$$\underset{\sim}{a}_1 = \frac{d\underset{\sim}{r}}{d\theta^1} = \frac{dx}{d\theta^1}\underset{\sim}{e}_1 + \frac{dy}{d\theta^1}\underset{\sim}{e}_2 + \frac{d\psi}{d\theta^1}\underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.14}_a$$

$$\underset{\sim}{a}_2 = \frac{d\underset{\sim}{r}}{d\theta^2} = \frac{dx}{d\theta^2}\underset{\sim}{e}_1 + \frac{dy}{d\theta^2}\underset{\sim}{e}_2 + \frac{d\psi}{d\theta^2}\underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.14}_b$$

$$\underset{\sim}{a}_3 a^{1/2} = \underset{\sim}{a}_1 \times \underset{\sim}{a}_2 = (-\psi_x\underset{\sim}{e}_1 - \psi_y\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3)\frac{d(x,y)}{d(\theta^1,\theta^2)} \qquad \text{B2.14}_c$$

เมื่อ $\frac{d(x,y)}{d(\theta^1,\theta^2)}$ คือ Jacobian of transformation ระหว่าง coordinates (x,y) กับ(θ^1, θ^2)

โดยใช้สมการ (B2.10, B2.13) แทนลงในสมการเงื่อนไขของ incompressibility (B2.8) เราจะได้ผลดังนี้

$$h(u_x + v_y) + w = 0 \qquad \text{B2.15}$$

และโดยใช้สมการ (B2.8, B2.12 และ B2.13) กับสมการ (B2.6_b, B2.6_c) เราได้ชุดสมการต่อไปนี้

$$\gamma\dot{u} = \gamma\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{e}_1 - \frac{d(x,y)}{d(\theta^1,\theta^2)}\,p_x \qquad \text{B2.16}$$

$$\gamma\dot{v} = \gamma\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{e}_2 - \frac{d(x,y)}{d(\theta^1,\theta^2)}\,p_y \qquad \text{B2.17}$$

$$\gamma\dot{\lambda} = \gamma\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{e}_3 \qquad \text{B2.18}$$

$$\gamma k\dot{w} = \gamma l + \frac{d(x,y)}{d(\theta^1,\theta^2)}\,\frac{p}{h} \qquad \text{B2.19}$$

เมื่อ $p = p'_o h$ B2.20

สมการ (B2.16 ถึง B2.20) ใช้ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของ Fluid sheet โดยยังมีค่าที่ยังไม่ได้กาหนดอีกคือ γ , k, $\underset{\sim}{f}$ และ l ซึ่งเราจะกาหนดค่าได้โดยเทียบเคียงกับทฤษฎี 3 มิติ ของ Incompressible homogenous fluid ภายใต้แรงดึงดูดของโลก $-g\underset{\sim}{e}_3$ ที่ไหลบนพื้นผิวดังรูปที่ 2.1 เรากาหนด Position vector ของผิวล่างของ Fluid sheet ดังนี้

$$\bar{\underset{\sim}{p}} = x\underset{\sim}{e_1} + y\underset{\sim}{e_2} + H(x,y)\underset{\sim}{e_3} \quad \text{B2.21}$$

และกาหนด position vector ของผิวบนของ fluid sheet ดังนี้

$$\hat{\underset{\sim}{p}} = x\underset{\sim}{e_1} + y\underset{\sim}{e_2} + \beta(x,y,t)\underset{\sim}{e_3} \quad \text{B2.22}$$

ในสมการ (B2.21 และ B2.22) นั้นค่า H ไม่ขึ้นกับเวลา นั่นคือพื้นผิวที่ของเหลวไหลผ่านมีลักษณะคงที่ตลอดเวลา ส่วน β นั้นเป็นค่าของพื้นผิวบนของของเหลว ซึ่งจะสามารถแปรเปลี่ยนไปกับเวลาได้ ถ้าให้ผิวบนถูกกระทาด้วยความดันบรรยากาศ (p_0) และผิวล่างมีความดันที่ยังไม่รู้ค่า ($\bar{p}$) กระทา ดังนั้นความดันตั้งฉาก (p^*) ที่กระทาที่ผิวบนในทฤษฎี 3 มิติมีค่า

