

การกระจายความคืบหน้าพื้นเพองตรงโดยการใช้ผลเฉลย  
การสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นายธีรเดช ฤทธิไกรเกรียง



จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)

เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล  
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2558

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

STRESS DISTRIBUTION ON SPUR GEAR TOOTH SURFACE BY USING  
HERTZIAN CONTACT SOLUTION AND FINITE ELEMENT METHOD

Mr. Theeradesh Rithikraikriang



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Engineering Program in Mechanical Engineering

Department of Mechanical Engineering

Faculty of Engineering

Chulalongkorn University

Academic Year 2015

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยการใช้ผล
	เฉลยการสัมผัสของเอิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
โดย	นายธีรเดช ฤทธิไกรเกรียง
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนัดต์ รัตนสุมาวงศ์

---

คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วน  
หนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาโทบริหารธุรกิจ

.....คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์  
(ศาสตราจารย์ ดร.บัณฑิต เอื้ออาภรณ์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.กฤษณี มณีรัตน์)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก  
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนัดต์ รัตนสุมาวงศ์)

.....กรรมการ  
(รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงห์หนัดกิจ)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย  
(ดร.สุกิจ ดีเยี่ยมอย่าง)

ธีรเดช ฤทธิ์ไกรเกรียง : การกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยใช้ผลเฉลยการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (STRESS DISTRIBUTION ON SPUR GEAR TOOTH SURFACE BY USING HERTZIAN CONTACT SOLUTION AND FINITE ELEMENT METHOD) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผศ. ดร.ชนันต์ รัตนสุมาวงศ์, 216 หน้า.

ในการศึกษาเกี่ยวกับภาระและความเค้นบนหน้าฟันเฟืองที่ผ่านมามีการใช้ผลเฉลยการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหานี้กันอย่างแพร่หลาย อย่างไรก็ตามมีจำนวนน้อยที่ใช้ทั้งสองวิธีควบคู่เพื่อสอบทวนกัน นอกจากนี้การแบ่งภาระระหว่างฟันขณะที่ยันขบกันสองคู่ ก็ยังเป็นปัญหาที่ยังไม่มีผลสรุปในการวิจัยที่ชัดเจน ในวิทยานิพนธ์นี้จึงมุ่งที่จะหาการกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงตลอดช่วงการขบรวมถึงการแบ่งภาระระหว่างคู่ฟัน โดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งประยุกต์ใช้ผลเฉลยการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหา โดยคำนวณกับชุดเฟืองจำนวน 9 ชุด ซึ่งมีพารามิเตอร์ต่างๆ กันโดยเปลี่ยนค่าโมดูลตั้งแต่ 2 ถึง 5 มม. มุมกดเท่ากับ  $14.5^\circ$   $20^\circ$  และ  $25^\circ$  และจำนวนฟันในช่วง 30 ถึง 60 ซี่ โดยคำนวณที่ภาระ 250 Nm การคำนวณโดยแบบจำลองจะพิจารณาการขบกันของฟันเฟือง เสมือนกับการกอดอัดกันของผิวทรงกระบอกคู่หนึ่ง ซึ่งมีรัศมีเท่ากับรัศมีส่วนโค้งอินโวลูตของฟันเฟืองที่ยันในขณะนั้น สำหรับการคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะใช้สมมติฐานความเครียดในระนาบ ทำให้สามารถลดรูปปัญหาเป็นปัญหาสองมิติได้ ในการศึกษาครั้งนี้ยังได้คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติด้วย เพื่อเป็นแนวทางในการประยุกต์ใช้กับเฟืองชนิดอื่นๆ ที่ไม่สามารถลดรูปเป็นปัญหาสองมิติได้

ผลการคำนวณพบว่าความเค้นที่ได้จากทั้งสองวิธีสอดคล้องกัน โดยมีค่าความแตกต่างไม่เกิน 15% และทำให้ทราบอัตราส่วนการแบ่งภาระขณะขบสองคู่ฟันที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองคู่ต่างๆ ผลที่ได้ยังทำให้ทราบความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองกับอัตราส่วนการแบ่งแรง โดยเมื่อชุดเฟืองมีโมดูล มุมกด และจำนวนฟันเพิ่มมากขึ้น สัดส่วนการแบ่งภาระระหว่างสองคู่ฟันจะใกล้เคียง 50:50 มากขึ้น เมื่อนำวิธีการที่ใช้ในการศึกษานี้ไปคำนวณเพื่อเปรียบเทียบกับผลของนักวิจัยอื่น ก็พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกัน สำหรับผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติพบว่า ผลที่ได้สอดคล้องกับผลจากแบบจำลอง และยืนยันได้ว่าการกระจายความเค้นตลอดหน้าฟันสม่ำเสมอ ซึ่งแสดงว่ากระบวนการคำนวณมีความถูกต้อง และสามารถนำไปประยุกต์กับปัญหาทำนองเดียวกันของคู่เฟืองชนิดอื่นได้

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก .....

ปีการศึกษา 2558

# # 5770427921 : MAJOR MECHANICAL ENGINEERING

KEYWORDS: SPUR GEAR / MATHEMATICAL / FINITE ELEMENT / STRESS DISTRIBUTION

THEERADESH RITHIKRAIKRIANG: STRESS DISTRIBUTION ON SPUR GEAR TOOTH SURFACE BY USING HERTZIAN CONTACT SOLUTION AND FINITE ELEMENT METHOD. ADVISOR: ASST. PROF.CHANAT RATANASUMAWONG, 216 pp.

In many previous studies, the Hertzian contact solution and the finite element method were widely used to study load and stress on gear tooth. However, there are few pieces that use both methods to verify against each other. Moreover, the load sharing ratio during double teeth meshing is still unclear. The stress distribution on the tooth surface of a spur gear pair and the load sharing ratio are focused in this research. Calculations here are done by inventing a mathematical model based on the Hertzian contact solution and applying the finite element method in the 9 spur gear sets with various parameters by changing module from 2 to 5 mm., pressure angles at 14.5° 20° and 25° and the number of teeth from 30 to 60. Calculations were done at torque 250 Nm. In the mathematical model, the gear tooth meshing is modeled as a compression of two cylinders having the same radii as the radii of involute curves of tooth profile meshing at that time. For the calculating by the finite element method, the plain strain assumption is used to simplify the problem to a 2D problem. The 3D finite element calculation is also conducted as a guideline for application in other types of gear which cannot be simplified to a 2D problem.

The results show that the stresses calculated from both methods are conformable. The differences between two methods are less than 15%. From the results, the load sharing during double teeth meshing is known. Furthermore, relationships between load sharing ratio and gear parameters are also found. The load sharing ratio between two meshing pairs is approached 50:50 when the module, pressure angle or the number of teeth is increased. In addition, the method presented here is used, and the result is compared to the result reported by another researcher. It is found that the results are agreeable. In the end, the result calculated from the 3D finite element method is well comparable with the result from the mathematical model. The stress along the face width direction is uniformly distributed. These results verify that the calculation is correct and can be applied to other gear types.

Department: Mechanical Engineering

Student's Signature .....

Field of Study: Mechanical Engineering

Advisor's Signature .....

Academic Year: 2015

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงลงได้ด้วยความกรุณาของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำ คำปรึกษา ข้อคิดเห็นอันเป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์ และความอนุเคราะห์ด้านอื่นๆ อีกหลายประการด้วยดีเสมอมา ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในพระคุณและความกรุณาเป็นอย่างยิ่งจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.กมลทิณี มณีรัตน์ ประธานกรรมการ รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ สิงห์ถนัดกิจ และ ดร.สุกิจ ตีเยียงอย่าง กรรมการที่ให้คำแนะนำ ตลอดระยะเวลาทำงานวิจัย ที่ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความครบถ้วนสมบูรณ์มากขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ที่ให้คำแนะนำและความรู้ในเรื่องระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในวิทยานิพนธ์นี้เสมอมา

ขอขอบคุณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้ทุนสนับสนุนในงานวิจัยนี้

ขอขอบคุณ นางสาวณัชชา พรชัย ที่ช่วยเหลือและให้คำแนะนำในด้านการเขียนโปรแกรม MATLAB ในวิทยานิพนธ์นี้ และขอขอบคุณ เพื่อนๆ รุ่นพี่ รุ่นน้องปริญญาโทบัณฑิตทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ตลอดมา

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยเสมอมา และคุณค่าอันใดที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบเป็นกตัญญูต่อบุชาแต่ บิดามารดา ครูบาอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญรูปภาพ.....	ฐ
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ .....	น
บทที่ 1 บทนำ .....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์ .....	1
1.2 วัตถุประสงค์ .....	2
1.3 ขอบเขตของโครงการ .....	2
1.4 ขั้นตอนการดำเนินการ .....	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ .....	3
1.6 ปรัชญาหรือบรรณกรรม .....	4
1.7 สรุป .....	13
บทที่ 2 การวิเคราะห์พฤติกรรมการรับภาระโดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	14
2.1 ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์ .....	14
2.2 การประยุกต์ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์กับการขบของฟันเฟืองตรง .....	19
2.3 การคำนวณค่าความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยโปรแกรม MATLAB.....	26
2.3.1 การป้อนข้อมูล.....	26
2.3.2 การคำนวณข้อมูลเรขาคณิตของเฟือง .....	27
2.3.3 การแบ่งจุดการคำนวณในรอบการขบ .....	28

2.3.4 การคำนวณพารามิเตอร์ของการสัมผัส.....	29
2.3.5 การคำนวณความเค้นบนหน้าฟันเฟือง.....	32
2.4 สรุป .....	34
บทที่ 3 การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS.....	35
3.1 รายละเอียดและลักษณะของปัญหาเฟืองในการศึกษานี้.....	35
3.1.1. สมมุติฐานของเฟืองตรง .....	36
3.1.2. โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเฟืองตรง .....	37
3.2 การสร้างและการประกอบโมเดลเฟือง ณ ตำแหน่งการขบต่างๆ .....	39
3.3 การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุ (Material Properties).....	40
3.4 การแบ่งเอลิเมนต์ (Discretization).....	41
3.5 การเลือกลักษณะการสัมผัส .....	44
3.6 การเลือกรูปแบบจูดรองรับ.....	46
3.7 การเลือกรูปแบบภาระ .....	48
3.8 การคำนวณผลลัพธ์ .....	50
3.9 การเลือกดูผลลัพธ์.....	51
3.10 สรุป .....	52
บทที่ 4 ผลการคำนวณความเค้น .....	53
4.1 การกีดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน.....	53
4.2 ผลการคำนวณในปัญหาการขบกันของเฟืองตรง .....	61
4.2.1 ผลการคำนวณของชุดเฟืองต่างๆ .....	69
4.2.2 อัตราส่วนการแบ่งภาระขณะฟันเฟืองขบกัน 2 ฟัน .....	80
4.3 การหาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองต่างๆ กับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรง.....	83
4.3.1 ผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองตรงกับอัตราส่วนการแบ่งแรง .....	84



4.3.2 คำอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองกับอัตราส่วนการแบ่งแรง .....	89
4.4 ผลการเปรียบเทียบการหาค่าความเค้นบนฟันเฟืองตรงกับผลการทดลอง Rameshkumar et al.....	102
4.5 ผลการคำนวณปัญหาการขบกันของเฟืองกรณีสามมิติ .....	105
4.6 สรุป .....	107
บทที่ 5 บทสรุป .....	108
5.1 สารสำคัญของวิทยานิพนธ์ .....	108
5.2 ข้อเสนอแนะ .....	111
รายการอ้างอิง .....	112
ภาคผนวก ก. คำจำกัดความของเฟือง (Gear Definitions).....	115
ภาคผนวก ข. โปรแกรมแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณการสัมผัสกันของฟันเฟืองตรง. 119	
ภาคผนวก ค. การใช้โปรแกรม GearTrax2008.....	122
ภาคผนวก ง. การสร้างและประกอบ (Assembly) คู่เฟืองตรงโดยโปรแกรม CATIA .....	125
ภาคผนวก จ. การตั้งค่าโปรแกรม ANSYS สำหรับปัญหาการสัมผัส.....	140
ภาคผนวก ฉ. ผลการคำนวณค่าความเค้นของเฟืองชุดต่างๆ.....	161
ภาคผนวก ช. ผลการคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างสองวิธี.....	197
ภาคผนวก ซ. การคำนวณค่าความแข็งแรงของเฟือง .....	212
ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ .....	216

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 2.1	สมการที่ใช้คำนวณเรขาคณิตต่างๆ ของเฟือง ..... 28
ตารางที่ 3.1	ข้อมูลจำเพาะชุดเฟืองตรงที่ใช้ในการคำนวณ ..... 36
ตารางที่ 3.2	ชนิดและพฤติกรรมของการสัมผัสแบบต่างๆ..... 45
ตารางที่ 4.1	เงื่อนไขการทดลองของปัญหาอย่างง่ายของการกีดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน ..... 53
ตารางที่ 4.2	ค่าความเค้นในทิศทางต่างๆ ที่จุดสัมผัส และความกว้างผิวสัมผัสของปัญหาการกีดกันของจานครึ่งวงกลม ด้วยวิธีวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ..... 61
ตารางที่ 4.3	ข้อมูลจำเพาะเฟืองตรงและสภาวะการทำงานที่ใช้ในการคำนวณ ..... 62
ตารางที่ 4.4	ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง A..... 82
ตารางที่ 4.5	อัตราการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองต่างๆ..... 83
ตารางที่ 4.6	ข้อมูลจำเพาะของชุดเฟืองตรงที่มีอัตราส่วนการขบปกติ..... 102
ตารางที่ 4.7	ค่าความเค้นในแนวตั้งฉาก X Y และ Z จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าความแตกต่างระหว่างทั้งสองวิธีที่ตำแหน่งพิตช์ของชุดเฟืองตรง A ..... 106
ตารางที่ ฉ.1	ผลการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง A..... 162
ตารางที่ ฉ.2	ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง A ... 165
ตารางที่ ฉ.3	ผลการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง B..... 166
ตารางที่ ฉ.4	ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง B.... 169



ตารางที่ ฉ.18 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเซส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และ  
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง I..... 196

ตารางที่ ช.1 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง A ..... 207

ตารางที่ ช.2 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง B ..... 207

ตารางที่ ช.3 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง C ..... 208

ตารางที่ ช.4 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง D ..... 208

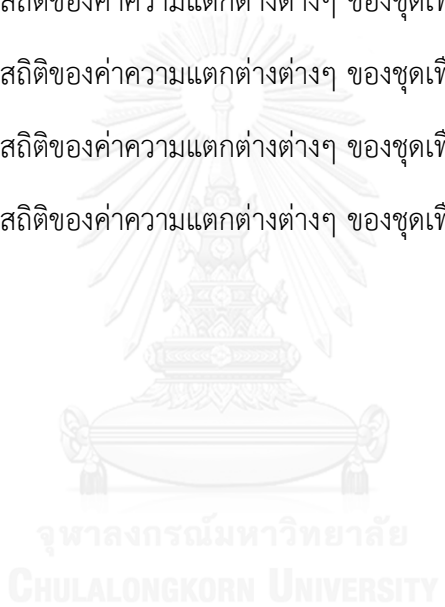
ตารางที่ ช.5 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง E..... 209

ตารางที่ ช.6 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง F..... 209

ตารางที่ ช.7 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง G ..... 210

ตารางที่ ช.8 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง H..... 210

ตารางที่ ช.9 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง I..... 211



## สารบัญรูปภาพ

	หน้า
รูปที่ 1.1 โมเดลแสดงการขบของเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ .....	5
รูปที่ 1.2 ความเค้นพอนมิสเซสสูงสุดที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในวงจรถูกขบ .....	6
รูปที่ 1.3 แรงตึงฉากที่เกิดขึ้นหน้าฟันเฟืองตรงสองซี่ต่อเนื่องกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ.....	8
รูปที่ 1.4 การแบ่งภาระของฟันเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบ .....	9
รูปที่ 1.5 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ แบบ 33 : 67 .....	10
รูปที่ 1.6 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ แบบ 45 : 55 .....	10
รูปที่ 1.7 การกระจายแรงดันตลอดความกว้างหน้าฟันที่แรงบิด 200 N-m .....	11
รูปที่ 2.1 ผิวโค้งที่มีรัศมีต่างกัน 2 ผิวถูกกดเข้าด้วยกัน .....	15
รูปที่ 2.2 หน้าตัดที่สัมผัสกันและมุมระหว่าง 2 จานวงกลม .....	15
รูปที่ 2.3 พื้นที่เกิดการเสียรูปและการกระจายแรงรูปครึ่งทรงกลมวงรี .....	16
รูปที่ 2.4 ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส $c_b$ และ $k$ .....	17
รูปที่ 2.5 สภาวะความเค้นของเอลิเมนต์ (State of Stress of an Element) .....	18
รูปที่ 2.6 รัศมีความโค้ง $R$ และ $R'$ ของเฟืองตรง.....	19
รูปที่ 2.7 ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีครวนิ่งกับความกว้างหน้าฟัน.....	20
รูปที่ 2.8 การขบกันของฟันเฟืองตรง .....	21
รูปที่ 2.9 การเปลี่ยนแปลงของรัศมี $R_1$ และ $R_2$ ในแต่ละตำแหน่งการขบ .....	23
รูปที่ 2.10 การกดอัดของเฟืองตรงเสมือนทรงกระบอก 2 อันขบกัน.....	24
รูปที่ 2.11 ระบายการขบที่เกิดการขบ 1 คู่ฟันและ 2 คู่ฟัน.....	29
รูปที่ 2.12 ความยาวรัศมีการสัมผัส $R_1$ และ $R_2$ ในเฟืองตรง.....	30
รูปที่ 2.13 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเฟืองตรง .....	31
รูปที่ 2.14 แผนภูมิการคำนวณโปรแกรมประดิษฐ์ MATLAB ของเฟืองตรง.....	33

รูปที่ 3.1	แผนภาพแสดงการขบอัดกันของฟันเฟืองตรง.....	38
รูปที่ 3.2	โปรแกรมสร้างโมเดลฟันเฟือง GearTrax2008 .....	39
รูปที่ 3.3	การประกอบโมเดลของเฟืองตรง.....	40
รูปที่ 3.4	คุณสมบัติทางวิศวกรรมของ Structural Steel .....	41
รูปที่ 3.5	การกำหนดโมเดลเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ.....	42
รูปที่ 3.6	การแบ่งเอลิเมนต์ของโมเดลฟันเฟืองและจำนวนเอลิเมนต์และโหนด .....	43
รูปที่ 3.7	การแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบที่เกิดการสัมผัส.....	44
รูปที่ 3.8	การติดตั้งโปรแกรมขั้นตอนการเลือกลักษณะการสัมผัส .....	46
รูปที่ 3.9	จุดรองรับที่กำหนดในปัญหา .....	47
รูปที่ 3.10	การใส่ Fixed Support ที่รูเพลลาเฟืองตามและ Frictionless Support ที่รูเพลลาเฟือง ซบในโปรแกรม ANSYS.....	47
รูปที่ 3.11	แรงกระจายบนขอบร่องลิ้มทั้งสองที่กำหนดในปัญหา.....	49
รูปที่ 3.12	การเลือกขอบผิวที่ใส่แรงบริเวณร่องลิ้มทั้งสองของเฟืองซบในโปรแกรม ANSYS.....	49
รูปที่ 3.13	การปรับค่าการแสดงผลของผลลัพธ์.....	50
รูปที่ 3.14	การลู่เข้าของแรง.....	50
รูปที่ 3.15	ผลลัพธ์ในปัญหาของแข็งในรูปของเฉดสี .....	51
รูปที่ 4.1	แผนภาพของปัญหาอย่างง่ายของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน.....	54
รูปที่ 4.2	รูปแบบความเค้นในแนวแกน X ของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน .....	56
รูปที่ 4.3	รูปแบบความเค้นในแนวแกน Y ของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน .....	56
รูปที่ 4.4	รูปแบบความเค้นในแนวแกน Z ของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน .....	57
รูปที่ 4.5	รูปแบบความเค้นเฉือน XY ของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน .....	57
รูปที่ 4.6	รูปแบบความเค้นพอนมิสเสสของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน.....	58
รูปที่ 4.7	บริเวณผิวที่ถูกเลือก .....	58

รูปที่ 4.8 การกระจายค่าความเค้นต่างๆ ของขอบผิวที่ถูกเลือกวัดจากจากจุด 1 ไปยังจุด 2 ของ ปัญหาจานครึ่งวงกลมกอดกัน .....	59
รูปที่ 4.9 ค่าความเค้นในแนวแกน Y และ ค่าความเค้นเฉือน XY บริเวณขอบผิว ณ ตำแหน่งจุด ที่เกิดการสัมผัสของจานครึ่งวงกลม .....	60
รูปที่ 4.10 รูปแบบความเค้นตั้งฉากในแกน X ของการกดกันของเฟืองตรง.....	63
รูปที่ 4.11 รูปแบบความเค้นตั้งฉากในแกน Y ของการกดกันของเฟืองตรง.....	63
รูปที่ 4.12 รูปแบบความเค้นตั้งฉากในแกน Z ของการกดกันของเฟืองตรง .....	64
รูปที่ 4.13 รูปแบบความเค้นเฉือน XY ของการกดกันของเฟืองตรง.....	64
รูปที่ 4.14 รูปแบบความเค้นพอนมิสเซสของการกดกันของเฟืองตรง .....	65
รูปที่ 4.15 ตำแหน่งเก็บค่าความเค้นที่ผิวสัมผัสของการกดกันของเฟืองตรง .....	65
รูปที่ 4.16 การกระจายค่าความเค้นต่างๆ ของขอบผิวที่ถูกเลือกวัดจากจากจุด 1 ไปยังจุด 2 ของ ปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรง .....	66
รูปที่ 4.17 ลักษณะการเสีรูปร่างตามแนวแกน Y ของเฟืองขับและเฟืองตาม .....	67
รูปที่ 4.18 ลักษณะค่าความเครียดในแนวแกน Y บริเวณสัมผัส .....	68
รูปที่ 4.19 ค่าความเค้นในแนวแกน Y และค่าความเค้นเฉือน XY บริเวณขอบผิว ณ ตำแหน่งจุดที่ เกิดการสัมผัสของเฟืองตรง .....	69
รูปที่ 4.20 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A.....	71
รูปที่ 4.21 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง B.....	72
รูปที่ 4.22 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง C.....	73
รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง D.....	74
รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟ ไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง E.....	75

รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง F.....	76
รูปที่ 4.26 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง G.....	77
รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง H.....	78
รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง I.....	79
รูปที่ 4.29 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A.....	81
รูปที่ 4.30 สัญลักษณ์แทนชุดเฟืองต่างๆ.....	84
รูปที่ 4.31 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับโมดูล.....	86
รูปที่ 4.32 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับมุมกด.....	86
รูปที่ 4.33 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับจำนวนฟัน.....	87
รูปที่ 4.34 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับอัตราส่วนการขบ.....	87
รูปที่ 4.35 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับจำนวนฟันและโมดูล.....	88
รูปที่ 4.36 ความแข็งแกร่งที่ค้ำเนื่องผลของการสัมผัส การตัดโค้ง และการเสียรูปที่ขอบเฟือง.....	89
รูปที่ 4.37 การขบกันของคู่เฟืองขับและเฟืองตามของคู่ที่หนึ่งและคู่ที่สอง.....	90
รูปที่ 4.38 ตัวอย่างค่าความแข็งแกร่งที่ตำแหน่งการขบใดๆ.....	91
รูปที่ 4.39 สัดส่วนการแบ่งแรงระหว่างสองคู่ฟันเทียบกับค่าความแข็งแกร่งรวมของคู่ฟันคู่ที่หนึ่งและสองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ.....	93
รูปที่ 4.40 ผลของมุมกดต่อรูปร่างเฟือง.....	94
รูปที่ 4.41 การเปรียบเทียบผลของมุมกดเฟืองกับรูปร่างคานตรง.....	94
รูปที่ 4.42 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งแกร่งต่างๆ.....	95
รูปที่ 4.43 ค่าความแข็งแกร่งที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีมุมกดต่างๆ กันโดยคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	96



รูปที่ 4.44 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งแรงต่างๆ.....	97
รูปที่ 4.45 ค่าความแข็งแรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีมุมกดต่างๆ กันโดยคำนวณ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ .....	98
รูปที่ 4.46 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งแรงต่างๆ.....	99
รูปที่ 4.47 ค่าความแข็งแรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีโมดูลต่างๆ กันโดยคำนวณ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ .....	101
รูปที่ 4.48 อัตราส่วนการแบ่งแรงตลอดรอบการขบของชุดฟันเฟืองตรงที่มีอัตราส่วนการขบปกติ	103
รูปที่ 4.49 ผลการคำนวณความเค้นสัมผัสจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และจากระเบียบ วิธีไฟไนต์ เอลิเมนต์เทียบกับผลของ Rameshkumar et al. ....	104
รูปที่ 4.50 ผลการคำนวณความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y กรณีชุดเฟือง A ที่ตำแหน่งพิตช์แบบ สามมิติ.....	105
รูปที่ 4.51 ค่าความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y ตลอดความกว้างหน้าฟัน.....	106
รูปที่ ก.1 การเรียกชื่อส่วนต่างๆ ของเฟือง .....	115
รูปที่ ค.1 แผงจอโปรแกรม GearTrax2008.....	122
รูปที่ ค.2 ขั้นตอนการกำหนดค่าแผงจอ GearTrax2008.....	123
รูปที่ ง.1 โมเดลเฟืองตรงที่นำเข้าไปโปรแกรม CATIA .....	125
รูปที่ ง.2 ปุ่ม Join บนแถบเครื่องมือ.....	126
รูปที่ ง.3 พื้นผิวโมเดลเฟืองตรงที่ได้ถูกรวมเข้าด้วยกัน.....	126
รูปที่ ง.4 ปุ่ม Close Surface บนแถบเครื่องมือ .....	127
รูปที่ ง.5 ปุ่ม Plane และปุ่ม Sketch (จากซ้ายไปขวา) บนแถบเครื่องมือ .....	127
รูปที่ ง.6 ปุ่ม Circle บนแถบเครื่องมือ .....	128
รูปที่ ง.7 ปุ่ม Constraint บนแถบเครื่องมือ.....	128
รูปที่ ง.8 กำหนดเส้นผ่านศูนย์กลางของแบบวงกลมให้มีขนาด 30 มิลลิเมตร .....	129
รูปที่ ง.9 แบบวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 30 มิลลิเมตร.....	129
รูปที่ ง.10 ปุ่ม Exit Workbench บนแถบเครื่องมือ .....	130

รูปที่ ง.11	ปุ่ม Pocket บนแถบเครื่องมือ.....	130
รูปที่ ง.12	กำหนดความลึกของรูปที่ต้องการเจาะ 20 มิลลิเมตร.....	131
รูปที่ ง.13	โมเดลเฟืองตรงที่เจาะรูเพลาลแล้ว.....	131
รูปที่ ง.14	มิติของโมเดลฐาน.....	132
รูปที่ ง.15	เชื่อมทิศเพื่อใช้ขยับโมเดล.....	132
รูปที่ ง.16	ปุ่ม Coincidence Constraint บนแถบเครื่องมือ.....	133
รูปที่ ง.17	ปุ่ม Contact Constraint บนแถบเครื่องมือ.....	134
รูปที่ ง.18	ปุ่ม Update บนแถบเครื่องมือ.....	134
รูปที่ ง.19	ปุ่ม โมเดลเฟืองตรงที่ถูกประกอบบนฐาน.....	135
รูปที่ ง.20	ปุ่ม Assembly Constraint Conversion บนแถบเครื่องมือ.....	135
รูปที่ ง.21	ปุ่ม Auto Create บนแถบ Assembly Constraint Conversion.....	136
รูปที่ ง.22	ปุ่ม Revolute Joint บนแถบเครื่องมือ.....	136
รูปที่ ง.23	ปุ่ม Gear Joint บนแถบเครื่องมือ.....	137
รูปที่ ง.24	แผงควบคุม Gear Joint บนแถบเครื่องมือ.....	137
รูปที่ ง.25	ปุ่ม Fixed Part บนแถบเครื่องมือ.....	138
รูปที่ ง.26	ปุ่ม Simulation บนแถบเครื่องมือ.....	138
รูปที่ ง.27	แผงควบคุม Simulation บนแถบเครื่องมือ.....	139
รูปที่ จ.1	การเลือกโหมดปัญหาต่างๆ ในโปรแกรม ANSYS.....	140
รูปที่ จ.2	กล่องแสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหา.....	141
รูปที่ จ.3	คุณสมบัติทางวิศวกรรมต่างๆ ของชิ้นงาน.....	141
รูปที่ จ.4	ไอคอนย้อนกลับไปยังโครงงาน.....	142
รูปที่ จ.5	การนำเข้าโมเดลปัญหาที่สนใจ.....	142
รูปที่ จ.6	แก้ไขโมเดล.....	143
รูปที่ จ.7	ขั้นตอนการสร้างโมเดล Add Frozen.....	143

รูปที่ จ.8	ขั้นตอนการสร้างโมเดล Generate .....	144
รูปที่ จ.9	ชุดโมเดลเฟืองตรง.....	144
รูปที่ จ.10	การแยกฐานชุดเฟืองออกจากขอบเขตปัญหาที่จะพิจารณา.....	145
รูปที่ จ.11	พื้นผิวบาง .....	145
รูปที่ จ.12	พื้นผิวด้านข้างเฟืองที่พิจารณา .....	146
รูปที่ จ.13	การตั้งค่าความหนาของผิวข้างเฟืองที่พิจารณา .....	146
รูปที่ จ.14	การดัดแปลงโมเดลเฟืองเดิมให้เหลือเฉพาะพื้นผิวที่พิจารณา .....	147
รูปที่ จ.15	โมเดลเฟืองที่ถูกดัดแปลงให้กลายเป็นพื้นผิว.....	147
รูปที่ จ.16	เลือกโหมดการวิเคราะห์เป็นแบบสองมิติ.....	148
รูปที่ จ.17	หัวข้อ Geometry.....	148
รูปที่ จ.18	พฤติกรรมของวัสดุในสองมิติ.....	149
รูปที่ จ.19	รายละเอียดการตั้งค่าการสัมผัส .....	149
รูปที่ จ.20	ผิวที่ถูกเลือก .....	150
รูปที่ จ.21	การตั้งผิวที่ถูกเลือกให้เป็น Contact.....	150
รูปที่ จ.22	การเลือกชนิดของเอลิเมนต์.....	151
รูปที่ จ.23	รายละเอียดการตั้งค่าลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์.....	151
รูปที่ จ.24	รายละเอียดการแบ่ง Mesh ที่ผิวขอบ .....	152
รูปที่ จ.25	การเลือกสร้าง Mesh.....	152
รูปที่ จ.26	โมเดลที่แบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ.....	153
รูปที่ จ.27	การตั้งค่า Large Deflection.....	153
รูปที่ จ.28	การเลือกประเภทจุดรองรับ .....	154
รูปที่ จ.29	การใส่โหลดลักษณะต่างๆ .....	155
รูปที่ จ.30	รายละเอียดการตั้งค่าแรงที่กระทำ .....	155
รูปที่ จ.31	แรงกระทำที่รื่องลิม.....	156

รูปที่ จ.32 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าเคลื่อนตัว .....	156
รูปที่ จ.33 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าความเครียด.....	157
รูปที่ จ.34 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าความเค้น.....	157
รูปที่ จ.35 ไอคอนแก้ปัญหา .....	158
รูปที่ จ.36 แถบสีค่าความเค้นพอนมิสเชสบริเวณผิวที่เกิดการสัมผัส.....	158
รูปที่ จ.37 การเลือกให้แสดงการกระจายความเค้น.....	159
รูปที่ จ.38 กราฟระหว่างความเค้นและความยาวของขอบผิวที่พิจารณา.....	159
รูปที่ จ.39 การปรับค่าการแสดงผลของผลลัพธ์.....	160
รูปที่ จ.40 การลู่เข้าของแรง.....	160
รูปที่ ฉ.1 การวางตัวของชุดเฟืองตามแนวแกน X-Y .....	161
รูปที่ ช.1 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A .....	198
รูปที่ ช.2 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง B .....	199
รูปที่ ช.3 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง C .....	200
รูปที่ ช.4 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง D .....	201
รูปที่ ช.5 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง E.....	202
รูปที่ ช.6 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง F.....	203
รูปที่ ช.7 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง G .....	204
รูปที่ ช.8 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง H.....	205

รูปที่ ซ.9	ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผล จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง I.....	206
รูปที่ ซ.1	การเสีรูปของเฟืองขับและเฟืองตาม.....	212
รูปที่ ซ.2	บริเวณขอบที่เกิดการสัมผัสและค่าเคลื่อนตัวตามแนวแกน Y.....	214
รูปที่ ซ.3	ค่าความแข็งแรงของเฟืองขับ เฟืองตามและคู่เฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุด เฟือง A.....	215



## คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$a$	คือ ความยาวแกนเอกวงรีของพื้นที่สัมผัส
$b$	คือ ความยาวแกนโทวงรีของพื้นที่สัมผัส
$P$	คือ แรงกดภายนอก
$c_b$	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส
$k$	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส
$E_1$	คือ ค่ายังโมดูลัส (Young's Modulus) ของวัสดุชิ้นที่ 1
$E_2$	คือ ค่ายังโมดูลัส (Young's Modulus) ของวัสดุชิ้นที่ 2
$\nu_1$	คือ อัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's Ratio) ของวัสดุชิ้นที่ 1
$\nu_2$	คือ อัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's Ratio) ของวัสดุชิ้นที่ 2
$R_1, R'_1$	คือ รัศมีการสัมผัสของวัสดุชิ้นที่ 1
$R_2, R'_2$	คือ รัศมีการสัมผัสของวัสดุชิ้นที่ 2
$\alpha$	คือ มุมระหว่างระนาบโค้งทั้ง 2 แผ่น
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	คือ ความเค้นหลัก
$\sigma_x$	คือ ความเค้นในทิศทาง x
$\sigma_y$	คือ ความเค้นในทิศทาง y
$\sigma_z$	คือ ความเค้นในทิศทาง z
$M, n$ และ $\Omega$	คือ ฟังก์ชันของคุณลักษณะของวัสดุและเรขาคณิตของผิวสัมผัส
$R'$	คือ รัศมีคราวน์นิง (Radius of Crowning)
$x$	คือ ระยะซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีคราวน์นิงกับความกว้างหน้าฟัน
$Cr$	คือ ระยะที่ทำคราวน์นิง (Crowning Modification)
$F_w$	คือ ความกว้างหน้าฟัน
$R_1, R_2$	คือ รัศมีความโค้งในทิศทางทูธโปรไฟล์ (Tooth Profile) ซึ่งวัดจากวงกลมเบสถึงตำแหน่งขบของเฟือง (ในกรณีเฟืองตรง)
$R'_1, R'_2$	คือ รัศมีคราวน์นิง (Radius of Crowning) (ในกรณีเฟืองตรง)
$\phi$	คือ มุมกด (Pressure Angle)
$r_b$	คือ รัศมีเบส (Base Radius)
$r_p$	คือ รัศมีพิตช์ (Pitch Radius)
$AB$	คือ ระยะการขบ (Length of Action)
$a$	คือ แอดเดนดัม (Addendum)

$w$	คือ ภาระต่อหน่วยความยาวของเส้นสัมผัส
$m_c$	คือ อัตราส่วนการขบ (Contact Ratio)
$P_b$	คือ พิตช์ฐาน (Pitch Base)
$\tau$	คือ แรงบิด (Torque)
$\sigma$	คือ ความเค้นพอนมิสเสส (Von Mises Stress)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	คือ ความเค้นในแนวแกน X Y และ Z ตามลำดับ
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yz}$	คือ ความเค้นเฉือน
$k_{Driving}, k_{Driven}$	คือความแข็งเกร็งของเฟืองขับหรือเฟืองตามตามลำดับ
$k_C$	คือ ความแข็งเกร็งจากการสัมผัส (Contact Stiffness)
$k_B$	คือ ความแข็งเกร็งจากการดัดโค้ง (Bending Stiffness)
$k_R$	คือ ความแข็งเกร็งจากการการเสีรูปที่ขอบเฟือง (Rim Thickness Stiffness)
$k_{Eq}$	คือ ค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม (Equivalent Stiffness)
$k_{Total}$	คือ ค่าความแข็งเกร็งรวมทั้งหมดของคู่ฟันเฟืองขับและเฟืองตามคู่ที่หนึ่ง และคู่ที่สอง (Total Stiffness)
$k_G$	คือ ค่าความแข็งเกร็งของฟัน (Gear Stiffness)
$LSR$	คือ อัตราส่วนการแบ่งแรงที่ตำแหน่งการขบใดๆ (Load Sharing Ratio)
$d$	คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของเฟืองที่ตำแหน่งพิตช์
$m$	คือ โมดูล
$N$	คือ จำนวนฟัน

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ที่มาและความสำคัญของวิทยานิพนธ์

เฟืองเป็นอุปกรณ์พื้นฐานทางกลที่ทำหน้าที่ส่งผ่านแรงบิดจากเพลานึงไปสู่อีกเพลานึง เฟืองมีการใช้งานอย่างกว้างขวางในงานทางวิศวกรรมประเภทต่างๆ ดังเช่น เครื่องจักรกลในงานอุตสาหกรรม ระบบส่งกำลังในรถยนต์ กังหันลมผลิตกระแสไฟฟ้า เป็นต้น โดยเฉพาะเฟืองตรงและเฟืองเฉียงที่สามารถพบเห็นการใช้งานได้ทั่วไป จากความนิยมในการใช้งานของเฟืองดังกล่าว ทำให้มีการศึกษาทางวิศวกรรมเกี่ยวกับเฟืองในหลายแขนง เช่น การศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ส่งผลต่อความแข็งแรงของเฟือง การวิเคราะห์เสียงและการสั่นสะเทือนของเฟือง การลดกำลังสูญเสียในการส่งกำลังของเฟือง

พฤติกรรมการรับภาระบนหน้าฟันเฟืองเป็นหัวข้อที่มีความสำคัญ และเกี่ยวเนื่องกับการศึกษาทางวิศวกรรมเกี่ยวกับเฟืองในด้านอื่นๆ เป็นอย่างมาก โดยเฉพาะการออกแบบเพื่อเพิ่มความแข็งแรงของเฟือง เนื่องจากในการออกแบบเฟืองที่มีความแข็งแรงเพียงพอต่อสภาวะการทำงานนั้นๆ มีความจำเป็นต้องทราบความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟือง โดยเฉพาะความเค้นสัมผัส การศึกษาเพื่อระบุพฤติกรรมความเค้นบนหน้าฟันเฟืองที่ช่วงเวลาการขับต่างๆ จะช่วยให้สามารถระบุตำแหน่งที่น่าจะเกิดความเสียหายขึ้นก่อนบนหน้าฟันเฟืองได้ นอกจากนี้ประโยชน์จากการทราบรูปแบบการกระจายความเค้นบนหน้าฟันเฟืองเป็นพื้นฐานสำคัญในการระบุค่าความแข็งแรง (Stiffness) และการกระจายแรงบนหน้าฟันเฟืองซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาด้านเสียงและการสั่นสะเทือน และงานด้านการประเมินกำลังสูญเสีย หรือประสิทธิภาพในการส่งกำลังของเฟืองได้อีกด้วย

จากที่กล่าวมา จะเห็นว่าการศึกษาพฤติกรรมการรับภาระบนหน้าฟันเฟืองในเชิงลึกนั้น มีความจำเป็นเป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองจำเป็นต้องรู้อย่างชัดเจนเพื่อวิเคราะห์ความแข็งแรงของเฟือง สำหรับในการศึกษานี้จะเป็นการศึกษาเบื้องต้นเพื่อหาแนวทางในการระบุพฤติกรรมการรับภาระของฟันเฟืองตรง โดยใช้แนวทางในการศึกษา 2 แนวทาง คือ 1. การประยุกต์ใช้ทฤษฎีกลศาสตร์การสัมผัส เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายในการอธิบายพฤติกรรมการรับภาระ และ 2. การใช้ระเบียบวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เพื่อศึกษาพฤติกรรมการรับภาระ



## 1.2 วัตถุประสงค์

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายเพื่ออธิบายพฤติกรรมการรับภาระของพื้นเฟือง โดยอาศัยพื้นฐานกลศาสตร์การสัมผัส
2. ศึกษาพฤติกรรมการสัมผัสของพื้นเฟืองด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

## 1.3 ขอบเขตของโครงการ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อคำนวณค่าความเค้นในเฟืองตรง
2. คำนวณค่าความเค้นที่เกิดบนพื้นเฟืองตรง
3. ใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปในการศึกษาเฟืองตรง
4. ศึกษาการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาการสัมผัสพื้นฐานและการสัมผัสของเฟืองตรง
5. ตรวจสอบผลที่ได้จากวิธีการคำนวณโดยอาศัยพื้นฐานกลศาสตร์การสัมผัสกับการคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับการศึกษาที่มีก่อนหน้า

## 1.4 ขั้นตอนการดำเนินการ

1. ศึกษาบทความทางวิชาการและตำราเพื่อหาทฤษฎีที่นำมาอธิบายการรับภาระของพื้นเฟือง
2. ศึกษาโปรแกรมที่ต้องนำมาใช้ในการเขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
3. ศึกษาวิธีการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำเร็จรูปสำหรับปัญหาการสัมผัสอย่างง่ายและเปรียบเทียบผลลัพธ์จากวิธีการวิเคราะห์
4. สร้างแบบจำลองเพื่ออธิบายการรับภาระของพื้นเฟืองและคำนวณความเค้นที่เกิดขึ้น
5. คำนวณความเค้นบนพื้นเฟืองโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
6. ตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง โดยเทียบกับผลของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และผลการศึกษาก่อนหน้า
7. วิเคราะห์แก้ไขและปรับปรุงแบบจำลอง
8. ทำรายงานและนำเสนอผลงาน

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายเพื่ออธิบายพฤติกรรมการรับภาระของฟันเฟืองและสามารถนำไปใช้ประยุกต์กับการศึกษาอื่นๆ ของเฟืองได้
2. ทราบวิธีการในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการศาสตร์การสัมผัสและการประยุกต์ใช้เพื่อวิเคราะห์การกระจายภาระบนหน้าฟันเฟือง
3. สามารถระบุรูปแบบความเค้นบนหน้าฟันที่เกิดขึ้นในเฟือง

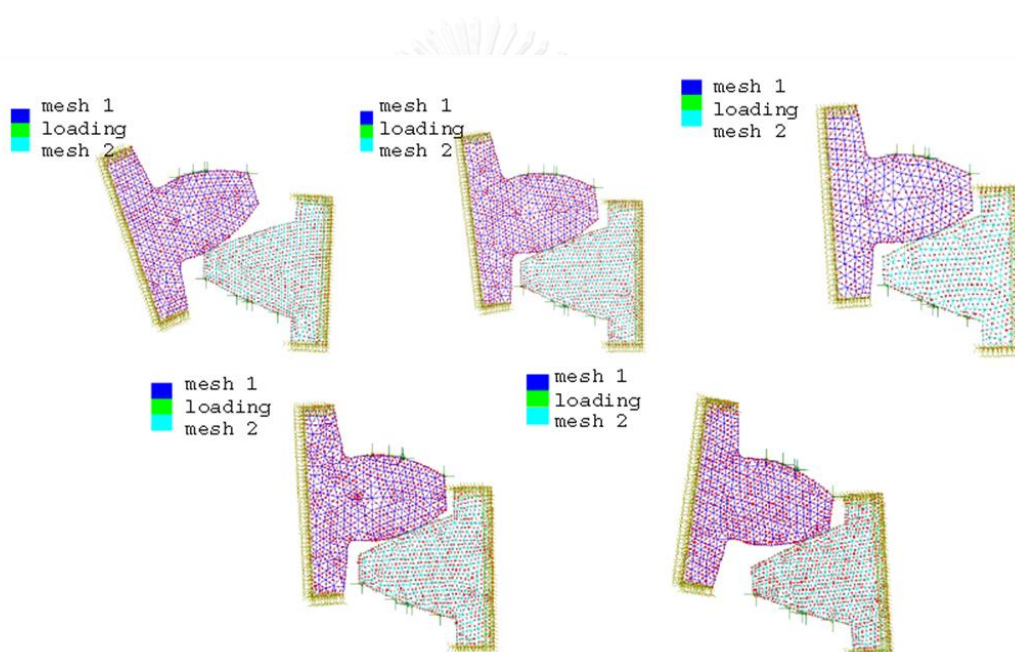


## 1.6 ปรีทัศน์วรรณกรรม

การศึกษารูปแบบภาวะที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองตรงเป็นหัวข้อวิจัยที่ได้รับความสนใจเป็นเวลานาน เนื่องจากมีความเกี่ยวข้องกับการศึกษาทางวิศวกรรมเกี่ยวกับเฟืองในด้านอื่นๆ หลายแขนง เช่น การพัฒนาการออกแบบความแข็งแรงของฟันเฟือง การประมาณกำลังสูญเสียที่เกิดขึ้นขณะส่งกำลัง การวิเคราะห์เสียงและการสั่นสะเทือนของเฟือง ดังนั้นงานวิจัยที่เกี่ยวกับการศึกษารูปแบบภาวะที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองจึงมีหัวข้อที่หลากหลายและเกี่ยวเนื่องกัน เช่น การหาค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะฟันเฟืองขบมากกว่า 1 คู่ฟัน และการหาค่าความเค้นที่ตำแหน่งการขบต่างๆ การศึกษารูปแบบความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดความยาวหน้าฟัน โดยงานวิจัยต่างๆ ก็ได้ใช้วิธีการที่หลากหลายได้แก่ การทดลองวัดค่าความเค้นและภาระบนเฟืองโดยใช้อุปกรณ์วัด การวิเคราะห์หาค่าความเค้นจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ การใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าความเค้น ฯลฯ ซึ่งแต่ละวิธีมีข้อดีและข้อจำกัดในตัวเอง โดยในที่นี้จะเน้นหนักในด้านงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการหาค่าความเค้น โดยงานวิจัยบางส่วนที่เกี่ยวข้องกับการศึกษารูปแบบภาวะที่เกิดขึ้นบนฟันเฟืองต่างๆ สามารถสรุปโดยย่อได้ดังนี้

Karaveer et al. [1] ใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้โปรแกรม ANSYS และใช้วิธีการวิเคราะห์โดยใช้สมการของเฮิร์ตซ์ในการระบุค่าความเค้นสัมผัสที่เกิดขึ้นขณะขบกันของเฟืองตรงซึ่งทำจากเหล็กหล่อสีเทา (Grey Cast Iron) และเหล็กกล้า (Steel) จากการศึกษาพบว่าสมการของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำมาใช้กับปัญหาการขบกันของเฟืองได้เป็นอย่างดี โดยความเค้นสัมผัสที่คำนวณได้จากทั้งสองวิธีได้ผลลัพธ์สอดคล้องกันทั้งสองวัสดุ แต่ในงานวิจัยนี้ไม่ได้แสดงวิธีการตั้งค่าการโปรแกรม ANSYS โดยละเอียด ซึ่งเป็นองค์ประกอบสำคัญในการศึกษาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นอกจากนี้ในงานวิจัยของ Karaveer et al. ได้เสนอวิธีการศึกษารูปแบบภาวะที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองตรงด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยทำการทดลองแค่เพียงตำแหน่งเดียวของการขบเท่านั้น ซึ่งยังไม่ครอบคลุมกับสภาพการทำงานจริงของฟันเฟืองเนื่องจากความเค้นที่เกิดบนหน้าฟันนั้นมีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา

Nikolic-Stanojevic and Cvejic [2] ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของความเค้นสัมผัสตลอดแนวแรงกด (Line of Action) โดยใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และทำการเปรียบเทียบผลจากวิธีวิเคราะห์โดยใช้สมการของเฮิร์ตซ์ นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้อธิบายถึงความรู้พื้นฐานในการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในกลศาสตร์การสัมผัส (Finite Element In Contact Mechanic) เช่น วิธีการทางตัวเลขในปัญหาการสัมผัส (Numerical Method for Contact Problem) และ ความสัมพันธ์ระหว่างโหมดการกระจัดและโหมดแรง เป็นต้น จากการศึกษาพบว่าผลค่าความเค้นฟอนมิสเสส (Von Mises's Equivalent Stress) จากทั้งสองวิธีการมีความสอดคล้องกัน แต่อย่างไรก็ตามโมเดลของเฟืองตรง (Spur Gear Models) ที่ใช้ในการศึกษานี้ไม่มีผิวโค้งอินโวลูตซึ่งไม่สอดคล้องกับผิวฟันเฟืองจริงดังแสดงในรูปที่ 1.1

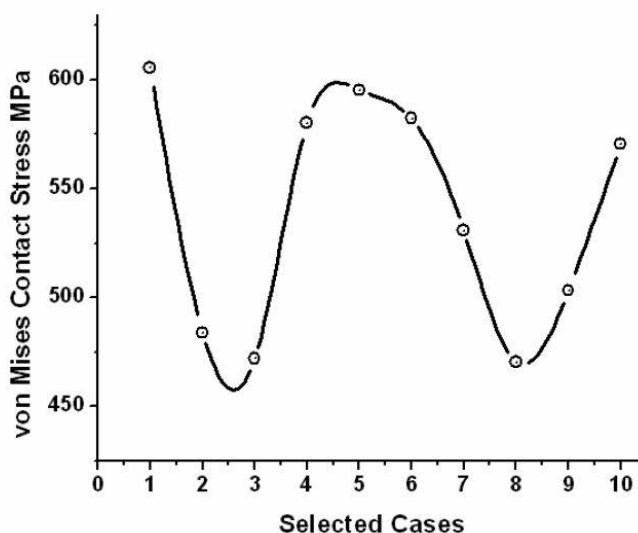


รูปที่ 1.1 โมเดลแสดงการขบของเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ [2]