$$p^* = p_o \quad \text{B2.23}$$

และความดันตั้งฉาก (p^*) ที่กระทาที่ผิวล่างมีค่า

$$p^* = \bar{p}(x,y,t) \quad \text{B2.24}$$

ก่อนที่จะทาอะไรต่อไปเราจาเป็นต้องเลือกผิว $\mathcal{S}$ ของทฤษฎี Cosserat surfaces เนื่องจากจุดใดๆในของเหลวสามารถกาหนดได้ด้วย Coordinate system (θ^α, θ^3) เมื่อ θ^3 เป็น coordinate ตามทิศ $\underset{\sim}{e_3}$ และ θ^α เป็น coordinate บนผิว $\mathcal{S}$ ซึ่ง $\theta^3 = 0$ เราจะบ่งให้ผิว $\mathcal{S}$ เป็นผิวที่อยู่กึ่งกลางระหว่างผิวล่างและผิวบนของ Fluid sheet ดังนั้นจุดใดๆของของเหลวใน 3 มิติสามารถกาหนดได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{r}^* = x\underset{\sim}{e_1} + y\underset{\sim}{e_2} + (\psi + \theta^3 h)\underset{\sim}{e_3} \quad \text{B2.25}$$

และกาหนดให้ H และ β ในสมการ (B2.24, B2.25) มีค่าดังนี้

$$H = \psi - h/2 \;\; ; \;\; \beta = \psi + h/2 \quad \text{B2.26}$$

นั่นคือ θ^3 มีค่า 1/2 ที่ผิวบน และมีค่า -1/2 ที่ผิวล่าง

จากการกาหนดตาแหน่งของอนุภาคของเหลวใน 3 มิติของทฤษฎี 3 มิติดังสมการ (B2.25) เราหา base vector $\underset{\sim}{g_1}$ ได้ดังนี้

$$\underset{\sim}{g}_\alpha = \frac{d\underset{\sim}{r}^*}{d\theta^\alpha} \quad ; \quad \underset{\sim}{g_3} = h\underset{\sim}{e_3}$$

$$g^{1/2} = [\underset{\sim}{g_1}\underset{\sim}{g_2}\underset{\sim}{g_3}] = \frac{h\,d(x,y)}{d(\theta^1, \theta^2)} \quad \text{B2.27}$$

$$g^{1/2}\underset{\sim}{g}^3 = [\, -(\psi_x + \theta^3 h_x)\underset{\sim}{e_1} - (\psi_y + \theta^3 h_y)\underset{\sim}{e_2} + \underset{\sim}{e_3}] \, \frac{d(x,y)}{d(\theta^1, \theta^2)}$$

ค่าต่างๆของทฤษฎี Cosserat surfaces สามารถเทียบเคียงได้คือ (ดู Green & Naghdi 1976)

$$\rho a^{1/2} = \gamma = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho g^{1/2} d\theta^3 = \rho h \qquad \text{B2.28}$$

$$\gamma k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\theta^3)^2 \rho g^{1/2} d\theta^3 = \rho h/12 \qquad \text{B2.29}$$

เมื่อใช้ผลของสมการ (B2.3, B2.28, B2.29 และ B2.17) รวมกับการกาหนดค่า f, l, และ c ในทฤษฎี Cosserat surfaces เราจะได้ค่าดังต่อไปนี้

$$\gamma \underset{\sim}{f} = (g^{1/2}/h)[\{p_o\beta_x - \bar{p}H_x\}\underset{\sim}{e_1} + \{p_o\beta_y - \bar{p}H_y\}\underset{\sim}{e_2} + \{-p_o + \bar{p} - g\rho h\}\underset{\sim}{e_3}]$$

$$\gamma l = (g^{1/2}/2h)[-p_o - \bar{p}] \qquad \text{B2.30}$$

$$\gamma \underset{\sim}{c} = (g^{1/2}/2h)[-\{1\, p_o\beta_x + 1\, pH_x\}\underset{\sim}{e_2} + \{1\, p_o\beta_y + 1\, pH_y\}\underset{\sim}{e_1}]$$