Feng [3] ศึกษาการเปลี่ยนแปลงของการกระจัดและความเค้นสมมูล (Equivalent Stress) ที่เกิดขึ้นระหว่างกระบวนการสัมผัสของเฟืองตรงโดยใช้ระเบียบวิธีการทางตัวเลข (Numerical Method) จากการศึกษาพบว่าระเบียบวิธีทางตัวเลขสามารถจำลองการกระจายความเค้นสมมูล และการเปลี่ยนแปลงของการกระจัดได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้งานวิจัยชิ้นนี้ได้อธิบายถึงความซับซ้อนลักษณะของปัญหาและกระบวนการวิเคราะห์ของปัญหาการสัมผัสซึ่งเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น (Nonlinear Problem) และการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) สำหรับปัญหาการสัมผัสเบื้องต้นซึ่งเป็นความรู้ที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้ในงานวิจัยนี้ได้ อย่างไรก็ตามงานวิจัยชิ้นนี้ไม่ได้แสดงวิธีการตรวจสอบผลลัพธ์ของงานวิจัยเทียบกับวิธีการอื่นแต่อย่างใด

Li et al. [4] หาความเค้นดัดและความเค้นสัมผัสของเฟืองตรง ณ ขณะใดขณะหนึ่ง ตลอด วงจรการขบ (Meshing Cycle) เป็นจำนวน 8 ตำแหน่ง โดยใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วย โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS จากการศึกษาพบว่าความเค้นสัมผัสและความเค้นดัดสูงสุดนั้นเกิดขึ้นที่ ตำแหน่งอื่นที่ไม่ใช่จุดพิทช์ (Pitch Point) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่มีมาตรฐานการออกแบบเฟืองต่างๆ มักใช้ ในการพิจารณาเพื่อคำนวณหาความแข็งแรงของเฟือง ดังนั้นหากทำการพิจารณาจุดอื่นที่เกิดความ เค้นสูงสุดในรอบการขบจริงก็จะได้ค่าความแข็งแรงเฟืองที่เหมาะสมกับสภาพการใช้งานจริงมากขึ้น นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้แสดงรูปแบบของค่าความเค้นสัมผัสที่เกิดขึ้นในรอบวงจรการขบ อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ไม่ได้แสดงถึงการสอทวนผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม ANSYS นอกจากนี้งานวิจัยนี้ได้ใช้แบบจำลองเฟืองตรงเพียงแค่บางส่วนเท่านั้นซึ่งอาจส่งผลกระทบต่อความแม่นยำ ในการคำนวณค่าความเค้นได้

Hassan [5] หาความเค้นพอนมิสเสส ณ ขณะใดขณะหนึ่ง ที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองตรง ตลอดวงจรการขบเป็นจำนวน 10 จุดโดยใช้ระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS และเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลจากวิธีวิเคราะห์โดยใช้สมการของเฮิร์ตซ์ จากการทดลอง พบว่ารูปแบบค่าความเค้นพอนมิสเสสที่ตำแหน่งต่างๆ ในรอบการขบมีความสอดคล้องกับค่าทาง ทฤษฎีโดยมีค่าสูงในช่วงเริ่มการขบและมีค่าลดลงในตำแหน่งถัดมาและมีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วอีก ครั้งในตำแหน่งที่เกิดการสัมผัสหนึ่งฟัน หลังจากนั้นค่าความเค้นมีค่าลดลงมาอีกครั้งหนึ่งและมีค่า เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วในตำแหน่งสุดท้ายของการขบดังแสดงในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 ความเค้นพอนมิสเสสสูงสุดที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในวงจรการขบ [5]

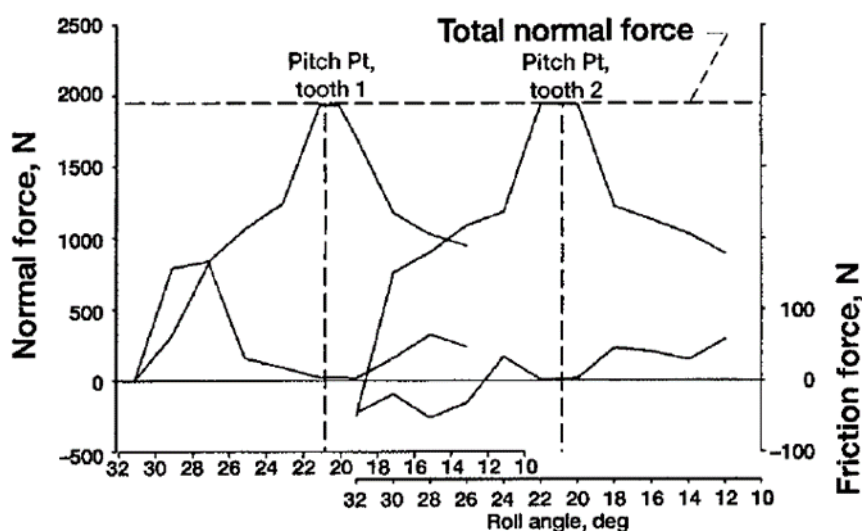
อย่างไรก็ตามงานวิจัยชิ้นนี้ได้พิจารณาการแบ่งแรง (Load Sharing) ของการขบหนึ่งฟันเป็นแบบโหลดเต็ม (Full Load) และที่ตำแหน่งขบสองฟันเป็นแบบครึ่งโหลด (Half Load) ซึ่งอาจจะไม่เหมาะสมกับการพิจารณาหาความเค้นสัมผัสที่เกิดขึ้นในสภาวะการทำงานจริง เนื่องจากในการทำงานจริงอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ช่วงการขบสองฟันอาจไม่ได้แบ่งแรงเท่ากัน นอกจากนี้การตรวจสอบค่าความเค้นสัมผัสโดยวิธีการวิเคราะห์ด้วยสมการของเฮิร์ตซ์กับค่าความเค้นพอนมิสเชส จากระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ในงานวิจัยนี้อาจจะไม่เหมาะสมนัก เนื่องจากค่าความเค้นที่นำมาเปรียบเทียบไม่ใช่ค่าความเค้นเดียวกัน โดยค่าความเค้นในสมการของเฮิร์ตซ์คือความเค้นตั้งฉากในแนวแกนตั้งของบริเวณผิวสัมผัส ส่วนความเค้นพอนมิสเชสเป็นความเค้นที่ใช้ในการทำนายความเสียหายตัวหนึ่งของทฤษฎีความเสียหายซึ่งคำนวณจากความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนต่างๆ นอกจากนี้โมเดลเฟืองตรงที่ใช้ในงานวิจัยนี้พิจารณาเพียงแค่ส่วนหนึ่งเท่านั้นซึ่งอาจส่งผลต่อความแม่นยำต่อผลลัพธ์ได้

Rameshkumar et al. [6] หาค่าความเค้นสัมผัส ค่าความเค้นดัด และอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ตลอดรอบการขบของสองชุดเฟืองตรงที่มีค่าอัตราส่วนการขบแบบปกติ และมีค่าอัตราส่วนการขบสูง โดยชุดเฟืองทั้งสองมีค่าโมดูลและระยะห่างระหว่างศูนย์กลางเพลลาเท่ากันแต่มีค่า Addendum Factor ต่างกัน จากผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่าค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงของชุดเฟืองที่มีอัตราส่วนการขบปกติสำหรับชุดเฟืองนี้มีค่า 40 : 60 ที่ตำแหน่งการขบสองฟัน แต่อย่างไรก็ตามในงานวิจัยนี้ไม่ได้แสดงผลการคำนวณจากผลจากวิธีการอื่น จึงไม่อาจยืนยันความถูกต้องของผลการคำนวณได้

จากงานวิจัยที่กล่าวมาจะเห็นว่ามีความพยายามในการศึกษาความเค้นสัมผัสบนหน้าฟันเฟืองตรงที่ตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบโดยการใช้ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ แต่อย่างไรก็ตาม การศึกษาโดยวิธีการทั้งสองยังมีความยากลำบากอยู่เนื่องจากในการวิเคราะห์ค่าความเค้นโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์นั้น ผู้วิจัยจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในลักษณะของปัญหา การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และระเบียบวิธีทางตัวเลขอย่างดีจึงจะสามารถคำนวณค่าความเค้นสัมผัสได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากปัญหาการสัมผัสเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นที่มีความซับซ้อนในการแก้ปัญหา นอกจากนั้นในส่วนของความลำบากในการหาค่าความเค้นโดยใช้วิธีการวิเคราะห์จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ เนื่องจากในขั้นตอนการคำนวณ มีความจำเป็นต้องทราบแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟือง ณ ขณะการขบนั้นๆ ซึ่งในงานวิจัยบางชิ้นได้พิจารณาการแบ่งแรงแบบขั้นบันไดที่ครึ่งโหลดขณะการขบสองคู่ฟันและเต็มโหลดขณะการขบหนึ่งคู่ฟัน ซึ่งอาจจะไม่เหมาะสมกับสภาวะการทำงานจริง เนื่องจากในแต่ละตำแหน่งการขบนั้นมีอัตราส่วนการแบ่งแรงไม่เท่ากัน ดังนั้นในการจะหา

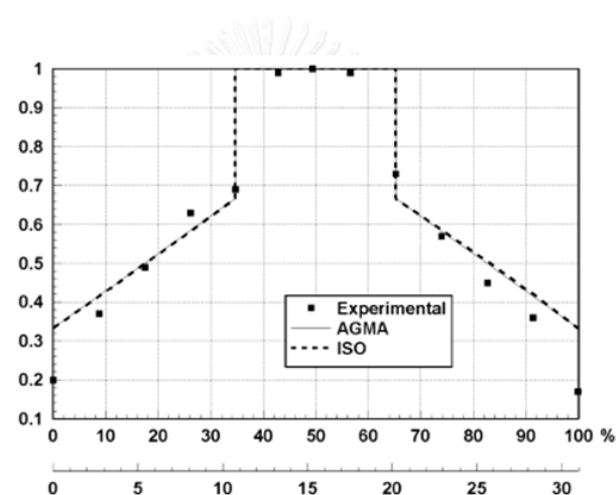
ค่าความเค้นโดยวิธีการวิเคราะห์จึงจำเป็นต้องทราบค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะเกิดการขบสองคู่ ฟันจึงจะสามารถคำนวณค่าความเค้นที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ได้อย่างแม่นยำ โดยงานวิจัยดังกล่าวที่ศึกษาเกี่ยวข้องกับอัตราส่วนการแบ่งแรง สามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

Rebbechi et al. [7] วัดแรงเสียดทานพลวัต (Dynamic Friction Force) ที่ผิวสัมผัสของเฟืองตรงโดยใช้สเตรนเกจ (Strain Gauge) ที่ติดตั้งที่รากฟันของฟันสองซี่ต่อเนื่องกันในช่วงความเร็วรอบและภาระต่างๆ โดยชุดการทดลองเฟืองเฉพาะ การทดลองกระทำโดยการให้แรงในทิศทางตั้งฉากและสัมผัสแก่ชุดการทดลองเฟืองเพื่อการสอบเทียบแบบคงที่ (Static Calibration) เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับความเครียด (Strain) หลังจากนั้นจึงทำการทดลองพลวัต (Dynamic Test) เพื่อระบุแรงตั้งฉากและแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเพื่อหาสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานพลวัตที่เวลาต่างๆ ผลพลอยได้จากการหาค่าสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานของงานวิจัยดังกล่าวทำให้ทราบลักษณะพฤติกรรมของแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเฟืองตรงสองซี่ต่อเนื่องกันที่มีการเพิ่มและลดลงในลักษณะเชิงเส้นไม่ใช่แบบขั้นบันได ดังแสดงในรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 แรงตั้งฉากที่เกิดขึ้นหน้าฟันเฟืองตรงสองซี่ต่อเนื่องกันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ [7]

Papadopoulos and Costopoulos [8] ได้ศึกษาการแบ่งภาระของเฟืองตรงที่มีการขบกันของฟันหลายซี่โดยการทดลองด้วย Stress-Optical Method of Caustics กับชุดการทดลองเฟืองตรงที่ทำจาก PMMA (Poly-Methyl-Methacrylate) ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ 13 จุดที่ครอบคลุมรอบการขบของฟันเฟืองและได้ทำการเปรียบเทียบผลการทดลองกับมาตรฐาน AGMA และ ISO จากผลการทดลองพบว่าภาระการแบ่งภาระของเฟืองตรงด้วย Stress-Optical Method of Caustics มีความสอดคล้องกับผลจากมาตรฐาน AGMA และ ISO เป็นอย่างดีโดยลักษณะการแบ่งภาระที่ตำแหน่งต่างๆ ตลอดการขบแสดงดังรูปที่ 1.4 โดยช่วงตรงกลางที่การแบ่งภาระเท่ากับ 1 หมายถึงในขณะนั้นฟันขบกันเพียงคู่เดียว ส่วนในช่วงเริ่มต้นการขบและช่วงท้ายของการขบนี้การแบ่งภาระจะอยู่ที่ประมาณ 33% - 67% โดยการเปลี่ยนแปลงภาระจะเป็นแบบเชิงเส้น

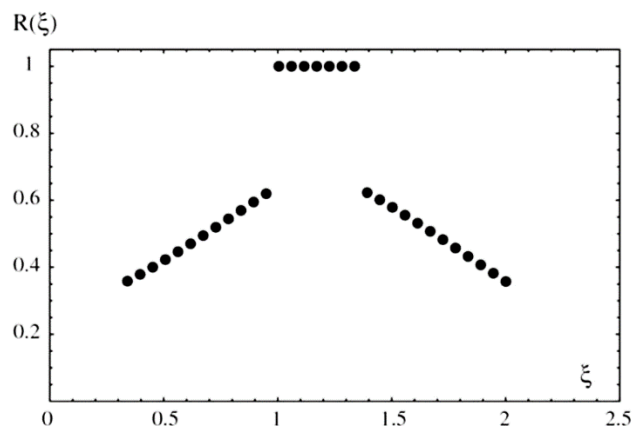


รูปที่ 1.4 การแบ่งภาระของฟันเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบ [8]

ชนันต์ และคณะ [9] ได้พัฒนาแบบจำลองประเมินกำลังสูญเสียที่เกิดขึ้นในขั้นตอนส่งกำลังของคู่เฟืองตรงจากแรงเสียดทานของการกลิ้งของ Michilin and Myunster และศึกษาผลของโมดูลความเร็วรอบ และภาระบิดต่อกำลังสูญเสีย โดยในแบบจำลองได้พิจารณาอัตราส่วนการแบ่งแรงของฟันเฟืองเป็นแบบ 50 : 50 ขณะเกิดการขบสองคู่ฟัน

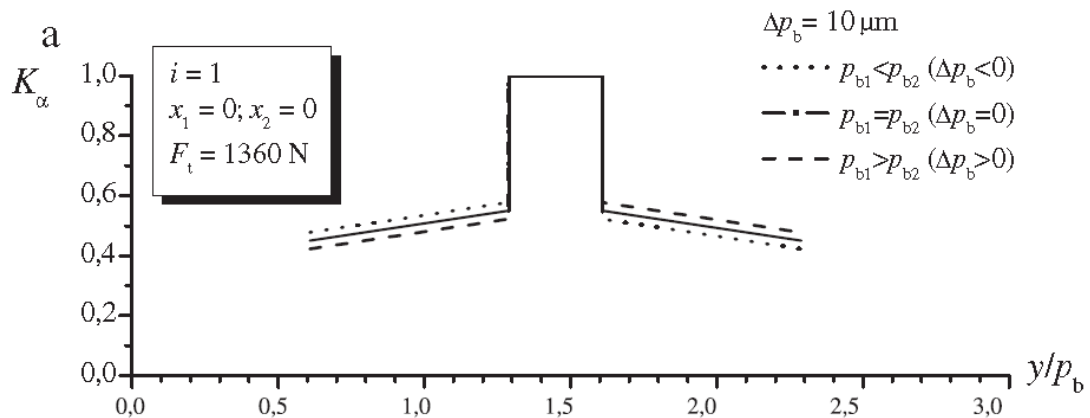


Pedrero et al. [10] ได้สร้างแบบจำลองเพื่อหาการกระจายแรงที่ไม่สม่ำเสมอตลอดแนวแรงกดของฟันเพื่องตรงและฟันเพื่องเฉียงโดยอาศัยหลักการ The Minimum Elastic Potential Energy Criterion จากการคำนวณพบว่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะเกิดการขบสองคู่ฟันที่ตำแหน่งเริ่มต้นการขบจะมีค่า 33% และอัตราส่วนนี้จะเพิ่มขึ้นในลักษณะเชิงเส้นจนมีค่า 67% ที่ตำแหน่งเริ่มและสิ้นสุดการขบของหนึ่งคู่ฟันดังแสดงในรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเพื่องตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ แบบ 33 : 67 [10]

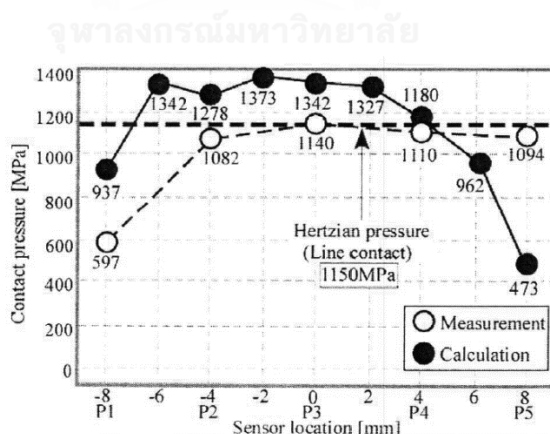
Lazovic et al. [11] ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์สำหรับหาค่าการแบ่งภาระของชุดเพื่องตรงเพื่อศึกษาผลของความแม่นยำในการตัดเพื่องและเรขาคณิตของเพื่องที่ทำให้เกิดความผิดพลาดของระยะเบสพิตซ์ต่อความสามารถในการรับภาระบนหน้าฟัน จากการศึกษาพบว่าผิวฟันของเพื่องที่เป็นโค้งอินโวลูตในอุดมคติจะมีอัตราส่วนการแบ่งแรงบนหน้าฟันเมื่อขบสองคู่ฟันเท่ากับ 45 : 55 ดังแสดงในรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.6 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเพื่องตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ แบบ 45 : 55 [11]

จากงานวิจัยที่กล่าวมาจะเห็นว่ามีการใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงค่าต่างๆ ในแต่ละงานวิจัยซึ่งแสดงว่าค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงสำหรับชุดเฟืองต่างๆ อาจมีค่าแตกต่างกันไป นอกจากนี้งานวิจัยที่ได้ศึกษารูปแบบภาระที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันในด้านอัตราส่วนการแบ่งแรงและการหาค่าความเค้นบนหน้าฟันยังมีงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับการระบุรูปแบบความเค้นตลอดหน้าฟันด้วย เช่น งานวิจัยของ Kurasako et al. [12]

Kurasako et al. ได้ทำการวัดการกระจายแรงดันสัมผัสระหว่างคู่ฟันเฟืองตรงโดยใช้เซ็นเซอร์ฟิล์มบางชนิดหลายจุด (Multi-point Thin-film Sensor) ที่คณะวิจัยได้พัฒนาขึ้น การทดลองกระทำโดยติดเซ็นเซอร์ชนิดนี้บนผิวข้างของหน้าฟันเพื่อตลอดความกว้างของหน้าฟันจำนวน 5 จุด เพื่อวัดการกระจายแรงดันบนหน้าฟันโดยใช้หลักการที่ว่า ความต้านทานทางไฟฟ้าของเซ็นเซอร์จะเปลี่ยนแปลงไปหากแรงดันที่กระทำเปลี่ยนแปลงจากปรากฏการณ์เพียโซเรซิสทีฟ (The Piezoresistive Effect) โดยความต้านทานไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงจะถูกบันทึกในรูปแบบของผลต่างของแรงดันไฟฟ้า จากงานวิจัยดังกล่าวพบว่าที่สภาวะการทำงานของชุดการทดลองนี้ที่แรงบิดต่ำกว่า 150 N-m การสัมผัสจะไม่เต็มฟันซึ่งอาจเป็นผลมาจากการติดตั้งเฟืองเยื้องศูนย์ (Misalignment) และการทำผิวคราวน์ (Crowning Modification) แต่ถ้าแรงบิดมีค่าสูงกว่า 150 N-m เช่น ที่แรงบิด 200 N-m การสัมผัสจะเป็นแบบเต็มฟันและการกระจายแรงดันตลอดความกว้างหน้าฟันดังจะมีขนาดค่อนข้างสม่ำเสมอขึ้นดังแสดงในรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 การกระจายแรงดันตลอดความกว้างหน้าฟันที่แรงบิด 200 N-m [12]

จากงานวิจัยที่ได้กล่าวมาจะเห็นว่ามีความพยายามในการศึกษาภาระที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันในตำแหน่งการขบต่างๆ ตลอดรอบการขบด้วยวิธีการต่างๆ ซึ่งสำหรับในการศึกษานี้จะศึกษาโดยใช้วิธีการวิเคราะห์โดยการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์อย่างง่ายจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และใช้

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการศึกษา โดยในส่วนของวิเคราะห์จะพิจารณาโดยใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงต่างๆ เนื่องจากยังไม่ทราบค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่แน่นอน เมื่อทำการคำนวณหาค่าความเค้น จึงนำผลระหว่างสองวิธีมาตรวจทานกันและพยายามหาอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ โดยหากผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์มีความน่าเชื่อถือก็สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบเพื่อความแข็งแรงเฟืองได้ เนื่องจากสูตรการคำนวณจากมาตรฐานการออกแบบเฟืองจะพิจารณาที่เฉพาะตำแหน่งพิตช์ของการขบกันของเฟืองตรงและคุณค่าแฟกเตอร์ต่างๆ ตามสภาพการทำงานของเฟืองเท่านั้น ซึ่งอาจจะส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่ครอบคลุมในบางกรณี



## 1.7 สรุป

ในบทนี้ได้กล่าวถึงที่มาและความสำคัญ วัตถุประสงค์และขอบเขตของการศึกษาต่างๆ ของ การศึกษานี้ นอกจากนี้ยังกล่าวถึงงานศึกษาก่อนหน้าที่ศึกษารูปแบบภาระที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันในแง่ ต่างๆ จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่า มีการศึกษาความเค้นบนหน้าฟันในตำแหน่งการขบต่างๆ โดย ประยุกต์ใช้ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อย่างไรก็ตามยังไม่มีการใช้วิธี การทั้งสองควบคู่เพื่อสอบทวนผลกันและกันเท่าที่ควร นอกจากนี้ ในงานก่อนหน้าได้มีการตั้ง สมมุติฐานให้อัตราส่วนการแบ่งแรงที่ช่วงการขบสองคู่ฟันเป็นแบบ 50 : 50 ซึ่งอาจไม่สอดคล้องกับ สภาวะการทำงานจริงของเฟืองเนื่องจากการแบ่งแรงระหว่างสองคู่ฟันอาจไม่ได้แบ่งแรงเท่ากันตลอด ช่วงการขบสองฟัน ดังนั้นในการศึกษานี้จึงได้ศึกษาความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันตลอดรอบการขบ โดยสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ ซึ่งใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงค่าต่างๆ ในการคำนวณความเค้น และใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เพื่อหาค่า ความเค้นสัมผัสตลอดรอบการขบ หลังจากนั้นจึงนำผลจากทั้งสองวิธีมาเปรียบเทียบกันเพื่อหา อัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ ในการศึกษานี้จะทำการคำนวณกับชุดเฟืองที่มี พารามิเตอร์ต่างๆ กัน โดยคาดหวังว่าจะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงกับ พารามิเตอร์ของเฟืองได้ หากทราบอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับเฟืองนั้นๆ แล้ว ก็จะทำให้ สามารถคำนวณความเค้นโดยแบบจำลองได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการ ประยุกต์ใช้แบบจำลองที่สร้างขึ้นในปัญหาอื่นๆ ต่อไป

## บทที่ 2

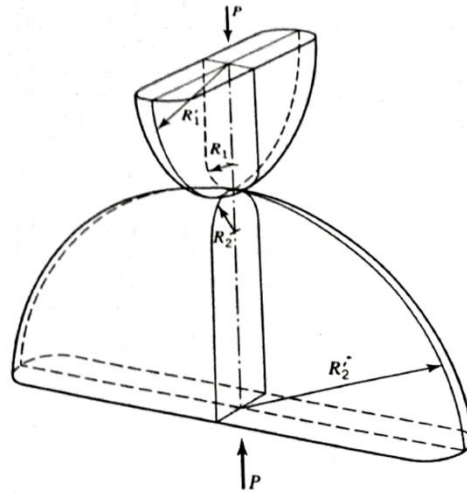
### การวิเคราะห์พฤติกรรมกรับภาระโดยสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ในบทนี้แสดงการประยุกต์ใช้ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ในปัญหาการขบกันของเฟืองซึ่งสามารถพิจารณาความเค้นสัมผัสได้ในทุกตำแหน่งการขบ โดยในส่วนแรกของบทจะแสดงรายละเอียดของทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์ จากนั้นจึงอธิบายถึงวิธีการจำลองปัญหาการขบของฟันเฟืองเพื่อวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และส่วนท้ายของบทนี้จะแสดงถึงวิธีการสร้างโปรแกรมคำนวณความเค้นโดยใช้โปรแกรม MATLAB

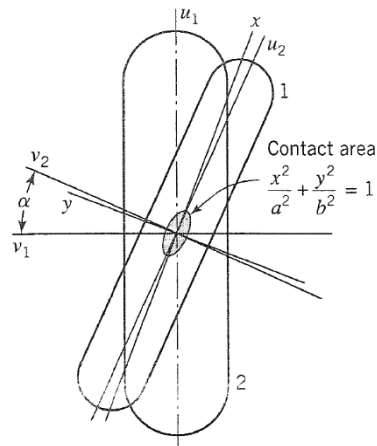
#### 2.1 ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์

ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์อธิบายการคำนวณความเค้นและการเสีรูปที่เกิดขึ้นบริเวณผิวสัมผัสและบริเวณใกล้เคียงของวัตถุ 2 ชิ้นที่ถูกกดอัดเข้าด้วยกันด้วยแรงภายนอก ดังเช่น ล้อรถไฟกับรางรถไฟ ลูกปืนกับตลับลูกปืน สำหรับในการศึกษานี้จะประยุกต์ใช้ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์ในปัญหาการขบกันของฟันเฟืองตรง

พิจารณาจานครึ่งวงกลม 2 แผ่นที่ถูกกดเข้าด้วยกันด้วยแรง  $P$  ดังแสดงในรูปที่ 2.1 วัตถุชิ้นบนมีรัศมีความโค้งทั้งสองทิศทางเท่ากับ  $R$ , และ  $R'$ , ตามลำดับ ส่วนวัตถุชิ้นล่างมีรัศมี  $R_2$  และ  $R'_2$  ตามลำดับ ในตอนแรกนั้นวัตถุ 2 ชิ้นกดสัมผัสกันที่จุดจุดหนึ่งโดยหน้าตัดของจานทั้งสองทำมุมกันเป็นมุม  $\alpha$  ดังแสดงในรูปที่ 2.2

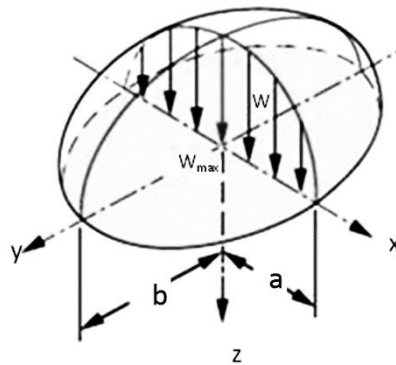


รูปที่ 2.1 ผิวโค้งที่มีรัศมีต่างกัน 2 ผิวถูกกดเข้าด้วยกัน [13]



รูปที่ 2.2 หน้าตัดที่สัมผัสกันและมุมระหว่าง 2 จานวงกลม [13]

ภายหลังเมื่อกดจานวงกลม 2 แผ่นด้วยแรง  $P$  ซึ่งตั้งฉากกับผิวสัมผัสจานจะทำให้พื้นผิวของวัตถุเกิดการเสียรูปเป็นพื้นที่รูปวงรีซึ่งมีความยาวแกนเอกและแกนโทของพื้นที่สัมผัส  $a$  และ  $b$  ตามลำดับและมีลักษณะการกระจายแรงเป็นรูปครึ่งทรงกลมวงรีดังในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 พื้นที่เกิดการเสียรูปและการกระจายแรงรูปครึ่งทรงกลมวงรี [14]

เมื่อทราบแรงกดและรัศมีความโค้งของผิวสัมผัสทั้งสองผิวจะสามารถคำนวณหาความยาวแกนเอกและโทของผิวสัมผัสรูปวงรีตามรูปที่ 2.3 ได้ดังนี้

$$a = \frac{b}{k} \quad (2.1)$$

$$b = c_b \sqrt[3]{P\Delta} \quad (2.2)$$

โดย  $\Delta$  หาได้จาก 
$$\Delta = \frac{1}{(A+B)} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (2.3)$$

- เมื่อ
- $a$  คือ ความยาวแกนเอกวงรีของพื้นที่สัมผัส
  - $b$  คือ ความยาวแกนโทวงรีของพื้นที่สัมผัส
  - $P$  คือ แรงกดภายนอก
  - $c_b$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส
  - $k$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส
  - $E_1$  คือ ค่า Young's Modulus ของวัสดุชิ้นที่ 1
  - $E_2$  คือ ค่า Young's Modulus ของวัสดุชิ้นที่ 2
  - $\nu_1$  คือ อัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's Ratio) ของวัสดุชิ้นที่ 1
  - $\nu_2$  คือ อัตราส่วนของปัวซอง (Poisson's Ratio) ของวัสดุชิ้นที่ 2

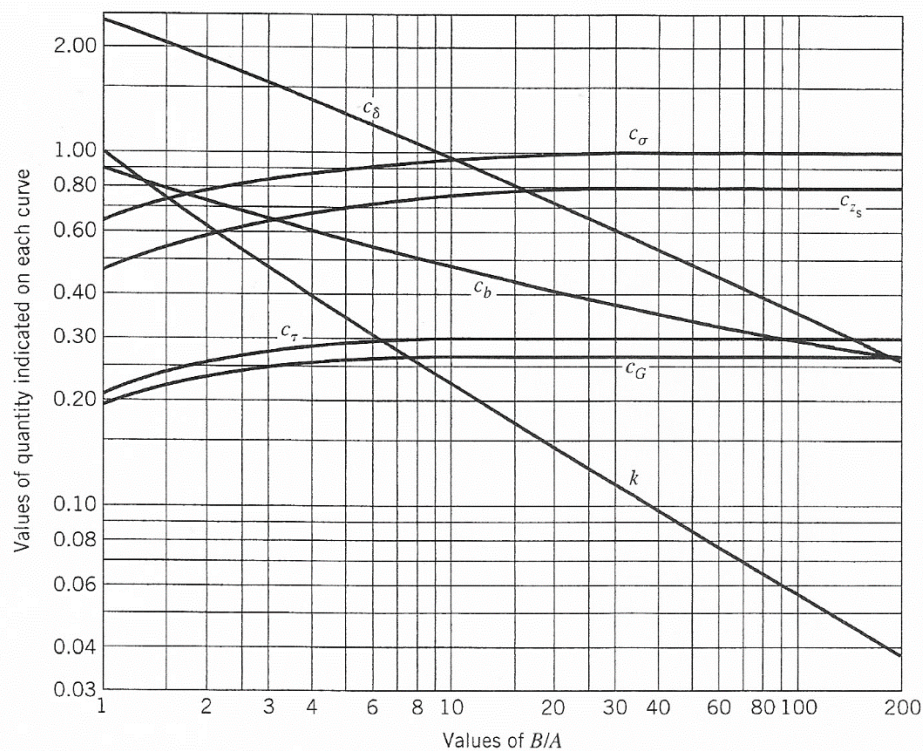
ค่า  $A$ ,  $B$  และอัตราส่วน  $B/A$  สามารถหาได้โดย

$$A = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2 \alpha} \quad (2.4)$$

$$B = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2 \alpha} \quad (2.5)$$

เมื่อ  $R_1, R'_1$  คือ รัศมีการสัมผัสของวัตถุชิ้นที่ 1  
 $R_2, R'_2$  คือ รัศมีการสัมผัสของวัตถุชิ้นที่ 2  
 $\alpha$  คือ มุมระหว่างระนาบโค้งทั้ง 2 แผ่น

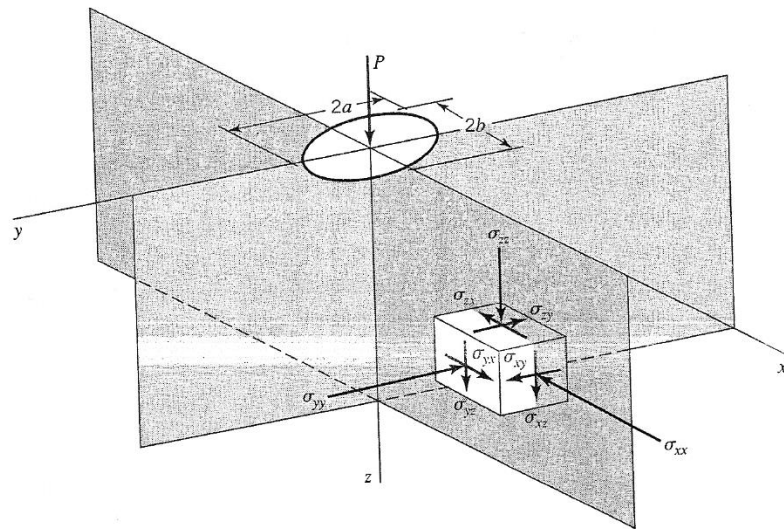
โดยค่า  $c_b$  และ  $k$  สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ซึ่งแสดงในรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส  $c_b$  และ  $k$  [13]



ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซยังได้กล่าวถึงการคำนวณค่าความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ ในเนื้อวัสดุที่สัมผัสกัน โดยในแต่ละตำแหน่งใดๆ บนวัตถุจะมีความเค้นซึ่งประกอบไปด้วยความเค้นแนวฉาก 3 ตัวและความเค้นเฉือน 3 ตัวดังแสดงในรูปที่ 2.5 แต่ที่จุดสัมผัสระหว่าง 2 พื้นผิวเป็นแรงอัดตามแนวแกน Z โดยที่ไม่มีแรงเสียดทานในระนาบ ดังนั้นที่จุดสัมผัสและจุดใดๆ บนแกน Z แรงเฉือนในระนาบ XY จะมีค่าเป็นศูนย์และประมาณว่าความเค้นเฉือนในระนาบ YZ และ XZ มีค่าน้อย หรืออาจกล่าวได้ว่าแนวความเค้นหลัก (Principal stresses) จะอยู่ในทิศทางแกน X Y Z ด้วย



รูปที่ 2.5 สภาวะความเค้นของเอลิเมนต์ (State of Stress of an Element) [13]

สูตรในการคำนวณค่าความเค้นในทิศทางแกน X Y และ Z ของจุดใดๆ บนแกน Z ซึ่งมีค่าเท่ากับความเค้นหลักสามารถหาได้โดยสมการ

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_x &= \left[ M(\Omega_x + \nu\Omega'_x) \right] \frac{b}{\Delta} \\ \sigma_2 = \sigma_y &= \left[ M(\Omega_y + \nu\Omega'_y) \right] \frac{b}{\Delta} \\ \sigma_3 = \sigma_z &= - \left[ \frac{M}{2} \left( \frac{1}{n} - n \right) \right] \frac{b}{\Delta}\end{aligned}\quad (2.6)$$

เมื่อ  $z$  คือ ระยะห่างระหว่างจุดที่สนใจบนแกน Z กับจุดกำเนิด (0,0,0) ซึ่งอยู่บนพื้นที่สัมผัส

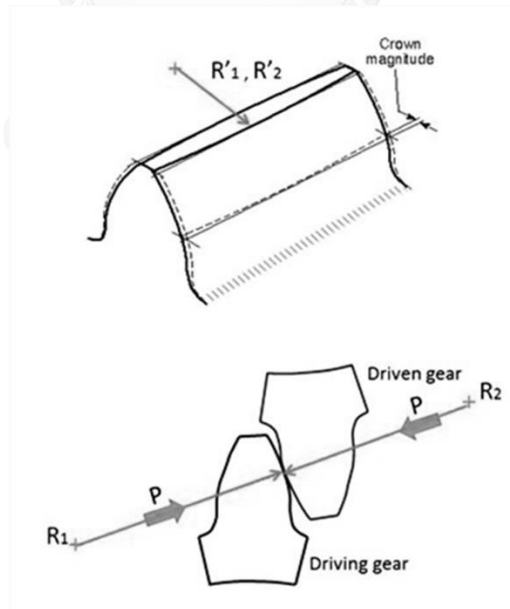
$$M = \frac{2k}{k'^2 E(k')} \quad (2.7)$$

$$n = \sqrt{\frac{k^2 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}{1 + k^2 \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \quad (2.8)$$

โดย  $M$   $n$  และ  $\Omega$  เป็นฟังก์ชันของคุณลักษณะของวัสดุและเรขาคณิตของผิวสัมผัส โดยวิธีการหาค่า  $M$   $n$  และ  $\Omega$  โดยละเอียดสามารถดูได้จากงานของ Thomas and Hoersch [15]

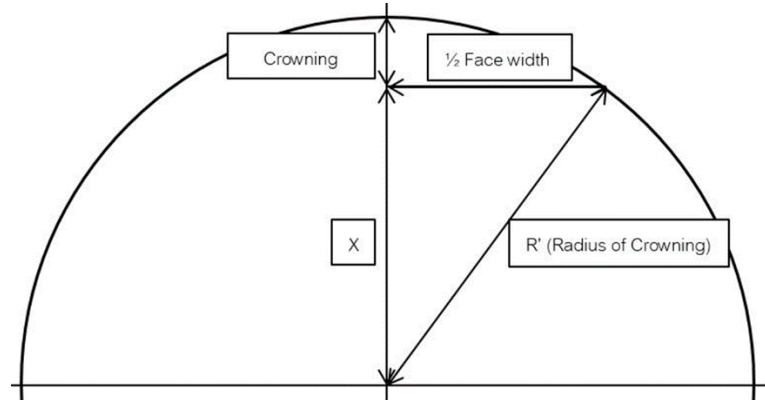
## 2.2 การประยุกต์ทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์กับการขบของฟันเฟืองตรง

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีความเค้นสัมผัสของเฮิร์ตซ์กับการสัมผัสของฟันเฟืองตรงทำได้ โดยพิจารณาให้ผิวหน้าของฟันเฟืองเป็นผิวโค้งซึ่งมีรัศมีความโค้งในทิศทางของทูธโปรไฟล์ (Tooth Profile)  $R$  ซึ่งขึ้นกับตำแหน่งของการขบและลักษณะผิวโค้งอินโวลูต (Involute Curve) และอาจมีผิวโค้งในทิศทางความกว้างฟัน (Face Width)  $R'$  ในกรณีที่เฟืองมีการทำคราวน์ (Crowning) โดยตัวห้อย 1 และ 2 แสดงถึงเฟืองขับและเฟืองตามตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 รัศมีความโค้ง  $R$  และ  $R'$  ของเฟืองตรง [14]

ความยาวของรัศมีการสัมผัส  $R'_1$  และ  $R'_2$  หรือรัศมีคราวน์นึ่ง (Radius of Crowning) สามารถหาได้จากความสัมพันธ์ตามเรขาคณิตดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีคราวน์นึ่งกับความกว้างหน้าฟัน

จากรูปจะได้ว่า

$$R' = x + Cr \quad (2.9)$$

โดย  $Cr$  หมายถึง ระยะที่ทำคราวน์นึ่ง (Crowning Modification)

จากสามเหลี่ยมมุมฉากในรูปที่ 2.7 จะได้

$$R'^2 = x^2 + \left(\frac{Fw}{2}\right)^2$$

โดย  $Fw$  หมายถึง ความกว้างหน้าฟัน (Face Width)

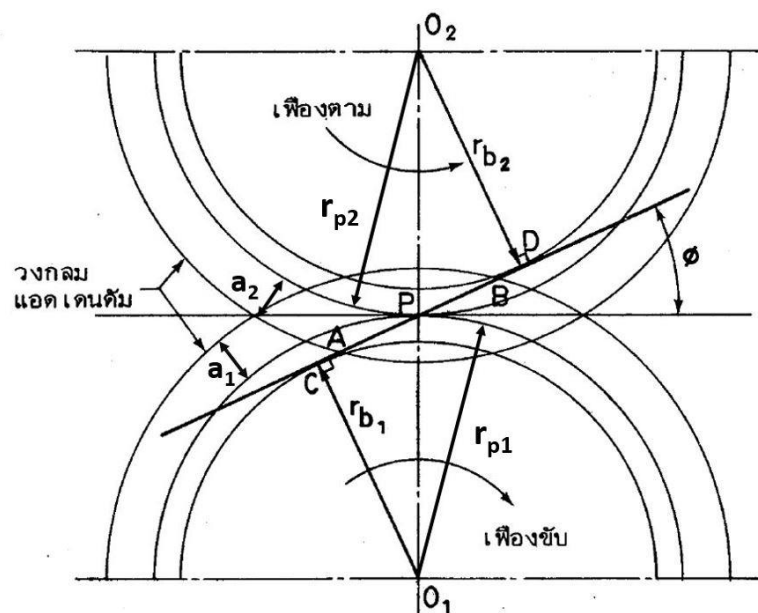
แทนค่า  $R'$  จากสมการ (2.11) จะได้

$$x^2 + 2xCr + Cr^2 = x^2 + \left(\frac{Fw}{2}\right)^2 \quad (2.10)$$

$$x = \frac{\left(\frac{Fw}{2}\right)^2 - (Cr)^2}{2Cr}$$

โดยปกติ ในการทำผิวฟันเฟืองจะมีการระบุขนาดของการทำผิวคราวน์นึ่ง (Crowning) เช่น ทำผิวคราวน์นึ่งขนาด 5 ไมครอน (Micron) เป็นต้น เมื่อทราบขนาดการทำผิวคราวน์นึ่ง (Crowning) และทราบความกว้างของหน้าฟันจึงสามารถคำนวณหาค่า  $x$  ได้จากสมการที่ 2.10 และสามารถหารัศมีคราวน์นึ่ง  $R'$  (Radius of Crowning) โดยสมการ 2.9 ตามลำดับ โดยขนาดของรัศมีคราวน์นึ่ง (Radius of Crowning) จะมีค่าคงที่ตลอดวงจรการขบที่ตำแหน่งต่างๆ

ในการหาความยาวของรัศมีการสัมผัส  $R_1$  และ  $R_2$  นั้นต้องมีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเรขาคณิตของการขบกันของฟันเฟืองตรงก่อนดังแสดงในรูปที่ 2.8 ในการสัมผัสของฟันเฟืองตรงเริ่มต้นเมื่อผิวด้านข้างไกล้รากฟันของเฟืองขับสัมผัสกับปลายฟันของเฟืองตาม และการสัมผัสจะสิ้นสุดเมื่อปลายฟันของเฟืองขับสัมผัสกับผิวด้านข้างไกล้รากฟันของเฟืองตาม หรืออาจกล่าวได้ว่าการสัมผัสกันระหว่างฟันเกิดขึ้นเมื่อวงกลมแอดเดนดัม (Addendum Circle) ของเฟืองตามตัดกับแนวแรงกด (Line of Action) ซึ่งทำมุมกด  $\phi$  (Pressure Angle) กับแกนนอนที่จุด A และการสัมผัสจะสิ้นสุดเมื่อวงกลมแอดเดนดัม (Addendum Circle) ของเฟืองตามตัดกับแนวแรงกด (Line of Action) อีกครั้งหนึ่งที่จุด B ตามลำดับ



รูปที่ 2.8 การขบกันของฟันเฟืองตรง [16]

จากรูปรัศมีเบส  $r_b$  (Base Radius) สามารถคำนวณได้โดย

$$r_{b1} = r_{p1} \cos \phi \quad (2.11)$$

$$r_{b2} = r_{p2} \cos \phi \quad (2.12)$$

เมื่อ  $r_{p1}$  และ  $r_{p2}$  คือ รัศมีพิตช์ (Pitch Radius) ของเฟืองที่หนึ่งและสองตามลำดับ

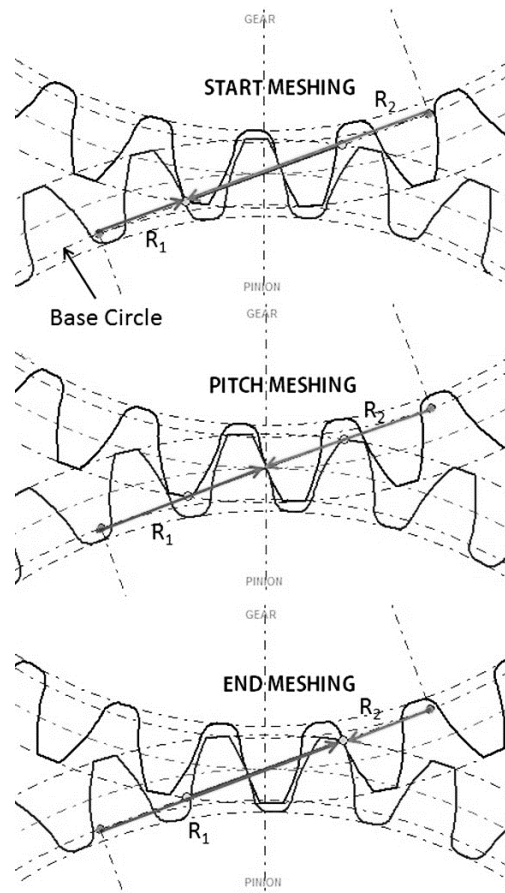
จากรูปที่ 2.8 ระยะ  $AB$  หรือระยะการขบ (Length of Action) สามารถคำนวณได้โดย

$$AB = \sqrt{(r_{p2} + a_2)^2 - r_{b2}^2} - r_{p2} \sin \phi + \sqrt{(r_{p1} + a_1)^2 - r_{b1}^2} - r_{p1} \sin \phi \quad (2.13)$$

เมื่อ  $a_1$  และ  $a_2$  คือ แอดเดนดัม (Addendum) ของเฟืองที่หนึ่งและสองตามลำดับ

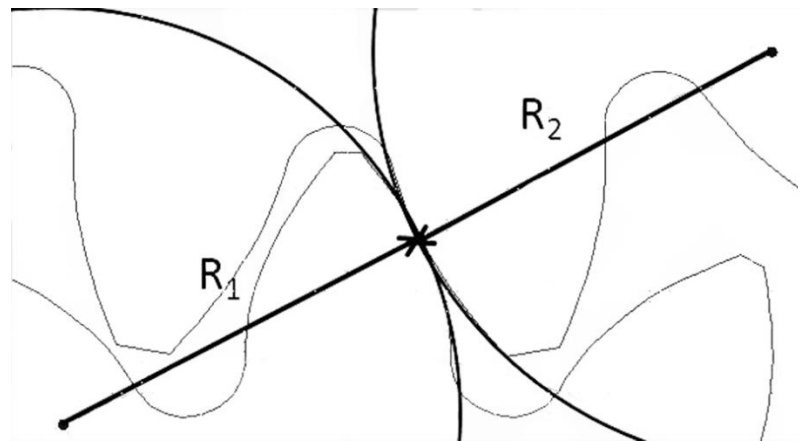
รัศมีการสัมผัสที่ขบกัน  $R_1$  และ  $R_2$  คือรัศมีความโค้งของเฟืองขับและเฟืองตาม ในทิศทางโปรไฟล์ของฟันเฟืองซึ่งวัดจากวงกลมเบสถึงตำแหน่งที่ขบกันบนเส้นแนวของการกระทำ (Line of Action) โดยความยาวของรัศมีความโค้งนี้มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งการขบดังแสดงในรูปที่

2.9



รูปที่ 2.9 การเปลี่ยนแปลงของรัศมี  $R_1$  และ  $R_2$  ในแต่ละตำแหน่งการขบ [17]

เพื่อลดความยุ่งยากในการคำนวณ ในการศึกษานี้จึงมุ่งเน้นที่การศึกษาปัญหาการขบกันของเฟืองตรงแบบธรรมดาที่ไม่มีการทำผิวโค้งคราวน์นิ่ง (Crowning) ซึ่งหมายความว่ารัศมีการสัมผัส  $R_1$  และ  $R_2$  หรือรัศมีคราวน์นิ่ง (Radius of Crowning) ตามแนวความโค้งตลอดความกว้างหน้าฟันจะมีค่ามากเป็นอนันต์ ซึ่งทำให้การขบกันของเฟืองตรงเสมือนกับการสัมผัสกันของทรงกระบอก 2 ชั้นดังแสดงในรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 การกอดตัวของเฟืองตรงเสมือนทรงกระบอก 2 อันชนกัน [17]

เมื่อรัศมีการสัมผัส  $R'_1$  และ  $R'_2$  มีค่ามากเข้าใกล้อนันต์ทำให้ ค่า  $1/R'_1$  และค่า  $1/R'_2$  มีค่าเป็น 0 และเนื่องจากลักษณะการวางตัวของส่วนโค้งฟันเฟืองขับและฟันเฟืองตามอยู่ในทิศทางเดียวกันจะทำให้  $\alpha$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ด้วยเหตุนี้สมการ 2.4 และ 2.5 จะลดรูปลงมาเป็น

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad A = 0, \quad \frac{B}{A} = \infty \quad (2.14)$$

เนื่องจากอัตราส่วน  $B/A$  มีค่ามากเข้าใกล้อนันต์จะทำให้ค่าสัมประสิทธิ์การสัมผัส  $k$  มีค่าเข้าสู่ศูนย์ จากสมการ (2.1) เมื่อ  $k$  มีค่าเข้าสู่ศูนย์จะได้ว่าความยาวแกนเอกวงรีของพื้นที่สัมผัส  $a$  จะมีค่ามากเข้าใกล้อนันต์ ซึ่งในกรณีนี้ระยะ  $2a$  จะมีค่าเท่ากับ ความยาวของทรงกระบอกที่วางตัวขนานเส้นสัมผัสและมีการสัมผัสกันตลอดความยาวเส้นสัมผัส (Contact Line)