เมื่อแทนค่าของสมการ (B2.28, B2.29 และ B2.30) ลงไปในสมการ (B2.16, B2.17, B2.18, B2.19) เราจะได้ชุดของสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\rho h\dot{u} = -p_x + p_o\beta_x - \bar{p}H_x$$

$$\rho h\dot{v} = -p_y + p_o\beta_y - \bar{p}H_y \qquad \text{B2.31}$$

$$\rho h\dot{\lambda} = -p_o + \bar{p} - g\rho h$$

$$\rho h\dot{w}/12 = -p_o/2 - \bar{p}/2 + p/h$$

ดังนั้นสมการ (B2.15)และ(B2.31) เป็นสมการที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของ Fluid sheet เมื่อของไหลเป็น Incompressible inviscid fluid แต่ในวิทยานิพนธ์นี้นอกจากคุณสมบัติดังกล่าวแล้วเราจะพิจารณาเฉพาะการไหลแบบสม่าเสมอไม่ขึ้นกับเวลาในทิศทาง x ทิศทางเดียว นั่นคือค่า function ต่างๆไม่ขึ้นกับค่า y และ t เลย และ v=0 ในสมการ (B2.10)

ดังนั้นค่าความเร็ว w จึงมีค่าเป็น

$$w = \dot{h} = h_x u$$

และสมการ(B2.15) รวมกับ (B2.31) จึงลดรูปลงเหลือ

$$(hu)_x = 0$$

$$\rho h u u_x = -p_x + p_o\beta_x - \bar{p}H_x \qquad \text{B2.32}$$

$$\rho h u \lambda_x = -p_o + \bar{p} - g\rho h$$

$$\rho h u w_x/12 = -p_o/2 - \bar{p}/2 + p/h$$

ซึ่งก็คือสมการชุด (2.1) นั่นเอง

B-3 สมการการเคลื่อนที่ของ Fluid sheets จากทฤษฎี 3 มิติ

ในหัวข้อนี้จะได้แสดงการหาสมการการเคลื่อนที่ของ Fluid sheets สำหรับ Homogeneous, incompressible, inviscid fluid จากทฤษฎี 3 มิติ เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนเราจะใช้ ตัวแปรต่างๆ ในทฤษฎี 3 มิติ เหมือนกับทฤษฎี Fluid sheet ในหัวข้อ B-2 แต่จะเขียน '*' ไว้ข้างบน

ให้ (x,y,z) เป็น Rectangular Cartesian coordinate $x_i = (x_1,x_2,x_3) = (x,y,z)$ ซึ่งมี Base vectors คงที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือ $\underset{\sim}{e_i} = (\underset{\sim}{e_1},\underset{\sim}{e_2},\underset{\sim}{e_3})$ เมื่อ i=1,2,3 สำหรับของเหลวที่ไม่เปลี่ยนแปลงบริมาตรและไม่มีความหนืด สมการเงื่อนไขของการไม่เปลี่ยนแปลงบริมาตร และสมการเงื่อนไขของการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น(Conservation of linear momentum) จะมีรูปดังนี้

$$v^*_{i,i} = 0 \quad ; \quad \rho^*\dot{v}^*_i = -\rho^* g\, \delta_{i3} - P^*_{,i} \qquad \text{B3.1}_{a,b}$$

เมื่อ $v^*_i = \underset{\sim}{v}^*\cdot\underset{\sim}{e_i}$ เป็นความเร็วในทิศ $\underset{\sim}{e_i}$

ρ^* เป็นความหนาแน่นมวลสาร

g เป็นค่าคงที่ของแรงดึงดูดของโลก กระทำในทิศ $-e_3$

δ_{ij} เป็น Kronecker delta

$(\dot{\ })$ หมายถึง อนุพันธ์เทียบกับเวลาของคุณสมบัติที่อนุภาคใดอนุภาคหนึ่ง

$(\ )_{,j}$ หมายถึง partial differentiation เทียบกับ x_j

ให้ผิวบน และผิวล่างของ ของเหลวถูกกำหนดโดยสมการดังต่อไปนี้(ดูรูป 2.1)

$$z = \beta(x,y,t) \quad ; \quad z = H(x,y) \qquad \text{B3.2}_{a,b}$$

ดังนั้น Position vector $\hat{\underset{\sim}{r}}$ ของผิวบน และ Position vector $\underset{\sim}{r}$ ของผิวล่างของของเหลวอยู่บนผิวที่คงที่ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{e_1} + y\underset{\sim}{e_2} + \beta(x,y,t)\underset{\sim}{e_3} \qquad \text{B3.3}_a$$

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{e_1} + y\underset{\sim}{e_2} + H(x,y)\underset{\sim}{e_3} \qquad \text{B3.3}_b$$

จาก(B3.3_a และ B3.3_b)ความสูงในแนวดิ่ง ($\underset{\sim}{e_3}$) หรือความลึกของของเหลวซึ่งแทนด้วย h จะอยู่ในรูป

$$h = h(x,y,t) = \beta - H \qquad \text{B3.4}$$

ให้พื้นผิวที่กำหนดโดยสมการต่อไปนี้

$$z = \phi(x,y,t) = \frac{1}{2}(\beta + H) \qquad \text{B3.5}$$

เป็นพื้นผิวที่อยู่กึ่งกลางระหว่างผิวบนและผิวล่าง กำหนดให้ $\underset{\sim}{v}^*$ มีส่วนประกอบเป็น $v^*_1 = (u^*, v^*, w^*)$ ดังนั้น

$$\underset{\sim}{v}^* = v^*_1 \underset{\sim}{e}_1 = u^* \underset{\sim}{e}_1 + v^* \underset{\sim}{e}_2 + w^* \underset{\sim}{e}_3 \qquad B3.6$$

เมื่อ

$$u^* = u^*(x,y,z,t) \;\; ; \;\; v^* = v^*(x,y,z,t) \;\; ; \;\; w^* = w^*(x,y,z,t) \qquad B3.7_{a.b.c}$$

เราจะตั้งสมมติฐานว่าของเหลวมีการไหลในลักษณะพิเศษ โดยส่วนประกอบ u^* และ v^* ของความเร็ว $\underset{\sim}{v}^*$ เป็นอิสระจาก z และให้ส่วนประกอบ w^* ในสมการที่ B3.6 มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับ z นั่นคือ

$$u^* = u = u(x,y,t) \;\; ; \;\; v^* = v = v(x,y,t) \qquad B3.8_{a.b}$$

$$w^* = a(x,y,t) + zb(x,y,t) \qquad B3.9$$

เนื่องจาก Position vector ของอนุภาคใดๆของ ของเหลว กำหนดโดย $\underset{\sim}{r}^* = x\underset{\sim}{e}_1 + y\underset{\sim}{e}_2 + z\underset{\sim}{e}_3$ ทำให้ $\underset{\sim}{v}^* = \dot{\underset{\sim}{r}}^*$ และจากสมการ(B3.6)ความเร็วในแนวดิ่งของอนุภาคของของเหลวมีค่า $w^* = \underset{\sim}{v}^* \cdot \underset{\sim}{e}_3 = \dot{z}$ ดังนั้นความเร็วในแนวดิ่งของอนุภาคของของเหลวที่ผิวบน และที่ผิวล่างมีค่า

$$w^*\Big|_{z=\beta} = \dot{\beta} \;\; ; \;\; w^*\Big|_{z=H} = \dot{H} \qquad B3.10_{a.b}$$

พึงสังเกตุว่าสมการ($B3.10_a$ และ $B3.10_b$)เป็นสมการแสดงขอบเขตของการเคลื่อนที่(kinematic boundary condition) ที่ผิวบนและผิวล่างของของเหลว นั่นคือสมการ ($B3.10_a$) แสดงลักษณะของผิวบนของของเหลว ว่าเป็นผิวเดียวกันเสมอไม่มีการแยกตัวออกที่จุดใดๆ (คือเป็นmaterial surface) และสมการ ($B3.10_b$) แสดง ความเร็วในแนวตั้งฉาก(normal velocity) ที่ผิวล่างซึ่งมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งจะแสดงรายละเอียดได้โดยการสังเกตว่า unit normal ของผิวล่าง ($\underset{\sim}{n}^*$) ขนานกับทิศของgradient ของฟังชั่น, $z - H = 0$ นั่นคือ $\underset{\sim}{n}^*$ มีค่า $(-H_x\underset{\sim}{e}_1 - H_y\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3)/(1 + H_x^2 + H_y^2)^{1/2}$ ดังนั้น

$$\underset{\sim}{v}^* \cdot \underset{\sim}{n}^* = (-H_x u^* - H_y v^* + w^*)/(1 + H_x^2 + H_y^2)^{1/2}$$