เมื่อ  $k$  มีค่าเข้าสู่ศูนย์สมการคำนวณความยาวแกนโทวงรีของพื้นที่สัมผัส  $b$  (2.2) จะลดรูปเหลือ

$$b = \sqrt{\frac{2w\Delta}{\pi}} \quad (2.15)$$

เมื่อ  $w$  คือ ภาระต่อหน่วยความยาวของเส้นสัมผัส

โดย  $\Delta$  หาได้จาก

$$\Delta = \frac{2R_1R_2}{(R_1 + R_2)} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (2.16)$$

และเมื่อไม่มีการทำผิวโค้งคราวน์ (Crowning) สูตรการคำนวณในการหาค่าความเค้นที่จุดใดๆ บนแกน Z ของบริเวณที่เฟืองขบกันสามารถสรุปจากสมการที่ 2.6 มาเป็นสมการ

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \sigma_x &= - \left[ \frac{\left( \sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} - \frac{z}{b} \right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \right] \frac{b}{\Delta} \\ \sigma_2 = \sigma_y &= -2\nu \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} - \frac{z}{b} \right] \frac{z}{b} \\ \sigma_3 = \sigma_z &= - \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2}} \right] \frac{b}{\Delta}\end{aligned}\quad (2.17)$$

สำหรับที่กึ่งกลางผิวสัมผัส ซึ่งเป็นตำแหน่งที่มีค่าความเค้นในแต่ละทิศทางมากที่สุด ค่าความเค้นที่จุดนี้จะสามารถหาได้โดยแทนค่า Z ในสมการ 2.17 ให้เท่ากับศูนย์ ทำให้สามารถสรุปสมการได้เป็น

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{-b}{\Delta} \quad \sigma_2 = \sigma_y = -2\nu \left( \frac{b}{\Delta} \right) \quad \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-b}{\Delta} \quad (2.18)$$

จากสมการต่างๆ ที่ได้อธิบายในข้างต้นจะเห็นว่า การหาค่าความเค้นหลักในแกนต่างๆ จะต้องพิจารณาหาแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟัน ความยาวเส้นสัมผัส และรัศมีการสัมผัสของการขบ ๓ ตำแหน่งนั้นๆ มาให้ได้เสียก่อนจึงแทนค่าในสูตรเพื่อหาค่าความเค้นได้ นอกจากการพิจารณารัศมีการสัมผัสแล้วยังต้องพิจารณาถึงการแบ่งแรง (Load Sharing) ที่ตำแหน่งต่างๆ ของการขบด้วย



สำหรับเฟืองตรง ระหว่างการขบ ในบางตำแหน่งจะเกิดการขบกันของฟันหนึ่งคู่ในตำแหน่ง เหล่านี้ฟันคู่ที่ขบจะรับภาระทั้งหมด ส่วนตำแหน่งที่เกิดการขบกันของฟันสองคู่ ฟันสองคู่จะแบ่งกัน รับภาระ การพิจารณาช่วงระยะเวลาที่เกิดการขบของฟันหนึ่งคู่หรือสองคู่พิจารณาได้จากอัตราส่วน การขบ (Contact Ratio)  $m_c$  ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 1 ขึ้นไป ยิ่งค่าอัตราส่วนการขบมีค่ามากก็หมายความว่า ในวงจรการขบเกิดการขบของฟันสองคู่มาก ซึ่งอัตราส่วนการขบสามารถหาได้จากสมการ

$$m_c = \frac{AB}{p_b} \quad (2.19)$$

เมื่อ  $p_b$  คือ พิตช์ฐาน (Base Pitch)

$AB$  คือ ระยะการขบ ซึ่งหาได้จากสมการ 2.13

## 2.3 การคำนวณค่าความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยโปรแกรม MATLAB

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกระบวนการในการสร้างโปรแกรมคำนวณค่าความเค้นบนหน้าฟันเฟืองตรงโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีลำดับขั้นตอนเริ่มจาก การป้อนข้อมูล การคำนวณข้อมูลเรขาคณิตของเฟือง การคำนวณพารามิเตอร์การสัมผัส และการคำนวณความเค้นบนหน้าฟันเฟือง ดังต่อไปนี้

### 2.3.1 การป้อนข้อมูล

ในขั้นตอนแรกของการคำนวณความเค้นเริ่มต้นจากการป้อนข้อมูลจำเพาะของเฟืองและสภาวะการทำงานของเฟืองนั้นโดยแบ่งออกเป็น

#### 1. พารามิเตอร์ของเฟือง (Gear Parameters) และสมบัติวัสดุ (Material Properties)

พารามิเตอร์ของเฟือง ได้แก่ จำนวนฟันของเฟืองขับ จำนวนฟันของเฟืองตาม โมดูล (Module) มุมกด (Pressure Angle) ความกว้างหน้าฟัน (Face Width) ส่วนสมบัติวัสดุที่ต้องใส่เพื่อคำนวณได้แก่ ค่าอัตราส่วนปัวซอง (Poisson's Ratio) และ ค่ายังโมดูลัส (Young's Modulus)

## 2. สภาวะการทำงาน (Operating Condition) และ อัตราส่วนการแบ่งแรง (Load Sharing Ratio)

เนื่องจากในที่นี่จะพิจารณาการอัดกันของฟันในสภาวะอยู่นิ่ง ดังนั้นสภาวะการทำงานในที่นี่ ได้แก่ แรงบิด (Torque) ส่วนอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะฟันเฟืองขบพร้อมกัน 2 ฟันซึ่งจะเกิดตอน เริ่มต้นการขบ และ ก่อนสิ้นสุดการขบ

ภายหลังจากการป้อนข้อมูลจำเพาะของเฟืองและสภาวะการทำงานเสร็จแล้วจึงนำข้อมูลเหล่านั้นไป คำนวณในลำดับถัดไป

### 2.3.2 การคำนวณข้อมูลเรขาคณิตของเฟือง

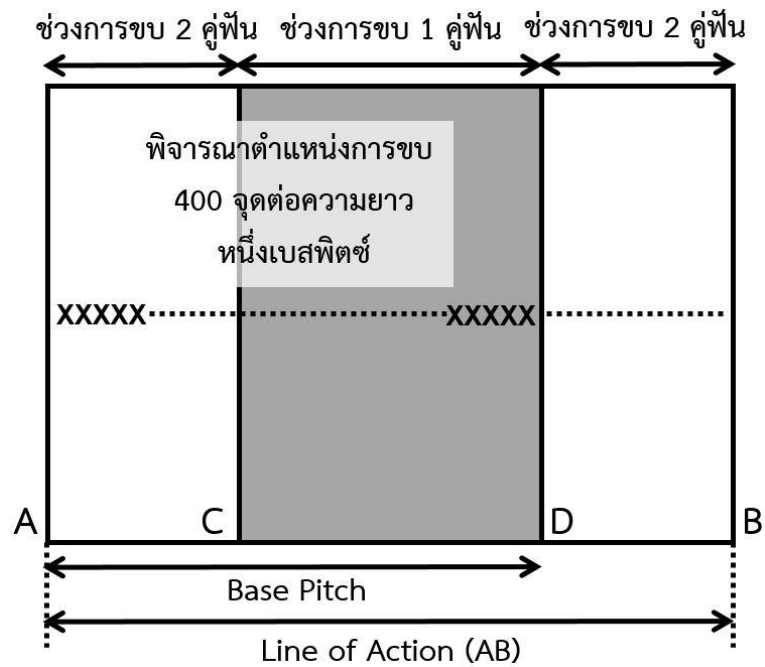
ในขั้นตอนนี้โปรแกรมจะนำข้อมูลเฟืองต่างๆ จากในขั้นตอนแรกมาคำนวณข้อมูลเรขาคณิตของเฟืองต่างๆ ได้แก่ ความยาวรัศมีพิตช์  $r_p$  ความยาวรัศมีเบส  $r_b$  เซอร์คิวลาพิตช์ (Circular Pitch)  $p$  เซอร์คิวลาพิตช์เบสหรือเบสพิตช์ (Circular Pitch Base or Base Pitch)  $p_b$  ระยะการขบ (Length of Action)  $AB$  อัตราส่วนการขบ (Contact Ratio)  $m_c$  ค่าเหล่านี้สามารถคำนวณได้ดังสมการที่สรุปรวมไว้ในตารางที่ 2.1 สำหรับเลขที่สมการที่เขียนในตาราง จะหมายถึงเลขที่สมการที่ปรากฏอยู่ในรายงานเล่มนี้

ตารางที่ 2.1 สมการที่ใช้คำนวณเรขาคณิตต่างๆ ของเฟือง

ตัวแปร	สมการ	เลขที่ สมการ
$r_p$	$r_p = m \times N / 2$	ก.1
$r_b$	$r_b = r_p \cos \phi$	2.11-2.12
$p$	$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{2\pi r_p}{N} = \pi m$	ก.3
$p_b$	$p_b = \frac{2\pi r_b}{N}$	ก.5
$AB$	$AB = \sqrt{(r_{p2} + a_2)^2 - r_{b2}^2} - r_{p2} \sin \phi + \sqrt{(r_{p1} + a_1)^2 - r_{b1}^2} - r_{p1} \sin \phi$	2.13
$m_c$	$m_c = \frac{AB}{P_b}$	2.19

### 2.3.3 การแบ่งจุดการคำนวณในรอบการขบ

ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของฟันเฟืองตรง 1 ฟันจะมีค่าความเค้นเปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากแต่ละตำแหน่งจะมีค่าของรัศมีการสัมผัสและแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันแตกต่างกัน การคำนวณหาค่าความเค้นต่างๆ ตำแหน่งกระทำโดยพิจารณาที่ละตำแหน่งการขบไปเรื่อยๆ ตลอดเส้นแนวแรงกด  $AB$  (Line of Action) ตั้งแต่เริ่มต้นการสัมผัสจนถึงสิ้นสุดการสัมผัสของคู่เฟืองนั้นๆ โดยในการศึกษานี้ได้กำหนดให้มีจุดสัมผัสที่พิจารณาจำนวน 400 จุดต่อระยะความยาวหนึ่งเซอควิลลาพิทช์เบส (Circular Pitch Base) ดังแสดงในรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ระบายการขบที่เกิดการขบ 1 คู่งพ้ันและ 2 คู่งพ้ัน

### 2.3.4 การคำนวณพารามิเตอร์ของการสัมผัส

จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีความเค้นในปัญหาการขบกันของเฟืองตรงที่ไม่มีการทำคราน้ิงตามที่ได้อธิบายอย่างละเอียดในหัวข้อก่อนหน้า พบว่าก่อนที่จะคำนวณค่าความเค้นต่างๆ จำเป็นที่ต้องคำนวณค่าพารามิเตอร์การสัมผัสได้แก่ ความยาวแกนโหวงรีของพ้ันที่สัมผัส  $b$  และ  $\Delta$  ดังแสดงในสมการที่ 2.15 และ 2.16 และนำมาแสดงอีกครั้งดังนี้

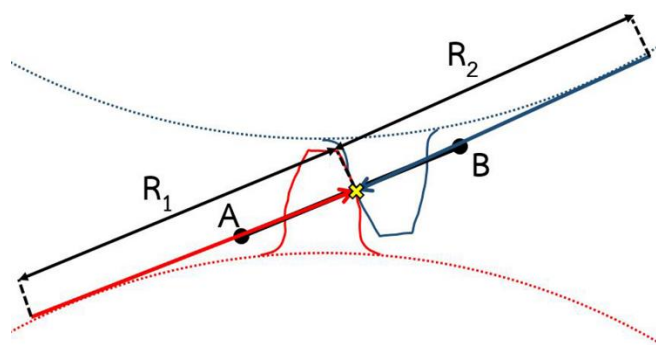
$$b = \sqrt{\frac{2w\Delta}{\pi}} \quad (2.20)$$

$$\Delta = \frac{2R_1R_2}{(R_1 + R_2)} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (2.21)$$

จากสมการ 2.20 และ 2.21 จะเห็นว่าการจะคำนวณค่าพารามิเตอร์การสัมผัสจำเป็นต้องทราบค่ารัศมีการสัมผัส ค่าความยาวเส้นสัมผัส และ แรงที่กระทำบนหน้าพ้ันเฟืองตรง ซึ่งจะแสดงรายละเอียดการพิจารณาต่อไปนี้

### 1. การหาค่ารัศมีการสัมผัสในเฟืองตรง

ความยาวรัศมีการสัมผัส  $R_1$  และ  $R_2$  ในเฟืองตรงคือรัศมีการโค้งในทิศทางโพสิทีฟของฟันเฟืองตรงของเฟืองขับและเฟืองตามตามลำดับ ซึ่งวัดตั้งแต่วงกลมเบสจนถึงตำแหน่งการขบนั้นๆ โดยมีค่าเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงการขบ ตั้งแต่จุดเริ่มการขบ A ซึ่งเป็นจุดที่รากฟันของเฟืองขับขบกับยอดของฟันเฟืองตามจนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการขบ B ซึ่งเป็นจุดที่ปลายฟันของเฟืองขับขบกับรากฟันของเฟืองตามดังแสดงในรูป 2.12



รูปที่ 2.12 ความยาวรัศมีการสัมผัส  $R_1$  และ  $R_2$  ในเฟืองตรง

### 2. การหาค่าความยาวเส้นสัมผัสในเฟืองตรง

เนื่องจากเฟืองที่พิจารณาในที่นี้ไม่มีการทำคราวน์ ดังนั้นการสัมผัสจึงเกิดตลอดความกว้างหน้าฟัน เพราะฉะนั้นความยาวเส้นสัมผัสของเฟืองตรงก็คือค่าความกว้างหน้าฟันของเฟืองนั่นเองซึ่งมีค่าคงที่ทุกตำแหน่งการขบ

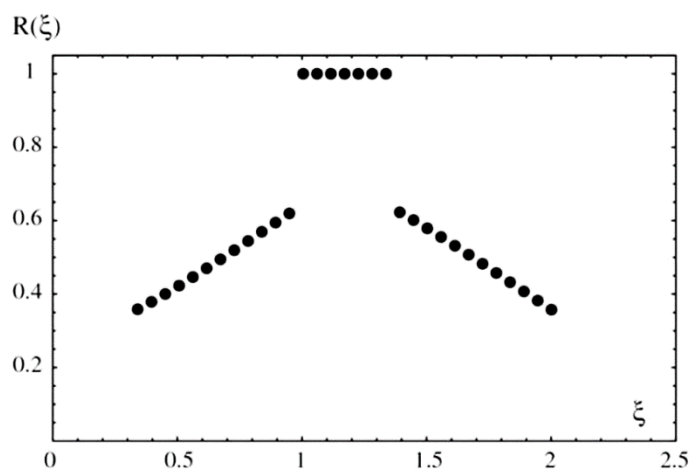
### 3. การวิเคราะห์แรงที่กระทำบนหน้าฟันเฟืองตรง

เนื่องจากในการขบกันของฟันเฟืองตรงจะมีบางตำแหน่งที่ฟันขบกันสองคู่และบางตำแหน่งที่ฟันขบกันคู่เดียวซึ่งส่งผลต่อแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟัน ดังนั้นจึงต้องระบุให้ได้ก่อนว่าตำแหน่งที่พิจารณา กำลังเกิดการขบกี่คู่ฟัน โดยจะสามารถหาช่วงระยะเวลาที่เกิดการขบหนึ่งฟันและสองฟันจากการพิจารณาการขบของคู่ฟันบนระนาบการขบดังแสดงในรูป 2.11 ขณะเริ่มการขบของฟันเฟืองจะเกิดการขบของสองคู่ฟัน โดยในคู่ฟันแรก โคนฟันของเฟืองขับขบกับปลายฟันของเฟืองตามตำแหน่ง A บนระนาบการขบ ส่วนคู่ฟันที่สองจะเกิดการขบที่ตำแหน่ง D ซึ่งอยู่ห่างจากคู่ฟันแรกเป็นระยะหนึ่ง

เบสพิตซ์ ช่วงการขบของสองคู่ฟันจะเกิดอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งคู่ฟันที่สองขบถึงตำแหน่ง B ในขณะที่คู่ฟันแรกขบถึงตำแหน่ง C จึงเกิดการขบหนึ่งคู่ฟัน การขบของหนึ่งคู่ฟันจะเกิดอย่างต่อเนื่องจนกระทั่งคู่ฟันแรกขบถึงตำแหน่ง D และเกิดการขบของคู่ฟันใหม่ที่จุด A ลักษณะการขบจะเกิดซ้ำอย่างที่ได้อธิบายในตอนแรกอีกครั้งหนึ่งจนสิ้นสุดตำแหน่งการขบที่จุด B ซึ่งปลายฟันของเฟืองขับขบกับรากฟันของเฟืองตาม

เมื่อเกิดการขบหนึ่งคู่ฟัน ฟันคู่หนึ่งจะรับภาระทั้งหมดแต่เมื่อเกิดการขบสองคู่ฟัน ภาระที่แบ่งไปในแต่ละคู่อาจรับภาระไม่เท่ากัน โดยการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับภาระที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ได้แก่ ชนัตต์ และคณะ [9] ได้พิจารณาให้อัตราส่วนการแบ่งแรงของฟันเฟืองเป็นแบบ 50 : 50 เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาในขั้นต้นโดยพิจารณาว่าแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเมื่อเกิดการขบสองคู่ฟันจะถูกแบ่งไปเท่าๆ กันคู่ละ 50% อย่างไรก็ตามจากผลการศึกษาของนักวิจัยอื่นกลับพบว่าการแบ่งแรงของฟันเฟืองไม่ได้มีพฤติกรรมเช่นนั้น

Pedrero et al. [10] พบว่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะขบสองฟันจะมีค่า 33% เมื่อโคนฟันสัมผัสกับปลายฟัน อัตราส่วนนี้จะเพิ่มขึ้นในลักษณะเชิงเส้นจนมีค่า 67% ที่ตำแหน่งเริ่มและสิ้นสุดการขบของหนึ่งคู่ฟันดังแสดงในรูปที่ 2.13 ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของ Papadopoulos และ Costopoulos [8]



รูปที่ 2.13 อัตราส่วนการแบ่งแรงของเฟืองตรง [10]

Lazovic et al. [11] พบว่าเฟืองที่มีผิวโค้งอินโวลูตในอุดมคติจะมีอัตราส่วนการแบ่งแรงบนหน้าฟันเมื่อขอบสองคู่ฟันเท่ากับ 45 : 55 หมายความว่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะขอบสองฟันจะมีค่า 45% เมื่อโคนฟันขบกับปลายฟัน อัตราส่วนนี้จะมีค่าเพิ่มขึ้นในลักษณะเชิงเส้นจนมีค่า 55% ที่ตำแหน่งเริ่มและสิ้นสุดการขบของหนึ่งคู่ฟัน

จะเห็นว่าอัตราส่วนการแบ่งแรงของฟันเฟืองจะมีค่าในช่วง 33 : 67 ถึง 50 : 50 ดังนั้นในการศึกษานี้จึงได้เลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงสามแบบได้แก่ 33 : 67 45 : 55 และ 50 : 50 ในการคำนวณความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

### 2.3.5 การคำนวณความเค้นบนหน้าฟันเฟือง

ภายหลังจากคำนวณค่าพารามิเตอร์ของการสัมผัสแล้ว ในขั้นต่อไปจะคำนวณค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันที่จุดสัมผัสในแนวแกนต่างๆ วิธีการคำนวณแสดงไว้ในสมการที่ 2.18 และนำมาแสดงอีกครั้งดังนี้

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{-b}{\Delta} \quad \sigma_2 = \sigma_y = -2v \left( \frac{b}{\Delta} \right) \quad \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-b}{\Delta} \quad (2.22)$$

นอกจากนี้ในการศึกษานี้จะพิจารณาความเค้นฟอนมิสเชส (Von Mises Stress) โดยพิจารณาจากสถานะความเค้นของเอลิเมนต์ (State of Stress of an Element) โดยสามารถคำนวณได้ดังสมการ

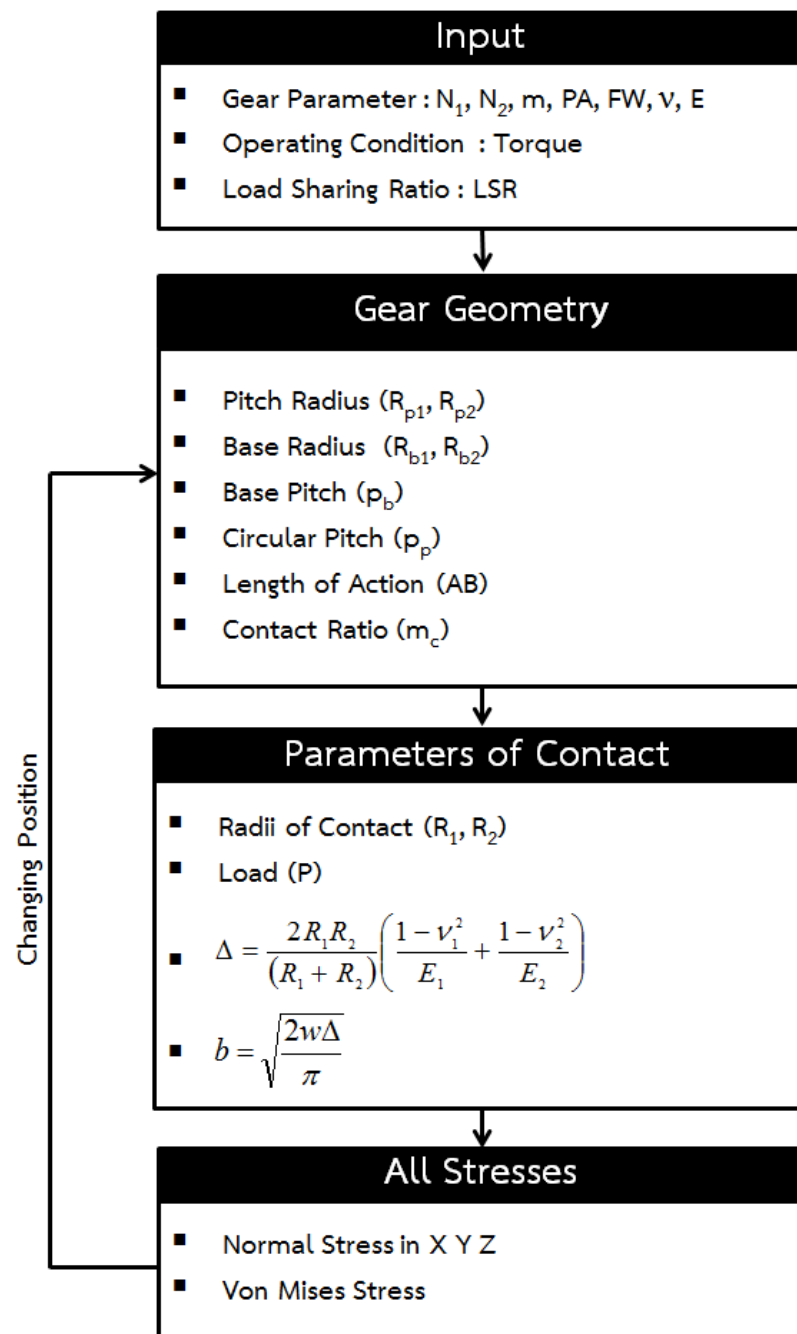
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \quad (2.23)$$

เมื่อพิจารณาที่จุดสัมผัส ซึ่งค่าความเค้นหลักมีค่า ส่วนความเค้นเฉือน  $\tau$  จะมีค่าเท่ากับศูนย์ สูตรคำนวณความเค้นฟอน มิสเชส (Von Mises Stress) จึงสามารถลดรูปลงมาได้เป็น

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (2.24)$$

เมื่อ  $\sigma_1$  ,  $\sigma_2$  และ  $\sigma_3$  คือ ความเค้นหลัก

หลังจากที่คำนวณค่าความเค้นฟอนมิสเชสที่ตำแหน่งนั้นๆ เสร็จสิ้นแล้วจะเปลี่ยนไปคำนวณในตำแหน่งการขบต่อไปจนครบทุกตำแหน่งการขบโดยการคำนวณจะทำซ้ำเช่นเดิมดังวิธีที่ได้อธิบายมาแล้ว วิธีการข้างต้นสามารถนำไปเขียนโปรแกรมคำนวณ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมสามารถสรุปได้ดังรูปที่ 2.14 โดยรายละเอียดทั้งหมดของโปรแกรมจะแสดงในภาคผนวก ข.



รูปที่ 2.14 แผนภูมิการคำนวณโปรแกรมประดิษฐ์ MATLAB ของเฟืองตรง



## 2.4 สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงทฤษฎีการสัมผัสของเฮริตซ์และวิธีการประยุกต์ใช้กับปัญหาการขบกันของเฟืองตรง นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงการคำนวณค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ ได้แก่ รัศมีการสัมผัสที่ตำแหน่งต่างๆ ตลอดการขบ อัตราส่วนแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟัน ณ ขณะนั้นๆ และความยาวของเส้นสัมผัส ส่วนท้ายของบทนี้ยังได้แสดงถึงหลักการคิดและขั้นตอนการประดิษฐ์โปรแกรม MATLAB สำหรับการคำนวณความเค้นที่ตำแหน่งต่างๆ ของการขบของฟันเฟืองตั้งแต่การพิจารณาหาค่าของความยาวรัศมีการสัมผัส ความยาวเส้นสัมผัส และแรงที่กระทำบนหน้าฟันเฟือง ที่ตำแหน่งต่างๆ ของการขบ



### บทที่ 3

## การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS

โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS เป็นโปรแกรมที่สามารถแก้ปัญหาทางวิศวกรรมต่างๆ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยในการศึกษานี้มุ่งเน้นไปที่การแก้ปัญหาการสัมผัสกันของเฟืองตรงจึงเลือกใช้โปรแกรม ANSYS Workbench ในโหมด Static Structural โดยในบทนี้จะกล่าวถึงลักษณะของปัญหา การกำหนดการแบ่งเอลิเมนต์ การกำหนดการสัมผัส การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ในโปรแกรม ANSYS สำหรับการคำนวณปัญหาดังกล่าว

### 3.1 รายละเอียดและลักษณะของปัญหาเฟืองในการศึกษานี้

ในงานศึกษานี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการสัมผัสเฟืองตรงที่มีอัตราทด 1 : 1 โดยเฟืองมีความกว้างหน้าฟัน 20 mm และทำจากวัสดุ Structural Steel ที่มีค่าอัตราส่วนปัวซอง 0.3 และค่า Young's Modulus 200 GPa ภาระที่กระทำกับคู่เฟืองมีค่าเท่ากับ 250 N-m และเพื่อศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ต่ออัตราส่วนการแบ่งภาระบนหน้าฟันเฟือง ในการศึกษานี้จึงมีการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ของชุดเฟืองได้แก่ โมดูล มุมกด และจำนวนซี่ฟัน โดยข้อมูลจำเพาะและสถานะการทำงานของชุดเฟืองสามารถสรุปได้ดังแสดงในตารางที่ 3.1 จากตาราง ชุดเฟือง A จะเป็นชุดเฟืองอ้างอิง ส่วนชุดเฟือง B C D จะเป็นชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลต่างออกไปจากชุดเฟือง A โดยมีค่าพารามิเตอร์อื่นเป็นเช่นเดิม ส่วนการเปรียบเทียบค่ามุมกด ทำได้โดยเปรียบเทียบผลของชุดเฟือง A กับชุดเฟือง E และ F ซึ่งมีมุมกด 14.5 องศา และ 25 องศา ตามลำดับ สำหรับผลของจำนวนฟันจะสามารถศึกษาได้โดยเปรียบเทียบผลของ ชุดเฟือง B กับชุดเฟือง G และ H ส่วนชุดเฟือง I จะเป็นชุดเฟืองที่เพิ่มเข้ามา เพื่อศึกษาผลของการเปลี่ยนแปลงค่าโมดูลในขณะที่คงระยะห่างระหว่างศูนย์กลางของคู่เฟืองให้คงที่ ซึ่งจะส่งผลให้จำนวนฟันในกรณีนี้เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมด้วย

ตารางที่ 3.1 ข้อมูลจำเพาะชุดเฟืองตรงที่ใช้ในการคำนวณ

พารามิเตอร์ของเฟือง	ชุดเฟือง								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
จำนวนฟัน (ซี่)	30	30	30	30	30	30	45	60	36
โมดูล (mm)	3	2	4	5	3	3	2	2	2.5
มุมกด (องศา)	20	20	20	20	14.5	25	20	20	20

ปัญหาการสัมผัสของเฟืองเป็นปัญหาแบบเงื่อนไขขอบเขตไม่เชิงเส้น (Boundary Nonlinearity) ซึ่งต้องใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำในการคำนวณผลลัพธ์ ดังนั้นระยะเวลาในการคำนวณ (Computational Time) จึงมากกว่าปัญหาแบบเชิงเส้น (Linear Problem) ทั่วไปดังนั้นเพื่อลดระยะเวลาในการคำนวณจึงตั้งสมมุติฐานบางข้อเพื่อลดความซับซ้อนของปัญหา

### 3.1.1. สมมุติฐานของเฟืองตรง

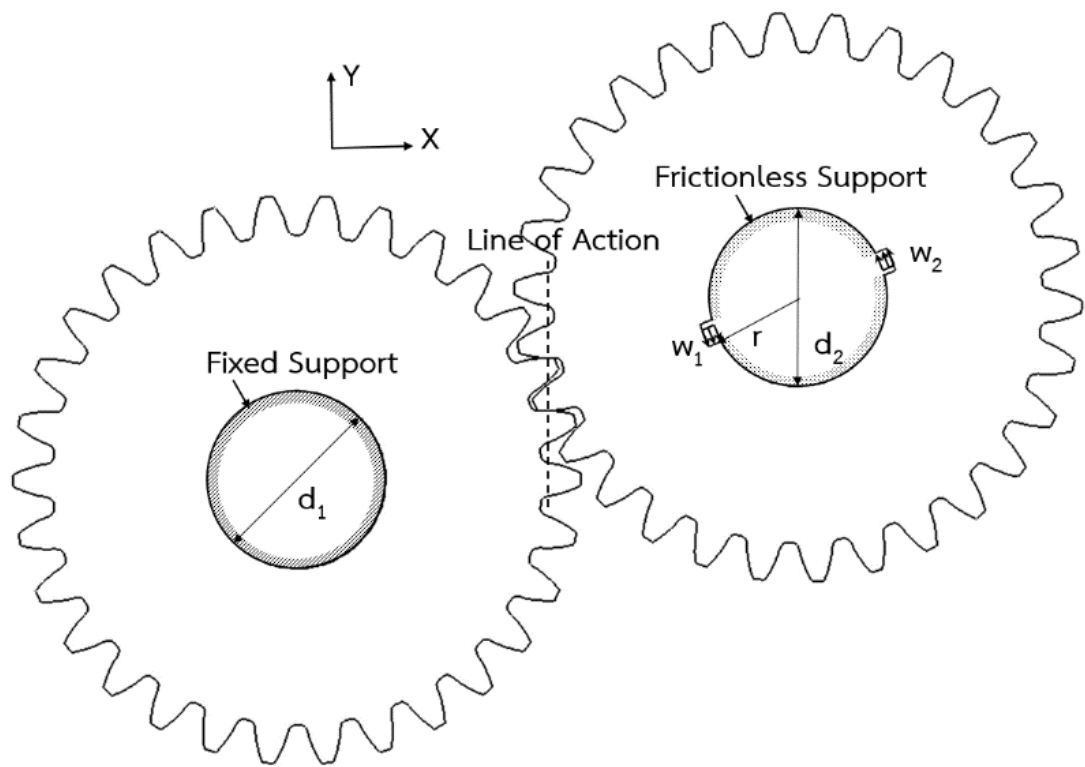
ในกรณีของเฟืองตรงเนื่องจากตลอดความกว้างหน้าฟันของเฟืองตรงถูกแรงกระทำอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นจึงพิจารณาปัญหาเฉพาะกรณีของเฟืองตรงให้เป็นปัญหาความเครียดในระนาบได้ ซึ่งเป็นการลดรูปปัญหาจากปัญหาสามมิติเป็นปัญหาสองมิติ ในการศึกษาโมเดลเฟืองตรงที่นำมาวิเคราะห์จะนำมาพิจารณาแค่เพียงส่วนเดียวเท่านั้น ไม่ได้พิจารณาตลอดความกว้างหน้าฟันเนื่องจากในแต่ละระนาบลึกเข้าไปนั้นมีพฤติกรรมเหมือนกัน ซึ่งส่งผลให้ระยะเวลาในการคำนวณ (Computational Time) นั้นลดลง สมมุติฐานต่างๆ ที่ใช้ในกรณีของเฟืองตรงสรุปได้ดังนี้

1. สมมุติว่าวัสดุเฟืองเป็นเนื้อเดียวกัน (Homogeneous) , ไอโซโทรปิก (Isotropic) และมีคุณสมบัติยืดหยุ่น (Elastic) ตามกฎของฮุก
2. การกระจายแรงตลอดหน้าฟันเป็นแบบสม่ำเสมอ
3. ไม่พิจารณาแรงเสียดทานจากการเลื่อนขนาน (Sliding Friction) ระหว่างคู่เฟือง
4. พิจารณาปัญหาการขบกันของเฟืองตรงเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ เนื่องจากพิจารณาว่าแรงที่เกิดขึ้นตลอดหน้าฟันมีค่าเท่ากันดังนั้นในแต่ระนาบของฟันจึงมีพฤติกรรมเหมือนกัน
5. เฟืองไม่มีการทำผิวคราวน์นิง (Crowning Modification)
6. ปัญหาการขบกันของเฟืองตรงเป็นปัญหาไม่เชิงเส้น (Non-Linear) ณ เวลาใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง (Quasi-Static)

### 3.1.2. โดเมนและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเฟืองตรง

จากสมมุติฐานของเฟืองตรงจึงตั้งปัญหาที่จำลองการขบอัดกันของฟันเฟืองตรงในสองมิติดังแสดงในรูปที่ 3.1 เฟืองตรงมีเส้นผ่านศูนย์กลางของรูเฟืองขับและรูเฟืองตามคือ  $d_1$  และ  $d_2$  ตามลำดับ โดยค่าทั้งสองมีขนาดเท่ากันที่ 30 mm นอกจากนี้เพื่อการเปรียบเทียบค่าความเค้นจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถกระทำได้อย่างง่าย ในที่นี้จึงจัดวางชุดเฟืองให้แนวแรงกด (Line of Action) อยู่ในแนวตั้ง (ทิศทางตามแกน Y) การจัดวางให้อยู่ในทิศทางเช่นนี้จะทำให้ค่าความเค้นที่คำนวณได้โดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อยู่ในทิศทางเดียวกับค่าความเค้นหลักซึ่งคำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทำให้สามารถเปรียบเทียบผลกันได้โดยง่าย

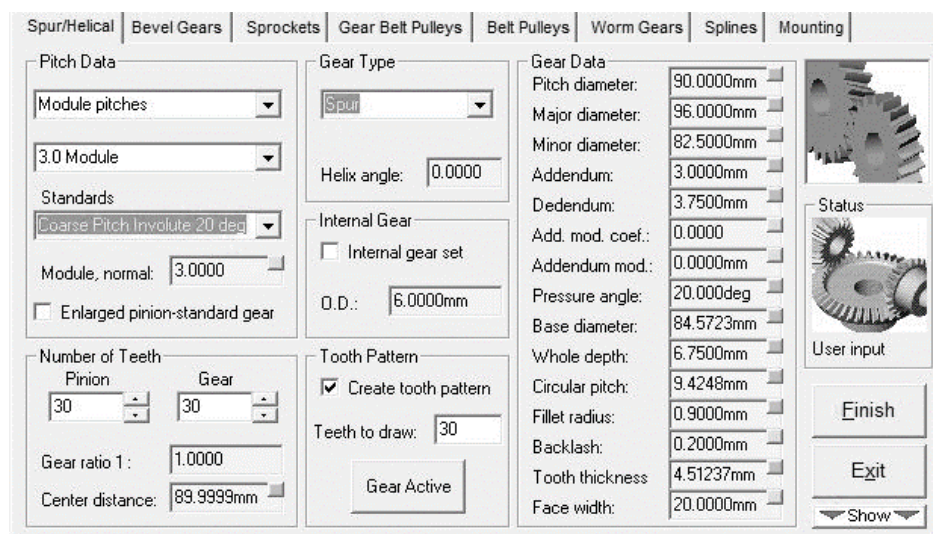
ในปัญหานี้ เพื่อจำลองการขบอัดกันของฟันเฟืองจึงกำหนด Frictionless Support ที่ขอบรูเพลลาของเฟืองขับ (เฟืองด้านขวา) ยกเว้นในบริเวณร่องลิ้นทั้งสอง ซึ่งจะทำให้บริเวณที่กำหนดไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางรัศมีแกนเพลลา แต่เคลื่อนที่ในทิศทางเส้นสัมผัสกับขอบของรูเพลลาได้ นอกจากนี้ยังกำหนด Fixed Support ที่ขอบรูเพลลาของเฟืองตาม (เฟืองด้านซ้าย) ซึ่งทำให้บริเวณที่กำหนดนั้นไม่สามารถเคลื่อนที่ในทิศทางใดๆ ได้ นอกจากนี้ได้ใส่แรงกระจายที่มีขนาดเท่ากันคือ  $w_1$  และ  $w_2$  ที่ขอบของร่องลิ้นทั้งสอง ซึ่งมีระยะจากแกนรูเพลลาของเฟืองขับถึงตำแหน่งกึ่งกลางของร่องลิ้น  $r$  ที่ 16 mm โดยขนาดของ  $w_1$  และ  $w_2$  จะมีขนาดสมมูลกับแรงบิด 250 N-m ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงการขบอัดกันของฟันเฟืองตรง

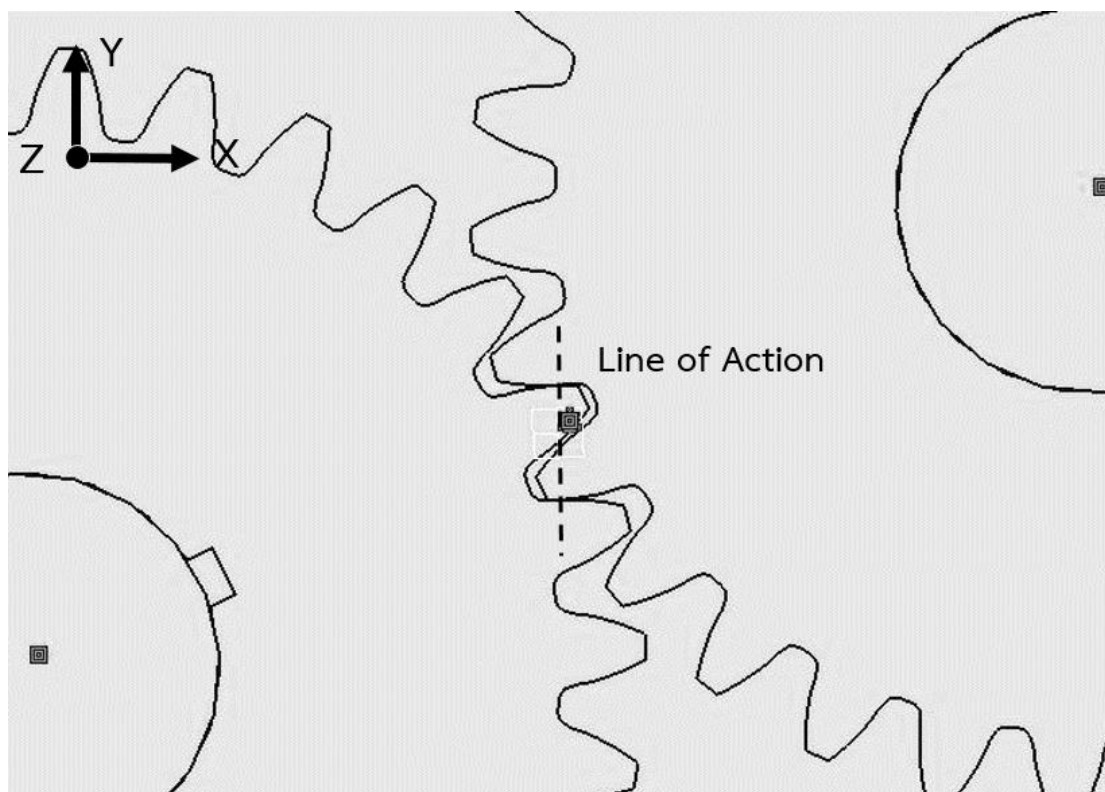
### 3.2 การสร้างและการประกอบโมเดลเฟือง ณ ตำแหน่งการขบต่างๆ

ในการศึกษาความเค้นที่เกิดขึ้นที่หน้าฟันเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ณ ช่วงเวลาขณะใดขณะหนึ่ง (Quasi-Static) ทำโดยสร้างโมเดลเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ กัน เพื่อสร้างโมเดลเฟืองที่สมจริงมีรูปร่างผิวเป็นโค้งอินโวลูต (Involute Curve) ในการศึกษาที่ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสำหรับสร้างโมเดลเฟืองโดยเฉพาะ GearTrax2008 ดังแสดงในรูปที่ 3.2 โดยรายละเอียดการใช้โปรแกรมจะแสดงในภาคผนวก ค.



รูปที่ 3.2 โปรแกรมสร้างโมเดลฟันเฟือง GearTrax2008 [17]

เมื่อสร้างโมเดลเฟืองเสร็จจึงนำมาประกอบ (Assembly) เพื่อจำลองการขบกันของเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ด้วยโปรแกรม CATIA ดังแสดงในรูปที่ 3.3 เมื่อตั้งโมเดลเฟืองอยู่ในตำแหน่งการขบที่ต้องการแล้วจึงทำการบันทึกข้อมูลไฟล์เป็นสกุล .IGS จึงสามารถนำไปวิเคราะห์ต่อในโปรแกรม ANSYS ได้ โดยรายละเอียดในการสร้างและประกอบชุดเฟืองจะแสดงในภาคผนวก ง.



รูปที่ 3.3 การประกอบโมเดลของเฟืองตรง [18]

### 3.3 การกำหนดคุณสมบัติของวัสดุ (Material Properties)

ในโปรแกรม ANSYS นั้นมีฐานข้อมูลวัสดุต่างๆ ที่ใช้ในงานวิศวกรรมเป็นจำนวนมาก ในการตั้งค่าคุณสมบัติวัสดุสามารถทำได้ง่ายและสะดวกโดยการคลิกเลือกรายการวัสดุที่ตรงกับปัญหาที่จะพิจารณา ซึ่งในแต่ละรายการก็จะแสดงคุณสมบัติพื้นฐานของวัสดุไว้โดยสามารถพิมพ์เพื่อเปลี่ยนแปลงเป็นค่าที่ต้องการได้ภายในช่องหลัก B หรือเปลี่ยนเป็นหน่วยที่ต้องการได้ในช่องหลัก C ดังแสดงในรูปที่ 3.4 โดยสำหรับปัญหาการขบกันของฟันเฟืองตรงได้เลือกใช้วัสดุ Structural Steel ที่มีค่าอัตราส่วนปัวซอง 0.3 และค่ายังโมดูลัส 200 GPa

Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Density	7850	kg m <sup>-3</sup>	
3	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
6	Isotropic Elasticity			
12	Alternating Stress Mean Stress	Tabular		
16	Strain-Life Parameters			
24	Tensile Yield Strength	2.5E+08	Pa	
25	Compressive Yield Strength	2.5E+08	Pa	
26	Tensile Ultimate Strength	4.6E+08	Pa	
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa	

Outline of Schematic A2: Engineering Data			
	A	B	C D
1	Contents of Engineering Data		Source Description
2	Material		
3	Structural Steel	General_Materials.xml	Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110, 1
*	Click here to add a new material		

รูปที่ 3.4 คุณสมบัติทางวิศวกรรมของ Structural Steel [19]

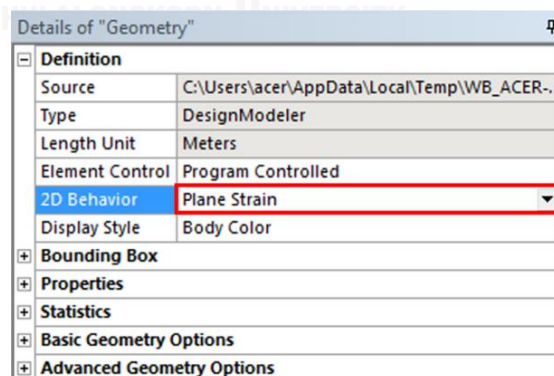
### 3.4 การแบ่งเอลิเมนต์ (Discretization)

หนึ่งในขั้นตอนของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สำคัญคือขั้นตอนการแบ่งเอลิเมนต์ ซึ่งในโปรแกรม ANSYS จะดำเนินการแบ่งเอลิเมนต์ให้โดยอัตโนมัติเมื่อกดปุ่ม Mesh → Generate Mesh ยกตัวอย่างเช่น ถ้าปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์เป็นปัญหาสองมิติ โปรแกรมจะพยายามแบ่งโมเดลปัญหาเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้โดยอัตโนมัติ หรือถ้าโมเดลปัญหาที่นำมาวิเคราะห์มีรูปร่างซับซ้อนไม่สามารถแบ่งเอลิเมนต์ในลักษณะดังกล่าวได้ โปรแกรม ANSYS จะแบ่งเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแทน ในโปรแกรม ANSYS ผู้ใช้สามารถควบคุมลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์ได้พอสมควร โดยสามารถเลือกการปรับโดยกดปุ่ม Mesh Control โดยทางเลือกในการควบคุมการแบ่งเอลิเมนต์ที่น่าสนใจ กล่าวพอสังเขปได้ดังนี้



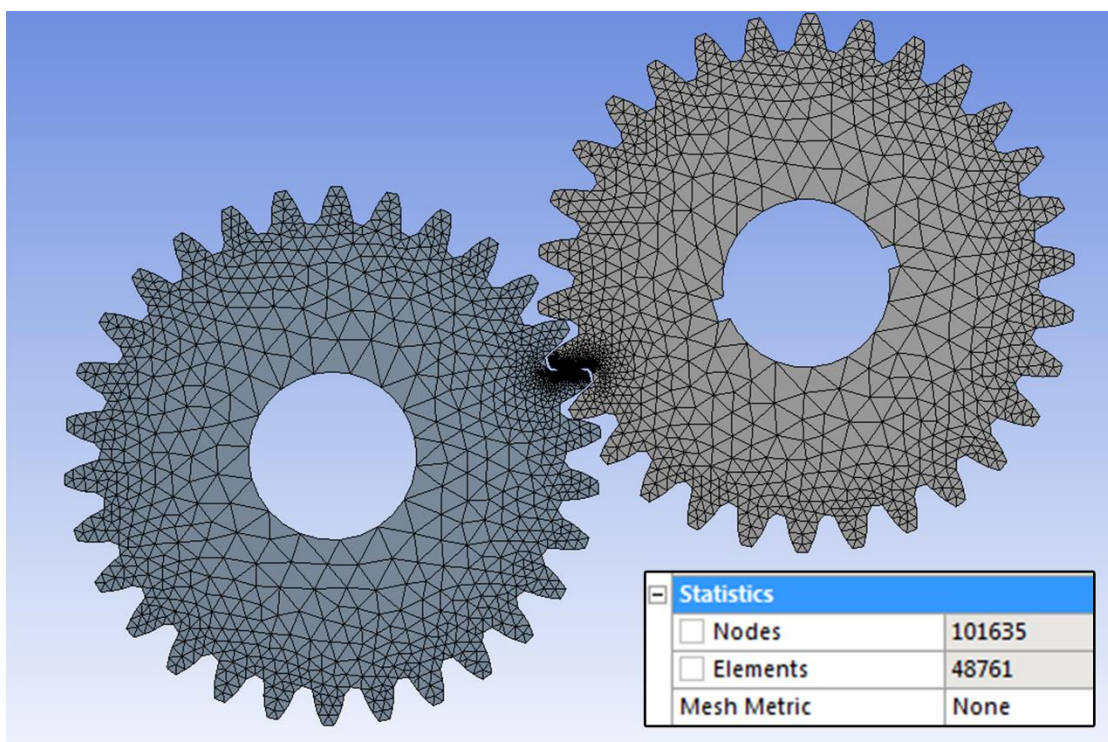
Method	- กำหนดว่าจะให้โปรแกรมแบ่งเอลิเมนต์รูปแบบไหน เช่น ทรงหกหน้า , ทรงสี่หน้า , ทรงปริซึม ในกรณี 3 มิติ หรือ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม สามเหลี่ยมในกรณี 2 มิติ
Sizing	- กำหนดขนาดของ Element บริเวณที่เลือก โดยอาจเลือกทั้งวัตถุหรือเส้นก็ได้
Contact Sizing	- กำหนดขนาดของ Element เฉพาะบริเวณผิวสัมผัส
Refinement	- กำหนดให้แบ่ง Element ให้มีความละเอียดมากขึ้นบริเวณที่เลือกโดยอัตโนมัติ
Mapped Face Meshing-	กำหนดให้แบ่ง Element เป็นระเบียบสมมาตรตามรูปทรงที่เลือก

เนื่องจากการศึกษานี้ได้ลดรูปปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรงเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ (Plane Strain) ในแบบสองมิติ ในที่นี้จึงเลือกพฤติกรรมของโมเดลตามที่กล่าวอ้างแสดงในรูปที่ 3.5 เนื่องจากเฟืองมีรูปร่างซับซ้อนและมีขนาดของเอลิเมนต์ในแต่ละพื้นที่ของโมเดลแตกต่างกัน ทำให้การแบ่งเอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมไม่สามารถกระทำได้ ดังนั้นในที่นี้จึงได้แบ่งเอลิเมนต์เป็นเอลิเมนต์แบบสามเหลี่ยมสามจุดต่อแบบ Plane Strain โดยใช้คำสั่ง Method