ถ้ากำหนดให้ความเร็วของอนุภาคของของเหลวในแนวตั้งฉากกับผิวล่างเป็นศูนย์เสมอ คือเมื่อ $\underset{\sim}{v}^* \cdot \underset{\sim}{n}^* = 0$ จะได้ข้อสรุปคือ

$$w^*\Big|_{z=H} = H_x u^* + H_y v^* = \dot{H}$$

เมื่อ subscript หมายถึง partial differentiation

จาก ($B3.10_{a.b}$) เราสามารถหาค่า a และ b ในสมการ (B3.9) ได้และเมื่อจัดรูปโดยใช้สมการ (B3.4 และ B3.5) เราจะได้ค่า a และ b ดังนี้

$$a = \frac{\dot{H}\beta - \dot{\beta}H}{\beta - H} = \frac{1}{h}(\lambda h - w\psi) \qquad B3.11_a$$

$$b = \frac{\dot{\beta} - \dot{H}}{\beta - H} = \frac{w}{h} \qquad B3.11_b$$

เมื่อ $\lambda = \dot{\psi} \quad , \quad w = \dot{h}$ $\qquad B3.12_{a.b}$

ดังนั้นโดยใช้สมการ (B3.11,B3.12) และ สมมติฐานจากสมการ (B3.8, B3.9) เราสามารถเขียน velocity vector $\underset{\sim}{v}^*$ ในสมการ (B3.6)ได้ในรูป

$$\underset{\sim}{v}^* = u(x,y,t)\underset{\sim}{e_1} + v(x,y,t)\underset{\sim}{e_2} + [\frac{1}{h}(\dot{\lambda}h - \dot{w}\psi) + z\frac{\dot{w}}{h}]\underset{\sim}{e_3} \qquad B3.13$$

[สมการ (B3.13) นี้เหมือนกับการแทน Convected Coordinate $\theta = (z-\psi)/h$ ใน Green & Naghdi 1976] ความเร่งของอนุภาคของ ของเหลวจะหาจากสมการ (B3.13) ได้ดังนี้

$$\dot{\underset{\sim}{v}}^* = \dot{u}\underset{\sim}{e_1} + \dot{v}\underset{\sim}{e_2} + [\frac{1}{h}(\dot{\lambda}h - \dot{w}\psi) + z\frac{\dot{w}}{h}]\underset{\sim}{e_3} \qquad B3.14$$

จะเห็นได้ว่า ความเร่งในแนวดิ่งก็มีความสัมพันธ์ เชิงเส้นกับ z

จากการไหลที่มีลักษณะพิเศษดังในสมการ (B3.13) เมื่อแทนลงในสมการ ($B3.1_a$) เราจะได้

$$u_x + v_y + \frac{w}{h} = 0 \qquad B3.15$$

เมื่อ w มีค่าตามสมการ ($B3.12_b$) และเมื่อแทนสมการ (B3.14) ลงในสมการ ($B3.1_b$) เราจะได้

$$\rho^*\{\dot{u}\underset{\sim}{e_1} + \dot{v}\underset{\sim}{e_2} + [\frac{1}{h}(\dot{\lambda}h - \dot{w}\psi) + z\frac{\dot{w}}{h}]\underset{\sim}{e_3}\} = -\rho^* g\underset{\sim}{e_3} - p^*{,_i}\,\underset{\sim}{e_i} \qquad B3.16$$

ระลึกเสมอว่า h,ψ,u,v,λ,w ไม่แปรเปลี่ยนตาม z ดังนั้นเมื่อเราอินทิเกรดสมการ (B3.16) ในแนวดิ่งจาก $z = H$ ถึง $z = \beta$ คือจากผิวล่าง ถึงผิวบนของของเหลวเราจะได้

$$\rho^*\int_H^\beta \{\dot{u}\underset{\sim}{e_1} + \dot{v}\underset{\sim}{e_2} + [\frac{1}{h}(\dot{\lambda}h - \dot{w}\psi) + z\frac{\dot{w}}{h}]\underset{\sim}{e_3}\}dz = \int_H^\beta \{-\rho^* g\underset{\sim}{e_3} - p^*{,_i}\,\underset{\sim}{e_i}\}dz \qquad B3.17$$

ถ้าพิจารณารายละเอียด ด้านขวามือของสมการ (B3.17) จะพบว่า

$$RHS = -\rho^* g[z]_H^\beta\,\underset{\sim}{e_3} - \int_H^\beta (p^*_x\underset{\sim}{e_1} + p^*_y\underset{\sim}{e_2})dz - \int_H^\beta p^*_z\underset{\sim}{e_3}dz \qquad B3.18$$

กาหนดให้ $\hat{p}$ เป็นความกดดันที่ ผิวบนของ Fluid sheet, $\bar{p}$ เป็นความกดดันที่ผิวล่างของ Fluid sheet นั่นคือ

$$\hat{p} = \hat{p}(x,y,t) = p^*(x,y,z=\beta,t) = p^*\Big|_{z=\beta}$$

$$\bar{p} = \bar{p}(x,y,t) = p^*(x,y,z=H,t) = p^*\Big|_{z=H} \qquad \text{B3.19}$$

และให้ p =p(x,y,t) เป็น function ที่กาหนดค่าโดย

$$p = \int_H^\beta p^* dz \qquad \text{B3.20}$$

จากกฎของ Leibnitz's จะเห็นได้ว่าอนุพันธ์ของ p ในสมการ (B3.20) สามารถเขียนได้ในรูป

$$P = \int_H^\beta p^*_x\, dz + \beta_x \left(p^*\Big|_{z=\beta}\right) - H_x\left(p^*\Big|_{z=H}\right)$$

นั่นคือ
$$\int_H^\beta p^*_x\, dz = p_x - \hat{p}\,\beta_x + \bar{p}H_x \qquad \text{B3.21}$$

และในทานองเดียวกัน

$$\int_H^\beta p^*_y\, dz = p_y - \hat{p}\,\beta_y + \bar{p}H_y \qquad \text{B3.22}$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ (B3.18) ถึง (B3.22) แทนลงในสมการ (B3.17) และแยกสมการสาหรับแต่ละส่วนประกอบ จะได้ชุดสมการดังนี้

$$\rho^* h\dot{u} = -p_x + \beta_x\hat{p} - H_x\bar{p} \qquad \text{B3.23}_a$$

$$\rho^* h\dot{v} = -p_y + \beta_y\hat{p} - H_y\bar{p} \qquad \text{B3.23}_b$$

$$\rho^* h\dot{\lambda} = -\rho^* gh - (\hat{p} - \bar{p}) \qquad \text{B3.23}_c$$

ถ้าคูณสมการ (B3.16) ด้วย z และอินทิเกรดเฉพาะส่วนประกอบที่ i = 3 ในแนวดิ่งจาก z= H ถึง z = β แล้วจะได้

$$\rho^* \int_H^\beta \left[\frac{1}{h}(\dot{\lambda}h - \dot{w}\psi)z + \frac{\dot{w}z^2}{h}\right] dz = -\rho^* g\int_H^\beta z\, dz - \int_H^\beta p^*_z z\, dz \qquad \text{B3.24}$$

ถ้าพิจารณาด้านขวามือ ของสมการ (B3.24) จะพบว่า

$$\text{RHS} = -1\,\rho^* g[z^2]_H^\beta - [p^* z]_H^\beta + \int_H^\beta p^*\, dz$$

$$= -\rho^* gh\psi - \beta\hat{p} + H\bar{p} + p \qquad \text{B3.25}$$

เมื่อใช้สมการ (B3.4, B3.5, B3.19, B3.20) จะเขียนด้านซ้ายมือของสมการ (B3.24) ได้ในรูป

$$LHS = \frac{1}{12}\rho^* h^2 \dot{w} + \rho^* \psi h \dot{\lambda} \qquad B3.26$$

จากสมการ ($B3.23_c$, B3.25 และ B3.26) ทำให้เราสามารถเขียนสมการ (B3.24) ได้ในรูป

$$\frac{1}{12}\rho^* h^2 \dot{w} = -\psi[\rho^* gh + \rho^* h\dot{\lambda}] - \beta\hat{p} + H\bar{p} + p$$

หรือ

$$\frac{1}{12}\rho^* h\dot{w} = \frac{p}{h} - \frac{1}{2}(\hat{p}-\bar{p}) \qquad B3.27$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (B3.15, $B3.23_{a.b.c}$ และ B3.27) เหมือนกับสมการ (B2.15, $B2.31_{a.b.c.d}$) ในหัวข้อ B-2 ของทฤษฎี Directed fluid sheet ทุกประการ