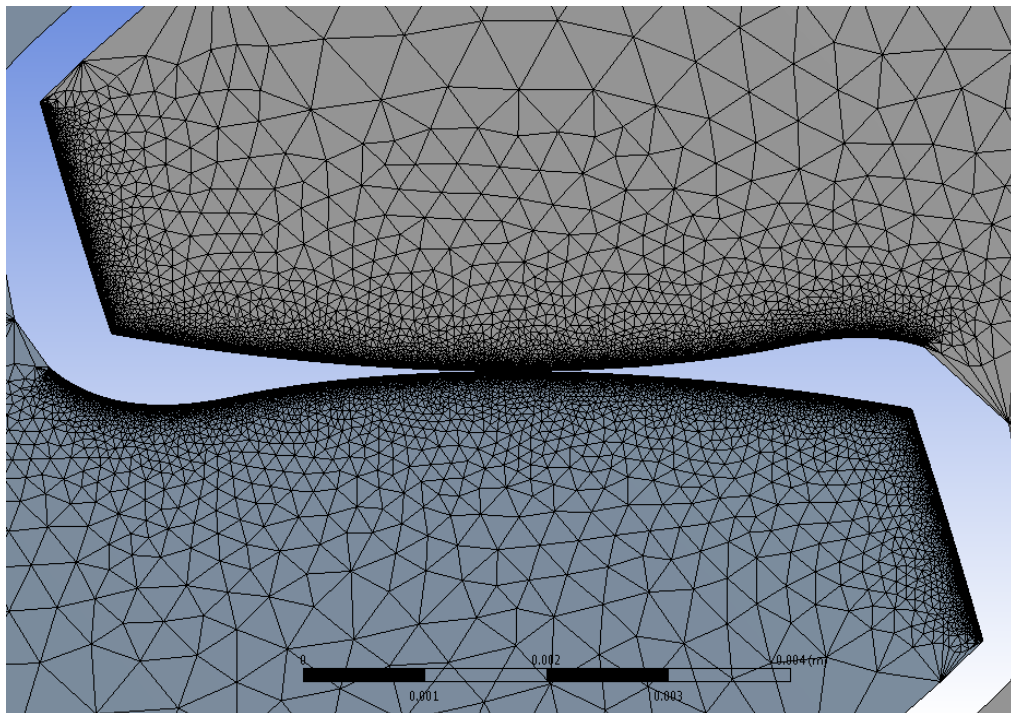


รูปที่ 3.5 การกำหนดโมเดลเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ [19]

เนื่องจากปัญหาทฤษฎีการสัมผัสการกระจายความเค้นที่ผิวสัมผัส ซึ่งเกิดการเสียรูปจะมีค่าสูง ทำให้จำเป็นที่จะต้องแบ่งเอลิเมนต์ในบริเวณนี้ให้มีขนาดเล็ก โดยการใช้คำสั่ง sizing ที่ขอบผิวที่เกิดการสัมผัสและทำการตั้งค่าขนาดเอลิเมนต์ จากการคำนวณค่าความกว้างผิวที่เสียรูป 2b โดยแบบจำลองคณิตศาสตร์พบว่าค่าการเสียรูปมีค่าไม่ต่ำกว่า 0.1 mm ดังนั้นในที่นี้จึงกำหนดให้เอลิเมนต์บริเวณผิวที่เกิดการสัมผัสมีขนาด 0.005 mm ซึ่งมีขนาดเล็กกว่าความกว้างผิวที่เกิดการเสียรูปมาก ทำให้แน่ใจได้ว่าค่าที่คำนวณได้จะมีความถูกต้อง โดยตัวอย่างการแบ่งเอลิเมนต์ของโมเดลฟันเฟืองและจำนวนโหนดและเอลิเมนต์แสดงในรูปที่ 3.6 และการแบ่งเอลิเมนต์โดยละเอียดที่ขอบเฟืองบริเวณที่เกิดการสัมผัสแสดงในรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.6 การแบ่งเอลิเมนต์ของโมเดลฟันเฟืองและจำนวนเอลิเมนต์และโหนด [19]



รูปที่ 3.7 การแบ่งเอลิเมนต์ที่ขอบที่เกิดการสัมผัส [19]

### 3.5 การเลือกลักษณะการสัมผัส

ปัญหาของแข็งที่อยู่ในสมดุลกลส่วนใหญ่จะเป็นในลักษณะวัตถุชิ้นเดียวที่วางอยู่บนจุดรองรับ หรือถูกยึดติดแล้วมีแรงภายนอกมากระทำ แต่ถ้าพิจารณาเป็นระบบของวัตถุที่มีการสัมผัสกัน คำสั่งนี้ ถึงจะปรากฏขึ้น โดยผู้ใช้งานสามารถเลือกกว่าวัตถุใดเป็นวัตถุที่เข้าชนและวัตถุที่ถูกชน นอกจากนั้นยังสามารถเลือกว่าลักษณะการสัมผัสของผิววัตถุเป็นไปในลักษณะใดซึ่งรายละเอียดของแต่ละผิวสัมผัส สามารถกล่าวได้ดังนี้

- |               |   |
|---------------|---|
| Bonded        | - กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนที่ประกบกันเชื่อมติดกัน และไม่สามารถแยกจากกันหรือ ทับซ้อนกันได้ |
| No Separation | - กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถเลื่อนไถลได้ แต่ไม่สามารถแยกออกจากกันหรือทับซ้อนกันได้    |
| Rough         | - กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันได้แต่ไม่สามารถเลื่อนไถลได้                   |

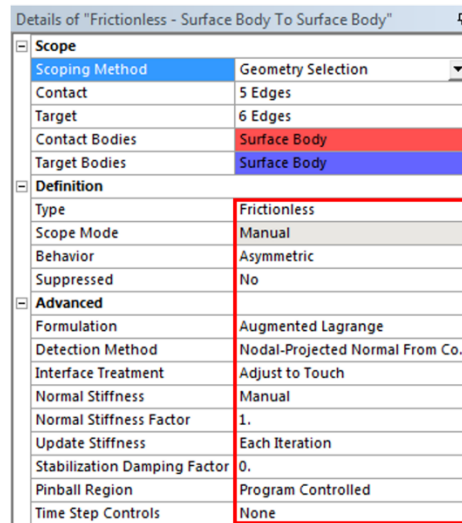
Frictionless	- กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันหรือเลื่อนไถลได้ แต่ไม่ทับซ้อนกัน
Frictional	- กำหนดให้ผิวสัมผัสของชิ้นส่วนสามารถแยกออกจากกันหรือเลื่อนไถลได้ถ้ามีแรงกระทำมากกว่าแรงเสียดทานสถิต

โดยการกำหนดรูปแบบการสัมผัสแบบ Bonded และ No Separation ที่กำหนดให้ผิวสัมผัสเชื่อมติดกันจะทำให้พฤติกรรมโครงสร้างของวัตถุเป็นแบบเชิงเส้น ส่วนในกรณีการสัมผัสอื่นๆ ที่เหลือพฤติกรรมโครงสร้างของวัตถุจะเป็นแบบไม่เชิงเส้น โดยลักษณะของแต่ละผิวสัมผัสตามที่ได้กล่าวไว้สามารถเขียนสรุปดังตารางที่ 3.2 โดยกรณีผิวสัมผัสที่ถูกเชื่อมติดกันไม่สามารถแยกออกจากกันได้หมายถึงช่องว่างระหว่างชิ้นส่วนปิด ส่วนกรณีที่ผิวสามารถแยกออกจากกันได้หมายถึงช่องว่างเปิด

ตารางที่ 3.2 ชนิดและพฤติกรรมของการสัมผัสแบบต่างๆ

ลักษณะการสัมผัส	ช่องว่างระหว่างชิ้นส่วน	ความสามารถในการเลื่อนไถล
Bonded	ปิด	ไม่สามารถ
No Separation	ปิด	สามารถ , $\mu = 0$
Rough	เปิด	ไม่สามารถ , $\mu = \infty$
Frictionless	เปิด	สามารถ , $\mu = 0$
Frictional	เปิด	สามารถ , ถ้า $F_{sliding} > F_{friction}$

เพื่อจำลองปัญหาพื้นเฟืองที่ถูกขบอัดกัน ณ เวลาใกล้เคียงสถานะหยุดนิ่ง โดยไม่พิจารณาผลของแรงเสียดทานตามทฤษฎีการสัมผัสของเอิร์ตซ์ ในงานวิจัยนี้จึงได้เลือกให้ผิวสัมผัสบนหน้าพื้นเฟืองเป็นแบบ Frictionless และเพื่อจัดให้โมเดลเฟืองทั้งคู่สัมผัสกันพอดี จึงเลือกให้โปรแกรมปรับให้โมเดลเกิดการสัมผัสโดยใช้คำสั่ง Adjust to Touch นอกจากนั้นเนื่องจากปัญหาการสัมผัสของเฟืองเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงตั้งให้โปรแกรมมีการคำนวณซ้ำโดยใช้คำสั่ง Update Stiffness – Each Iteration และคำสั่งอื่นๆ ตั้งค่าตามรูปที่ 3.8



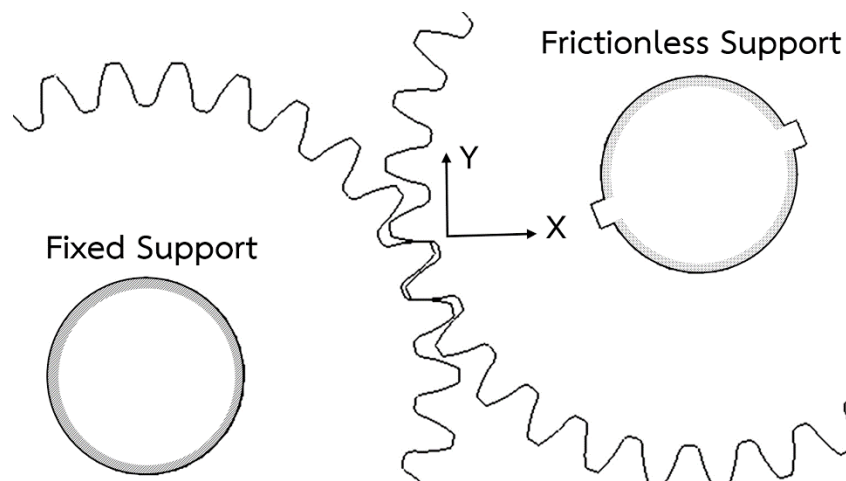
รูปที่ 3.8 การติดตั้งโปรแกรมขั้นตอนการเลือกลักษณะการสัมผัส [19]

### 3.6 การเลือกรูปแบบจุดรองรับ

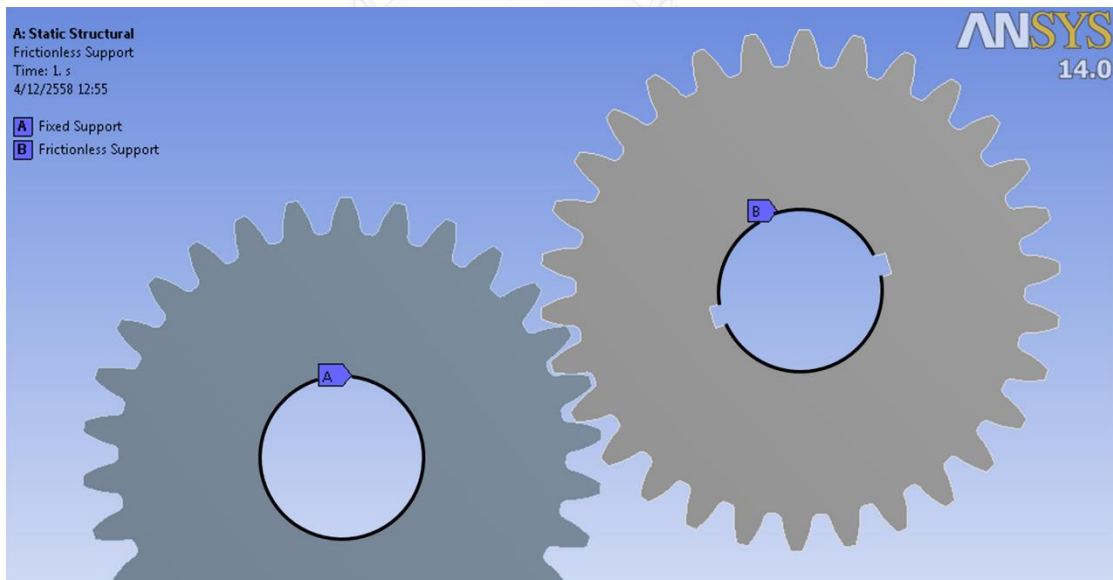
ในการแก้ปัญหาของแข็งที่มีความจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ซึ่งการกำหนดจุดรองรับบนวัตถุก็เป็นรูปแบบหนึ่งโดยกำหนดค่าเคลื่อนตัวที่จุดต่อ (Node) ในระบบสมการรวม รูปแบบจุดรองรับที่สามารถเลือกได้ สามารถกล่าวได้พอสังเขปดังนี้

- Fixed Support - กำหนดให้บริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ทุกองศาอิสระ
- Displacement - กำหนดให้บริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในองศาอิสระที่เลือก
- Frictionless Support - กำหนดให้บริเวณที่เลือกไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ในแนวตั้งฉากกับพื้นผิว

เพื่อกำหนดจุดรองรับปัญหาการสัมผัสกันของเฟือง ดังแสดงรูปขยายเน้นส่วนจุดรองรับของปัญหาในรูปที่ 3.9 ในที่นี้จึงกำหนดจุดรองรับตามปัญหาดังกล่าวโดยติดตั้งจุดรองรับแบบ Fixed Support (แถบ A) ที่ผิวรูเพลลาของเฟืองตาม และกำหนดจุดรองรับแบบ Frictionless Support (แถบ B) ที่ผิวรูเพลลาของเฟืองขั้วยกเว้นในบริเวณร่องลิ้นทั้งสองในโปรแกรม ANSYS โดยแสดงขอบที่กำหนดจุดรองรับตามที่กล่าว โดยแสดงเน้นเป็นเส้นหนาในรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.9 จุดรองรับที่กำหนดในปัญหา



รูปที่ 3.10 การใส่ Fixed Support ที่รูเพลลาเฟืองตามและ Frictionless Support ที่รูเพลลาเฟืองขั้วในโปรแกรม ANSYS [19]

### 3.7 การเลือกรูปแบบภาระ

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนอกจากรูปแบบรองรับแล้ว อีกวิธีที่เหลือก็คือการกำหนดรูปแบบภาระ รูปแบบภาระที่สามารถกำหนดได้ในโปรแกรม สามารถกล่าวได้พอสังเขปดังนี้

Pressure	- กำหนดให้บริเวณที่เลือกมีความดันกระทำ
Force	- กำหนดให้บริเวณที่เลือกถูกแรงกระทำ
Moment	- กำหนดให้บริเวณที่เลือกมีโมเมนต์กระทำ

เนื่องจากในการศึกษาการสัมพันธ์กันของเฟืองตรงได้พิจารณาให้ปัญหาเป็นแบบสองมิติ ดังนั้นในที่นี้จึงได้ใส่แรงต่อหนึ่งหน่วยความยาวที่มีขนาดสมมูลกับแรงบิด 250 N-m ที่ตำแหน่งร่องลิ้มทั้งสองของเฟืองขับตาม การใส่แรงของปัญหาแสดงในรูปที่ 3.11 โดยขยายเน้นในส่วนร่องลิ้มที่ใส่แรง ซึ่งการคำนวณแรงที่ใส่แสดงได้ดังต่อไปนี้

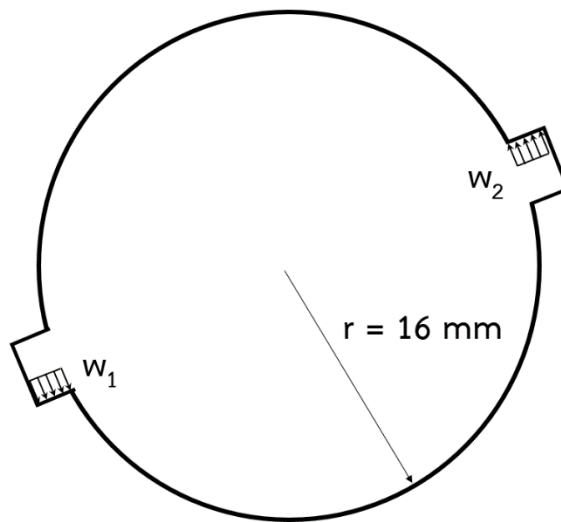
แรงบิด 250 N-m ที่กระทำ มีค่าเทียบเท่ากับผลคูณของแรงสมมูลกับระยะห่างระหว่างแรงทั้งสอง ซึ่งวัดจากกึ่งกลางของร่องลิ้มหนึ่งไปยังอีกร่องลิ้มหนึ่ง ซึ่งคิดเป็นระยะ 32 mm จากความสัมพันธ์นี้จะสามารถหาขนาดแรงสมมูลได้จาก

$$F = \frac{\tau}{r} = \frac{250 \text{ N-m}}{32 \times 10^{-3} \text{ m}} = 7812.5 \text{ N}$$

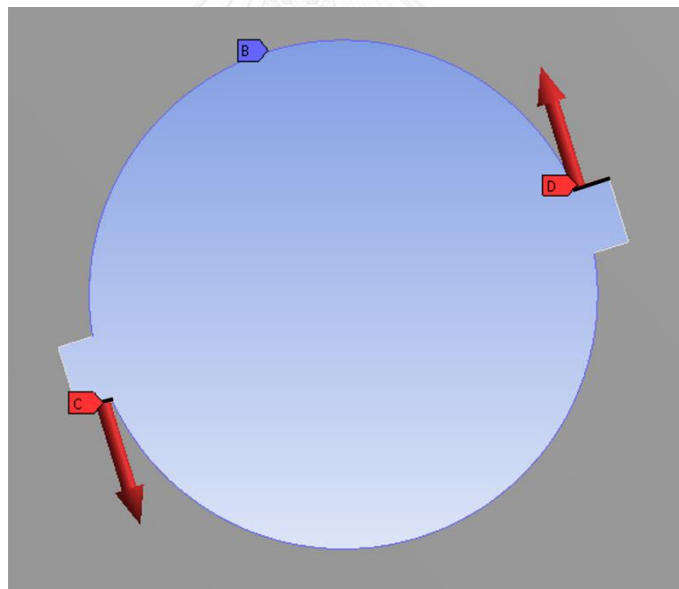
แรงสมมูลที่คำนวณข้างต้น เป็นแรงรวมที่กระทำบนพื้นที่รับแรงของร่องลิ้ม เนื่องจากพิจารณาปัญหาเป็นแบบ 2 มิติ ทำให้แรงที่ใส่เข้าไปในโปรแกรมต้องเป็นแรงต่อความยาวร่องลิ้ม ซึ่งสามารถคำนวณได้จากการนำเอาแรงสมมูลหารด้วยความกว้างหน้าฟันของเฟือง ซึ่งมีค่า 20 mm ดังนี้

$$w_1 = w_2 = \frac{7812.5 \text{ N}}{20 \times 10^{-3} \text{ m}} = 390625 \text{ N/m}$$

แรงต่อความยาวที่คำนวณได้จะถูกใส่ลงในโปรแกรมด้วยคำสั่ง Force ที่ตำแหน่งขอบของสองร่องลิ้มของรูเฟืองขับ (แถบ C และ D) ดังแสดงขอบผิวที่ใส่แรงกระทำโดยเน้นขอบด้วยเส้นหนาในโปรแกรม ANSYS ในรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.11 แรงกระจายบนขอบร่องลิ้มทั้งสองที่กำหนดในปัญหา

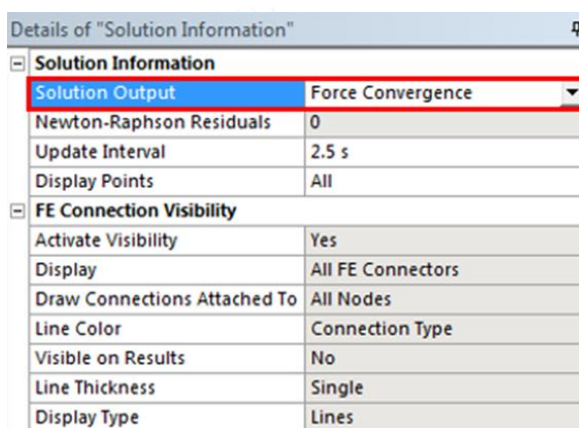


รูปที่ 3.12 การเลือกขอบผิวที่ใส่แรงบริเวณร่องลิ้มทั้งสองของเฟืองขับในโปรแกรม ANSYS [19]



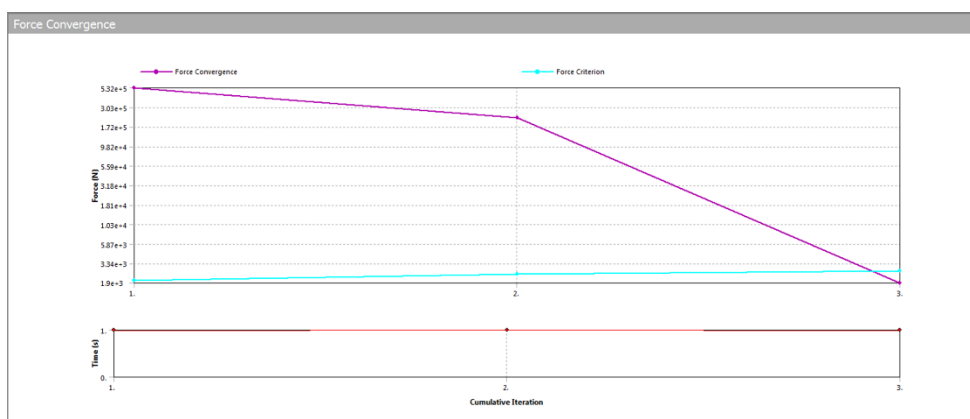
### 3.8 การคำนวณผลลัพธ์

เนื่องจากปัญหาการสัมผัสเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกและค่าเคลื่อนตัวเป็นแบบไม่เชิงเส้น ดังนั้นในที่นี้จึงต้องตั้งโปรแกรมให้มีการคำนวณแบบทำซ้ำ ดังแสดงในรูปที่ 3.8 โดยในขั้นแรกจะต้องใส่ค่า Normal Stiffness Factor เริ่มต้นเสียก่อน ค่า Stiffness นี้จะมีการปรับค่าทุกครั้งที่มีการทำซ้ำ จนกว่าจะเกิดการลู่เข้าของแรง นอกจากนี้เมื่ออยู่ในขั้นตอนการคำนวณ สามารถเลือกเพื่อดูขั้นตอนของการทำซ้ำว่าการคำนวณกำลังลู่เข้า (Convergence) หรือไม่ โดยกดไปที่ Solution → Solution Information และปรับที่ Solution Output เป็น Force Convergence ดังแสดงในรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 การปรับค่าการแสดงผลของผลลัพธ์ [19]

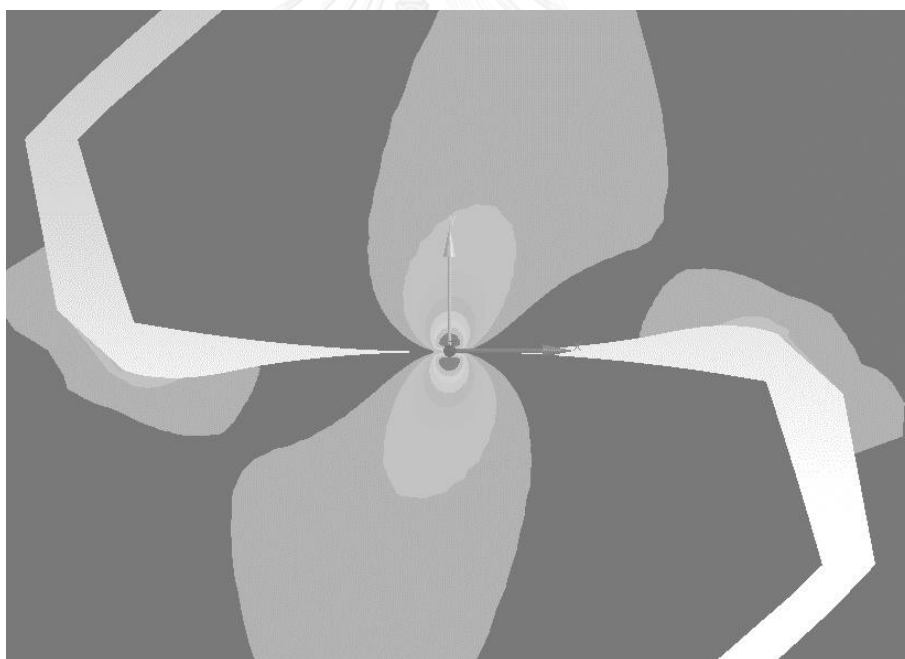
โดยโปรแกรมจะแสดงขั้นตอนและจำนวนครั้งการทำซ้ำของการคำนวณที่แสดงการลู่เข้าของแรงภายนอกและแรงภายในดังแสดงในรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 การลู่เข้าของแรง [19]

### 3.9 การเลือกดูผลลัพธ์

จากความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในของแข็ง ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการจะได้คำตอบในรูปค่าเคลื่อนตัวในแกน X Y และ Z ที่จุดต่อต่างๆ ซึ่งทำให้สามารถหาค่าความเครียดและความเค้นในจุดต่อใดๆ ได้ นอกจากนี้เมื่อทราบสภาวะความเครียดและความเค้นของจุดต่อใดๆ ทำให้สามารถหาค่าความเครียดและความเค้นหลักรวมถึงความเค้นพอนมิสเชสในลำดับถัดมาได้อีกด้วย จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าโปรแกรมจะสามารถแสดงผลได้มากมายหลายประเภท เช่น การเสียรูป (Deformation) ความเครียดต่างๆ ความเค้นต่างๆ ฯลฯ โดยโปรแกรมจะแสดงผลออกมาเป็นลักษณะของเฉดสีไล่ตามเฉดจากค่ามาก (สีเข้มบริเวณจุดสัมผัส) ไปค่าน้อย (สีอ่อนบริเวณข้างเคียง) บนผิวของโมเดลดังแสดงในรูปที่ 3.15 โดยในงานศึกษานี้ได้ประกอบเฟืองให้แนวแรงกดอยู่ในแนวเดียวกับแกน Y



รูปที่ 3.15 ผลลัพธ์ในปัญหาของแข็งในรูปของเฉดสี

### 3.10 สรุป

บทนี้กล่าวถึงการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป ANSYS ในการแก้ปัญหาการสัมผัสกันของพื้นผิว พร้อมทั้งสมมุติฐานต่างๆ ได้แก่ การพิจารณาการกระจายแรงตลอดหน้าพื้นเป็นแบบสม่ำเสมอและเป็นปัญหาความเครียดในระนาบ ผิวหน้าพื้นผิวไม่มีการทำผิวคราบน้ำมัน พิจารณาการขบกันของเฟืองที่ ณ เวลาใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง ซึ่งช่วยลดความซับซ้อนของปัญหาและช่วยลดระยะเวลาในการคำนวณลง โดยกล่าวถึงการสร้างโมเดลการขบกันของพื้นผิวและการตั้งโปรแกรมตามเงื่อนไขขอบเขตและสภาวะการทดลองต่างๆ โดยภาพรวม



## บทที่ 4

### ผลการคำนวณความเค้น

ตามที่ได้กล่าวถึงพื้นฐานการคำนวณความเค้นโดยผลเฉลยของเฮิร์ตซ์และวิธีการคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทก่อนหน้า ในบทนี้จะนำวิธีการดังกล่าวมาคำนวณปัญหาการสัมผัสกันของฟันเฟืองจริงและเพื่อตรวจสอบความถูกต้องของวิธีการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการสัมผัสกันของเฟืองตรง ในที่นี้จึงทดลองประยุกต์ใช้วิธีการดังกล่าวกับปัญหาอย่างง่ายของการกดกันของจานครึ่งวงกลมก่อน และนำผลไปเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์

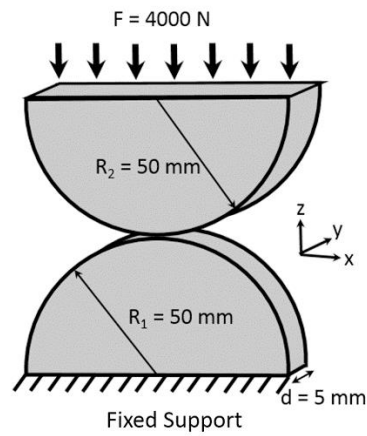
เมื่อตรวจสอบความถูกต้องแล้ว ต่อมาจึงนำวิธีการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการขบกันของเฟืองต่างๆ และเปรียบเทียบผลลัพธ์กับผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ต่อไป นอกจากการคำนวณความเค้นแล้ว ในบทนี้ยังได้กล่าวถึงผลของอัตราส่วนการแบ่งแรงระหว่างช่วงการขบของฟันเฟืองสองคู่ฟันและความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองต่างๆ กับอัตราส่วนการแบ่งแรงด้วยรวมถึงผลวิจัยของผู้วิจัยอื่นๆ

#### 4.1 การกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องในการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาการสัมผัสในเบื้องต้นจึงได้ทดลองใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการกดกันของจานครึ่งวงกลมก่อน ดังแสดงในรูปที่ 4.1 เนื่องจากปัญหานี้มีผลเฉลยจากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และสามารถนำมาเปรียบเทียบเพื่อประเมินความถูกต้องของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ สำหรับเงื่อนไขของปัญหาการกดกันของจานครึ่งวงกลมแสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 เงื่อนไขการทดลองของปัญหาอย่างง่ายของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน

รัศมีของจานครึ่งวงกลม (mm)	50
ความกว้างจาน (mm)	5
อัตราส่วนปัวซอง	0.3
ค่ายังโมดูลัส (GPa)	200
แรงภายนอก (N)	4000



รูปที่ 4.1 แผนภาพของปัญหาอย่างง่ายของการกดกันของจานครึ่งวงกลม 2 อัน

การวิเคราะห์ปัญหาการกดกันของจานโดยใช้ทฤษฎีการสัมผัสของเฮริตซ์

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่าจะสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีของเฮริตซ์กรณีคล้ายทรงกระบอก 2 อันกดกัน จากสมการที่ 2.21 จะได้

$$\Delta = \frac{2R_1R_2}{(R_1 + R_2)} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)$$

$$\Delta = \frac{2 \times (50 \times 10^{-3})^2}{(2 \times 50 \times 10^{-3})} \left( 2 \times \left( \frac{1-0.3^2}{200 \times 10^9} \right) \right)$$

$$\Delta = 4.55 \times 10^{-13} \text{ m}^3 / \text{N}$$

จากสมการที่ 2.20 จะสามารถหาค่าระยะที่จานกดกัน  $b$  ได้จาก

$$b = \sqrt{\frac{2w\Delta}{\pi}}$$

$$b = \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 4.55 \times 10^{-13}}{\pi \times 5 \times 10^{-3}}}$$

$$b = 0.4814 \text{ mm}$$

เมื่อหาค่า  $b$  จะสามารถหาความเค้นหลักในแกน X Y และ Z ที่ผิวได้จากสมการที่ 2.22 ได้ดังนี้

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{-b}{\Delta} \quad \sigma_2 = \sigma_y = -2\nu \left( \frac{b}{\Delta} \right) \quad \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-b}{\Delta}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x = \sigma_3 = \sigma_z = \frac{-4.8138 \times 10^{-4}}{4.55 \times 10^{-13}} = -1058 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = -2 \times 0.3 \times \left( \frac{4.8138 \times 10^{-4}}{4.55 \times 10^{-13}} \right) = -634.8 \text{ MPa}$$

และสามารถหาความเค้นพอนมิสเชสที่ผิวสัมผัสได้จากสมการที่ 2.24

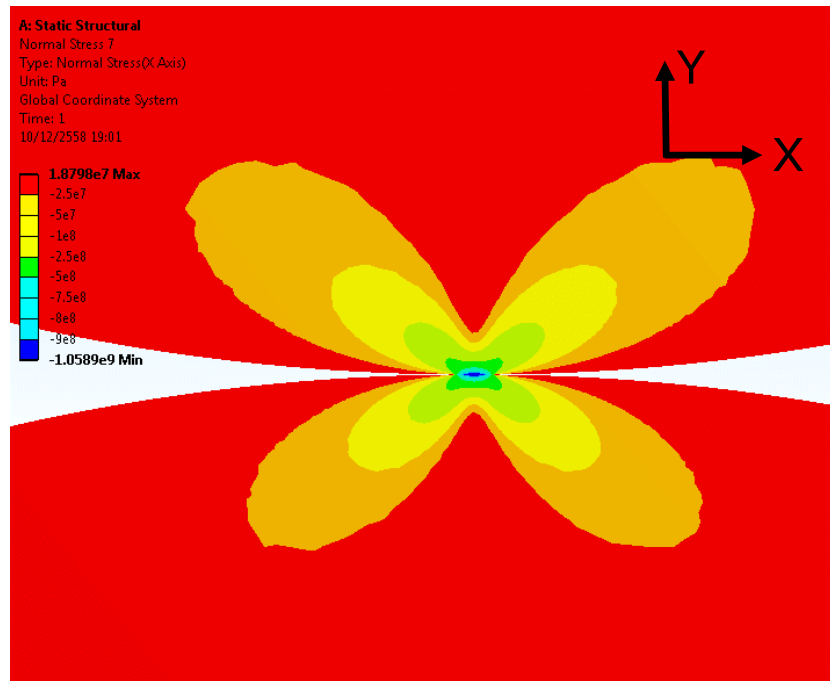
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}$$

$$\sigma = 423.2 \text{ MPa}$$

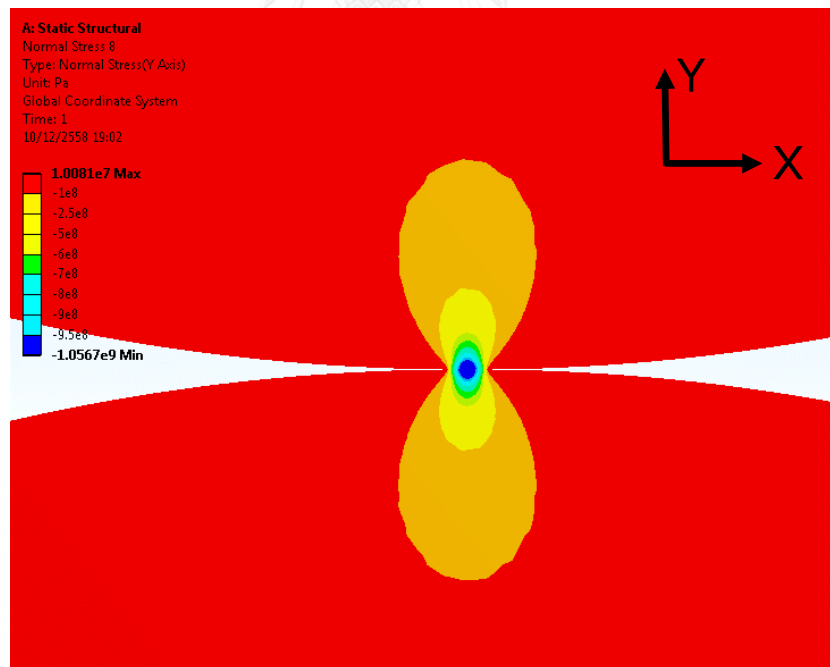
การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการสัมผัสของจานครึ่งวงกลม

ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทำได้โดยตั้งค่าโปรแกรมให้ตรงกับเงื่อนไขการทดลองตามดังรูปที่ 4.1 โดยตั้งค่าคุณสมบัติของวัสดุตามเงื่อนไขการทดลองและใส่แรงขนาด 4000 N บนผิวสี่เหลี่ยมด้านบนของจานครึ่งวงกลมบนและตั้ง Fixed Support ที่ผิวสี่เหลี่ยมของจานครึ่งวงกลมล่าง นอกจากนั้นยังตั้งลักษณะการสัมผัสระหว่างผิวโค้งเป็นแบบ Frictionless

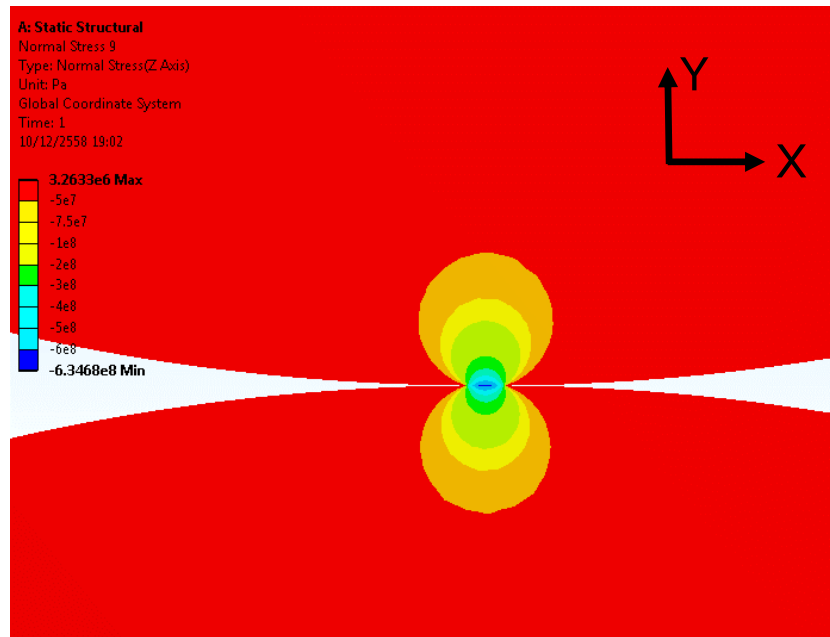
ผลการคำนวณต่างๆ สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.2-4.6 โดยแถบสี Contour ในแต่ละรูปแสดงระดับของค่าความเค้นที่เกิดขึ้น โดยบริเวณที่มีสีเข้มที่ตำแหน่งผิวสัมผัสแสดงว่ามีค่าความเค้นมากในกรณีของความเค้นพอนมิสเชส ส่วนค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z จะมีค่าน้อยที่สุด (ติดลบ) เนื่องจากเป็นความเค้นกด โดยแถบสีจะมีสีแตกต่างกันไปตามระดับค่าความเค้นที่เปลี่ยนแปลงไป



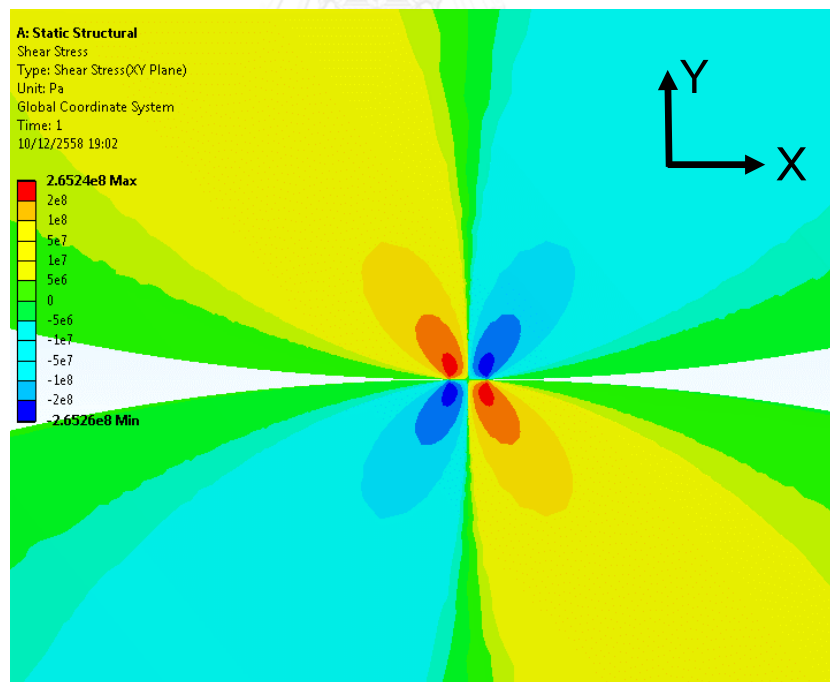
รูปที่ 4.2 รูปแบบความเค้นในแนวแกน X ของการกดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน



รูปที่ 4.3 รูปแบบความเค้นในแนวแกน Y ของการกดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน

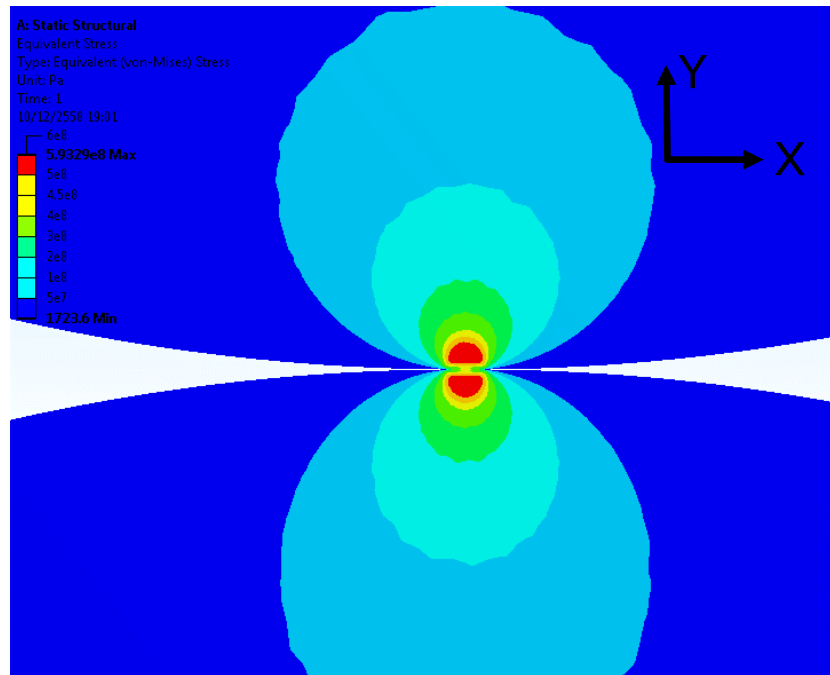


รูปที่ 4.4 รูปแบบความเค้นในแนวแกน Z ของการกดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน



รูปที่ 4.5 รูปแบบความเค้นเฉือน XY ของการกดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน

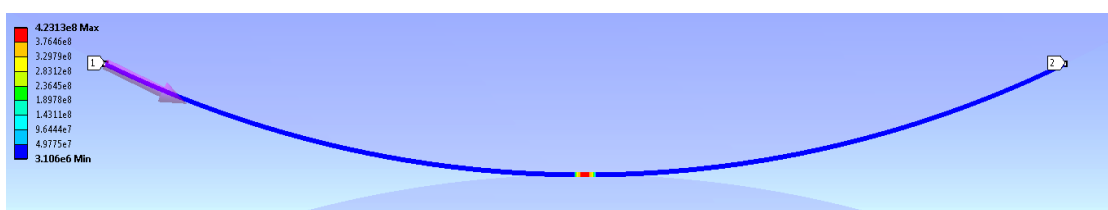




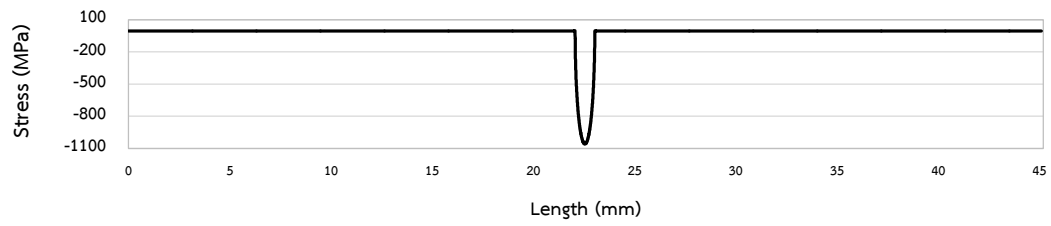
รูปที่ 4.6 รูปแบบความเค้นฟอนมิสเซสของการกอดกันของงานครึ่งวงกลม 2 อัน

ค่าความเค้นในแกนต่างๆ และความเค้นฟอนมิสเซสที่บริเวณขอบผิวสัมผัส สามารถเก็บค่าได้ โดยเลือกขอบผิวที่จะเก็บค่า ดังแสดงตัวอย่างขอบผิวในรูปที่ 4.7 และค่าการกระจายความเค้นที่อ่านได้ในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นเฉือน XY และความเค้นฟอนมิสเซสแสดงในรูปที่ 4.8 (ก) -(จ) ตามลำดับ สำหรับค่าความเค้นที่มากที่สุดในแต่ละทิศทางจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์โดยทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ต่อไป

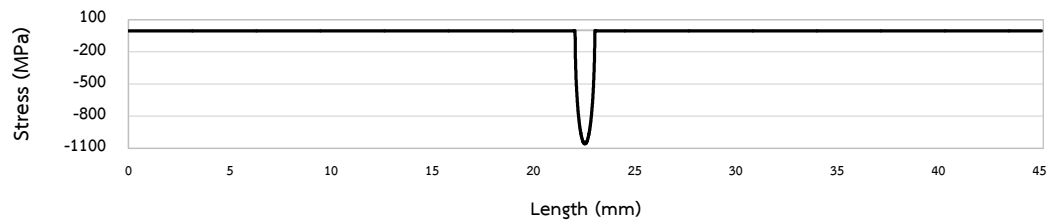
เนื่องจากค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) นั้นไม่สามารถคำนวณจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยตรง เพราะฉะนั้นในที่นี้จะวิเคราะห์ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) โดยพิจารณาจากค่าความเค้นฟอนมิสเซสที่เกิดขึ้นบนขอบของผิวสัมผัส โดยบริเวณที่มีค่าความเค้นฟอนมิสเซสสูงกว่าบริเวณข้างเคียงจะแสดงถึงเป็นบริเวณที่เกิดการกอดกันของวัตถุ ซึ่งความยาวของบริเวณดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบกับค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) ซึ่งคำนวณจากทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ได้



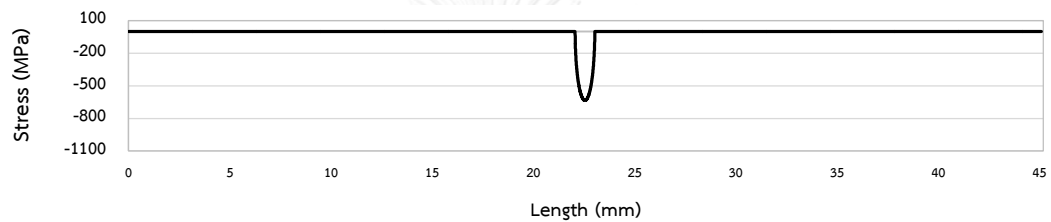
รูปที่ 4.7 บริเวณผิวที่ถูกเลือก



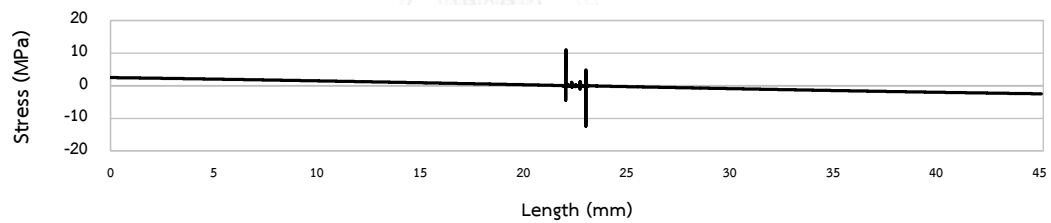
(ก) Normal X



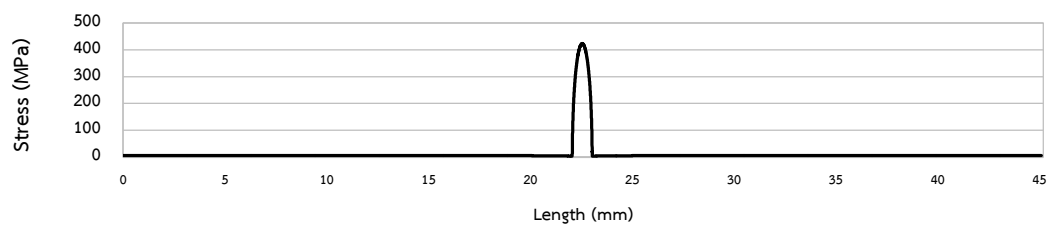
(ข) Normal Y



(ค) Normal Z



(ง) Shear XY

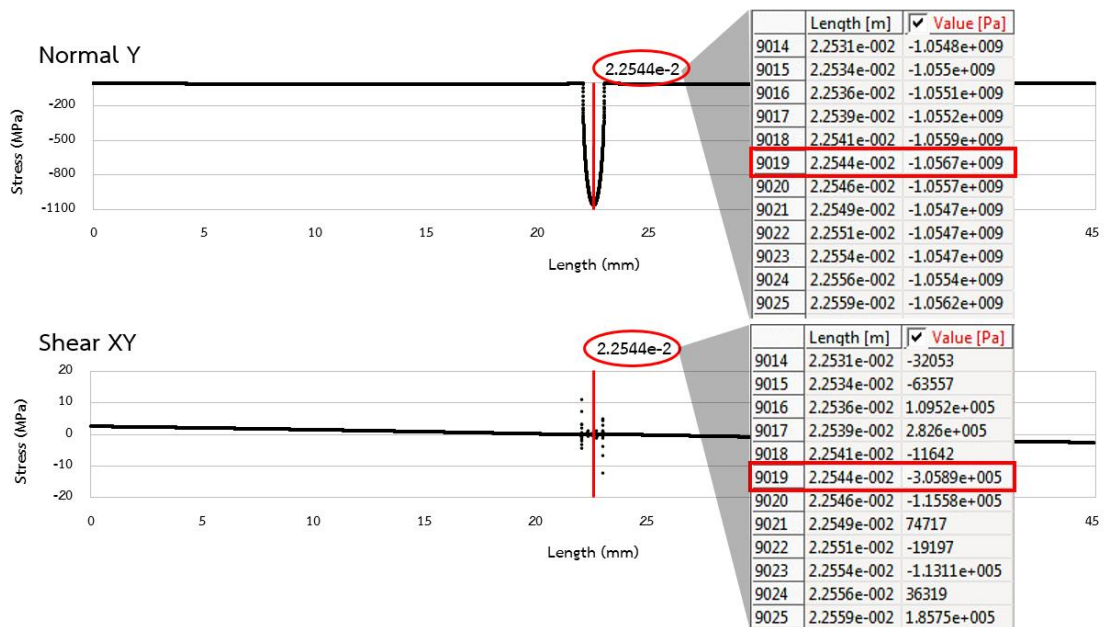


(จ) Von Mises

รูปที่ 4.8 การกระจายค่าความเค้นต่างๆ ของขอบผิวที่ถูกเลือกวัดจากจากจุด 1 ไปยังจุด 2 ของ  
ปัญหาจานกริ่งวงกลมกดกัน