B-4 JUMP CONDITION

สมการ Jump conditons เป็นสมการกำหนดความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆ ณ.จุดที่มีความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นเพราะสาเหตุใดสาเหตุหนึ่ง ในกรณีของ Fluid sheet นี้ได้มีการวิเคราะห์และแสดงสมการเหล่านี้หลายรูปแบบโดย Green & Naghdi(1976,1977), Caulk(1976), Naghdi & Rubin(1981), Naghdi & Vongsarnpigoon(1984) รูปแบบต่างๆนี้แตกต่างกันเพียงสัญลักษณ์ที่ใช้ และความกว้างขวางของสถานการณ์ที่จะใช้สมการเท่านั้น ในกรณีปัจจุบันเราพิจารณาการไหลของน้ำผ่านสิ่งกีดขวางที่อยู่นิ่ง ดังนั้นผิวล่างของ Fluid sheet ก็จะอยู่นิ่ง และเรากำหนดให้มีความไม่ต่อเนื่องที่ตำแหน่งคงที่ ที่ $x = x_0$ เราสามารถเลือกใช้ Jump condition ในรูปแบบของ Naghdi & Rubin(1981) และสามารถเขียนได้ว่า

$$[\![\rho h u]\!] = 0 \qquad B4.1_a$$

$$[\![\rho h u^2 + p]\!] = x_1 \qquad B4.1_b$$

$$[\![\rho h u \lambda]\!] = x_2 \qquad B4.1_c$$

$$[\![\frac{1}{12}\rho h u w]\!] = x_3 \qquad B4.1_d$$

$$[\![\frac{1}{2}\rho h u(u^2 + \lambda^2 + \frac{1}{12}w^2 + 2g\phi) + pu]\!] = 0 \qquad B4.1_e$$

เมื่อ $[\![f]\!]$ หมายถึง

$$f\Big|_{x=x_0^+} - f\Big|_{x=x_0^-} \qquad B4.2$$

สมการ $(B4.1_a)$ เป็นความสัมพันธ์อันสืบเนื่องมาจากสมการ Conservation of mass, สมการ $(B4.1_{b.c})$ เป็นความสัมพันธ์อันสืบเนื่องมาจากสมการ Conservation of linear momentum, สมการ $(B4.1_d)$ เป็นความสัมพันธ์อันสืบเนื่องมาจากสมการ Conservation of director momentum, สมการ $(B4.1_e)$ เป็นความสัมพันธ์อันสืบเนื่องมาจากสมการ Conservation of energy เมื่อมีการคิดเฉพาะพลังงานกลเท่านั้น และถือว่าไม่มีการถ่ายเทความร้อนเลย

ในสมการเหล่านี้ X_1, X_2, X_3 สามารถเขียนได้ในรูป

$$X_1 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (p_0 \beta_x - \bar{p} H_x)\, dx$$

$$X_2 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (\bar{p} - p_0)\, dx$$

$$X_3 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{-1}{2} (\bar{p} + p_0)\, dx$$

จากการกาหนดในสมการ (B2.11, B2.26) และเนื่องจากการไหลเป็นแบบสม่ำเสมอเราจึงได้

$$\lambda = \dot{\psi} = H_x u + \frac{1}{2} h_x u \quad ; \quad w = \dot{h} = h_x u \qquad B4.4$$

ซึ่งเมื่อแทนค่าลงใน $(B4.1_{c.d})$ จะได้

$$[\![\rho\, hu^2 (H_x + \frac{1}{2} h_x)]\!] = X_2 \qquad B4.5_a$$

$$[\![\frac{1}{12} \rho\, hu^2 h_x]\!] = X_3 \qquad B4.5_b$$

เมื่อคูณสมการ $(B4.4_b)$ ด้วย 6 และลบกับสมการ $(B4.4_a)$ จะได้

$$[\![\rho\, hu^2 H_x]\!] = X_2 - 6X_3 \qquad B4.6$$

จากค่า X_2 และ X_3 ในสมการ (B4.3) เราจะเห็นได้ว่า

$$X_2 - 6X_3 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} (4p + 2p_0)\, dx \qquad B4.7$$