เมื่อเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนที่จุดสัมผัสที่อ่านได้ กับความเค้นในแนวตั้ง (แกน Y) ดังแสดงในรูปที่ 4.9 จะพบว่าในบริเวณนี้ค่าความเค้นเฉือนมีการเปลี่ยนแปลงจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ และที่ตำแหน่งสัมผัสซึ่งความเค้นในแนวตั้งมีขนาดมากที่สุดเท่ากับ  $-1056.7$  MPa ค่าความเค้นเฉือนมีค่าเพียง  $-0.3059$  MPa เท่านั้น ซึ่งมีค่าน้อยกว่าความเค้นในทิศทางแกน Y มาก ค่าที่ได้นี้สอดคล้องกับการคำนวณตามทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ ที่กล่าวว่าความเค้นเฉือนบริเวณจุดสัมผัสจะมีค่าเท่ากับศูนย์ และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับความเค้นในทิศทางอื่นๆ ก็จะได้ผลในทำนองเดียวกัน

ด้วยเหตุที่ความเค้นเฉือนมีค่าน้อย และค่าทางทฤษฎีมีค่าเท่ากับศูนย์ ในที่นี้จึงคำนวณและเก็บเฉพาะค่าความเค้นในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นพอนมิสเชส และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) เท่านั้น



รูปที่ 4.9 ค่าความเค้นในแนวแกน Y และ ค่าความเค้นเฉือน XY บริเวณขอบผิว ณ ตำแหน่งจุดที่เกิดการสัมผัสของจานครึ่งวงกลม

ตารางที่ 4.2 ค่าความเค้นในทิศทางต่างๆ ที่จุดสัมผัส และความกว้างผิวสัมผัสของปัญหาการกดกันของจานครึ่งวงกลม ด้วยวิธีวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ค่าความเค้นต่างๆ	วิธีวิเคราะห์	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	ความแตกต่าง (%)
ความเค้นในแกน X	-1058 MPa	-1059 MPa	0.0945
ความเค้นในแกน Y	-1058 MPa	-1057 MPa	0.0945
ความเค้นในแกน Z	-634.8 MPa	-634.7 MPa	0.0158
ความเค้นพอนมิสเชส	423.2 MPa	423.1 MPa	0.0236
ความกว้างผิวสัมผัสที่ เสี้ยวรูป (2b)	0.9628 mm	0.992 mm	3.0328

ตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเค้นที่คำนวณได้จากทั้งสองวิธีตามที่ได้อธิบายมาข้างต้น จากตารางพบว่า ค่าความเค้นในแกนต่างๆ ค่าความเค้นพอนมิสเชสและความกว้างผิวสัมผัสที่เสี้ยวรูปพบว่ามีความใกล้เคียงกัน จึงเป็นการยืนยันว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้ในการแก้ปัญหาการสัมผัสได้และวิธีการที่ใช้ในการหาค่าความเค้นบนผิวสัมผัสเพียงตรงนั้นมีความถูกต้อง

#### 4.2 ผลการคำนวณในปัญหาการขบกันของเฟืองตรง

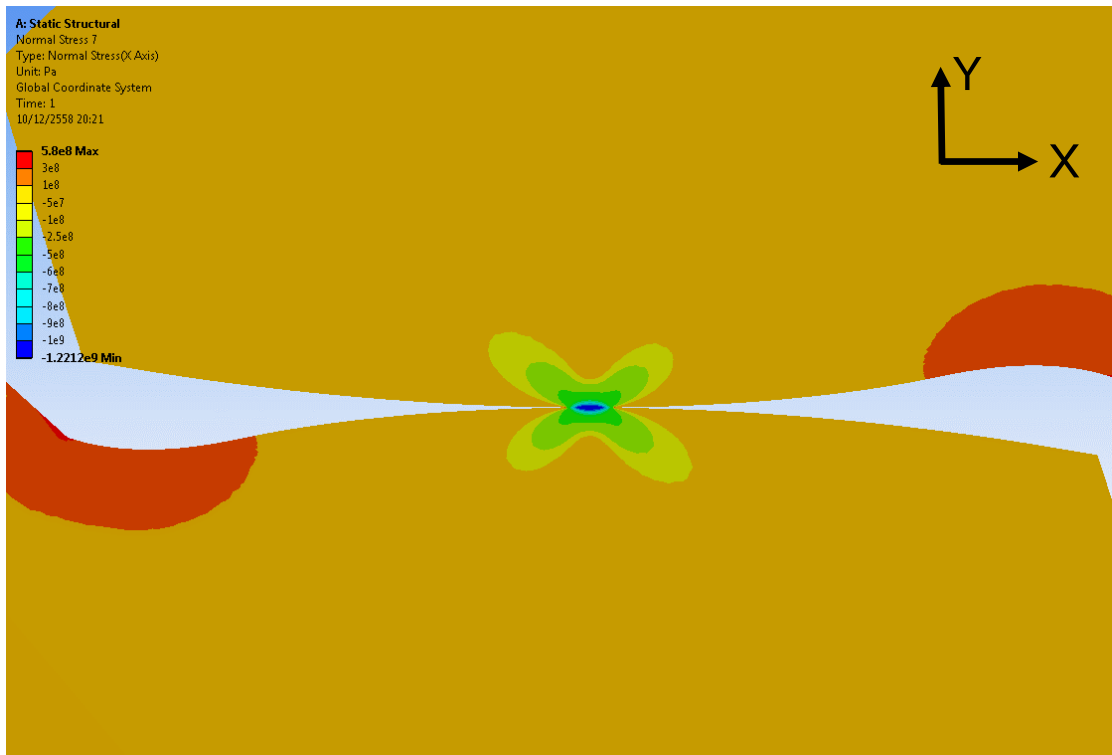
ในงานศึกษานี้ได้ทำการศึกษาปัญหาการสัมผัสเฟืองตรงที่มีอัตราทด 1 : 1 โดยเฟืองมีความกว้างหน้าฟัน 20 mm และทำจากวัสดุ Structural Steel ที่มีค่าอัตราส่วนปัวซอง 0.3 และค่ายังโมดูลัส 200 GPa ภาระที่กระทำกับคู่เฟืองมีค่าเท่ากับ 250 N-m และเพื่อศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ต่ออัตราส่วนการแบ่งภาระบนหน้าฟันเฟือง ในการศึกษาครั้งนี้จึงมีการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ของชุดเฟืองได้แก่ โมดูล มุมกด และจำนวนซี่ฟัน โดยข้อมูลจำเพาะและสภาวะการทำงานของชุดเฟืองสามารถสรุปได้สรุปไว้แล้วในตารางที่ 3.1 และนำมาแสดงอีกครั้งหนึ่งในตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ข้อมูลจำเพาะเฟืองตรงและสภาวะการทำงานที่ใช้ในการคำนวณ

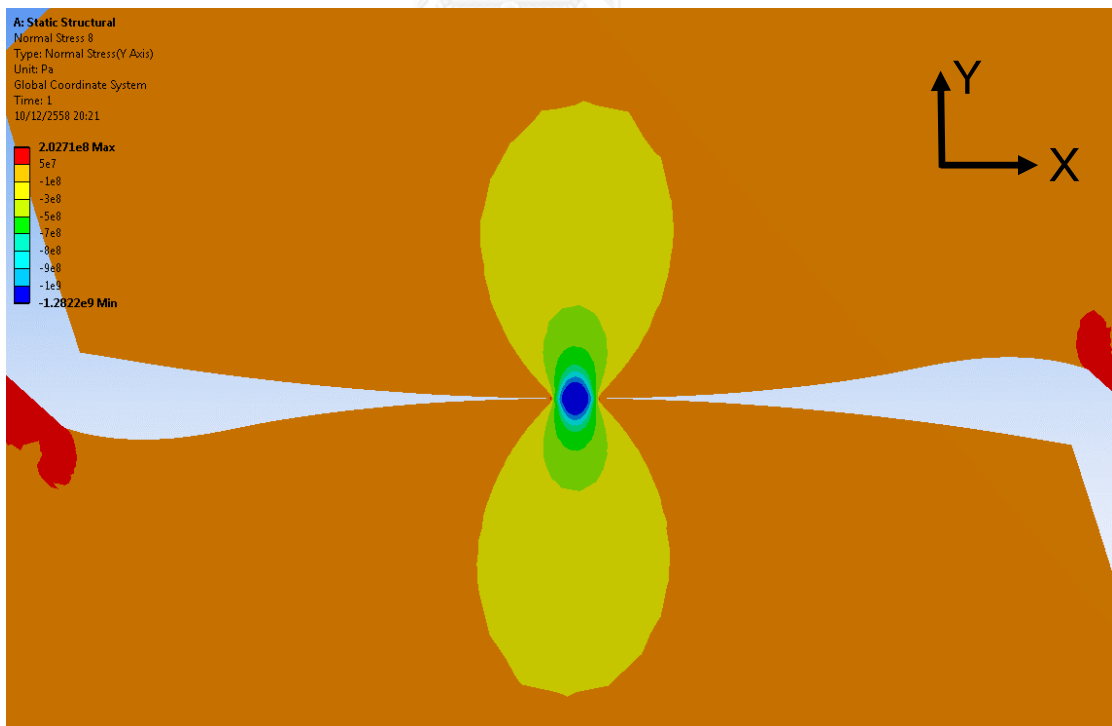
พารามิเตอร์ของเฟือง	ชุดเฟือง								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
จำนวนฟัน (ซี่)	30	30	30	30	30	30	45	60	36
โมดูล (mm)	3	2	4	5	3	3	2	2	2.5
มุมกด (องศา)	20	20	20	20	14.5	25	20	20	20

การคำนวณค่าความเค้นโดยผลเฉลยของเฮิร์ตซ์ที่อัตราส่วนการแบ่งแรงต่างๆ ได้แก่ 33 : 67 45 : 55 และ 50 : 50 จะได้ความเค้นที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ตลอดรอบการขบ ค่าที่ได้นี้จะนำมาเปรียบเทียบกับค่าความเค้นซึ่งหาจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยจะเปรียบเทียบค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นพอนมิสเชส และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป และหาค่าอัตราส่วนการแบ่งภาระขณะเกิดการขบสองคู่ฟันที่เหมาะสมสำหรับเฟืองตรงนั้นๆ โดยในการศึกษาเบื้องต้นด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำคำนวณในลักษณะปัญหาสองมิติก่อน เนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าการพิจารณาเป็นแบบสามมิติ แต่อย่างไรก็ตามในการศึกษานี้ทำการคำนวณโดยพิจารณาเป็นแบบสามมิติด้วยในเฟืองบางชุดเพื่อเป็นการตรวจสอบวิธีการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และเสนอเป็นแนวทางเพื่อไปประยุกต์ใช้กับเฟืองชนิดอื่นๆ ที่มีรูปร่างซับซ้อนกว่าเฟืองตรงต่อไป

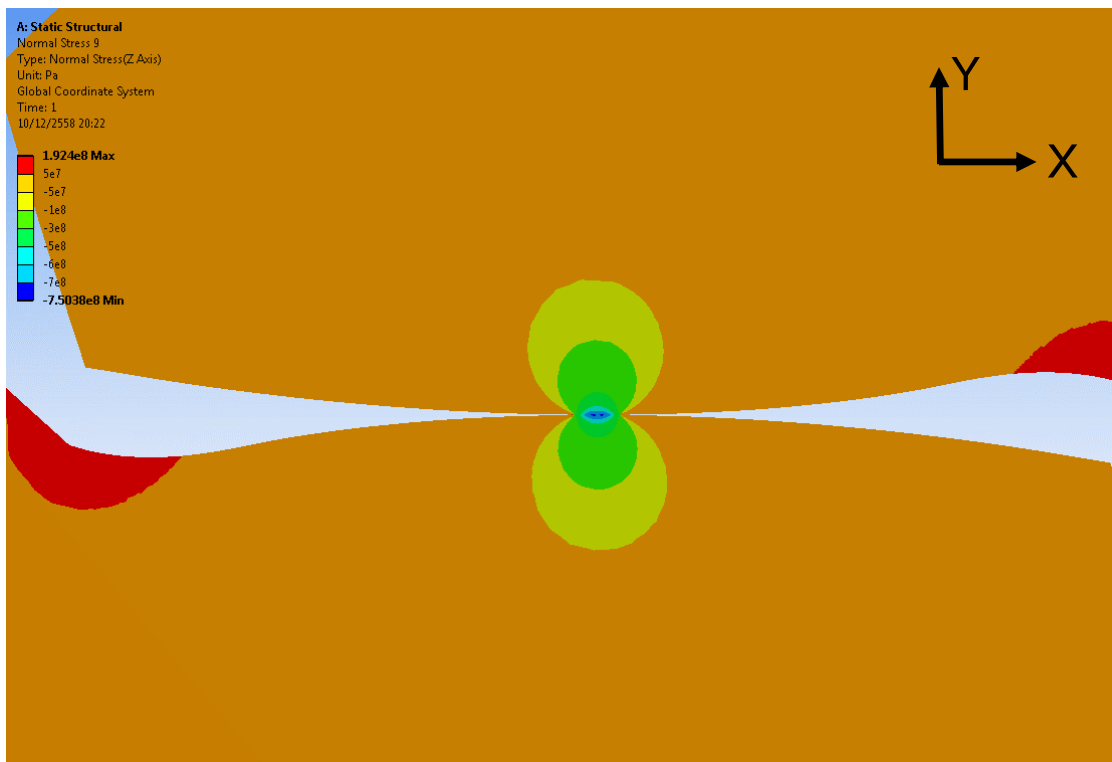
ผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการขบกันของเฟืองตรงทำได้โดยประกอบชุดเฟืองให้มีตำแหน่งการขบตามที่ต้องการในโปรแกรม CATIA แล้วจึงนำเข้าโมเดลชุดเฟืองเข้ามาในโปรแกรม ANSYS หลังจากนั้นจึงตั้งค่าโปรแกรมให้ตรงกับเงื่อนไขการทำงาน โดยตัวอย่างในกรณีของเฟืองชุด A สามารถแสดงได้ดังรูปที่ 4.10-4.14 โดยในแต่ละรูปแสดงถึงแถบสี (Contour) ซึ่งแสดงระดับของค่าความเค้น โดยผลการคำนวณของเฟืองชุดต่างๆ จะแสดงในภาคผนวก ฉ.



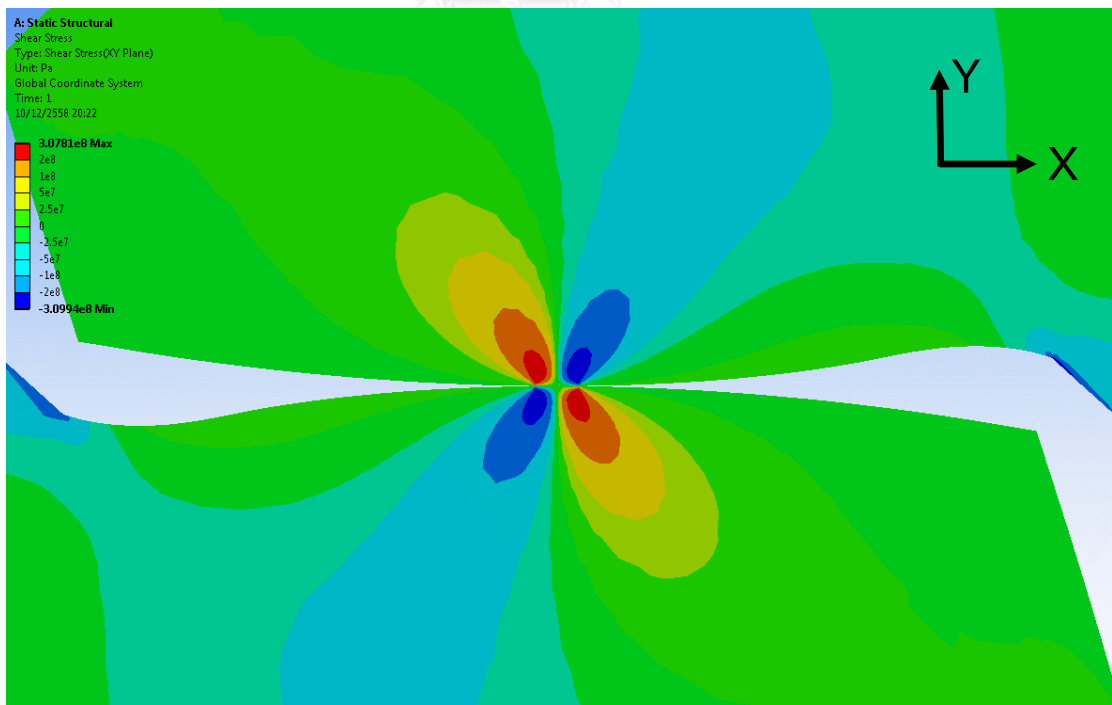
รูปที่ 4.10 รูปแบบความเค้นตึงฉากในแกน X ของการรกดกันของเฟืองตรง



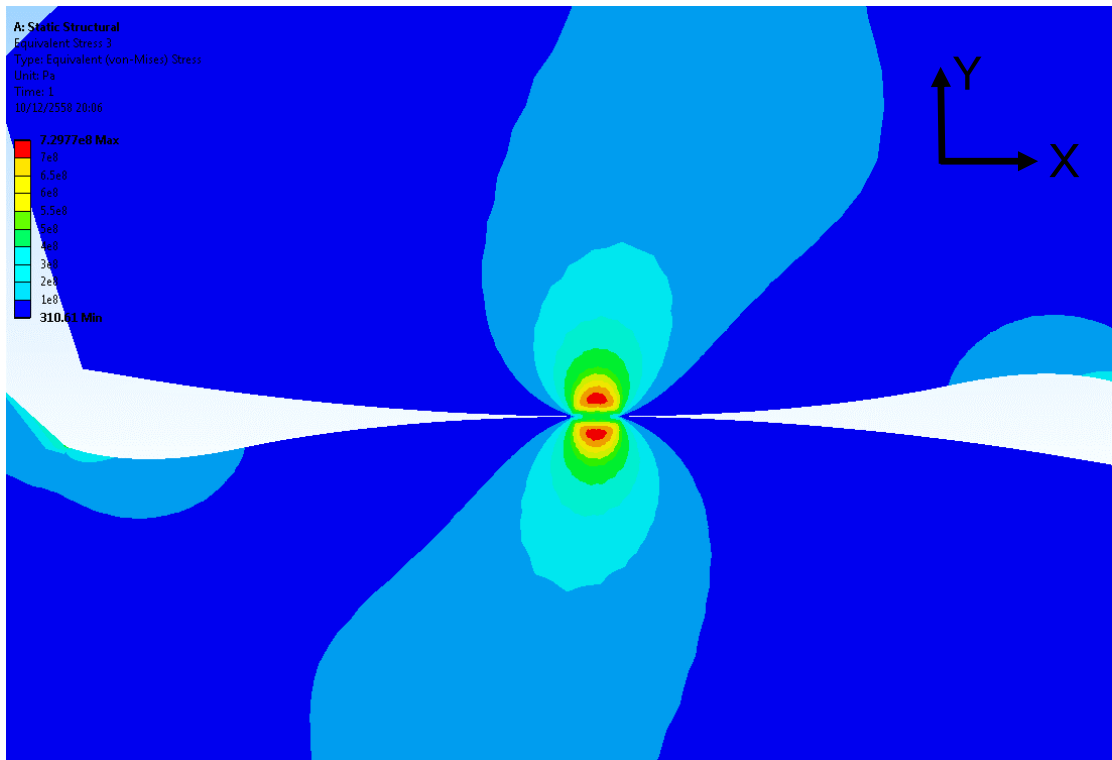
รูปที่ 4.11 รูปแบบความเค้นตึงฉากในแกน Y ของการรกดกันของเฟืองตรง



รูปที่ 4.12 รูปแบบความเค้นตั้งฉากในแกน Z ของการกดกันของเฟืองตรง

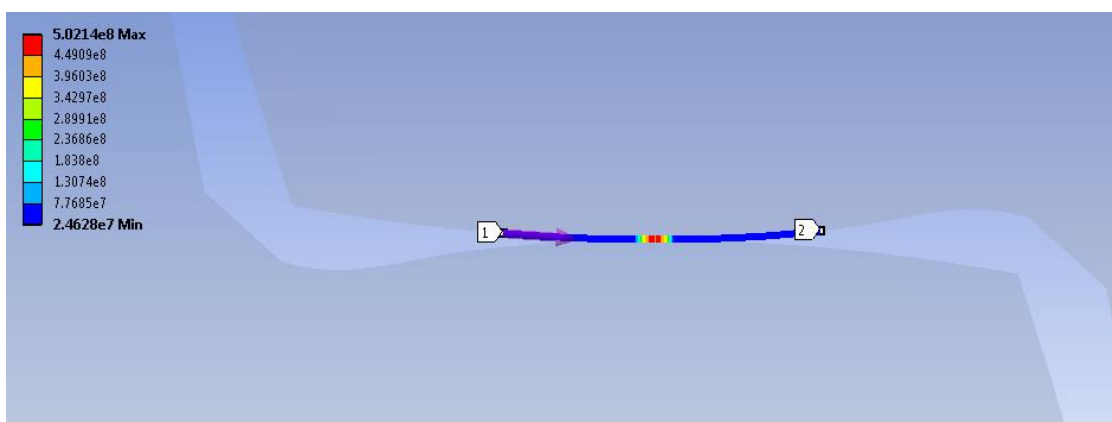


รูปที่ 4.13 รูปแบบความเค้นเฉือน XY ของการกดกันของเฟืองตรง



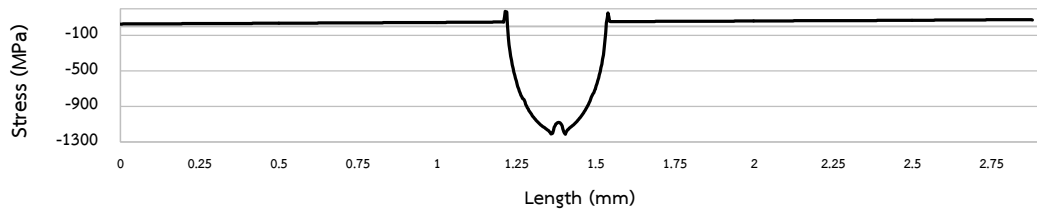
รูปที่ 4.14 รูปแบบความเค้นพอนมิสเสสของการกดกันของเฟืองตรง

นอกจากการแสดงผลโดยรูปแบบแถบสีดังรูปที่ 4.10– 4.14 แล้ว ในที่นี้ยังเก็บข้อมูลค่าความเค้นต่างๆ ได้แก่ ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y และ X ค่าความเค้นเฉือน XY ค่าความเค้นพอนมิสเสส ในบริเวณที่ใกล้กับจุดสัมผัส โดยรูปที่ 4.15 แสดงขอบผิวที่เลือก ส่วนค่าการกระจายค่าความเค้นในแนวแกน X Y Z ความเค้นเฉือน XY ความเค้นพอนมิสเสส และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) ของบริเวณดังกล่าวแสดงในรูปที่ 4.16 (ก)–(จ) ตามลำดับ

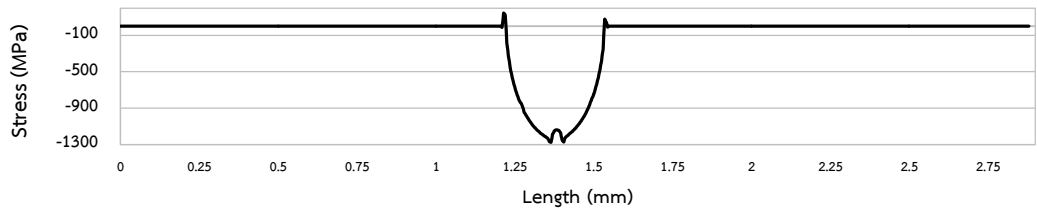


รูปที่ 4.15 ตำแหน่งเก็บค่าความเค้นที่ผิวสัมผัสของการกดกันของเฟืองตรง

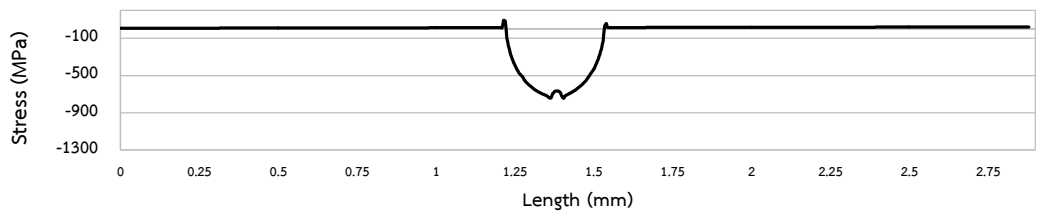




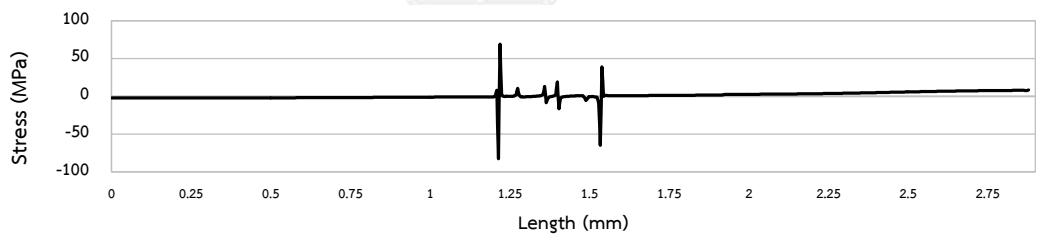
(ก) Normal X



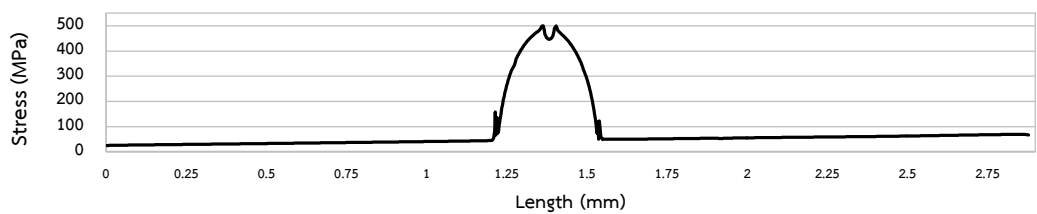
(ข) Normal Y



(ค) Normal Z



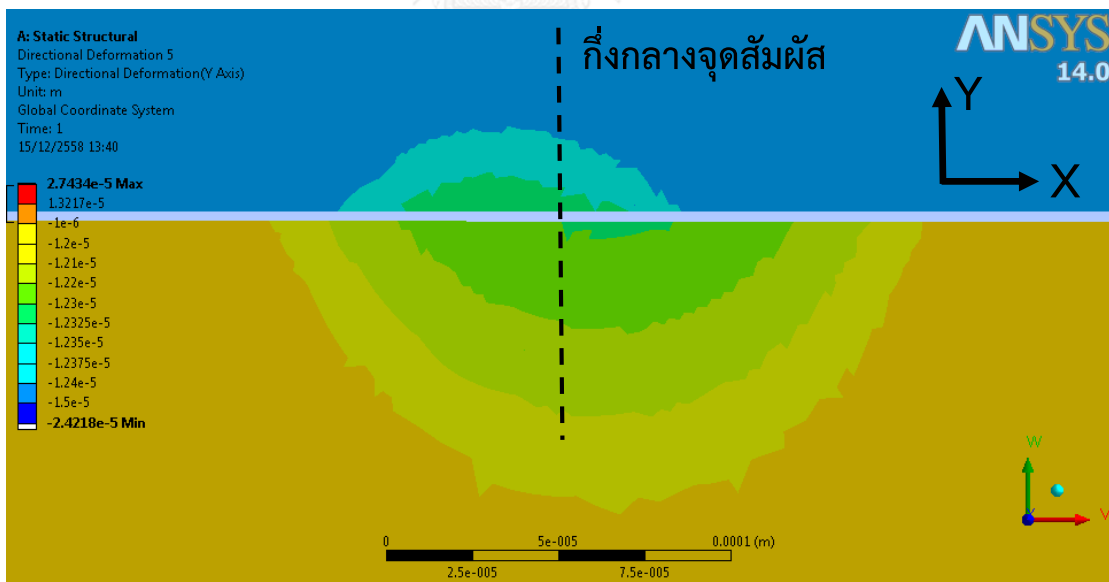
(ง) Shear XY



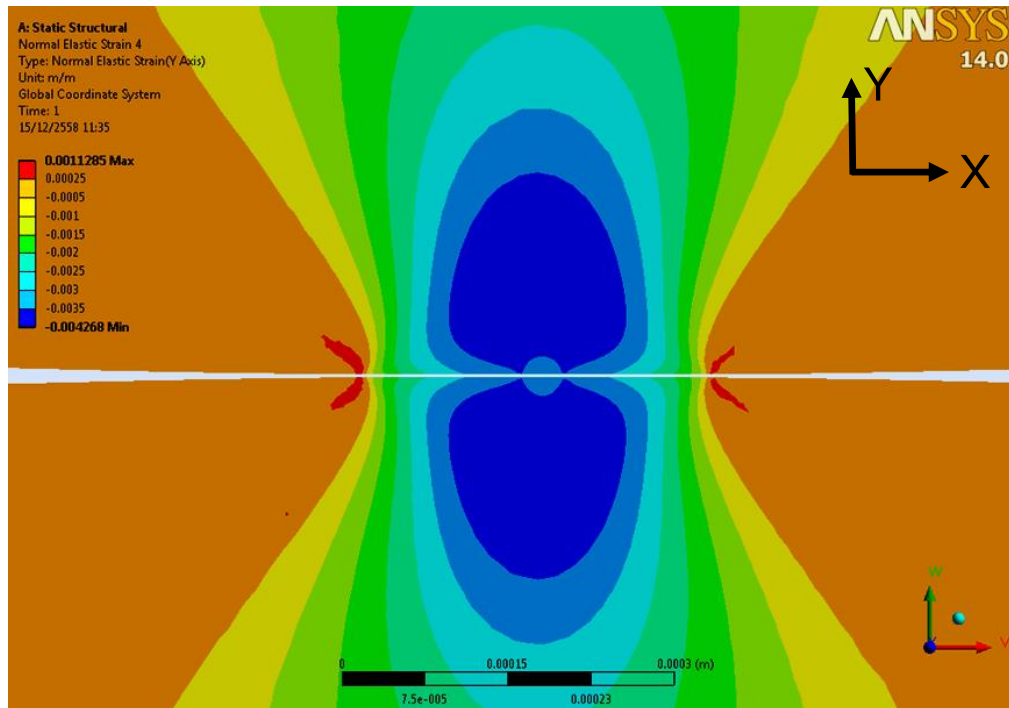
(จ) Von Mises

รูปที่ 4.16 การกระจายค่าความเค้นต่างๆ ของขอบผิวที่ถูกเลือกวัดจากจากจุด 1 ไปยังจุด 2 ของ  
ปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรง

จากรูปที่ 4.16 พบว่าการกระจายความเค้นตั้งฉาก  $X$   $Y$   $Z$  และค่าความเค้นพอนมิสเชสที่บริเวณผิวสัมผัสมีลักษณะเป็นรูปครึ่งวงกลมโดยมีแองโคง์เข้าด้านในที่บริเวณตรงกลาง เมื่อพิจารณาการคำนวณแบบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากในที่นี่พิจารณาปัญหาของแข็งในช่วงที่พฤติกรรมโครงสร้างอยู่ในช่วงขอบเขตการแปรผันตรงจึงไม่เกิดการเสียรูปแบบพลาสติก นอกจากนั้นเมื่อพิจารณาการเสียรูปของเฟืองตรงบริเวณผิวสัมผัสหลังการคำนวณค่าความเค้นไม่พบบริเวณที่โมเดลเฟืองเกิดการทับซ้อนกัน นอกจากนี้เนื่องจากกรณีการขบกันของฟันเฟืองตรงมีลักษณะการสัมผัสระหว่างชิ้นส่วนสองชิ้นที่ไม่สมมาตรกันเหมือนกรณีพื้นฐาน ดังนั้นบริเวณที่เกิดการสัมผัสของฟันเฟืองตรงจึงมีแรงเฉือนเกิดขึ้นด้วย และทำให้เกิดการเสียรูปในแนวแกน  $X$  รวมทั้งทำให้ลักษณะการเสียรูปในแนวแกน  $Y$  ของเฟืองขับและเฟืองตามที่บริเวณสัมผัสไม่สมมาตรกันดังรูปที่ 4.17 โดยตำแหน่งที่มีการเสียรูปมากในทิศทางแกน  $Y$  ของเฟืองขับ (ชิ้นส่วนบน) จะปรากฏในทิศทาง  $-X$  เมื่อเทียบกับกึ่งกลางจุดสัมผัส ส่วนตำแหน่งที่มีการเสียรูปมากของเฟืองตาม (ชิ้นส่วนล่าง) จะปรากฏในทิศทาง  $+X$  เมื่อคำนวณค่าความเครียดที่ตำแหน่งสัมผัสในแนวแกน  $Y$  จากค่าการเสียรูปในแนวแกน  $Y$  ของทั้งเฟืองขับและเฟืองตาม และพิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างคู่เฟือง จึงได้ความเครียดในแนวแกน  $Y$  มีลักษณะโค้งเว้าตามดังรูปที่ 4.18 ซึ่งส่งผลให้เกิดแองโคง์เข้าด้านในที่บริเวณตรงกลางของการกระจายค่าความเค้นในแนวแกนต่างๆ ในรูปที่ 4.16



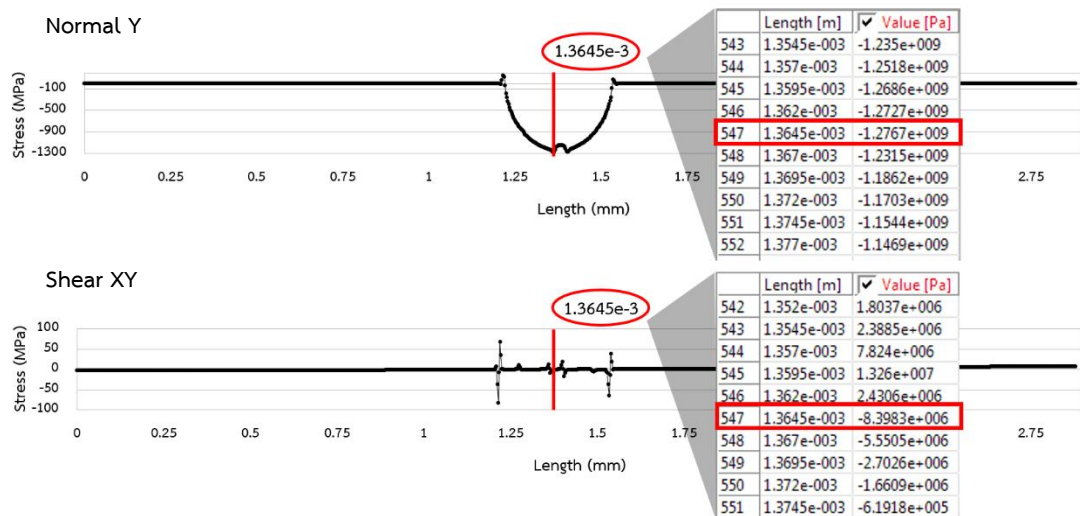
รูปที่ 4.17 ลักษณะการเสียรูปตามแนวแกน  $Y$  ของเฟืองขับและเฟืองตาม



รูปที่ 4.18 ลักษณะค่าความเครียดในแนวแกน Y บริเวณสัมผัส

เมื่อเปรียบเทียบค่าความเค้นเฉือนที่จุดสัมผัสที่อ่านได้ที่บริเวณขอบผิวพื้น กับความเค้นในแนวตั้ง (แกน Y) ดังแสดงในรูปที่ 4.19 จะพบว่าในบริเวณนี้ค่าความเค้นเฉือนมีการเปลี่ยนแปลงจากค่าบวกไปเป็นค่าลบ และที่ตำแหน่งสัมผัสซึ่งความเค้นในแนวตั้งมีขนาดมากที่สุดเท่ากับ  $-1276.7$  MPa ส่วนค่าความเค้นเฉือนมีค่าเพียง  $-8.3983$  MPa เท่านั้น ซึ่งมีค่าน้อยกว่าความเค้นในทิศทางแกน Y มาก และเมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับความเค้นในทิศทางอื่นๆ ก็จะได้ผลในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น สำหรับปัญหาการสัมผัสของพื้นเพื่อตรงจะทำการคำนวณและเก็บค่าเฉพาะค่าความเค้นในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นพอนมิสเซส และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตามวิธีการที่ได้กล่าวมา และนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากวิธีวิเคราะห์ด้วยทฤษฎีการสัมผัสของเฮริตซ์



รูปที่ 4.19 ค่าความเค้นในแนวแกน Y และค่าความเค้นเฉือน XY บริเวณขอบผิว ณ ตำแหน่งจุดที่เกิดการสัมผัสของเฟืองตรง

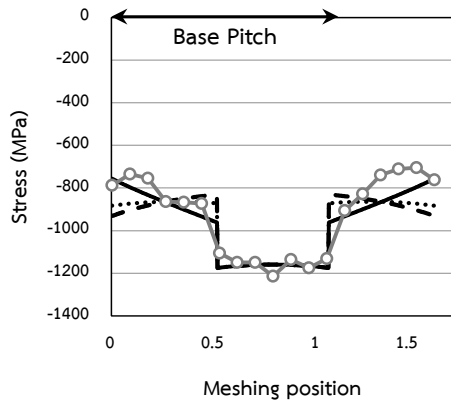
#### 4.2.1 ผลการคำนวณของชุดเฟืองต่างๆ

ในหัวข้อนี้ได้แสดงผลการคำนวณค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นพอนมิส เซสและค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสีรูป (2b) ของชุดเฟือง A - I จากการคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่อัตราส่วนการแบ่งแรง (Load Sharing Ratio : LSR) ในช่วงการขบสองคู่ฟันค่าต่างๆ ได้แก่ 33 : 67 45 : 55 และ 50 : 50 ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ตลอดรอบการขบของเฟือง ในรูปที่ 4.20 – 4.28 (ก) – (จ) แสดงค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z ค่าความเค้นพอนมิส เซส และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสีรูป (2b) ตามลำดับ โดยแกนนอนของกราฟแสดงถึงจุดคำนวณที่ตำแหน่งการขบต่างๆ โดยบอกตำแหน่งของการขบเป็นอัตราส่วนระหว่างระยะทางที่วัดจากตำแหน่งเริ่มต้นการขบจนถึงตำแหน่งที่เกิดการขบ ณ ขณะนั้นตามทิศทางแนวแรง กดเทียบกับระยะหนึ่งเบสพิตซ์

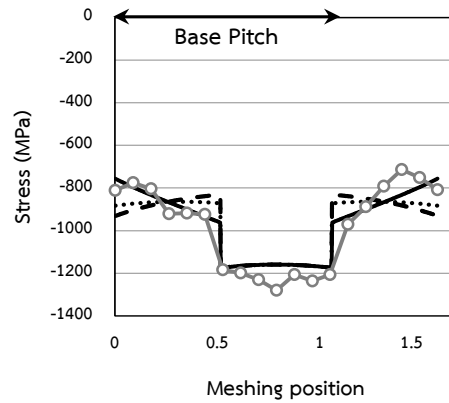
จากรูปพบว่าขนาดของค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉากต่างๆ ค่าความเค้นพอนมิส เซส และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสีรูป (2b) มีลักษณะเป็นขั้นบันไดโดยจะมีค่ามากในช่วงที่เกิดการสัมผัสกันหนึ่งคู่ฟันเนื่องจากแรงทั้งหมดกระทำที่จุดสัมผัสเดียว ส่วนในช่วงที่ค่าน้อยกว่าเป็นช่วงที่เกิดการสัมผัสกันสองคู่ฟันเนื่องจากจุดสัมผัสสองจุดช่วยกันรับแรงทำให้แรงและความเค้นที่เกิดตรงจุดสัมผัสมีค่าลดลง นอกจากนั้นในช่วงเริ่มต้นการขบจนถึงช่วงเริ่มต้นการขบฟันเดียว ค่าความเค้นและค่าการเสีรูปจะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนในช่วงสิ้นสุดการขบฟันเดียวจนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการขบ ค่าความเค้นและ

ค่าการเสีรูจะมีค่าลดลง โดยความกว้างของช่วงที่ค่าความเค้นและค่าการเสีรูมีค่ามากหรือเกิดการขบหนึ่งคู่ฟันจะขึ้นกับพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองชุดนั้นๆ ซึ่งแสดงได้โดยค่าอัตราส่วนการขบของเฟืองที่แตกต่างกัน ส่วนลักษณะของค่าความเค้นในช่วงการขบสองคู่ฟันและหนึ่งคู่ฟันจะขึ้นกับรัศมีการสัมผัส ขณะที่เกิดการสัมผัส ซึ่งจะมีค่าแตกต่างกันในแต่ละตำแหน่งการขบและมีค่าแตกต่างกันในแต่ละชุดเฟือง นอกจากนั้นจะพบว่าผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีความสอดคล้องกันคือค่าความเค้นต่างๆ และค่าการเสีรูมีลักษณะเป็นขั้นบันไดโดยมีขนาดเพิ่มขึ้นในช่วงเริ่มต้นการขบจนถึงช่วงเริ่มต้นการขบหนึ่งคู่ฟัน และมีขนาดน้อยลงในช่วงสิ้นสุดการขบหนึ่งคู่ฟันจนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการขบเหมือนกัน นอกจากนี้ยังมีขนาดเดียวกันด้วย

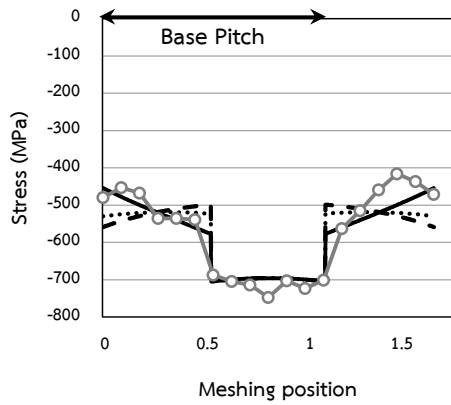
จากผลลัพธ์ที่ได้เป็นที่น่าสังเกตว่าความเค้นที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะเป็นผลจากทั้งการสัมผัสของผิวฟันและการตัดของฟัน อย่างไรก็ตามขนาดของความเค้นที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีขนาดใกล้เคียงกับค่าความเค้นที่คำนวณได้โดยสมการของเฮิร์ตซ์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าที่จุดสัมผัส ผลความเค้นจากการตัดของฟันเฟืองมีค่าน้อยและสามารถประมาณค่าความเค้นได้โดยความเค้นสัมผัสเพียงอย่างเดียว



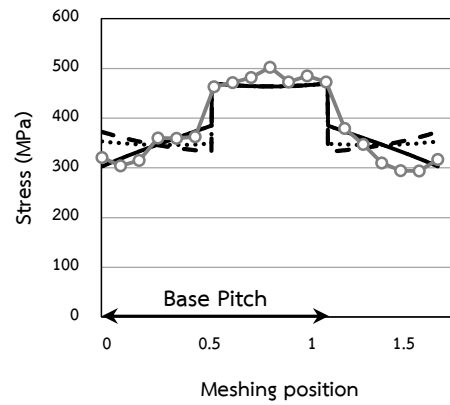
(ก)



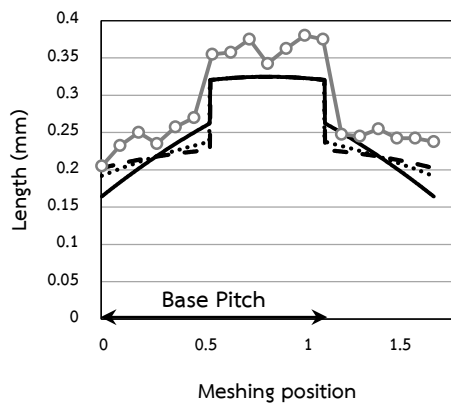
(ข)



(ค)

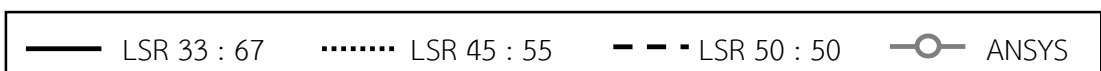


(ง)

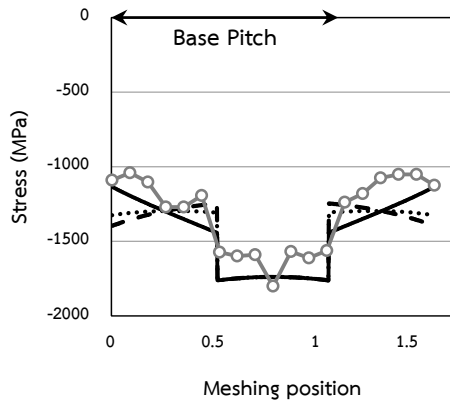


(จ)

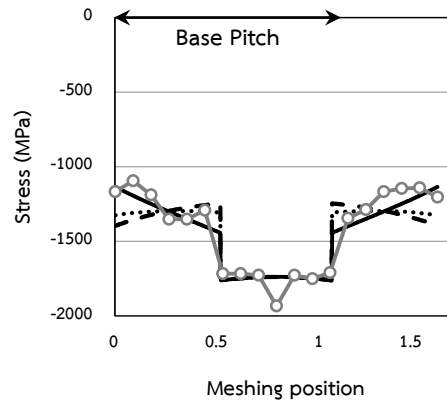
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



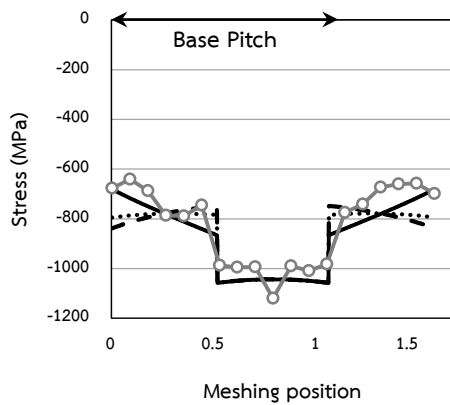
รูปที่ 4.20 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A



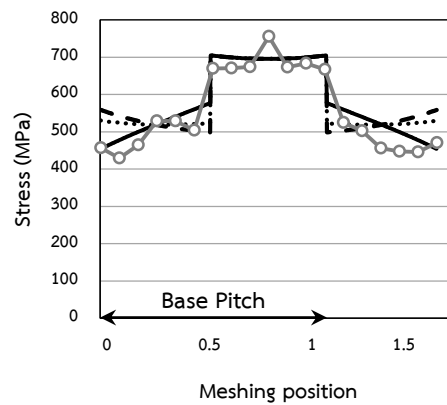
(ก)



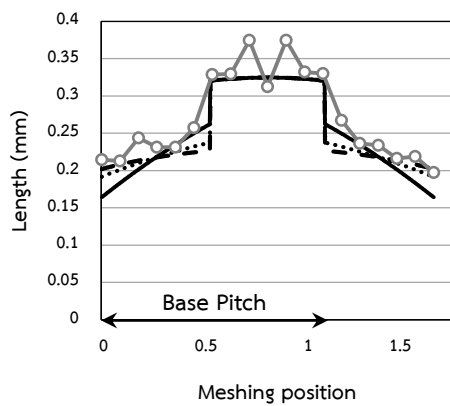
(ข)



(ค)

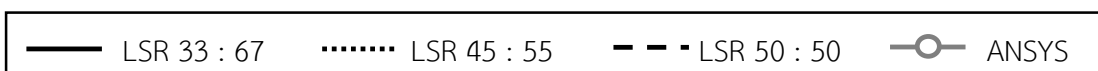


(ง)

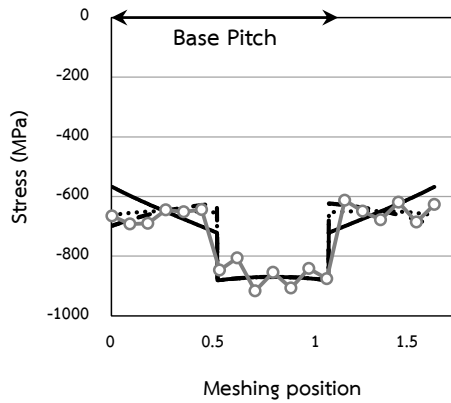


(จ)

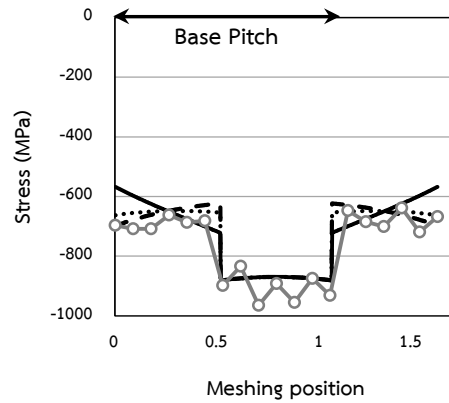
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



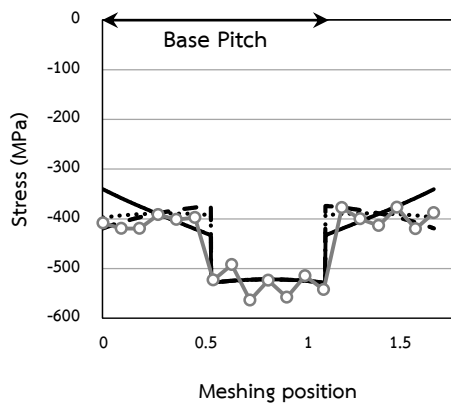
รูปที่ 4.21 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง B



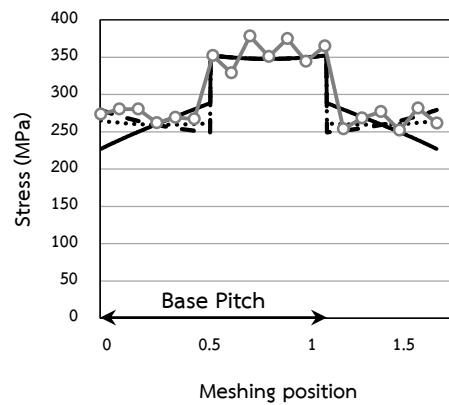
(ก)



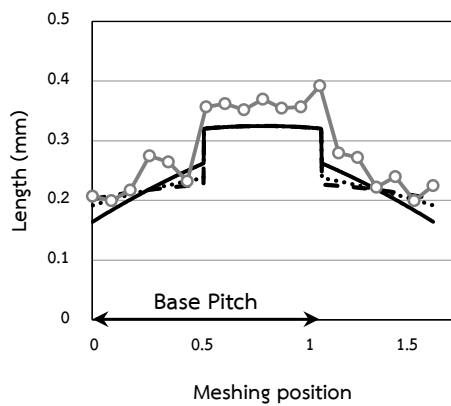
(ข)



(ค)

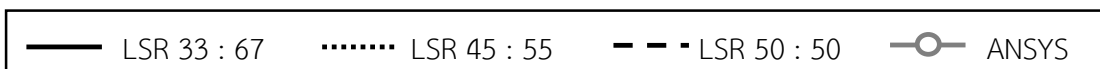


(ง)



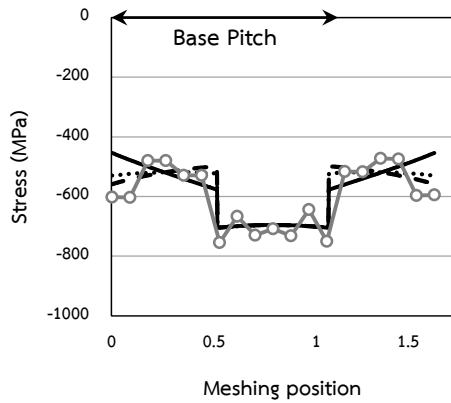
(จ)

- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)

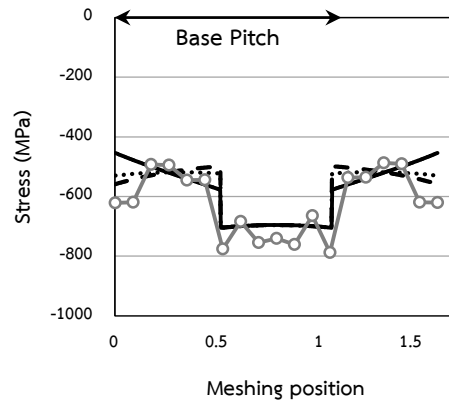


รูปที่ 4.22 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง C

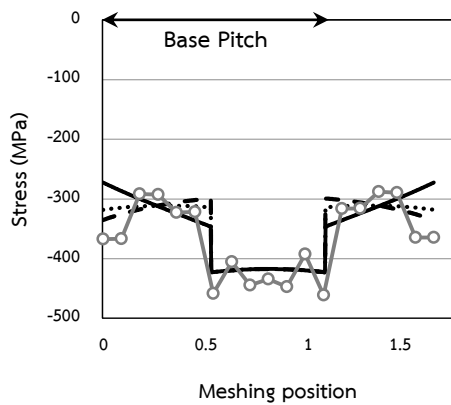




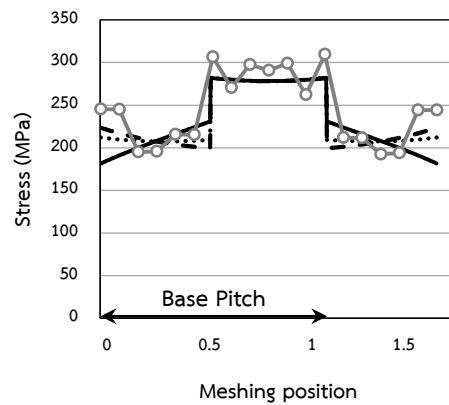
(ก)



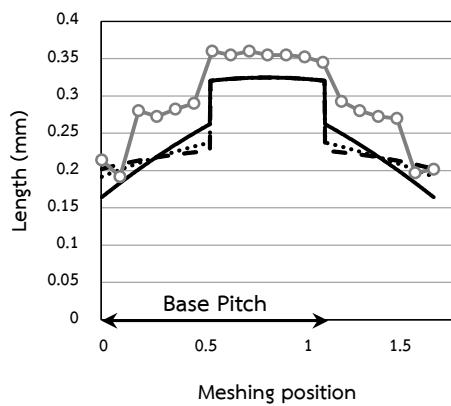
(ข)



(ค)

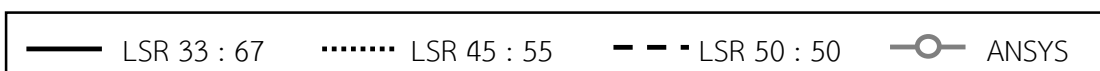


(ง)

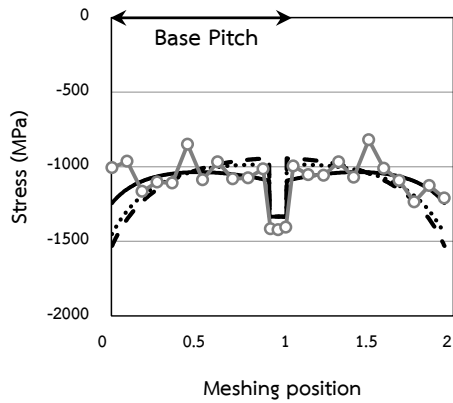


(จ)

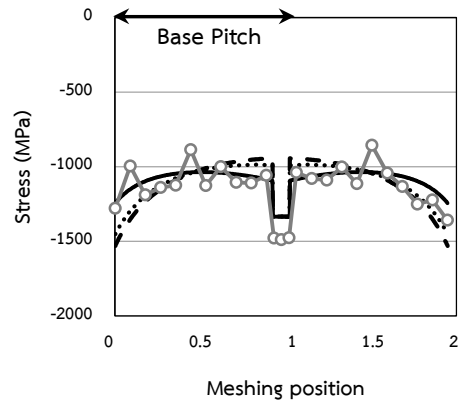
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



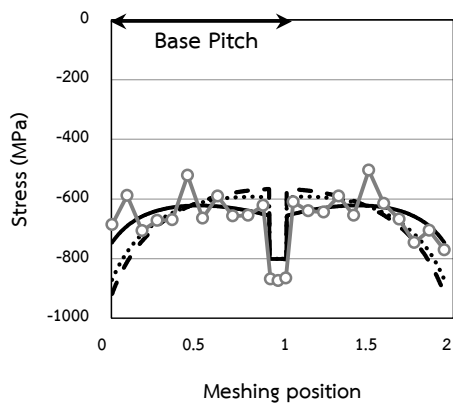
รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง D



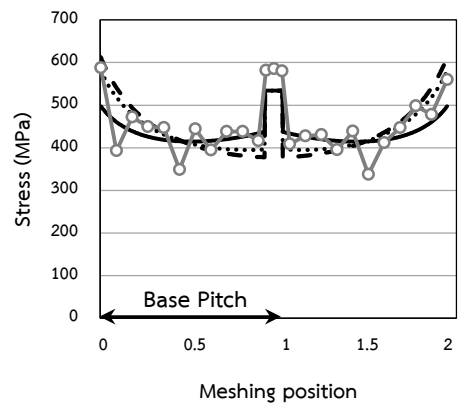
(ก)



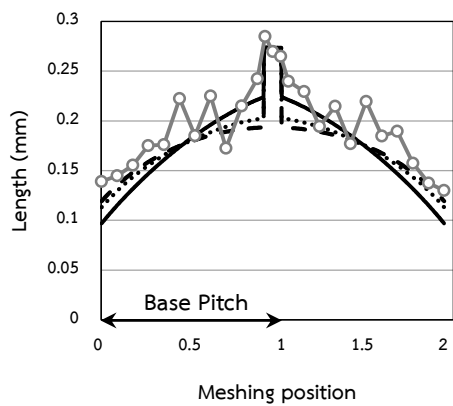
(ข)



(ค)

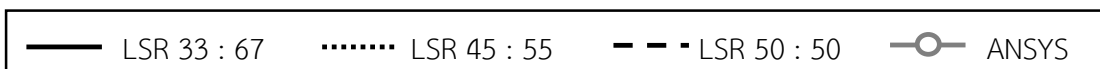


(ง)

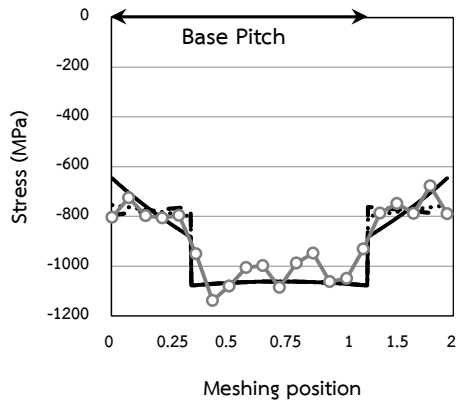


(จ)

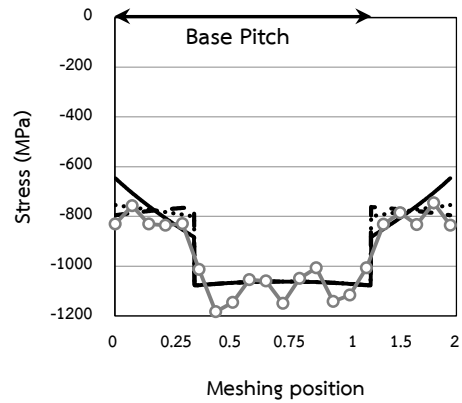
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอสเฟเนส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



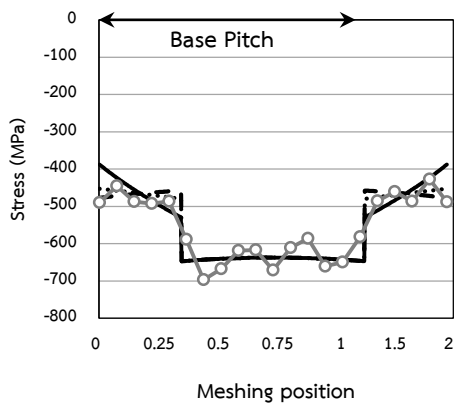
รูปที่ 4.24 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง E



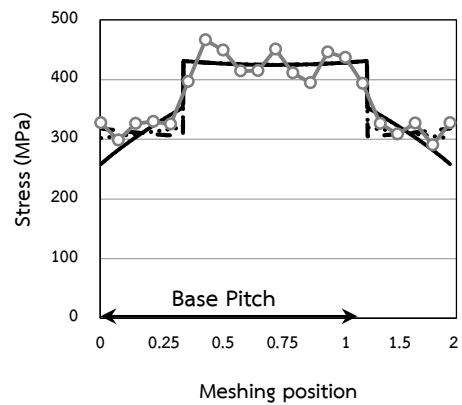
(ก)



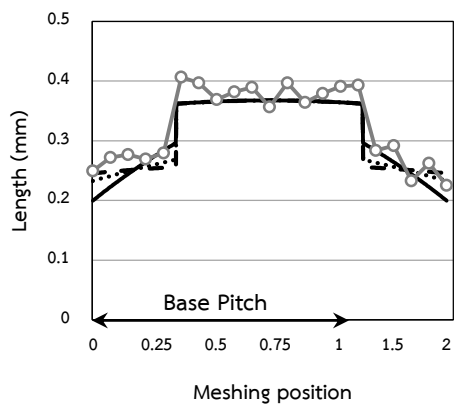
(ข)



(ค)

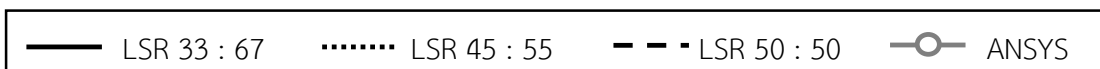


(ง)

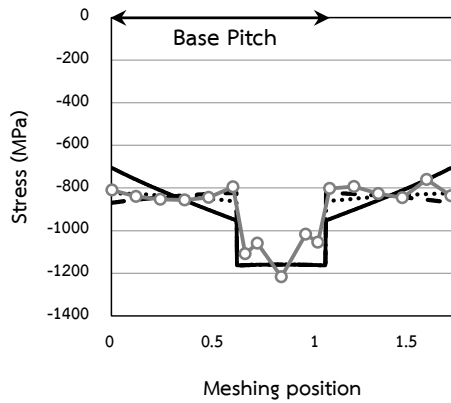


(จ)

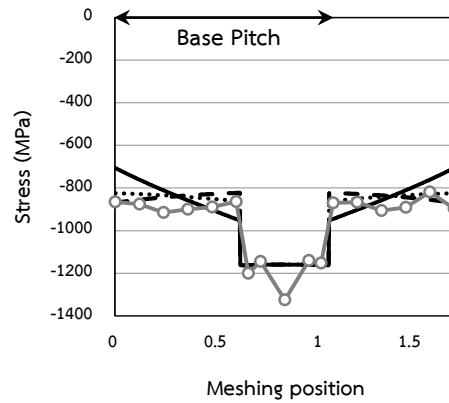
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



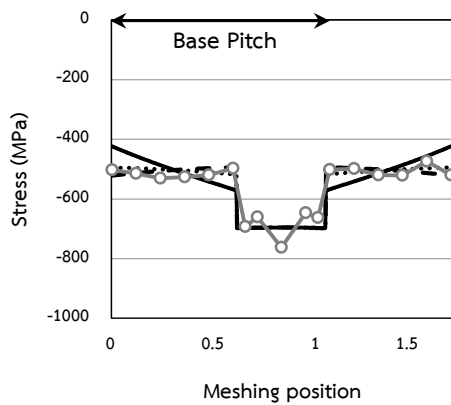
รูปที่ 4.25 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์  
เอลิเมนต์ของชุดเฟือง F



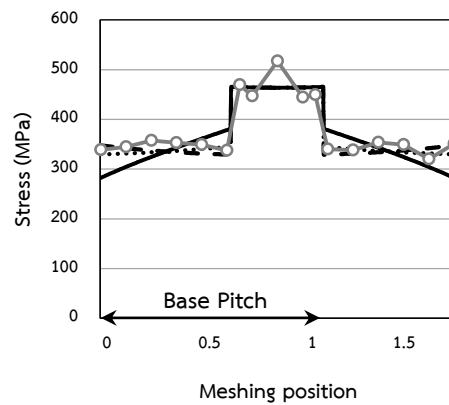
(ก)



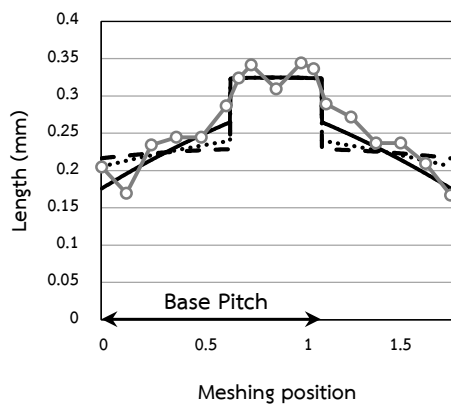
(ข)



(ค)

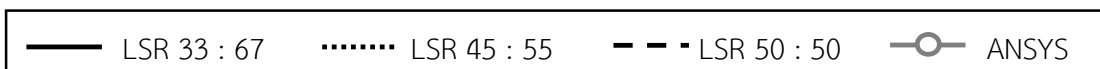


(ง)

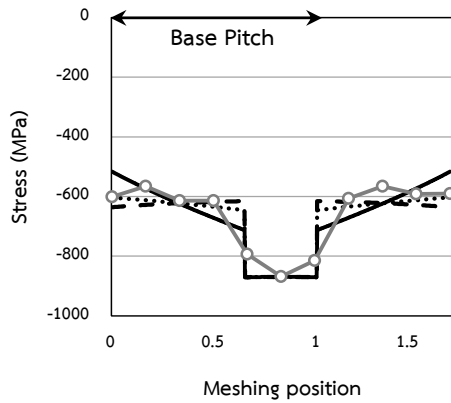


(จ)

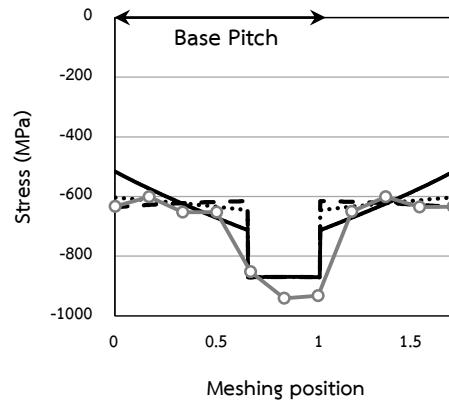
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเสส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



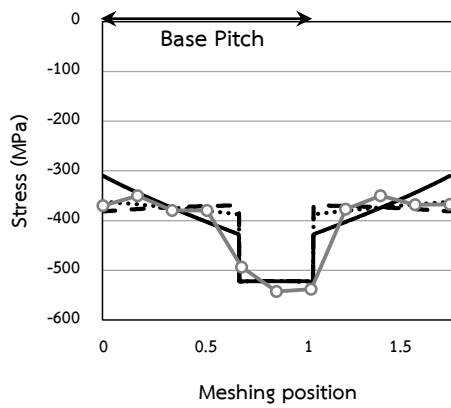
รูปที่ 4.26 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง G



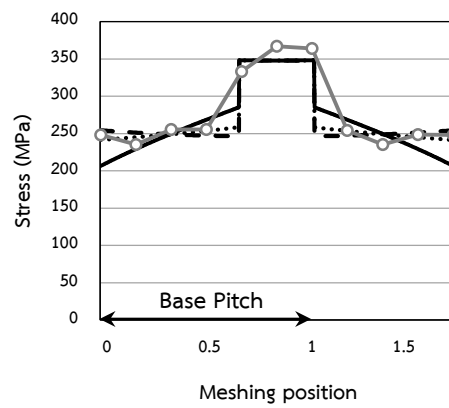
(ก)



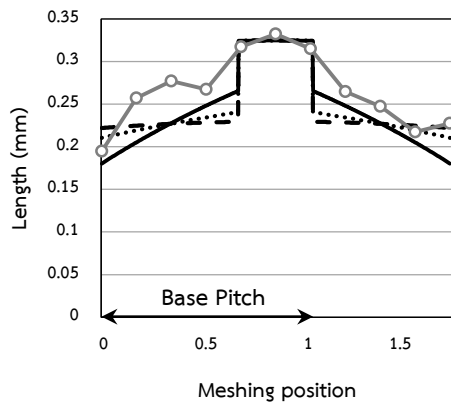
(ข)



(ค)

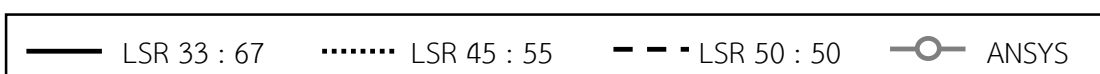


(ง)

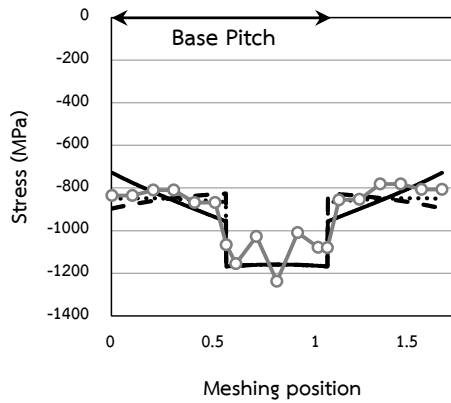


(จ)

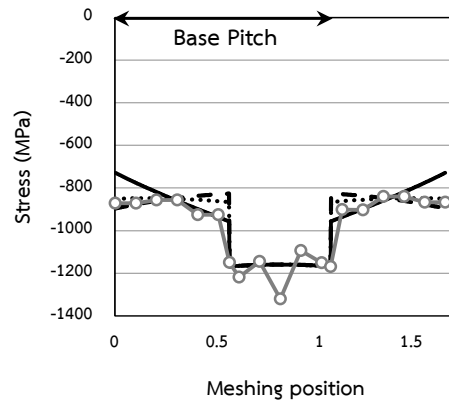
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเซส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



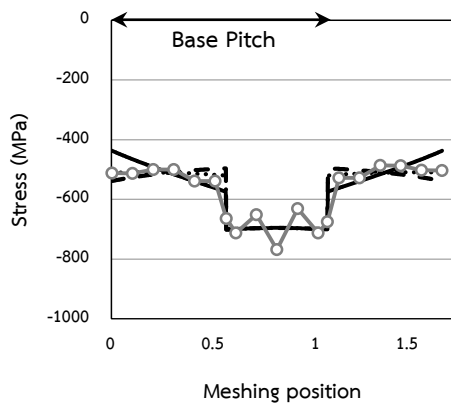
รูปที่ 4.27 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง H



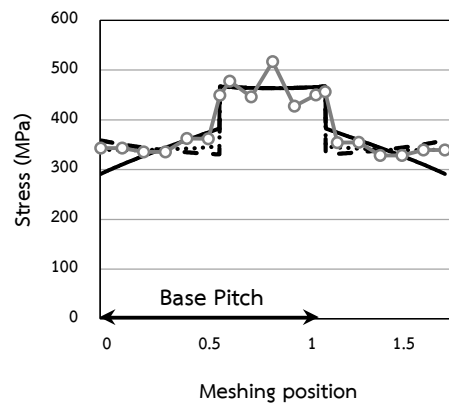
(ก)



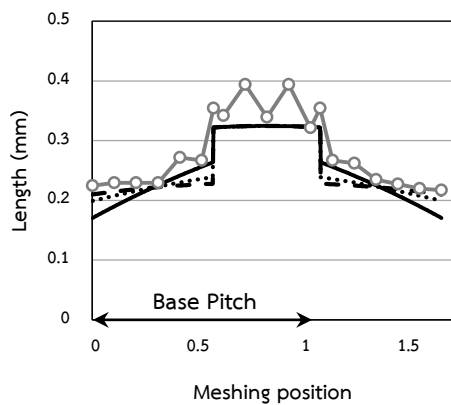
(ข)



(ค)

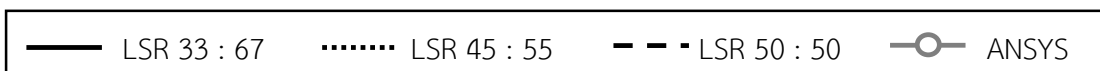


(ง)



(จ)

- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



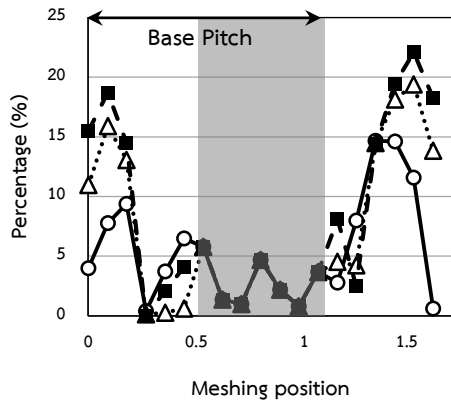
รูปที่ 4.28 การเปรียบเทียบผลการคำนวณจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง I

#### 4.2.2 อัตราส่วนการแบ่งภาระขณะพื้นเฟืองชกกัน 2 พื้น

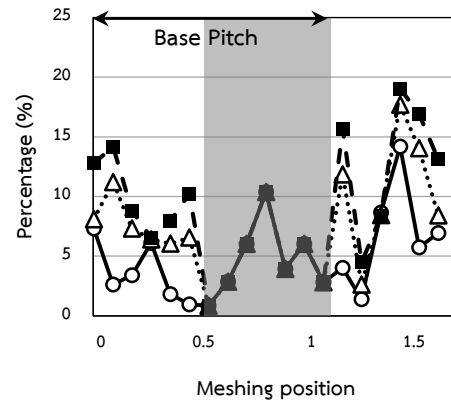
จากผลในหัวข้อที่แล้วจะเห็นว่าสัดส่วนการแบ่งภาระขณะเกิดการขบสองคู่ฟันของแต่ละชุดเฟืองจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยจะมีค่าแปรเปลี่ยนในช่วง 33 : 67 จนถึง 50 : 50 หากสามารถทราบทราบค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงและเลือกใช้ได้เหมาะสมก็จะสามารถคำนวณค่าความเค้นบนหน้าฟันเฟืองด้วยสมการของเฮิร์ตซ์ได้โดยง่าย

ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างการคำนวณค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่อัตราส่วนการแบ่งแรงต่างๆ ได้แก่ 33 : 67 45 : 55 และ 50 : 50 กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟือง A ดังแสดงในรูปที่ 4.29 (ก) – (จ) โดยแสดงค่าความแตกต่างของความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z ความเค้นพอนมิสเชส และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b) ตามลำดับ ค่าความแตกต่างระหว่างผลจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และสมการของเฮิร์ตซ์เนื่องจากอัตราส่วนการแบ่งแรงมีค่าแตกต่างกันจะเกิดในช่วงที่ฟันขบกันสองคู่ฟันเท่านั้น ซึ่งส่วนที่พิจารณานี้จะแสดงในแถบสีขาวยในรูปที่ 4.29 ส่วนในช่วงที่เกิดการขบหนึ่งคู่ฟันอัตราส่วนการแบ่งแรงมีค่าเป็น 100 % ดังนั้นค่าความแตกต่างของแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงค่าต่างๆ กับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีค่าเท่ากันดังแสดงในแถบสีเทา ในการเลือกค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองพิจารณาโดยหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของความแตกต่างของค่าความเค้นพอนมิสเชส ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z และค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปของชุดเฟืองต่างๆ ดังแสดงในตารางที่ 4.4 จากตารางสามารถเลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงซึ่งมีความแตกต่างของค่าต่างๆ ที่น้อยที่สุดได้ ซึ่งแสดงว่าอัตราส่วนการแบ่งแรงนั้นมีความเหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ ในส่วนของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีค่าน้อยแสดงว่าชุดข้อมูลมีการกระจายตัวสม่ำเสมอ ซึ่งแสดงว่าผลลัพธ์ระหว่างสองวิธีที่อัตราส่วนการแบ่งแรงนั้นๆ มีความสอดคล้องกัน

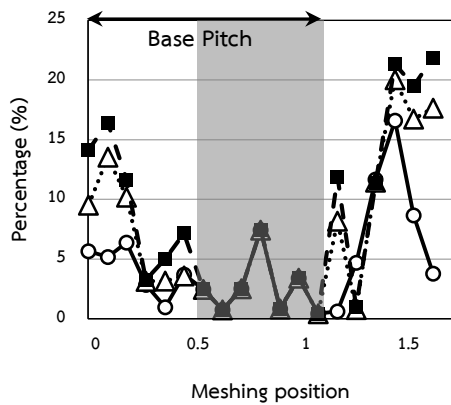
จากตารางที่ 4.4 ค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความแตกต่างระหว่างสองวิธีของค่าความเค้นต่างๆ ในชุดเฟือง A ที่อัตราส่วนการแบ่งแรง 33 : 67 มีค่าน้อยที่สุด แต่ค่าความแตกต่างของความกว้างของผิวสัมผัสที่เสียรูปที่มีค่าน้อยที่สุดที่อัตราส่วนการแบ่งแรง 50 : 50 อย่างไรก็ตามโดยรวมแล้วถือว่าค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ 33 : 67 เหมาะสมที่สุดสำหรับชุดเฟือง A



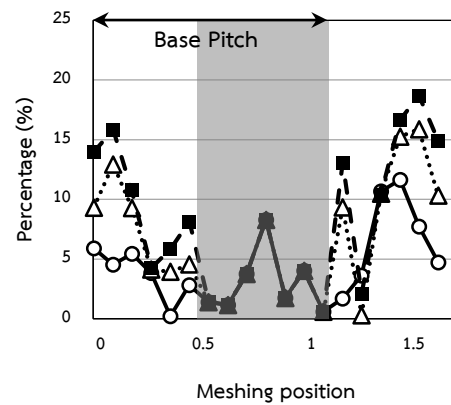
(ก)



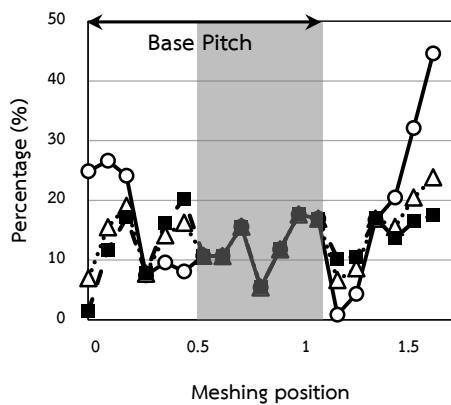
(ข)



(ค)



(ง)



(จ)

- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



รูปที่ 4.29 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A



ตารางที่ 4.4 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง A

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	<u>5.449</u>	7.106	8.379	<u>4.529</u>	6.692	7.616
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	<u>5.058</u>	7.457	9.004	<u>3.460</u>	4.229	5.178
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	<u>4.668</u>	7.153	8.556	<u>4.174</u>	6.289	7.342
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	<u>4.415</u>	6.673	8.194	<u>3.262</u>	4.962	5.983
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	16.235	13.700	<u>13.088</u>	10.776	5.158	<u>4.818</u>

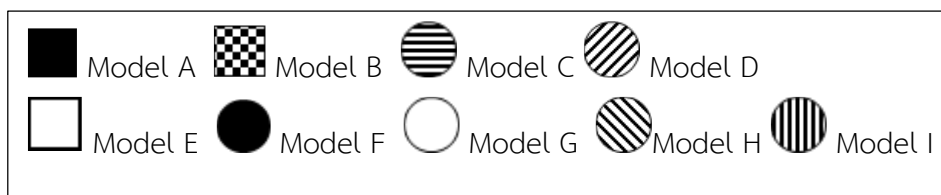
ในทำนองเดียวกัน เมื่อใช้หลักการดังกล่าวพิจารณาหาอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองต่างๆ จะสามารถหาอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมได้ดังสรุปในตารางที่ 4.5 โดยชุดเฟือง A B และ E มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมที่สุดคือค่า 33 : 67 ส่วนชุดเฟือง C D F G H และ I มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมคือค่าในช่วง 45 : 55 ถึง 50 : 50 สำหรับรายละเอียดผลการคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างวิธีทั้งสอง และผลการคำนวณค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความแตกต่างที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองอื่นๆ จะแสดงในภาคผนวก ข.

ตารางที่ 4.5 อัตราการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองต่างๆ

พารามิเตอร์ของเฟือง	ชุดเฟือง								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
จำนวนฟัน (ซี่)	30	30	30	30	30	30	45	60	36
โมดูล (mm)	3	2	4	5	3	3	2	2	2.5
มุมกด (องศา)	20	20	20	20	14.5	25	20	20	20
อัตราส่วนการแบ่งแรง	33:67	33:67	45:55 - 50:50	45:55 - 50:50	33:67	45:55 - 50:50	45:55 - 50:50	45:55 - 50:50	45:55 - 50:50

#### 4.3 การหาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองต่างๆ กับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรง

เนื่องจากเฟืองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกันจะมีอัตราส่วนการแบ่งแรงแตกต่างกัน ดังนั้นหากทราบความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองกับอัตราส่วนการแบ่งแรง จะทำให้สามารถเลือกใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงประกอบกับผลเฉลยของเฮิร์ตซ์เพื่อประมาณความเค้นได้แม่นยำยิ่งขึ้น ในหัวข้อนี้ได้พยายามหาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองต่างๆ กับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงเพื่อคาดการณ์อัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองใดๆ โดยทำการพลอต กราฟความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองต่างๆ กับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงดังรูปที่ 4.25 – 4.29 โดยแกน Y แสดงอัตราส่วนการแบ่งแรงออกเป็น 2 ค่าได้แก่ ค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงค่า 33 : 67 และช่วง 45 : 55 – 50 : 50 ตามลำดับ และชุดเฟืองที่มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ 33 : 67 จะแสดงสัญลักษณ์เป็นรูปสี่เหลี่ยม ส่วนชุดเฟืองที่มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงในช่วง 45 : 55 – 50 : 50 จะแสดงสัญลักษณ์เป็นรูปวงกลม โดยแสดงสัญลักษณ์แทนชุดเฟืองต่างๆ ในรูปที่ 4.30



รูปที่ 4.30 สัญลักษณ์แทนชุดเฟืองต่างๆ

#### 4.3.1 ผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองตรงกับอัตราส่วนการแบ่งแรง

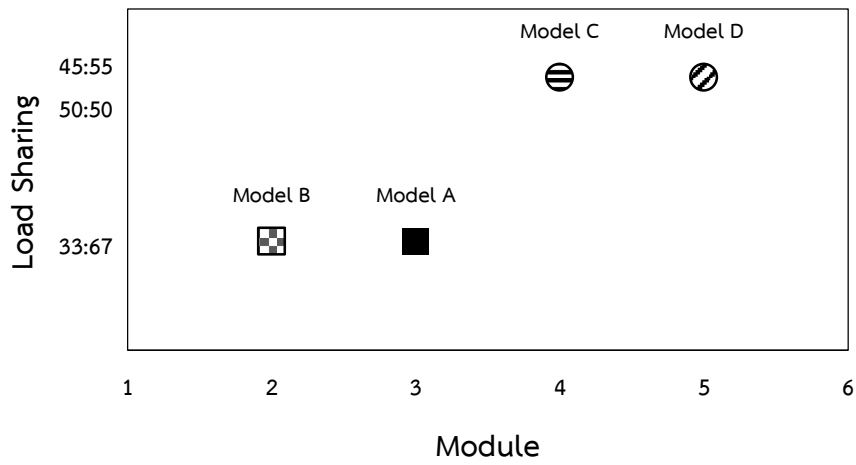
รูปที่ 4.31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงของชุดเฟืองที่มีค่าโมดูลแตกต่างกันตั้งแต่โมดูล 2 ถึงโมดูล 5 มม. โดยชุดเฟืองที่นำมาแสดงจะมีพารามิเตอร์อื่นๆ เหมือนกันได้แก่ มีมุมกด 20 องศา และจำนวนฟัน 30 ซึ่งจากรูปพบว่าเมื่อค่าโมดูลมีค่าเพิ่มมากขึ้นค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงระหว่างฟันทั้งสองคู่จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น (อัตราส่วนการแบ่งแรงเข้าใกล้ 50 : 50) รูปที่ 4.32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงกับชุดเฟืองที่มีมุมกดแตกต่างกัน โดยมีค่ามุมกด 20 14.5 และ 25 องศา ตามลำดับ สำหรับพารามิเตอร์อื่นๆ ของเฟืองจะมีค่าเท่ากัน คือมีจำนวนฟัน 30 ฟันและโมดูลเท่ากับ 3 มม. จากรูปพบว่า เมื่อค่ามุมกดมีค่าเพิ่มมากขึ้นค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น รูปที่ 4.33 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงกับจำนวนฟันโดยชุดเฟืองที่นำมาเปรียบเทียบจะมีมุมกด 20 องศา โมดูล 2 มม. เหมือนกันแต่มีจำนวนฟันแตกต่างกัน โดยมีจำนวนฟัน 30 45 และ 60 ซึ่ง ตามลำดับ จากรูปพบว่าเมื่อค่าจำนวนฟันมีค่าเพิ่มมากขึ้นค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น รูปที่ 4.34 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงกับอัตราส่วนการขบของชุดเฟือง A – I จากรูปไม่พบความสัมพันธ์ชัดเจนระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงกับอัตราส่วนการขบ ทั้งนี้เนื่องจากอัตราส่วนการขบเป็นพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์พื้นฐานของเฟืองหลายๆ ตัว ทั้ง โมดูล มุมกด และจำนวนฟัน ซึ่งพารามิเตอร์พื้นฐานแต่ละตัวอาจส่งผลต่ออัตราส่วนการแบ่งแรงแตกต่างกัน ส่งผลให้ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนการขบกับการแบ่งแรงไม่ชัดเจน

รูปที่ 4.35 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลและจำนวนฟันกับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงของชุดเฟืองต่างๆ ที่มีมอด 20 องศา จากรูปพบว่าชุดเฟืองจะมีแนวโน้มอัตราส่วนการแบ่งแรงเท่ากับ 33 : 67 เมื่อโมดูลหรือจำนวนฟันมีค่าน้อย นอกจากนี้เนื่องจากผลคูณของโมดูลและจำนวนฟันแสดงถึงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ของเฟืองตามสมการ

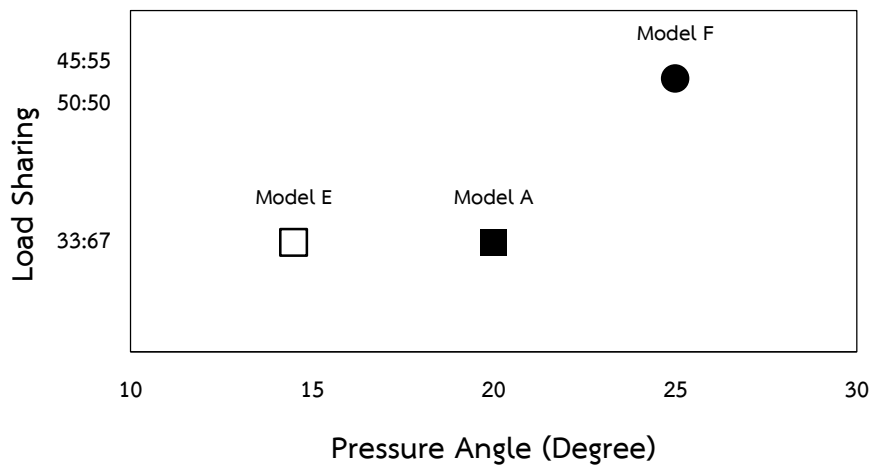
$$d = m \times N \quad (4.1)$$

โดย  $d$  คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของเฟืองที่ตำแหน่งพิตช์  
 $m$  คือ โมดูล  
 $N$  คือ จำนวนฟัน

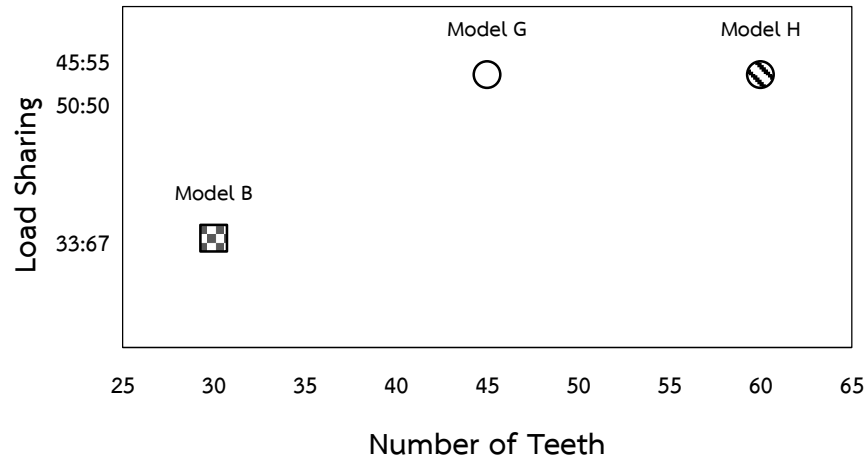
ดังนั้นจึงอาจแสดงแนวโน้มได้ว่า เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางน้อย (ข้อมูลในพื้นที่ใต้เส้นประ) จะมีอัตราส่วนการแบ่งแรง 33 : 67 ในทางกลับกัน เฟืองที่มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางมากจะมีแนวโน้มที่มีการแบ่งแรงระหว่างสองคู่ฟันใกล้เคียงกัน หรือมีค่า 50 : 50 (ข้อมูลในพื้นที่เหนือเส้นประ) เมื่อพิจารณาผลของมอดเพิ่มเข้าไปจากแนวโน้มในรูปที่ 4.32 จะพบว่าเมื่อมอดมีค่าเพิ่มมากขึ้น อัตราส่วนการแบ่งแรงจะเข้าใกล้ 50 : 50 มากขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้แนวเส้นประในรูปที่ 4.35 เลื่อนลงมาด้านล่าง ทำให้พื้นที่บริเวณที่อัตราส่วนการแบ่งแรงเท่ากับ 50 : 50 มีค่าเพิ่มมากขึ้น ในทางกลับกัน หากมอดมีค่าลดลง อัตราส่วนการแบ่งแรงจะเข้าใกล้ 33 : 67 มากยิ่งขึ้น ซึ่งจะส่งผลให้ แนวเส้นประในรูปที่ 4.35 เลื่อนขึ้นในทิศทางบนขวาของกราฟ ทำให้พื้นที่บริเวณที่อัตราส่วนการแบ่งแรงเท่ากับ 33 : 67 มีค่าเพิ่มมากขึ้น สำหรับคำอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองตรงกับอัตราส่วนการแบ่งแรงจะแสดงในหัวข้อถัดไป



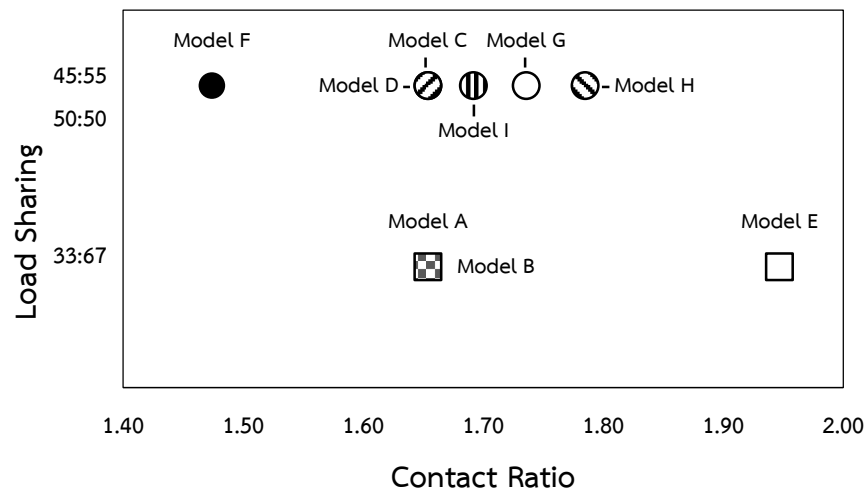
รูปที่ 4.31 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับโมดูล



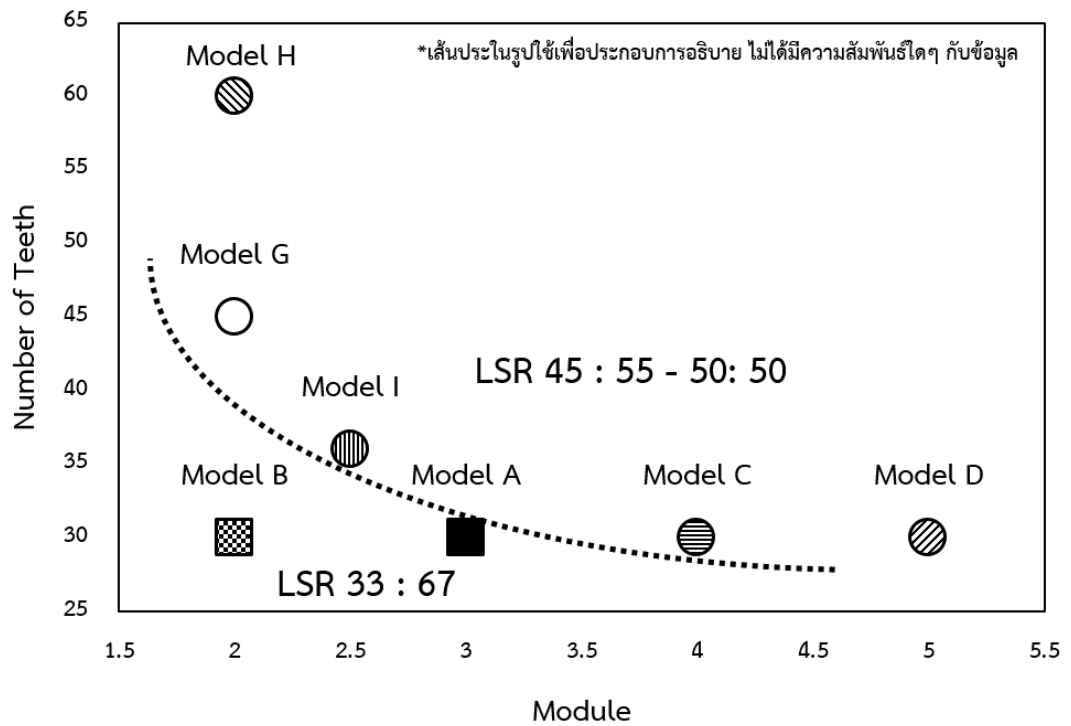
รูปที่ 4.32 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับมุมกด



รูปที่ 4.33 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับจำนวนฟัน



รูปที่ 4.34 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับอัตราส่วนการขบ

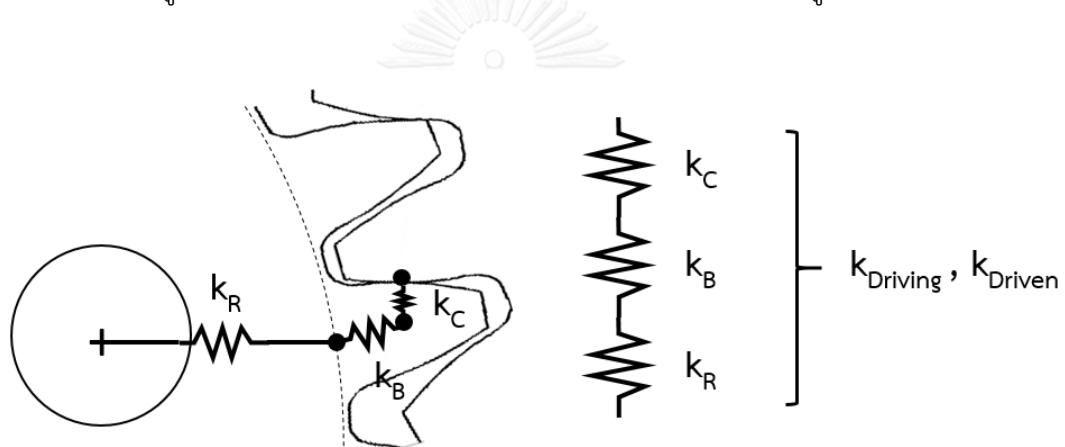


รูปที่ 4.35 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงกับจำนวนฟันและโมดูล



#### 4.3.2 คำอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองกับอัตราส่วนการแบ่งแรง

ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของการทำงานเฟืองโดยทั่วไป ได้มีการจำลองการขบอัดของเฟืองในลักษณะโมเดลสปริง เช่น งานวิจัยของ Ozguvent and Houser [20] ในที่นี้จึงได้ประยุกต์ใช้แนวคิดดังกล่าวเพื่ออธิบายผลของพารามิเตอร์เฟืองต่ออัตราส่วนการแบ่งแรงขณะเกิดการขบสองคู่ฟัน โดยการพิจารณาค่าความแข็งเกร็งบนฟันของเฟืองขับและเฟืองตามจากการเสีรูปร่างที่เกิดขึ้นบนหน้าฟันเป็นผลมาจากการสัมผัสของผิวฟัน การดัดโค้งของฟันเฟือง และการเสีรูปร่างของขอบเฟือง ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขณะขบกันจึงสามารถพิจารณาได้เป็น ความแข็งเกร็งจากการสัมผัส (Contact Stiffness)  $k_C$  ความแข็งเกร็งจากการดัดโค้ง (Bending Stiffness)  $k_B$  และความแข็งเกร็งจากการการเสีรูปร่างที่ขอบเฟือง (Rim Thickness Stiffness)  $k_R$  ดังแสดงในรูปที่ 4.36



รูปที่ 4.36 ความแข็งเกร็งที่คำนึงผลของการสัมผัส การดัดโค้ง และการเสีรูปร่างที่ขอบเฟือง

ค่าความแข็งเกร็งรวมของเฟืองขับหรือเฟืองตามซึ่งพิจารณาผลข้างต้น สามารถหาได้โดยพิจารณาความแข็งเกร็งทั้ง 3 ส่วนต่ออนุกรมกันดังสมการ

$$\frac{1}{k_{Driving, Driven}} = \frac{1}{k_C} + \frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_R} \quad (4.2)$$