ถ้าเราถือว่าการไหลของ Fluid sheet เป็นไปในลักษณะที่มีความดันบรรยากาศซึ่งมีค่าคงที่กระทาที่ทุกจุดของผิวบน และให้ผิวบนของ fluid sheet มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$ นั่นคือไม่มีการเปลี่ยนแปลงระดับน้าที่ $x = x_0$ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} p_0 \, dx \qquad \text{B4.8}$$

ดังนั้นสมการ (B4.7) จะลดรูปลงเหลือ

$$x_2 - 6x_3 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} 4\bar{p} \, dx \qquad \text{B4.9}$$

และจากการกาหนดค่า x_3 ในสมการ ($B4.3_c$) เมื่อใช้สมการ (B4.8) จะได้ว่า

$$x_3 = \lim_{\delta \to 0} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{-1}{2} \bar{p} \, dx \qquad \text{B4.10}$$

ดังนั้นเมื่อเราเปรียบเทียบสมการ (B4.9) กับสมการ (B4.10) เราสามารถสรุปได้ว่า

$$x_3 = \frac{-1}{8} (x_2 - 6x_3) \qquad \text{B4.11}$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ ($B4.5_b$) และ สมการ (B4.6) เราจะได้สมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความไม่ต่อเนื่องของ อนุพันธ์ของความลึกของ Fluid sheet กับ ความไม่ต่อเนื่องของ อนุพันธ์ของผิวล่างดังนี้

$$[\![\frac{1}{12} \rho h u^2 h_x]\!] = \frac{-1}{8} [\![\rho h u^2 H_x]\!] \qquad \text{B4.12}$$

เนื่องจากสมการ ($B4.1_a$) เราจะได้ว่า $[\![\rho h u]\!] = 0$ นั่นคือผลคูณของ (ρhu) มีค่าคงที่เสมอ ดังนั้นสมการ (B4.12) ลดรูปลงเหลือ

$$[\![u h_x]\!] = \frac{-3}{2} [\![u H_x]\!] \qquad \text{B4.13}$$

จากการกาหนดให้ผิวบนของ Fluid sheet มีค่า $\beta = \alpha + h$ เราสามารถเขียนสมการ(B4.13) ได้ในอีกรูปแบบหนึ่ง คือ

$$[\![u \beta_x - u H_x]\!] = \frac{-3}{2} [\![u H_x]\!] \qquad \text{B4.14}$$

หรือ $$[\![u\beta_x]\!] = \frac{-1}{2}[\![uH_x]\!] \qquad B4.15$$

ในกรณีที่เป็นการไหลสม่ำเสมอเราได้ $hu = K$ โดย K คืออัตราการไหล ซึ่งมีค่าคงที่ตลอดช่วงการพิจารณาดังนั้นสมการ (B4.13, B4.14) อาจเขียนในรูปได้คือ

$$[\![\frac{h_x}{h}]\!] = \frac{-3}{2}[\![\frac{H_x}{h}]\!] \qquad B4.16$$

และ

$$[\![\frac{\beta_x}{h}]\!] = \frac{-1}{2}[\![\frac{H_x}{h}]\!] \qquad B4.17$$

ประวัติผู้เขียน

ข้าพเจ้า นาย วราคม เนิดน้อย เกิดวันที่ 19 ธันวาคม 2502 ที่จังหวัดกาญจนบุรี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรี ที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า วิทยาเขตเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง ในหลักสูตรวิศวกรรมเครื่องกล เมื่อปีการศึกษา 2525 หลังจากสำเร็จการศึกษาแล้วได้เข้าทำงานที่โรงงานบางกอกสปริง ในตำแหน่งวิศวกรประจำโรงงาน โดยทำหน้าที่ควบคุมการผลิตคอลย์สปริง และเหล็กกันโคลง ได้ทำงานในตำแหน่งนี้จนถึง เม.ย. 2527 จึงได้ลาออกมาศึกษาต่อในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาเครื่องกล ซึ่งกำลังศึกษาอยู่ในขณะนี้ และในเดือน ตุลาคม 2527 ได้เข้ารับราชการในคณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า วิทยาเขตเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง ในตำแหน่ง อาจารย์ระดับ 3 จนถึงปัจจุบัน