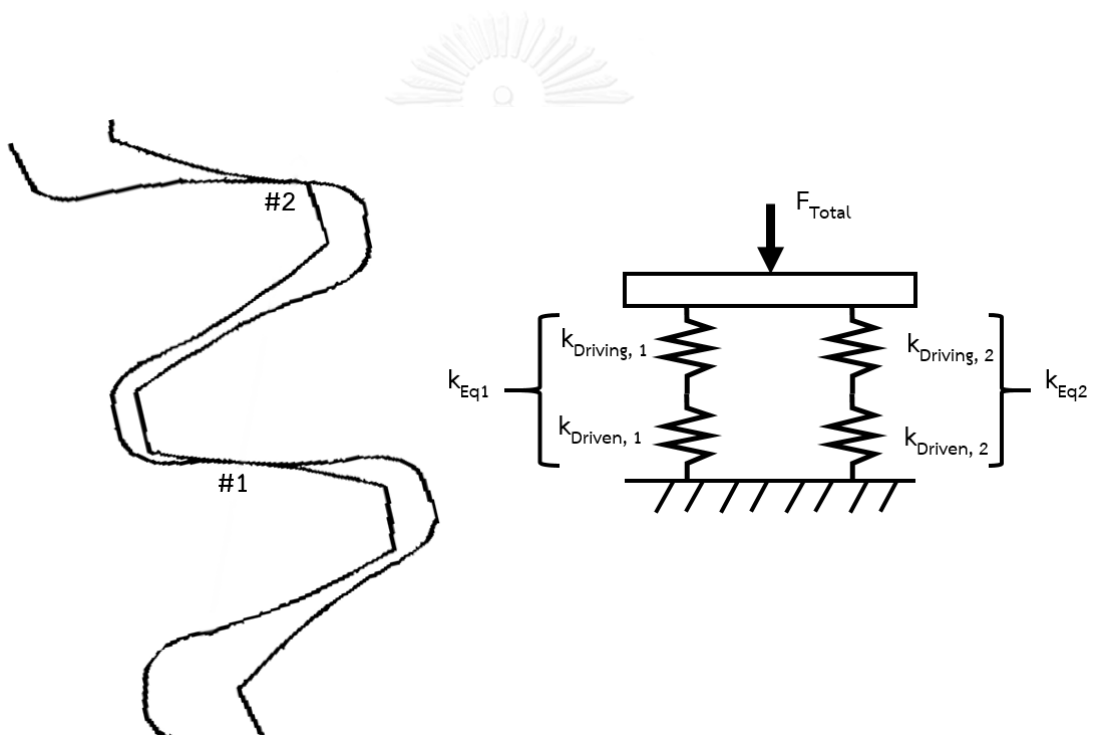
โดย  $k_{Driving}$  ,  $k_{Driven}$  คือความแข็งเกร็งของเฟืองขับหรือเฟืองตามตามลำดับ



เนื่องจากในการขบกัน เฟืองขับและเฟืองตามจะเสีรูปร่างทั้งคู่ ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองจึงต้องพิจารณาผลรวมของทั้งเฟืองขับและเฟืองตาม โดยจะสามารถหาค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม (Equivalent Stiffness)  $k_{Eq}$  ได้จากสมการ

$$\frac{1}{k_{Eq}} = \frac{1}{k_{Driving}} + \frac{1}{k_{Driven}} \quad (4.3)$$

และเมื่อเกิดการขบสองคู่ฟันจะสามารถพิจารณาความแข็งเกร็งรวม เช่นเดียวกับสปริงสองตัวที่ต่อขนานกันดังแสดงในรูปที่ 4.37



รูปที่ 4.37 การขบกันของคู่เฟืองขับและเฟืองตามของคู่ที่หนึ่งและคู่ที่สอง

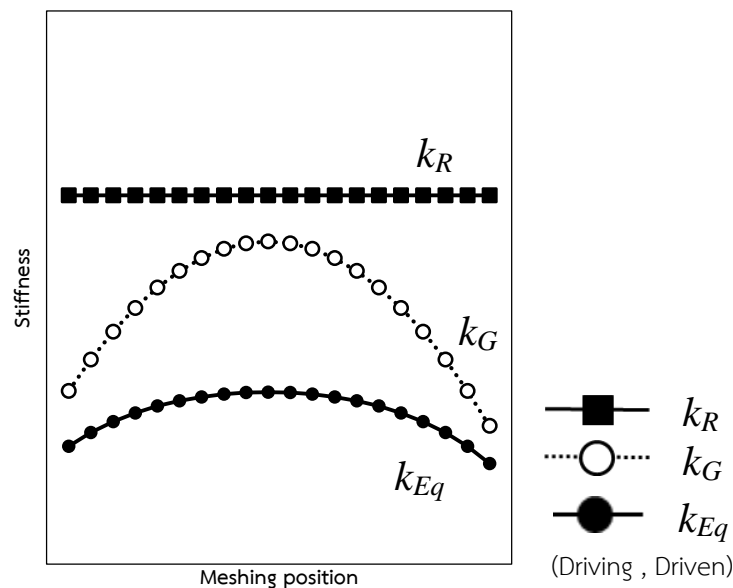
และสามารถหาค่าความแข็งเกร็งรวมทั้งหมด (Total Stiffness)  $k_{Total}$  ของคู่ฟันเฟืองขับและเฟืองตามคู่ที่หนึ่งและคู่ที่สองที่ตำแหน่งการขบใดๆ ได้จาก

$$k_{Total} = k_{Eq1} + k_{Eq2} \quad (4.4)$$

รูปที่ 4.38 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าความแข็งเกร็งเนื่องจากสาเหตุต่างๆ ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ โดยค่าความแข็งเกร็งจากการเสีรูปที่ขบเฟือง จะมีค่าคงที่ เนื่องจากลักษณะทางเรขาคณิตของทรงกระบอกเฟืองไม่มีการเปลี่ยนแปลง นอกจากนั้นในที่นี้ เพื่อความเข้าใจโดยง่ายจะพิจารณาผลของการสัมผัสและการตัดโค้งของคู่ฟันเฟืองรวมกันเป็นค่าความแข็งเกร็งของฟัน (Gear Stiffness)  $k_G$  โดยค่า  $k_G$  สามารถหาได้จาก

$$\frac{1}{k_G} = \frac{1}{k_{c,driving}} + \frac{1}{k_{c,driven}} + \frac{1}{k_{b,driving}} + \frac{1}{k_{b,driven}} \quad (4.5)$$

ในรูปที่ 4.38 เมื่อตำแหน่งการขบเปลี่ยนแปลงไป ตำแหน่งของฟันเฟืองที่มากระทบกันจะเปลี่ยนแปลง ทำให้ค่า  $k_G$  มีการเปลี่ยนแปลงตลอดช่วงการขบ โดยเมื่อเริ่มขบ รากฟันของเฟืองขับจะขบกับปลายฟันของเฟืองตาม เนื่องจากปลายฟันมีความแข็งเกร็งน้อยกว่าส่วนอื่นๆ ผลรวมความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งนี้จึงมีค่าน้อย เช่นเดียวกับที่ตำแหน่งสิ้นสุดการขบ ที่ปลายฟันของเฟืองขับขบกับรากฟันของเฟืองตาม ซึ่งแตกต่างกับการขบกันที่บริเวณกลางฟัน ซึ่งความแข็งเกร็งของทั้งเฟืองขับและเฟืองตามมีค่ามาก ผลรวมของความแข็งเกร็งจึงมีค่ามาก และเมื่อรวมผลของค่า  $k_R$  และ  $k_G$  เข้าด้วยกันแล้ว จะได้ค่าความแข็งเกร็งรวมของ 1 คู่ฟัน  $k_{Eq}$  ดังแสดงด้วยเส้นสีดำและจุดกลมดำในรูปที่ 4.38



รูปที่ 4.38 ตัวอย่างค่าความแข็งเกร็งต่างๆ ที่ตำแหน่งการขบใดๆ

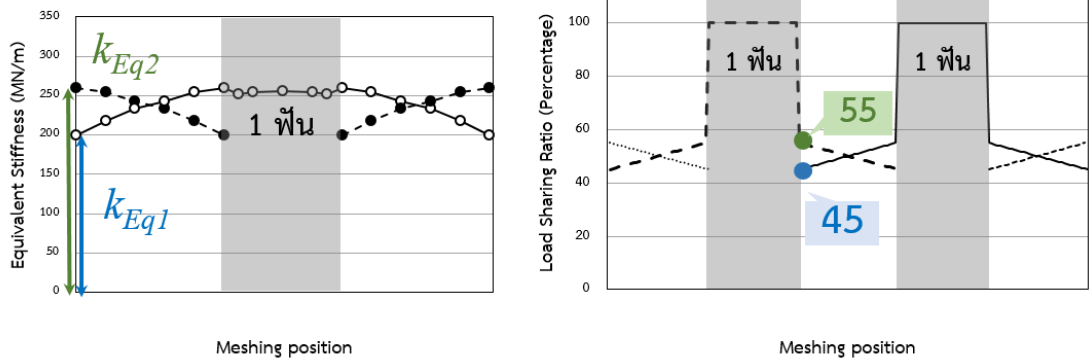
เนื่องในการขบกันของเฟือง ระยะยุดตัวบนหน้าฟันของฟันคู่ที่หนึ่งและคู่ที่สองจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก ดังนั้นอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ตำแหน่งการขบใดๆ (Load Sharing Ratio)  $LSR$  จึงสามารถพิจารณาโดยประมาณได้ดังสมการ

$$LSR = \frac{k_{Eq1}}{k_{Eq2}} \quad (4.6)$$

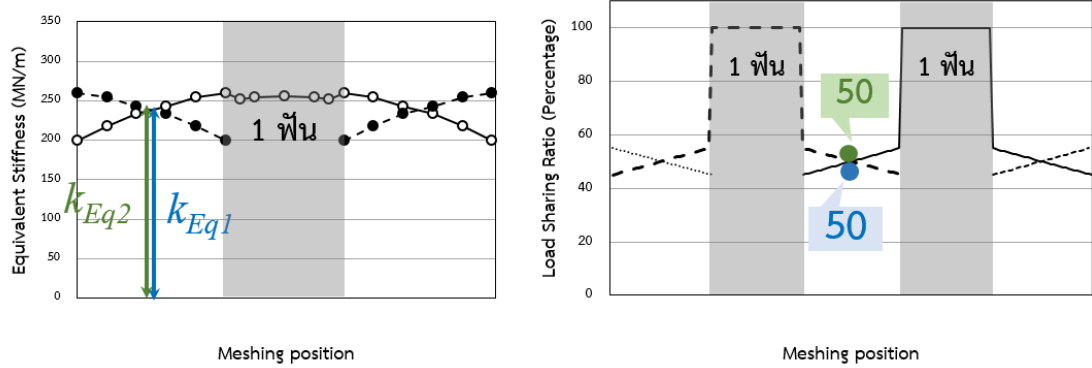
รูปที่ 4.39 แสดงค่าความแข็งเกร็งและสัดส่วนการแบ่งแรงของคู่ฟันที่ตำแหน่งการขบต่างๆ โดยรูปทางด้านซ้ายมือแสดงค่าความแข็งเกร็งที่เปลี่ยนแปลงไปในหนึ่งรอบการขบ ตั้งแต่เริ่มต้นขบ จนถึงสิ้นสุดการขบ ส่วนรูปทางด้านขวามือแสดงค่าสัดส่วนการแบ่งแรง โดยแสดงการขบ 2 รอบการขบ ลูกศรในรูปด้านซ้ายมือแสดงค่า  $k_{Eq1}$  และ  $k_{Eq2}$  ซึ่งเป็นค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่ฟันคู่ที่หนึ่งและคู่ที่สองตามลำดับ ตำแหน่งที่ลูกศรชี้ในรูปด้านซ้าย จะสอดคล้องกับตำแหน่งจุดในรูปด้านขวา ที่แสดงตำแหน่งการขบและการแบ่งแรงในขณะนั้น

ในรูปที่ 4.39 (ก) แสดงการขบที่ตำแหน่งเริ่มต้นขบของฟันคู่ที่ 1 ซึ่งในขณะนั้นมีค่าความแข็งเกร็ง  $k_{Eq1}$  ในเวลาเดียวกันนี้ฟันคู่ที่ 2 ขบอยู่ก่อนแล้ว โดยมีค่าความแข็งเกร็ง  $k_{Eq2}$  เนื่องจากตำแหน่งการขบของฟันคู่ที่ 1 เป็นการขบกันของโคนฟันและปลายฟันของเฟืองคู่ขบ ส่วนตำแหน่งการขบของฟันคู่ที่ 2 เป็นตำแหน่งที่ฟันทั้งคู่อยู่ใกล้กลางฟัน ทำให้ค่าความแข็งเกร็งรวมของฟันคู่ที่ 1 มีค่าน้อยกว่าฟันคู่ที่ 2 จึงมีการรับภาระที่น้อยกว่า โดยในตัวอย่างในรูป ที่ตำแหน่งนี้เฟืองคู่ที่ 1 รับภาระ 45% ส่วนฟันคู่ที่สองรับภาระที่ 55% เมื่อตำแหน่งการขบเปลี่ยนแปลงไปดังแสดงในรูปที่ 4.39 (ข) และ (ค) ตำแหน่งที่คู่ฟันขบกันและค่าความแข็งเกร็งจะมีค่าเปลี่ยนแปลงไป ส่งผลให้สัดส่วนการแบ่งภาระเปลี่ยนไปจาก 45:55 เป็น 50:50 และ 55:45 ตามลำดับ

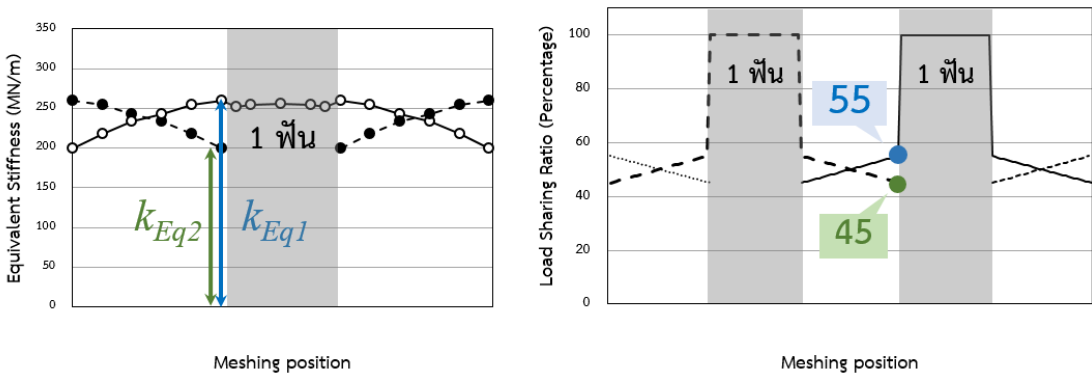
จะเห็นว่าสัดส่วนการแบ่งแรง ( $LSR$ ) จะเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งการขบ ดังนั้นเพื่อความเข้าใจโดยง่ายและสอดคล้องกับการเขียน  $LSR$  ดังที่ได้กล่าวมา สำหรับ  $LSR$  ที่กล่าวถึงในที่นี้จะหมายถึงอัตราส่วนการแบ่งแรงที่ตำแหน่งเริ่มต้นการขบเท่านั้น เช่น อัตราส่วนการแบ่งแรง 45 : 55 หมายถึง ที่ตำแหน่งเริ่มต้นการขบ ฟันที่เริ่มขบจะรับภาระ 45% ส่วนฟันที่ขบอยู่ก่อนจะรับภาระ 55%



(ก)



(ข)

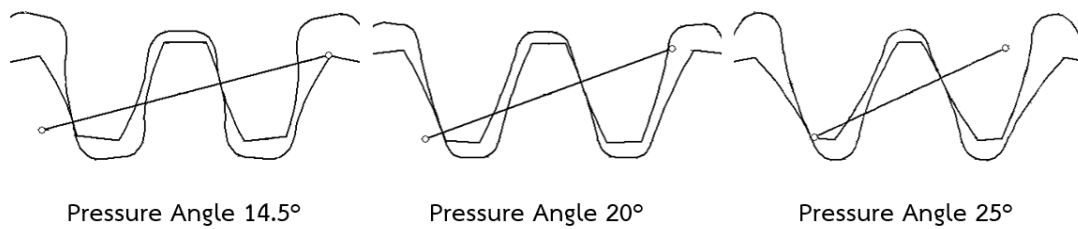


(ค)

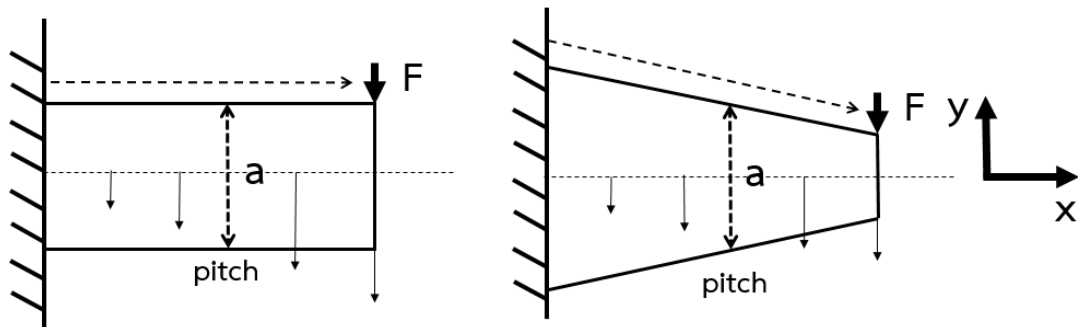
รูปที่ 4.39 สัดส่วนการแบ่งแรงระหว่างสองคู่ฟันเทียบกับค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่ฟันคู่ที่หนึ่งและสองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ

## 1. ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งแรง

ค่าของมุมกดจะส่งผลต่อรูปร่างของเฟือง โดยเมื่อเฟืองมีมุมกดมากขึ้น ซึ่งฟันจะแหลมขึ้นดังแสดงในรูปที่ 4.40 และสามารถเปรียบเทียบลักษณะของฟันกับคานตรงปกติในกรณีเฟืองที่มีมุมกดน้อย และคานที่มีปลายแหลมในกรณีที่มีมุมกดมากดังแสดงในรูปที่ 4.41 โดยระยะ  $a$  ในรูปสามารถเทียบได้กับความหนาของฟันที่มีมุมกดต่างกันซึ่งมีค่าเท่ากัน

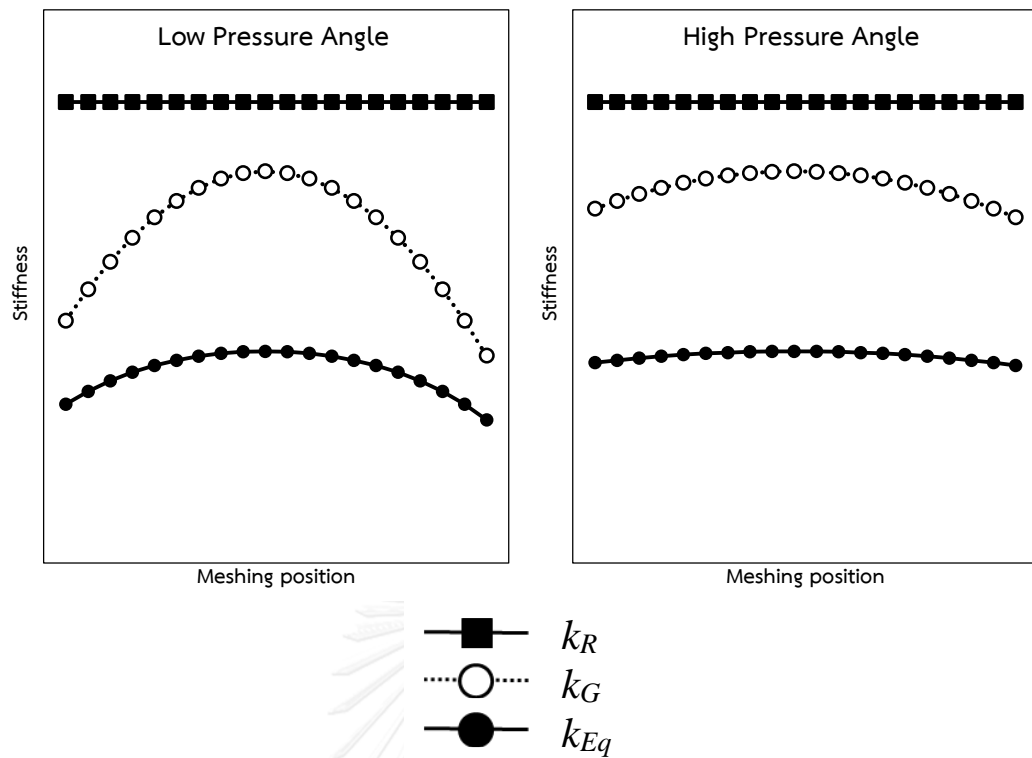


รูปที่ 4.40 ผลของมุมกดต่อรูปร่างเฟือง



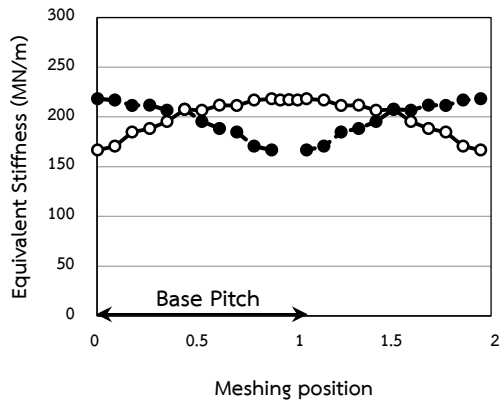
รูปที่ 4.41 การเปรียบเทียบผลของมุมกดเฟืองกับรูปร่างคานตรง

จากรูปที่ 4.41 พบว่าหากมีแรงกดที่ระยะห่างจากจุดรองรับเท่ากันทั้งในกรณีคานตรงและกรณีคานที่มีปลายแหลม คานที่มีปลายแหลมจะมีระยะโก่งตัวน้อยกว่า และมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่ากรณีคานตรง หรืออาจกล่าวได้ว่าค่าความแข็งแรงจากการดัดโค้งกรณีคานที่มีปลายแหลมในแต่ละตำแหน่งจะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่ากรณีของคานตรง เมื่อเปรียบเทียบกับเฟืองที่มีมุมกดต่างกัน เมื่อมุมกดมีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความแข็งแรงเฟือง  $k_G$  ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นหรือเมื่อแสดงด้วยกราฟในรูปที่ 4.42 ก็พบว่าลักษณะกราฟจะแบนราบมากขึ้น เนื่องจากเฟืองที่นำมาเปรียบเทียบผลของมุมกดมีค่าโมดูลและจำนวนฟันเท่ากัน ซึ่งแสดงว่าขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกเฟืองเท่ากัน ค่าความแข็งแรงจากการเสี้ยวรูปที่ขอบเฟือง  $k_R$  จึงมีค่าเท่ากัน เมื่อคิดผลรวมค่าความแข็งแรง  $k_{Eq}$  จึงมีค่าแบนราบมากขึ้นดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.42

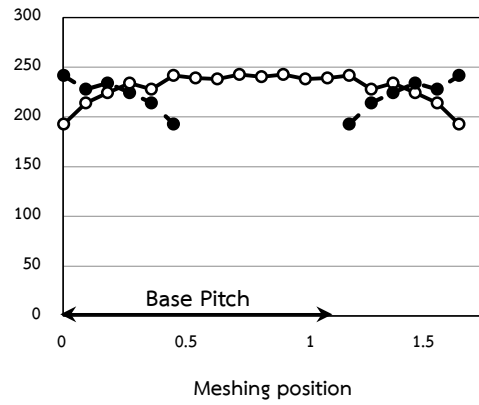


รูปที่ 4.42 ผลของมุมกดต่อค่าความแข็งเกร็งต่างๆ

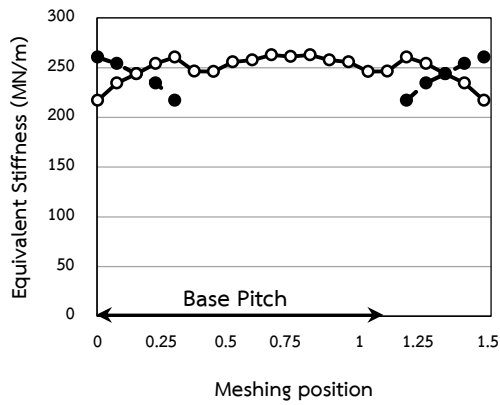
ด้วยสาเหตุข้างต้นทำให้ค่าความแข็งเกร็ง  $k_{Eq}$  ของเฟือง E ที่มีมุมกด 14.5 จึงมีลักษณะโค้งมากกว่าเฟือง A และ F ที่มีมุมกด 20 และ 25 องศาตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.43 ซึ่งแสดงผลของค่าความแข็งเกร็งที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และเมื่อเปรียบเทียบค่า  $k_{Eq}$  ของฟันคู่ที่ 1 และฟันคู่ที่ 2 ที่ขบในเวลาเดียวกันแล้วจะพบว่า กรณีที่มีมุมกดมากลักษณะกราฟจะแบนราบ ค่า  $k_{Eq}$  ของทั้ง 2 คู่ฟันจะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าซึ่งแสดงว่า  $LSR$  ในขณะนั้นมีค่าเข้าใกล้ 50 : 50 มากกว่า โดยวิธีการหาค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองของชุดเฟืองต่างๆ จะแสดงในภาคผนวก ซ.



(ก) Pressure Angle 14.5

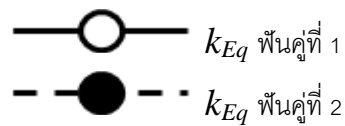


(ข) Pressure Angle 20



(ค) Pressure Angle 25

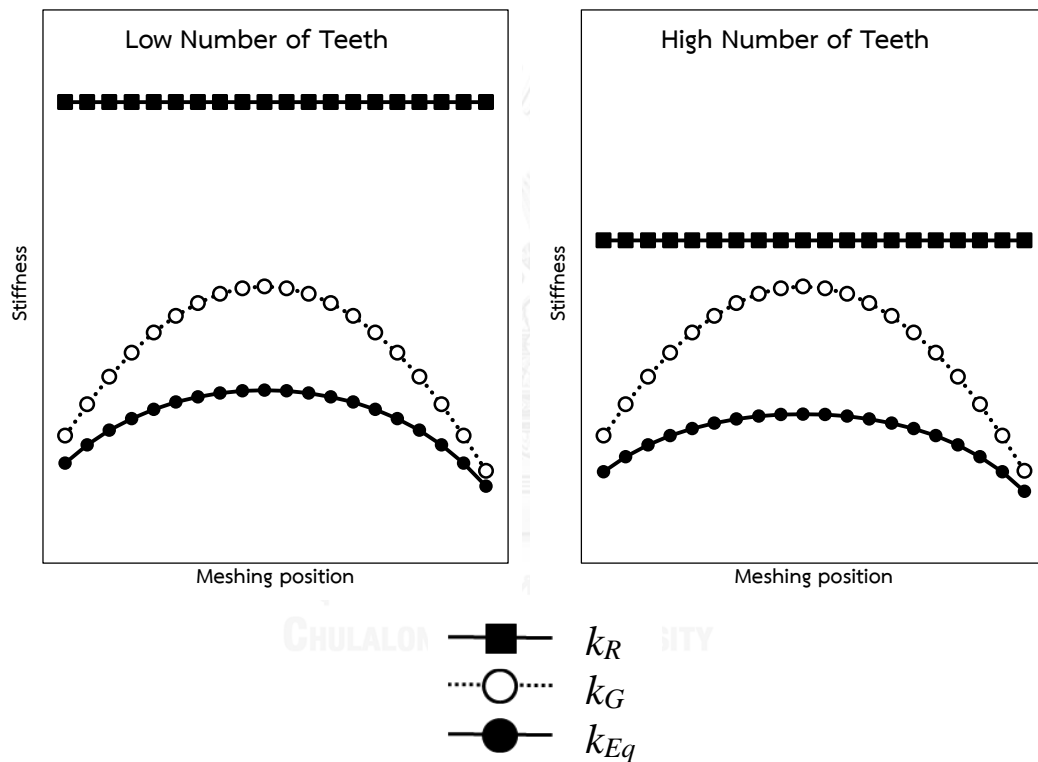
- (ก) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง E
- (ข) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง A
- (ค) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง F



รูปที่ 4.43 ค่าความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีมุมกดต่างๆ กันโดยคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

## 2. ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็ง

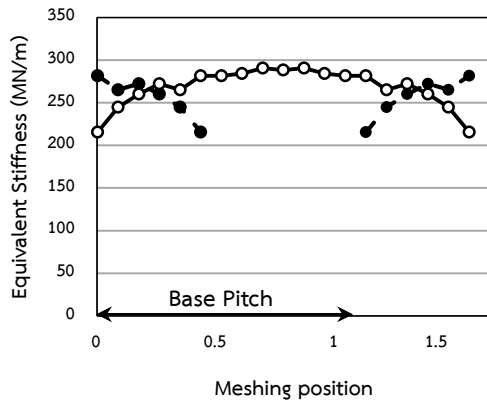
ค่าของจำนวนฟันจะส่งผลต่อขนาดของเฟือง โดยเมื่อจำนวนฟันมีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเฟืองจะมีขนาดใหญ่ขึ้นตามสมการที่ 4.1 เมื่อเฟืองมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่าความแข็งเกร็งจากการการเสียดรูปที่ขอบเฟือง  $k_R$  จะมีค่าน้อยลงและเนื่องจากเฟืองที่นำมาเปรียบเทียบมีค่าโมดูลและมุมกดเหมือนกัน ค่าความแข็งเกร็งเฟือง  $k_G$  จึงมีค่าเท่ากัน เมื่อคิดผลรวมค่าความแข็งเกร็งรวมของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม  $k_{Eq}$  จึงมีค่าแบนราบมากขึ้นดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.44



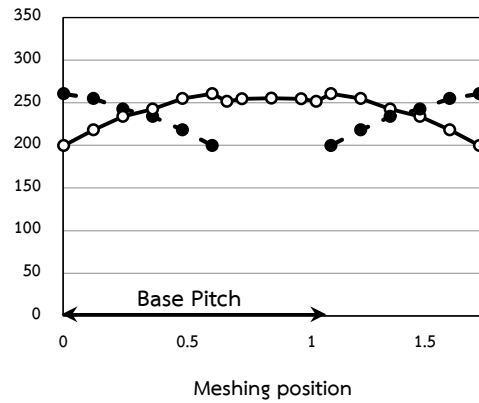
รูปที่ 4.44 ผลของจำนวนฟันต่อค่าความแข็งเกร็งต่างๆ

ด้วยเหตุนี้เฟือง B G และ H ที่มีจำนวนฟัน 30 45 และ 60 ซึ่งจึงมีลักษณะกราฟการเปลี่ยนแปลงความแข็งเกร็งตลอดช่วงการขบจากโค้งมากไปโค้งน้อยตามลำดับดังแสดงในรูปที่ 4.45 ซึ่งผลในกรณีนี้ก็เป็นเช่นเดียวกันกับผลของมุมกด ซึ่งในกรณีที่ลักษณะโค้งความแข็งเกร็งแบนราบจะมีอัตราส่วนการแบ่งแรง  $LSR$  เข้าใกล้ 50 : 50 มากกว่า

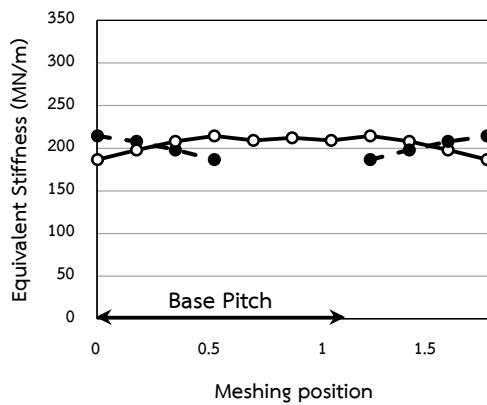




(ก) 30 Teeth

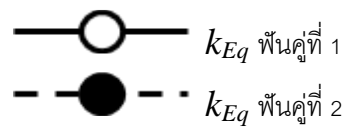


(ข) 45 Teeth



(ค) 60 Teeth

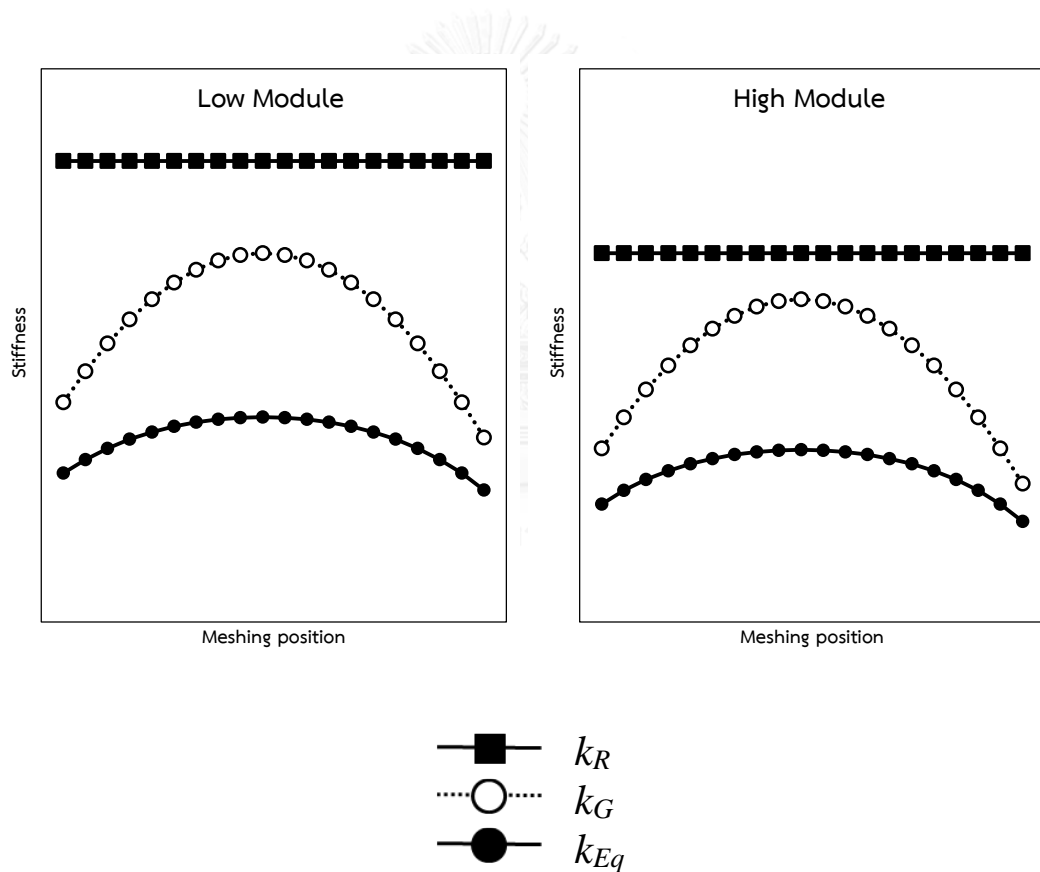
- (ก) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง B
- (ข) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง G
- (ค) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง H



รูปที่ 4.45 ค่าความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีมุมกดต่างๆ กันโดยคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

### 3. ผลของค่าโมดูลต่อค่าความแข็งแรง

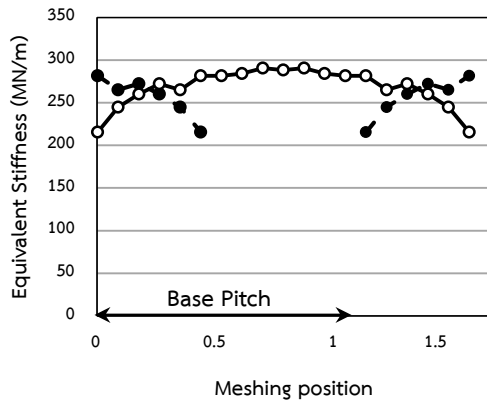
ค่าของโมดูลจะส่งผลกระทบต่อขนาดของทั้งพื้นเฟืองและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเฟือง โดยเมื่อโมดูลมีค่าเพิ่มขึ้น เฟืองจะมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่ขึ้นตามสมการที่ 4.1 และขนาดของซี่ฟันก็จะใหญ่ขึ้นเช่นกัน เมื่อเฟืองมีขนาดใหญ่มากขึ้นค่าความแข็งแรงจากการการเสีรูปที่ขอบเฟือง  $k_R$  จะมีค่าน้อยลงและค่าความแข็งแรงเฟือง  $k_G$  ก็จะมีค่าน้อยลงเช่นกันแต่มีค่าลดลงในสัดส่วนที่น้อยกว่าค่าความแข็งแรงจากการการเสีรูปที่ขอบเฟือง  $k_R$  ดังนั้นเมื่อคิดค่าความแข็งแรงรวมของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม  $k_{Eq}$  ค่าความแข็งแรงจะมีค่าแบนราบและมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 4.46



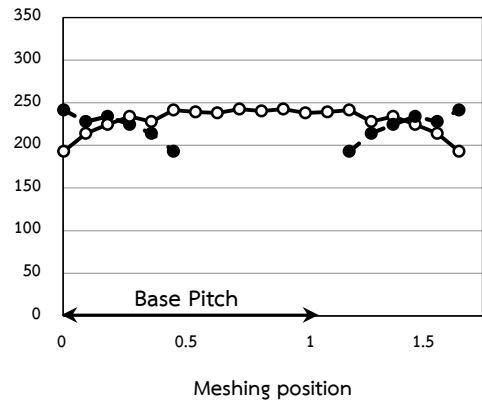
รูปที่ 4.46 ผลของโมดูลต่อค่าความแข็งแรงต่างๆ

เมื่อเปรียบเทียบผลของชุดเฟือง B A C และ D ที่มีโมดูลจาก 2 ถึง 5 ตามลำดับ จะเห็นว่าเฟืองที่มีโมดูลใหญ่ จะมีกราฟความแข็งแรงที่แบนราบกว่า เฟืองที่มีโมดูลเล็กกว่าอย่างชัดเจน ส่งผลให้อัตราส่วนการแบ่งแรง *LSR* ของเฟืองที่มีโมดูลใหญ่เข้าใกล้ 50 : 50 มากกว่าเฟืองที่มีโมดูลเล็ก ดังแสดงในรูปที่ 4.47

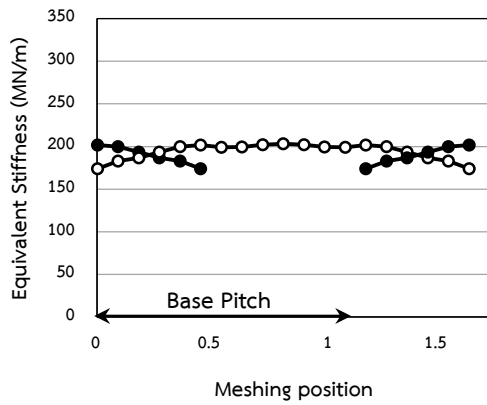




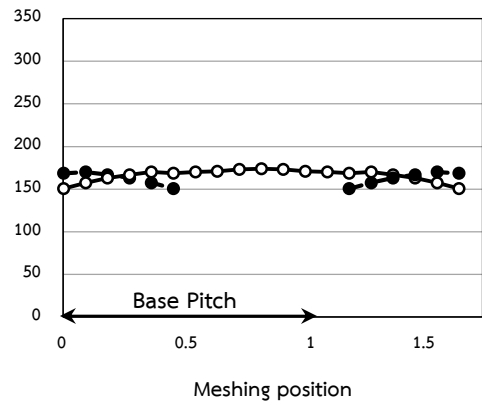
(ก) Module 2



(ข) Module 3

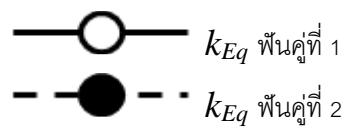


(ค) Module 4



(ง) Module 5

- (ก) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง B
- (ข) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง A
- (ค) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง C
- (ง) ค่าความแข็งเกร็งของชุดเฟือง D



รูปที่ 4.47 ค่าความแข็งเกร็งที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟืองที่มีโมดูลต่างๆ กันโดยคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 4.4 ผลการเปรียบเทียบการหาค่าความเค้นบนพื้นเฟืองตรงกับผลการทดลอง

Rameshkumar et al.

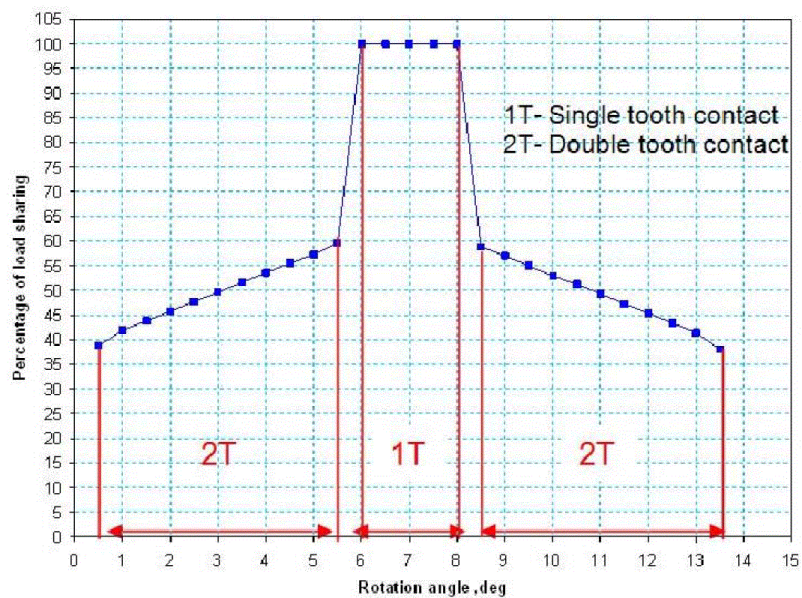
ในหัวข้อนี้จะแสดงผลการประยุกต์ใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์ และระเบียบวิธีการใช้ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากงานวิจัยนี้ กับชุดเฟืองของงานวิจัยอื่น เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์และตรวจสอบความถูกต้องน่าเชื่อถือของวิธีการที่ใช้ในการศึกษา สำหรับในที่นี่จะเปรียบเทียบกับผลของ Rameshkumar et al. [6]

Rameshkumar et al. ได้คำนวณและเปรียบเทียบค่าความเค้นสัมผัสและความเค้นดัดตลอดรอบการขบของฟันเฟืองตรง 2 ชุดเฟือง ชุดแรกเป็นชุดที่มีอัตราส่วนการขบสูง ส่วนชุดที่ 2 เป็นชุดที่มีค่าอัตราส่วนการขบปกติ ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยชุดเฟืองทั้งสองชุดถูกกำหนดให้มีค่าโมดูล จำนวนฟัน และระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางเท่ากัน แต่ในชุดเฟืองที่มีค่าอัตราส่วนการขบสูงกว่าถูกปรับเปลี่ยนค่า Addendum Factor สำหรับในที่นี่จะเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการคำนวณในกรณีชุดเฟืองที่มีอัตราส่วนการขบแบบปกติเท่านั้น โดยข้อมูลจำเพาะของชุดเฟืองตรงดังกล่าวแสดงได้ดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 ข้อมูลจำเพาะของชุดเฟืองตรงที่มีอัตราส่วนการขบปกติ

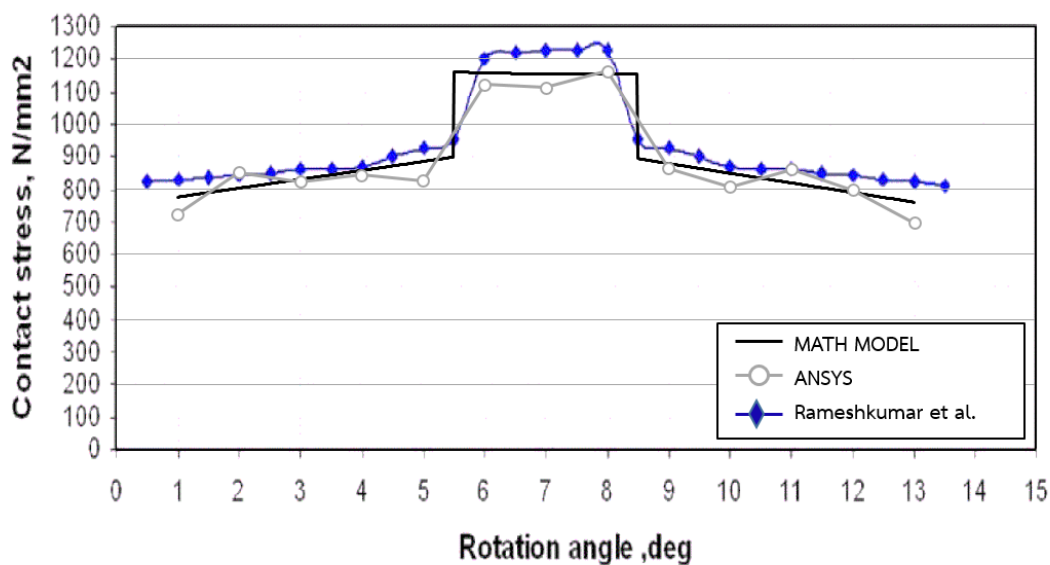
โมดูล (mm)	2.5
จำนวนฟันของเฟืองตาม (ฟัน)	50
จำนวนฟันของเฟืองขับ (ฟัน)	47
Profile Correction Factor (Gear)	0.1552
Profile Correction Factor (Pinion)	0.152
ความกว้างหน้าฟัน (mm)	18
ทอร์ก (N-m)	373
อัตราส่วนปัวซอง	0.3
ค่ายังโมดูลัส (GPa)	210

จากผลการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของ Rameshkumar ได้เก็บค่าแรงที่กระทำที่ตำแหน่งสัมผัสและหาค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงด้วย โดยสำหรับชุดเฟืองนี้มีค่าการแบ่งภาระขณะขบสองคู่ฟันเท่ากับ 40 : 60 ดังแสดงในรูปที่ 4.48



รูปที่ 4.48 อัตราส่วนการแบ่งแรงตลอดรอบการขบของชุดฟันเฟืองตรงที่มีอัตราส่วนการขบปกติ [6]

ผลการคำนวณความเค้นการสัมผัสตลอดรอบการขบของ Rameshkumar et al. และผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานศึกษานี้แสดงดังรูปที่ 4.49

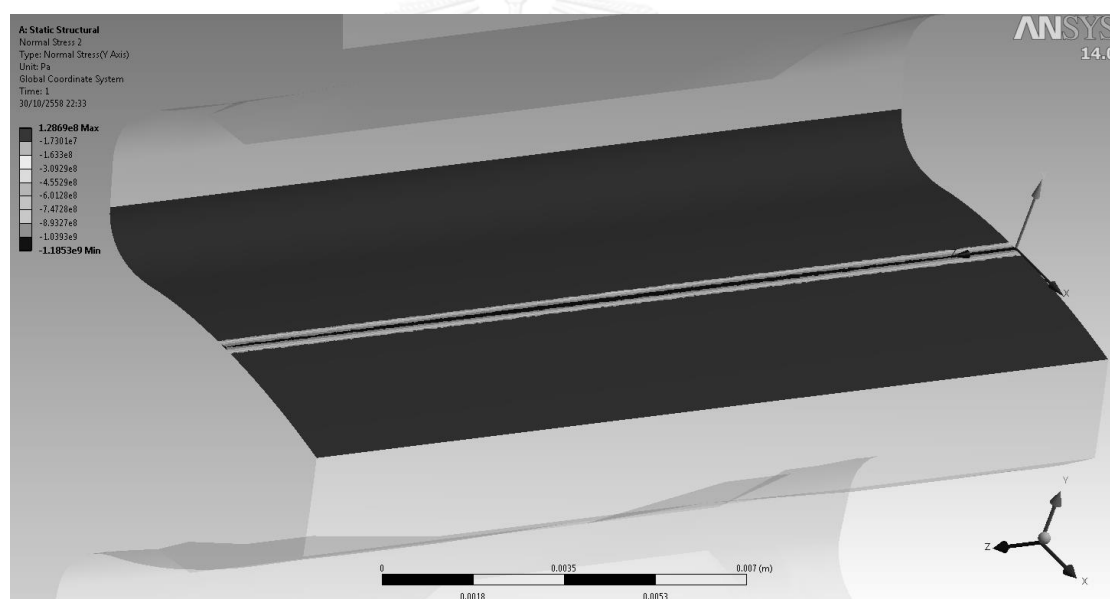


รูปที่ 4.49 ผลการคำนวณความเค้นสัมผัสจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เทียบกับผลของ Rameshkumar et al. [6]

จากรูปพบว่าค่าความเค้นการสัมผัสตลอดรอบการขบมีค่าสอดคล้องและใกล้เคียงกัน แสดงให้เห็นว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์และวิธีการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เสนอในงานวิจัยนี้มีความถูกต้องและน่าเชื่อถือ

#### 4.5 ผลการคำนวณปัญหาการขบกันของเฟืองกรณีสามมิติ

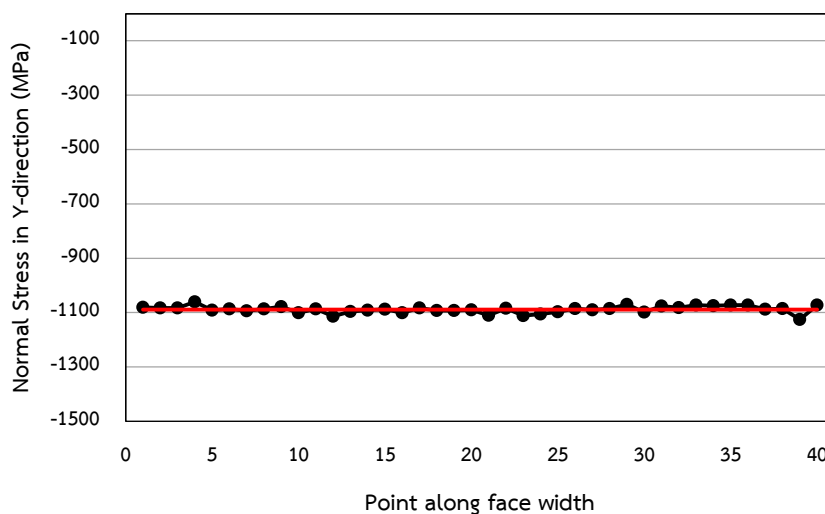
ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลการคำนวณปัญหาการสัมผัสกันของเฟืองตรงในกรณีสามมิติเพื่อเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในปัญหาเฟืองชนิดอื่นๆ ที่มีรูปร่างซับซ้อน เช่น เฟืองเฉียง ฯลฯ ซึ่งในกรณีเหล่านี้ไม่สามารถพิจารณาโมเดลปัญหาในลักษณะสองมิติได้ ในหัวข้อนี้ได้ทำการคำนวณที่ตำแหน่งพิตช์ของชุดเฟือง A โดยพิจารณาเป็นแบบสามมิติแล้วนำผลลัพธ์มาเปรียบเทียบกับผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ได้จากงานวิจัยนี้ การคำนวณทำโดยตั้งโปรแกรม ANSYS ตามข้อมูลจำเพาะและสภาวะการทำงานของชุดเฟืองตรง A ตามตารางที่ 4.3 ผลการคำนวณปัญหาการขบกันของเฟืองแสดงเป็นแถบสี โดยในที่นี้แสดงตัวอย่างผลการคำนวณความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y ดังแสดงในรูปที่ 4.50



รูปที่ 4.50 ผลการคำนวณความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y กรณีชุดเฟือง A ที่ตำแหน่งพิตช์แบบสามมิติ

จากรูปที่ 4.50 บริเวณแถบตรงกลางหน้าฟันจะปรากฏแถบที่มีค่าความเค้นสูงกว่าบริเวณข้างเคียงซึ่งในที่นี้ได้ทำการเก็บค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y จำนวน 40 จุดตลอดความกว้างหน้าฟันเพื่อแสดงเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 4.51





รูปที่ 4.51 ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y ตลอดความกว้างหน้าฟัน

จากรูปที่ 4.51 พบว่าค่าความเค้นตลอดแนวความกว้างหน้าฟันมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงว่าสมมุติฐานที่ให้แรงกระจายสม่ำเสมอตามแนวผิวสัมผัสมีความเหมาะสมและสามารถพิจารณาปัญหาเป็นแบบ Plain Strain ได้ ผลการคำนวณค่าความเค้นพอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวตั้งฉาก X Y และ Z จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าความแตกต่างระหว่างทั้งสองวิธีที่ตำแหน่งพิตช์ของชุดเฟืองตรง A แสดงในตารางที่ 4.7

ตารางที่ 4.7 ค่าความเค้นในแนวตั้งฉาก X Y และ Z จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และจากแบบจำลองคณิตศาสตร์และค่าความแตกต่างระหว่างทั้งสองวิธีที่ตำแหน่งพิตช์ของชุดเฟืองตรง A

ค่าความเค้นต่างๆ	แบบจำลองคณิตศาสตร์	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	ความแตกต่าง (%)
ความเค้นพอนมิสเชส	$4.6366 \times 10^8$ Pa	$4.2950 \times 10^8$ Pa	7.3687
ความเค้นในแกน X	$-1.1592 \times 10^8$ Pa	$-9.9265 \times 10^8$ Pa	14.364
ความเค้นในแกน Y	$-1.1592 \times 10^9$ Pa	$-1.0884 \times 10^9$ Pa	6.1057
ความเค้นในแกน Z	$-6.9550 \times 10^8$ Pa	$-6.2314 \times 10^8$ Pa	10.4028

จากตารางพบว่าค่าความเค้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่พิจารณาแบบสามมิติมีความสอดคล้องกับผลจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยมีค่าความแตกต่างระหว่างทั้งสองวิธีไม่เกิน 15% โดยระดับค่าที่แตกต่างกันในกรณีสามมิตินี้เกิดจากข้อจำกัดในการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์เนื่องจากขีดจำกัดของเครื่องคำนวณ

#### 4.6 สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงผลการคำนวณความเค้นจากการสัมผัสกันของพื้นเฟืองตรง โดยเริ่มจากการศึกษาปัญหาการกดกันอย่างง่ายของจานครึ่งวงกลมซึ่งพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกันซึ่งแสดงว่าวิธีการที่ใช้มีความถูกต้อง ต่อมาจึงได้ใช้วิธีการดังกล่าวกับปัญหาการขบกันของเฟืองตรงที่มีการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ต่างๆ ได้แก่ โมดูล มุมกด และจำนวนซี่ฟัน ผ่านการคำนวณในชุดเฟือง A - I เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์จากแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่อัตราส่วนการแบ่งแรงต่างๆ และผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว จะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีขนาดและแนวโน้มที่สอดคล้องกัน นอกจากนี้ยังได้คำนวณความแตกต่างระหว่างผลลัพธ์ซึ่งคำนวณโดยใช้อัตราส่วนการแบ่งแรงแตกต่างกัน ทำให้สามารถระบุอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ ได้ จากการศึกษาพบว่าชุดเฟือง A B และ E มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมคือค่า 33 : 67 ส่วนชุดเฟือง C D F G H และ I มีค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมคือค่าในช่วง 45 : 55 ถึง 50 : 50 และยังพบว่าเมื่อโมดูล มุมกดและจำนวนฟันมีค่าเพิ่มมากขึ้น อัตราส่วนการแบ่งแรงขณะเกิดการขบสองคู่ฟันจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น (เข้าใกล้ 50 : 50 มากขึ้น)

ในบทนี้ยังได้ตรวจสอบความน่าเชื่อถือของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยเมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากงานวิจัยนี้กับชุดเฟืองของ Rameshkumar et al. [6] ก็พบว่าผลที่ได้มีความสอดคล้องกันซึ่งยืนยันถึงความน่าเชื่อถือของวิธีทั้งสองจากงานวิจัยนี้

ในส่วนสุดท้ายของบทนี้ยังได้แสดงถึงการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการขบกันของเฟืองโดยพิจารณาเป็นแบบสามมิติ จากผลการคำนวณพบว่าค่าความเค้นตลอดหน้าฟันมีค่าใกล้เคียงกันซึ่งแสดงว่าสมมุติฐานการกระจายแรงสม่ำเสมอบนหน้าฟันเฟืองและการใช้สมมุติฐาน Plain Strain มีความเหมาะสม และยังแสดงให้เห็นถึงแนวทางในการประยุกต์ใช้กับเฟืองชนิดอื่นๆ ที่มีรูปร่างซับซ้อนและไม่สามารถคำนวณในแบบ 2 มิติได้อีกด้วย

## บทที่ 5

### บทสรุป

ในบทนี้เป็นการสรุปสาระสำคัญทั้งหมดในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ซึ่งเป็นการรวบรวมเนื้อหาสำคัญในแต่ละบท รวมถึงข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาความเค้นบนหน้าพื้นเพื่อต่อไป

#### 5.1 สาระสำคัญของวิทยานิพนธ์

ในบทที่ 2 ได้กล่าวถึงทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ที่อธิบายการหาค่าความเค้นในแกน X Y และ Z ซึ่งวางตัวตั้งฉากกับบริเวณผิวที่เกิดการสัมผัส และการหาค่าความยาวในแกนเอกและโทของผิววงรีที่เกิดจากการเสียรูปของวัตถุสองชิ้นที่ถูกกดอัดกันด้วยแรงภายนอก และได้อธิบายการประยุกต์ใช้ทฤษฎีดังกล่าวกับปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรงซึ่งรวมถึงการวัดคาร์ตมีการสัมผัสต่างๆ ของเฮิร์ตซ์สำหรับปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรงที่รัศมีการสัมผัสมีค่าเปลี่ยนแปลงตลอด รอบการขบสำหรับในงานนี้จะพิจารณาให้ผิวเฟืองไม่มีการทำคราบน้ำมัน ทำให้ปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรงสามารถพิจารณาเหมือนปัญหาการกดอัดกันของทรงกระบอกสองอันขบกัน ซึ่งทำให้สูตรคำนวณที่ใช้ในการหาค่าความเค้นและค่าการเสียรูปลดรูปลงอยู่ในรูปอย่างง่าย นอกจากการพิจารณารัศมีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์ที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลาตลอดรอบการขบในปัญหาการขบกันของเฟืองตรงแล้ว แรงที่เกิดบนพื้นก็มีการเปลี่ยนแปลงตลอดรอบการขบเช่นกัน เนื่องจากตำแหน่งการขบต่างๆ ของเฟืองตรงนั้นมีบางตำแหน่งที่เกิดการขบสองคู่ฟันและบางตำแหน่งที่เกิดการขบหนึ่งคู่ฟัน ซึ่งส่งผลต่อการแบ่งภาระของฟันเฟืองโดยสามารถพิจารณาหาช่วงการขบที่เกิดการขบหนึ่งคู่ฟัน และช่วงที่เกิดการขบสองคู่ฟันได้จากการพิจารณาอัตราส่วนการขบของเฟือง โดยในการศึกษานี้ได้พิจารณาอัตราส่วนการแบ่งในช่วงที่เกิดการขบสองคู่ฟันในค่าต่างๆ ได้แก่ 33 : 67 45 : 55 และ 50 : 50 ตามการศึกษาของ Pedrero et al. [10] Lazovic et al. [11] และ ชนิดต์ และคณะ [9] ตามลำดับ

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และประดิษฐ์โปรแกรม MATLAB จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีของเฮิร์ตซ์ในปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรง โดยขั้นตอนการคำนวณของโปรแกรมเริ่มจากการป้อนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟือง สภาพการทำงานของเฟือง และค่าอัตราส่วนการแบ่งแรง หลังจากนั้นโปรแกรมจะคำนวณเรขาคณิตของเฟือง รัศมีการสัมผัส และคำนวณหาตำแหน่งที่เกิดการขบหนึ่งคู่ฟันและสองคู่ฟัน เพื่อคำนวณแรงที่เกิดขึ้นในแต่ละตำแหน่งตามค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงตลอดหนึ่งรอบการขบ หลังจากนั้นจึงคำนวณค่าพารามิเตอร์ของการสัมผัส เช่น ค่าความ

กว้างผิวสัมผัสที่เสีรูป แล้วจึงคำนวณค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z และค่าความเค้นพอนมิสเชส โดยโปรแกรมจะดำเนินขั้นตอนการคำนวณที่ละตำแหน่งการขบไปเรื่อยๆ จนครบรอบการขบของเฟือง

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาและการใช้โปรแกรม ANSYS ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการสัมผัสของเฟืองตรง เนื่องจากปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหาของแข็งแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งต้องใช้ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการแก้ปัญหาซึ่งใช้เวลาในการคำนวณมาก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงตั้งสมมุติฐานสำหรับปัญหาเฟืองตรง โดยพิจารณาปัญหาการสัมผัสของฟันเฟืองตรงเป็นปัญหาความเครียดในเชิงระนาบแบบสองมิติซึ่งช่วยลดเวลาในการคำนวณลง นอกจากนั้นในงานวิจัยนี้ยังได้พิจารณาปัญหาเป็นแบบใกล้เคียงสภาวะหยุดนิ่ง (Quasi-Static) โดยคำนวณที่ละตำแหน่งการขบของเฟืองจนครบรอบการขบ

ในส่วนของการใช้โปรแกรม ANSYS ในการแก้ปัญหาการขบกันของเฟืองตรงมีขั้นตอนเริ่มจากการสร้างชุดโมเดลเฟือง และการประกอบในตำแหน่งการขบที่ต้องการวิเคราะห์ และนำเข้ามาในโปรแกรม ANSYS หลังจากนั้นจึงทำการตั้งคุณสมบัติของวัสดุให้ตรงกับปัญหาการขบกันของเฟือง ต่อมาจึงทำการแบ่งเอลิเมนต์ของโมเดลเฟืองโดยในปัญหานี้มีการแบ่งจำนวนเอลิเมนต์จำนวนมากที่บริเวณผิวที่เกิดการสัมผัส โดยได้คำนึงถึงจำนวนเอลิเมนต์จะต้องมีความละเอียดมากพอเมื่อเทียบกับขนาดของโมเดลเฟือง รวมถึงต้องคำนึงระยะเวลาในการคำนวณที่ต้องใช้ด้วย ต่อมาจึงทำการกำหนดลักษณะการสัมผัส โดยในการศึกษาได้เลือกการสัมผัสเป็นแบบ Frictionless เนื่องจากไม่พิจารณาผลของแรงเสียดทานที่เกิดขึ้น ต่อมาจึงทำการตั้งเงื่อนไขขอบเขตของโมเดลได้แก่ การติดตั้งจุดรองรับแบบ Fixed Support ที่รูเพลลาของเฟืองตาม และจุดรองรับแบบ Frictionless Support ที่รูเพลลาของเฟืองขับเพื่อจำลองการขบอัดของชุดเฟือง นอกจากนั้นยังติดตั้งแรงที่สมมูลกับทอร์กที่ตำแหน่งร่องลิ้มทั้งสองบริเวณใกล้กับรูเพลลาของเฟืองขับ ขั้นตอนสุดท้ายคือการเลือกดูผลลัพธ์ซึ่งในปัญหาเชิงโครงสร้างสามารถเลือกดูค่าเคลื่อนตัว ค่าความเครียด และค่าความเค้นต่างๆ ได้ โดยในการศึกษานี้ได้พิจารณาค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z และค่าความเค้นพอนมิสเชสเพื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าจากการคำนวณโดยใช้แบบจำลองคณิตศาสตร์

ในบทที่ 4 ได้แสดงผลการศึกษาอย่างง่ายของปัญหาการสัมผัสกันของจานครึ่งวงกลมสองอัน โดยผลจากวิธีการวิเคราะห์โดยทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าใกล้เคียงกันซึ่งแสดงว่าวิธีการที่ใช้มีความถูกต้อง นอกจากนั้นในบทนี้ยังได้แสดงผลการคำนวณค่าความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y Z และค่าความกว้างของการเสีรูปของชุดเฟืองต่างๆ จากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และจากแบบจำลองที่อัตราส่วนการแบ่งแรงค่าต่างๆ จากผลการทดลองทั้งสองวิธีพบว่าค่าที่คำนวณได้สอดคล้องกัน โดยมีลักษณะเป็นขั้นบันไดโดยจะมีค่ามาก

เมื่อเกิดการขบหนึ่งคู่ฟันและจะมีค่าน้อยลงเมื่อเกิดการขบสองคู่ฟัน นอกจากนั้นยังได้แสดงการเลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมของชุดเฟืองนั้นๆ โดยพิจารณาจากความแตกต่างที่น้อยที่สุดของผลลัพธ์ระหว่างสองวิธี โดยเมื่อพิจารณาระหว่างพารามิเตอร์ของเฟืองกับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงพบว่าเมื่อโมดูล มุมกด และจำนวนฟันของชุดเฟืองมีค่าเพิ่มขึ้นค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะเกิดการขบสองคู่ฟันจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น

โดยสรุป งานศึกษาชิ้นนี้ได้สร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์จากทฤษฎีการสัมผัสของเฮิร์ตซ์และศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการศึกษาปัญหาการสัมผัสอย่างง่ายและการสัมผัสของฟันเฟืองตรงทั้งหมด 9 ชุดที่มีการเปลี่ยนพารามิเตอร์เฟืองต่างๆ โดยเปลี่ยนค่าโมดูลตั้งแต่ 2 ถึง 5 มม. มุมกดเท่ากับ  $14.5^{\circ}$   $20^{\circ}$  และ  $25^{\circ}$  และจำนวนฟันในช่วง 30 ถึง 60 ซี่ โดยคำนวณที่ภาระ 250 N-m วิธีทั้งสองที่ได้จากงานศึกษาชิ้นนี้สามารถคำนวณค่าความเค้นบนฟันเฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ได้ จากผลการคำนวณพบว่าผลจากทั้งสองวิธีนั้นมีความสอดคล้องกันโดยมีค่าความแตกต่างไม่เกิน 15% ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะสามารถคำนวณความเค้นจากการสัมผัสได้อย่างแม่นยำก็ต่อเมื่อทราบอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสม ดังนั้นเมื่อคำนวณผลลัพธ์จากวิธีทั้งสองจึงนำผลมาเปรียบเทียบกันเพื่อหาอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสม โดยค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนี้ได้ถูกใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนการแบ่งแรงและพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟือง โดยพบว่าเมื่อโมดูล มุมกด หรือจำนวนฟันเพิ่มขึ้น อัตราส่วนการแบ่งแรงขณะการขบสองคู่ฟันจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ค่า 50:50 มากขึ้น อย่างไรก็ตามชุดเฟืองที่คำนวณในการศึกษานี้ยังมีจำนวนไม่มากพอ ดังนั้นในงานวิจัยในอนาคต หากคำนวณจุดคำนวณมากขึ้น ก็อาจสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์เฟืองกับอัตราส่วนการแบ่งแรงได้ถูกต้องมากยิ่งขึ้น ซึ่งก็จะทำให้การคำนวณความเค้นโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทำได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น และเมื่อเปรียบเทียบกับ การคำนวณโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แล้ว การคำนวณโดยแบบจำลองคณิตศาสตร์สามารถทำได้อย่างรวดเร็วและสามารถนำค่าไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอย่างอื่นได้สะดวกกว่า

สำหรับปัญหาที่ซับซ้อนที่ไม่สามารถลดรูปได้โดยง่าย การคำนวณโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสามมิติ ยังมีความจำเป็น ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้ประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับปัญหาการสัมผัสของเฟืองในแบบสามมิติ จากผลการคำนวณพบว่า การกระจายความเค้นบนหน้าฟันมีค่าสม่ำเสมอ นอกจากนั้นจากวิธีการดังกล่าวยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับชุดเฟืองชนิดอื่นๆ ที่ไม่สามารถลดรูปปัญหาเป็นแบบสองมิติได้

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะเพื่อให้นักวิจัยที่จะทำต่อเนื่องมีผลลัพธ์ที่ดีขึ้นดังนี้

1. ในการศึกษาเกี่ยวกับพารามิเตอร์ต่างๆ ของเฟืองกับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรง จำเป็นต้องมีการคำนวณความเค้นของชุดเฟืองเพิ่มขึ้นโดยการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เมื่อมีจำนวนข้อมูลของชุดเฟืองเพียงพอ ก็จะสามารถทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ต่างๆ กับค่าอัตราส่วนการแบ่งแรงได้ดียิ่งขึ้น
2. ในการคำนวณแบบสามมิติ ค่าความเค้นที่คำนวณได้มีความแตกต่างจากค่าจากแบบจำลองอยู่ในระดับไม่เกิน 15% ซึ่งน่าจะเป็นผลมาจากการแบ่งเอลิเมนต์ที่ไม่เพียงพอเนื่องจากข้อจำกัดของขีดความสามารถของเครื่องคำนวณ ดังนั้นถ้าสามารถเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ที่แบ่งบริเวณผิวสัมผัสเพิ่มขึ้น ก็น่าจะส่งผลให้คำนวณผลลัพธ์จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ใกล้เคียงผลจากแบบจำลองมากขึ้นได้

## รายการอ้างอิง

- [1] V. Karaveer, A. Mogrekar and T. P. R. Joseph, "Modeling and Finite Element Analysis of Spur Gear", *International Journal of Current Engineering and Technology*, vol. 3, 2013.
- [2] V. Nikolic-Stanojevic and I. Cvejic, "The Analysis of Contact Stress on Meshed Teeth's Flanks Along The Path of Contact For a Tooth Pair", *Mechanics, Automatic Control and Robotics*, vol. 3, pp. 1055-1066, 2003.
- [3] X. Feng, "Analysis of Field of Stress and Displacement in Process of Meshing Gears", *International Journal of Digital Content Technology and its Applications*, vol. 5, 2011.
- [4] X. Li, S. Jiang, C. Li and B. Huang, "Statics Analysis of Cylindrical Gear Drive at any Meshing Position Based on ANSYS", *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, vol. 47, 2013.
- [5] A. R. Hassan, "Contact Stress Analysis of Spur Gear Teeth Pair", *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 3, 2009.
- [6] M. Rameshkumar, G. Venkatesan and P. Sivakumar, "Finite Element Analysis of High Contact Ratio Gear", American Gear Manufactures Association, 500 Montgomery Street, Suite 350 Alexandria, Virginia 2010.
- [7] B. Rebbeschi, F. B. Oswald and D. P. Townsend, "Measurement of Gear Tooth Dynamic Friction", *Seventh International Power Transmission and Gearing Conference*, San Diego, California, 1996.
- [8] V. Spitas, A. Papadopoulos, C. Spitas and T. Costopoulos, "Experimental Investigation of Load Sharing in Multiple Gear Tooth Contact Using the Stress-Optical Method of Caustics", *An International Journal for Experimental Mechanics*, vol. 47, pp. 227-233, 2011.
- [9] ชนัตต์ รัตนสุมาวงศ์, ศิริพงษ์ ลิ้มปรีชญาณูญา, พงศ์ธร จุณณะภาต, และ ภัทรพงษ์ โจรนพวรรณทิพย์., "แบบจำลองเพื่อประเมินกำลังสูญเสียจากการส่งกำลังด้วยเฟืองตรง" การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 22. ตุลาคม 2008, มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต, 2008.

- [10] J. I. Pedrero, M. Pleguezuelos, M. Artes and A. Antona, "Load Distribution Model Along the Line of Contact for Involute for Involute External Gears", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, p. 14, 2010.
- [11] M. Ristivojevic, T. Lazovic and A. Vencl, "Studying the Load Carrying Capacity of Spur Gear Tooth Flanks", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 59, p. 13, 2013.
- [12] A. Kurasako, M. Owashii, Y. Sakai, Y. Mihara and H. Ohue, "Measurement of Contact Pressure Distribution between Spur Gear Teeth using Multi-point Thin-film Sensor", *TNI Journal of Engineering and Technology*, vol. 2, 2014.
- [13] A. P. Boresi and R. J. Schmidt, *Advanced Mechanics of Materials*. United States of America, John Wiley & Sons, Inc., 2003.
- [14] N. Ponchai, S. Phongsupasamit and C. Ratanasumawong, "Improvement of a Mathematical Model for Estimation of Sliding Loss in Spur Gear Pair", *The 4 th TSME International Conference on Mechanical Engineering (TSME-ICoME 2013)*, Pattaya, Chonburi, 2013.10.
- [15] H. R. Thomas and V. A. Hoersch, "Stresses due to the Pressure of One Elastic Solid on Another", University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana-Champaign Library 15 June 1930.
- [16] วรวิทย์ อิงภากรณ์ และ ชาญ ถนัดงาน, การออกแบบเครื่องกล เล่ม 2. กรุงเทพฯ, ซีเอ็ดดูเคชั่น, 2523.
- [17] Camnetics, Inc., "GearTrax2008" (Computer Software), 2008.
- [18] Dassault Systemes, "CATIA" (Computer Software), vol. 5.20, 2009.
- [19] SAS IP, Inc., "ANSYS Workbench" (Computer Software), 2011.
- [20] H. N. Ozguvent. and D. R. Houser, "Dynamic Analysis of High Speed Gears by Using Loaded Static Transmission Error", *Journal of Sound and Vibration*, pp. 71-83, 1988.





ภาคผนวก

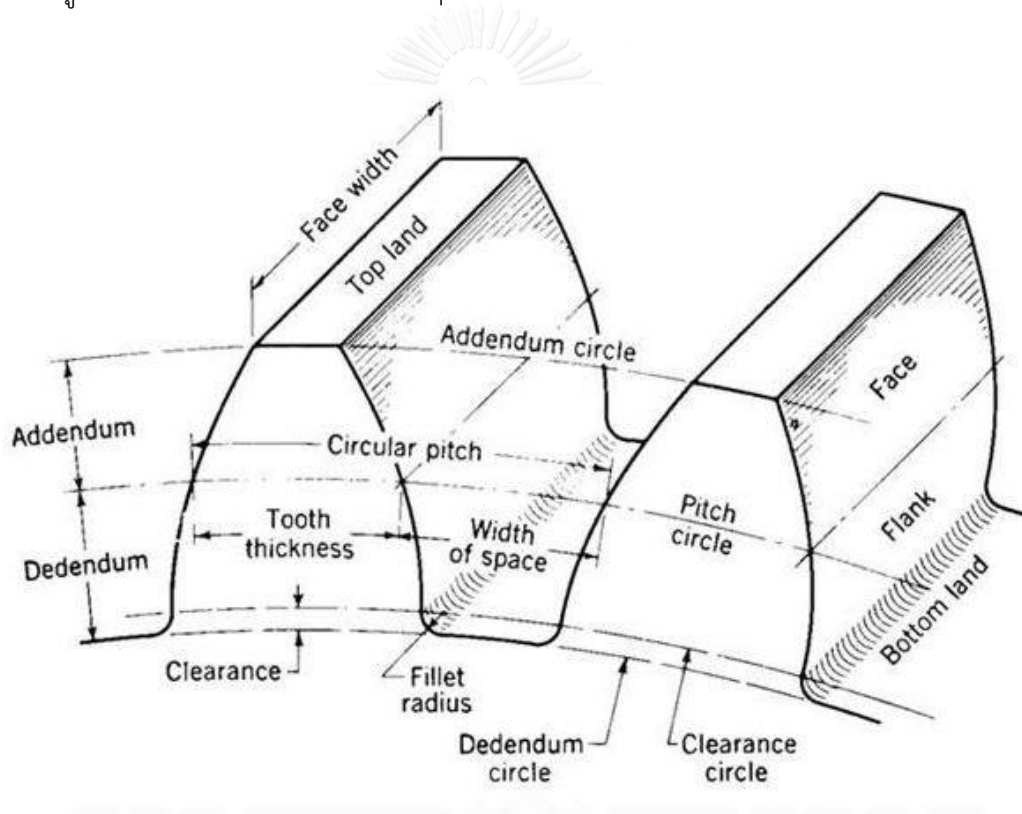
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
CHULALONGKORN UNIVERSITY

### ภาคผนวก ก.

#### คำจำกัดความของเฟือง (Gear Definitions)

เฟืองเป็นอุปกรณ์สำคัญในเครื่องจักรกลต่างๆ โดยใช้ทำหน้าที่หมุนจากเพลลาหนึ่งไปอีกเพลลาหนึ่งเพื่อส่งกำลัง โดยส่วนใหญ่เฟืองขับ (Driving Gear) หรือที่นิยมเรียกว่าพินเนียน (Pinion) จะมีขนาดเล็กกว่าเฟืองตาม (Driven Gear) หรือที่นิยมเรียกว่าเกียร์ (Gear)

ก่อนที่จะศึกษาเกี่ยวกับเฟืองควรมีความรู้คำจำกัดความเรียกชื่อในส่วนต่างๆ ของเฟืองดังแสดงในรูปที่ ก.1 ซึ่งจะอธิบายในส่วนต่างๆ ของเฟืองดังนี้



รูปที่ ก.1 การเรียกชื่อส่วนต่างๆ ของเฟือง [16]

### 1. วงกลมพิตช์ (Pitch Circle)

- ใช้ในการบอกขนาดของเฟืองโดยบอกขนาดของเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ (Pitch Diameter)

### 2. โมดูล (module) $m$

- เป็นอัตราส่วนระหว่างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์กับจำนวนฟัน โดยหน่วยที่ใช้วัดคือ มิลลิเมตร (mm) โมดูลมักใช้ในการบอกขนาดเฟืองในระบบเอสไอ (SI System)

$$m = \frac{d}{N} = \frac{2r_p}{N} \quad (\text{ก.1})$$

เมื่อ	$d$	คือเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ที่มีหน่วยเป็นมิลลิเมตร (mm)
	$N$	คือจำนวนฟัน
	$r_p$	คือรัศมีพิตช์

### 3. ไดอะมิทริคัลพิตช์ (Diametral Pitch) $P$

- เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนฟันกับขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ หรือส่วนกลับของ โมดูล โดยมีหน่วยที่ใช้วัดเป็นนิ้ว (inch) ไดอะมิทริคัลพิตช์ใช้ในการบอกขนาดเฟืองใน หน่วยอังกฤษ (British Units)

$$P = \frac{N}{d} = \frac{N}{2r_p} = \frac{1}{m} \quad (\text{ก.2})$$

เมื่อ	$d$	คือเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ ที่มีหน่วยเป็นนิ้ว (inch)
	$m$	คือโมดูลที่มีหน่วยเป็นนิ้ว (inch)

#### 4. เซอร์คิวลาพิทช์ (Circular Pitch) $p$

- ระยะที่วัดบนวงกลมพิทช์จากฟันหนึ่งไปยังอีกซี่หนึ่ง ณ ตำแหน่งเดียวกันซึ่งสามารถหาได้โดยสมการ

$$p = \frac{\pi d}{N} = \frac{2\pi r_p}{N} = \pi m \quad (\text{ก.3})$$

ดังนั้น

$$Pp = m \quad (\text{ก.4})$$

#### 5. เซอร์คิวลาพิทช์เบสหรือเบสพิทช์ (Circular Pitch Base or Base Pitch) $p_b$

- ระยะที่วัดบนวงกลมเบสจากฟันหนึ่งไปยังอีกซี่หนึ่ง ณ ตำแหน่งเดียวกันซึ่งสามารถหาได้โดยสมการ

$$p_b = \frac{2\pi r_b}{N} \quad (\text{ก.5})$$

เมื่อ  $r_b$  คือรัศมีเบส (Base Radius) สามารถคำนวณได้โดย

$$r_b = r_p \cos \phi \quad (\text{ก.6})$$

#### 6. แอดเดนดัม (Addendum)

- ระยะที่วัดในแนวรัศมีจากวงกลมพิทช์ถึงยอดฟัน (Top Land)

#### 7. ดีเดนดัม (Dedendum)

- ระยะที่วัดในแนวรัศมีจากวงกลมพิทช์ถึงโคนฟัน (Bottom Land)

#### 8. เคลียร์นซ์ (Clearance)

- ผลต่างระหว่างค่าดีเดนดัม (Dedendum) กับค่าแอดเดนดัม (Addendum)

#### 9. แบ็คแลช (Backlash)

- ผลต่างระหว่างความกว้างช่องว่างระหว่างคู่ฟันกับความกว้างของฟันที่เกิดการขบ โดยวัดตามแนวเส้นวงกลมพิทช์

#### 10. ความหนาของฟัน (Face Width)

- ความหนาของฟันเพื่อวัดในแนวทิศทางเดียวกับแกนเฟือง

#### 11. แฟล็งค์ (Flank)

- ผิวด้านข้างของฟันเฟือง

## 12. อัตราทด (Velocity Ratio) $m_w$

- อัตราส่วนความเร็วเชิงมุมของเฟืองขับต่อความเร็วเชิงมุมของเฟืองตาม

$$m_w = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{ก.6})$$

เมื่อ ดรรชนีล่าง (Subscript) “1” และ “2” คือเฟืองขับและเฟืองตามลำดับ

$\omega$  คือความเร็วเชิงมุม (rad/s)

$n$  คือความเร็วรอบ (rpm)

$d$  คือเส้นผ่านศูนย์กลางพิตช์ (mm หรือ inch)

$N$  คือจำนวนฟัน

## 13. อัตราส่วนเฟือง (Gear Ratio) $m_g$

- อัตราส่วนระหว่างจำนวนฟันบนเฟืองตามหรือเกียร์ (Gear) ต่อจำนวนฟันบนเฟืองขับหรือพินเนียน (Pinion)

$$m_g = m_w = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{ก.7})$$

## ภาคผนวก ข.

### โปรแกรมแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณการสัมผัสกันของฟันเฟืองตรง

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างโปรแกรมแบบจำลองคณิตศาสตร์ โดยอาศัยทฤษฎีความเค้นของเฮิร์ตซ์ เพื่อคำนวณความเค้นที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของเฟืองตรง ขั้นตอนการคำนวณเริ่มโดยการใส่ค่าพารามิเตอร์เฟืองต่างๆ สภาวะการทำงาน และอัตราส่วนการแบ่งแรงขณะการขบสองคู่ฟัน หลังจากนั้นโปรแกรมจะทำการคำนวณเรขาคณิตของเฟืองต่างๆ รัศมีการสัมผัส และแรงที่เกิดขึ้นบนหน้าฟัน ณ ตำแหน่งการขบนั้นๆ หลังจากนั้นจึงคำนวณค่าความเค้นต่างๆ และค่าความกว้างผิวที่เสียรูป โดยคำนวณที่ละตำแหน่งการขบไปเรื่อยๆ จนครบรอบการขบของฟันเฟือง โดยรายละเอียดของโปรแกรมแสดงได้ดังนี้

```
%Gear Parameters
%=====
N1 = input('Number of Teeth of Pinion (N1) : ');%30
N2 = input('Number of Teeth of Gear (N2) : ');%30
m1 = input('Gear Module (m) : ');%3
PAdeg = input('Pressure Angle (PA) (Degree) : ');%20
PA = PAdeg*pi/180; %pressure angle (radain)
FW = input('Face Width (FW) (mm) : ');%20
T = input('Torque (T) (N-m) : ');%250
inputLSS = input('Load Sharing at Start (LSS) (Percent) : ');%0.33 ;
LSS = inputLSS/100;
inputLSE = input('Load Sharing at End (LSE) (Percent) : ');%0.66 ;
LSE = inputLSE/100;
v = input('Poisson Ratio (v) : '); %0.3 Structural steel
E = input('Young Modulus (E) (GPA) : '); %200
E = E*(10^9);

%=====

%Gear Geometry
%velocity ratio,gear ratio mw = w1/w2 = n1/n2 = d2/d1 = N2/N1
%1 = pinion , 2 = Gear
% w (angular velocity) (rad/s)
% n (gear speed ความเร็วรอบ)(rpm)
% d (diameter of pitch circle) (mm)
% N (number of teeth)
mw = N2/N1 ;
Rp1 = m1*N1/2 ; %Radius of pitch circle (pinion) (mm)
Rp2 = m1*N2/2 ; %Radius of pitch circle (gear) (mm)
Rb1 = Rp1*cos(PA) ; %Radius of base circle (pinion) (mm)
Rb2 = Rp2*cos(PA) ; %Radius of base circle (gear) (mm)
pb = 2*pi*Rb1/N1 ; %Circular pitch of base circle (mm)
pp = 2*pi*Rp1/N1 ; %Circular pitch of pitch circle (mm)
```

```

n1p = Rp1*sin(PA) ; %ระยะจากเบสถึงพิตช์ (pinion) (mm)
n2p = Rp2*sin(PA) ; %ระยะจากเบสถึงพิตช์ (gear) (mm)
ap = sqrt((Rp1 + m1)^2 - Rb1^2) - n1p; %ระยะของ a ถึง p (mm)
bp = sqrt((Rp2 + m1)^2 - Rb2^2) - n2p; %ระยะของ b ถึง p (mm)
%หาอัตราส่วนการขบ
mc = (ap+bp)/pb;
%หาตำแหน่งที่มีการขบ 2 ฟันและหนึ่งฟัน

%=====

%Calculation
step = pb/400 ; %แบ่ง Circular pitch of base circle ออกเป็น 400 ส่วน (mm)
rc1 = n1p:-step:n1p-ap;
rc2 = n1p+step:step:n1p+bp;
r1 = cat(2,fliplr(rc1),rc2);
rc1 = n2p:step:n2p+ap;
rc2 = n2p-step:-step:n2p-bp;
r2 = cat(2,fliplr(rc1),rc2);

%two คือเฟืองขบ 2 ฟันแบ่ง 2 ด้าน
two = round((length(r1)*(mc-1))/2); %จำนวนจุดที่เกิดการขบสองฟันแล้วแต่รูปทรงฟันเฟือง
%cylindrical contact area

r1_inv = 1./(r1*0.001); % (m^-1)
r2_inv = 1./(r2*0.001); % (m^-1)

delta = (4.*(1-v^2)./E)./(r1_inv+r2_inv);

b_Herz = r1.*0; % (m)
P_Herz = r1.*0; % (N)
m1 = (LSE-LSS)/(two-1); %ความชันช่วงขบสองฟัน ช่วงแรก
m2 = (LSS-LSE)/(two); %ความชันช่วงขบสองฟัน ช่วงสอง
for i = 1:1:length(r1)
    if (i <= two)%ช่วง 1 ขบ 2 ฟัน
        % i=1 LSS (load sharing ratio) = 0.33 , i = two LSE = 0.66

        P_Herz(i) = T/(Rb1*0.001)*(m1*i+LSS-m1); % (N)
        b_Herz(i) = ((2*P_Herz(i).*delta(i))/(pi*FW*0.001))^0.5;

    elseif (i >= length(r1)-two) %ช่วง 3 ขบ 2 ฟัน
        % i=all length - two LSR (load sharing ratio) = 0.66 , i =
        all length LSR = 0.33

        P_Herz(i) = T/(Rb1*0.001)*(m2*i+LSS-m2*length(r1)); % (N)
        b_Herz(i) = ((2*P_Herz(i).*delta(i))/(pi*FW*0.001))^0.5;
    else %ช่วง 2 ขบ 1 ฟัน
        P_Herz(i) = T/(Rb1*0.001); % (N)
        b_Herz(i) = ((2*P_Herz(i).*delta(i))/(pi*FW*0.001))^0.5;
    end
end
end
sixmaxx = (-1).*(b_Herz)./delta;
sixmayy = (-2).*v.*(b_Herz)./delta;

```

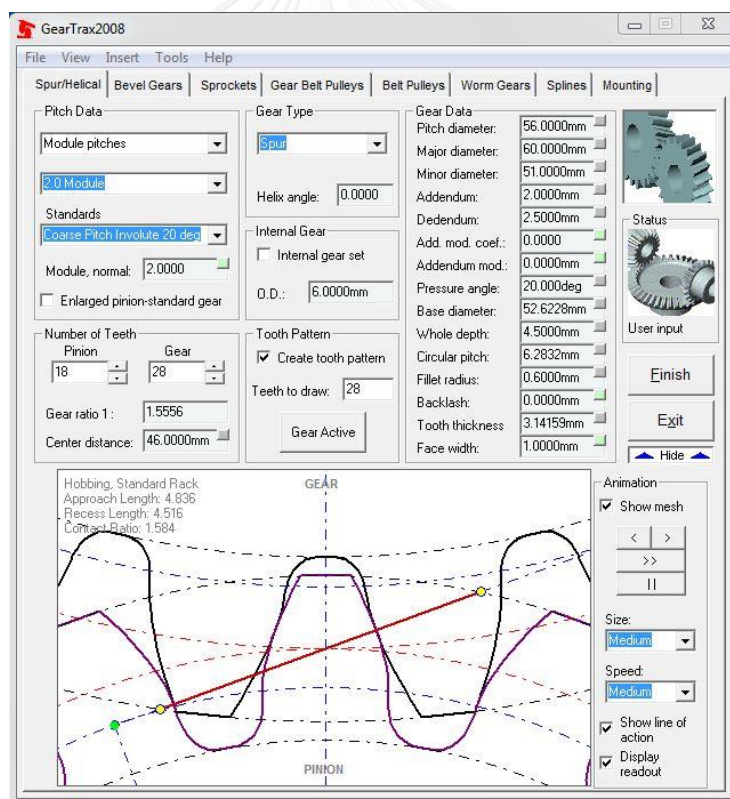
```
sixmazz = (-1).*(b_Herz)./delta;  
  
sixma = (0.5.*((sixmaxx-sixmayy).^2+(sixmayy-sixmazz).^2+(sixmazz-  
sixmaxx).^2)).^0.5;  
  
x = 1:length(sixma);  
  
plot(x,sixma)  
whitebg('white')  
xlabel('Meshing Position')  
ylabel('Stress')
```





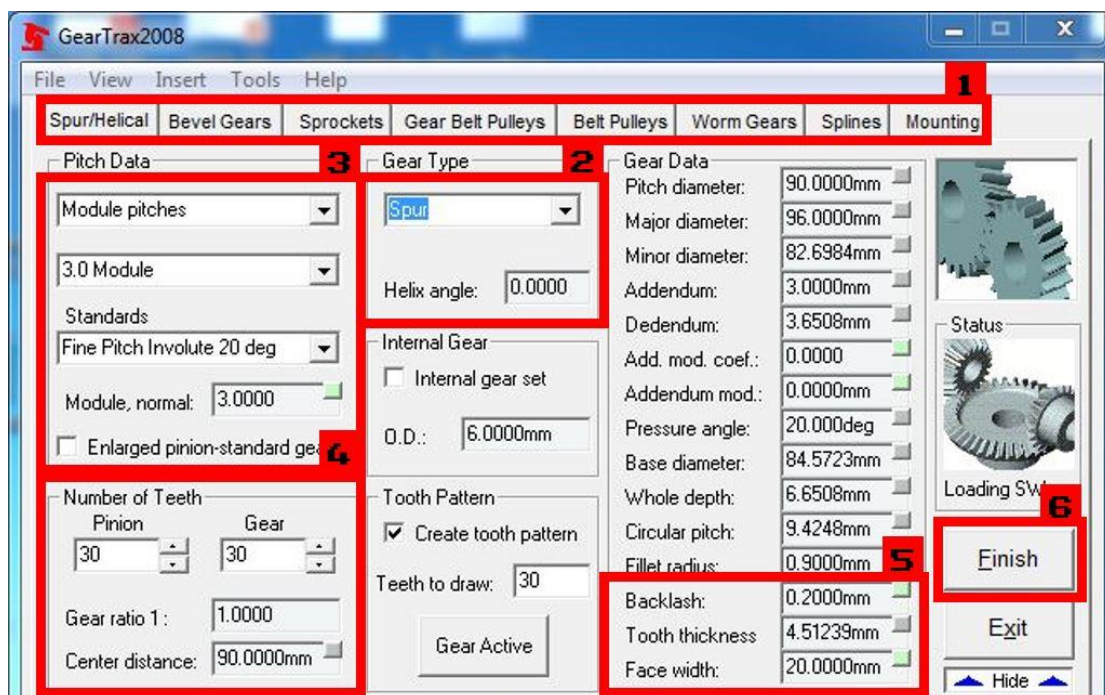
## ภาคผนวก ค. การใช้โปรแกรม GearTrax2008

โปรแกรม GearTrax2008 เป็นโปรแกรม CAD/CAM (Computer- Aided Design and Computer- Aided Manufacturing) ประเภทหนึ่งที่ใช้ในการเขียนโมเดลเฟืองประเภทต่างๆ โดยทำงานร่วมกับโปรแกรม SolidWorks2008 โดยปกติการเขียนโมเดลเฟืองตามหลักการเขียนแบบในโปรแกรมเขียนแบบทั่วไปจะใช้เวลาค่อนข้างมาก แต่โปรแกรม GearTrax2008 สามารถเขียนโมเดลเฟืองสำเร็จขึ้นมาอย่างรวดเร็วโดยการใส่พารามิเตอร์เกียร์ (Gear Parameters) ที่ถูกต้องดังแสดงตัวอย่างหน้าจอโปรแกรมในรูปที่ ค.1 โดยขั้นตอนในการใช้งานโปรแกรมเฉพาะแค่กรณีเฟืองตรงจะแสดงในลำดับต่อไป



รูปที่ ค.1 แผงจอโปรแกรม GearTrax2008

โปรแกรม GearTrax2008 สามารถวาดโมเดลเฟืองได้ทุกประเภท ได้แก่ เฟืองตรง (Spur Gear) , เฟืองเฉียง (Helical Gear) , เฟืองดอกจอก (Bevel Gear) , ล้อฟันเฟือง (Sprocket) , เฟืองโซ่ (Gear Belt Pulley) , สายพานลำเลียง (Belt Pulley) , เฟืองหนอน (Worm Gear) , สลัก (Spline) เป็นต้น ซึ่งในการศึกษานี้ได้ใช้โปรแกรมในการวาดโมเดลเฟืองตรงดังแสดงในรูปที่ ค.2



รูปที่ ค.2 ขั้นตอนการกำหนดค่าแมงจ้อ GearTrax2008

ขั้นที่ 1 กำหนดประเภทของเฟือง (กำหนดที่บริเวณ 1 ในรูปที่ ค.2) - กำหนดประเภทของเฟืองที่จะสร้างโมเดลโดยเลือกตำแหน่งซ้ายสุดในหัวข้อ Spur/Helical

ขั้นที่ 2 กำหนดประเภทของเฟืองเพิ่มเติม (กำหนดที่บริเวณ 2 ในรูปที่ ค.2) - เลือกกำหนดเฟืองตรงหรือเฟืองเฉียง หากเลือกเฟืองเฉียงต้องกำหนดเฟืองเฉียงซ้ายหรือขวาเพิ่มเติม เพราะคู่เฟืองเฉียงต้องเอียงทำมุมในทิศทางตรงข้ามกันจึงขบกันได้และต้องกำหนดมุมเอลิคซ์ของเฟืองเฉียงดังแสดงในรูปที่ ค.2

ขั้นที่ 3 กำหนดขนาดของเฟือง (กำหนดที่บริเวณ 3 ในรูปที่ ค.2) - การกำหนดขนาดของเฟืองสามารถกำหนดเป็นค่าโมดูล (module) เช่น 3.0 2.75 2.5 เป็นต้น หรือกำหนดค่าไดอะมิทรีลพิทซ์ (Diametral Pitch) มาตรฐาน เช่น 2.43 3.11 เป็นต้น หลังจากนั้นจึงกำหนดมุมกดมาตรฐานของเฟืองที่เป็นอินโวลูตเคอฟ (Involute Curve) ซึ่งมีมุมกด 14.5 องศา 20 องศา และ 25 องศา การกัดเฟืองในบางกรณีที่ป้องกันการขัดกันของการขบ ผู้ผลิตจะกัดเฟืองโดยไม่ใช้ความยาว

ของฟันทั้งหมดตามมาตรฐาน (Full Depth) FD แต่จะตัดความสูงของฟันออกเล็กน้อย ซึ่งเรียกเฟืองที่กัดตามมาตรฐานนี้ว่า Stub

ขั้นที่ 4 กำหนดจำนวนฟันบนเฟือง (กำหนดที่บริเวณ 4 ในรูปที่ ค.2) – กำหนดจำนวนฟันบนเฟืองขับ (Pinion) และเฟืองตาม (Gear) ภายหลังจากกำหนดเสร็จสิ้น โปรแกรมจะแสดงอัตราส่วนเฟือง (Gear Ratio) และระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางรูเพลลาของคู่เฟือง

ขั้นที่ 5 กำหนดข้อมูลเฟือง (กำหนดที่บริเวณ 5 ในรูปที่ ค.2) – ข้อมูลพื้นฐานของเฟืองจะถูกคำนวณและแสดงขึ้นในกรอบข้อมูลเกียร์ (Gear Data) จากพารามิเตอร์ของเฟืองที่ได้ทำการเลือกก่อนหน้านี้ แต่บางหัวข้อก็สามารถปรับได้ เช่น แบคแลช (Backlash) และ ความหนาของฟัน (Face Width) ซึ่งในการศึกษานี้กำหนดให้เฟืองขับและเฟืองตาม มีความกว้างหน้าฟัน 20 mm

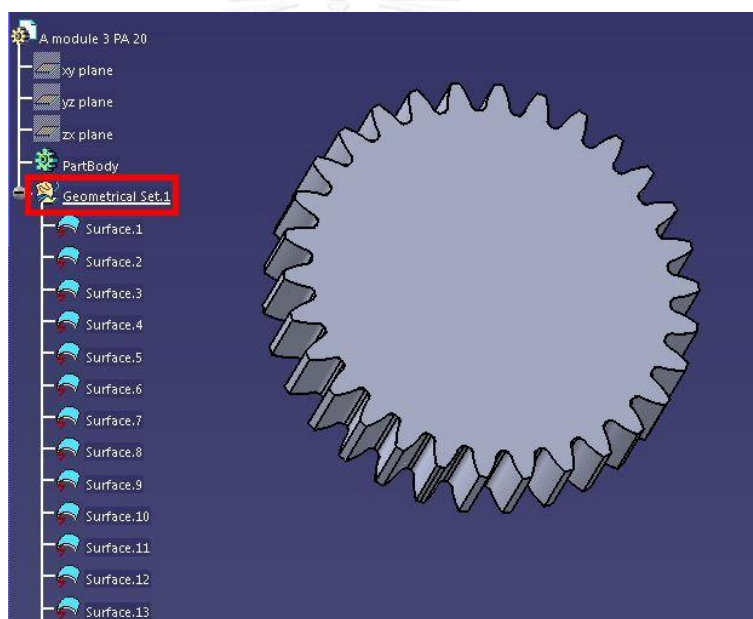
ขั้นที่ 6 เสร็จสิ้น (กำหนดที่บริเวณ 6 ในรูปที่ ค.2) – กดเสร็จสิ้นเพื่อโปรแกรมจำประมวลผลพารามิเตอร์เกียร์ต่างๆ ที่ได้กำหนดและสร้างโมเดลเกียร์ตามที่เราต้องการ โดยภายหลังกดเสร็จสิ้น โปรแกรมจะใช้เวลาประมวลผลชั่วครู่หนึ่ง แล้วแสดงโมเดลเกียร์ที่สมบูรณ์ในโปรแกรม SolidWorks2008 จึงทำการบันทึกไฟล์โมเดลเพื่อนำไปใช้ต่อไป โดยให้บันทึกไฟล์ในสกุล .IGS

## ภาคผนวก ง.

### การสร้างและประกอบ (Assembly) คู่เฟืองตรงโดยโปรแกรม CATIA

หลังจากที่ได้ทำการสร้างโมเดลเฟืองตรงแล้วในขั้นตอนนี้จะนำโมเดลมาใช้งานและประกอบเข้าด้วยกันในโปรแกรม CATIA ซึ่งจะอธิบายขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

เปิดโปรแกรม CATIA แล้วกด File → Open → เลือกโมเดลเฟืองตรงที่ได้สร้างไว้ซึ่งมีสกุลไฟล์ .IGS โปรแกรมจะนำเข้าโมเดลดังแสดงในรูปที่ ง.1



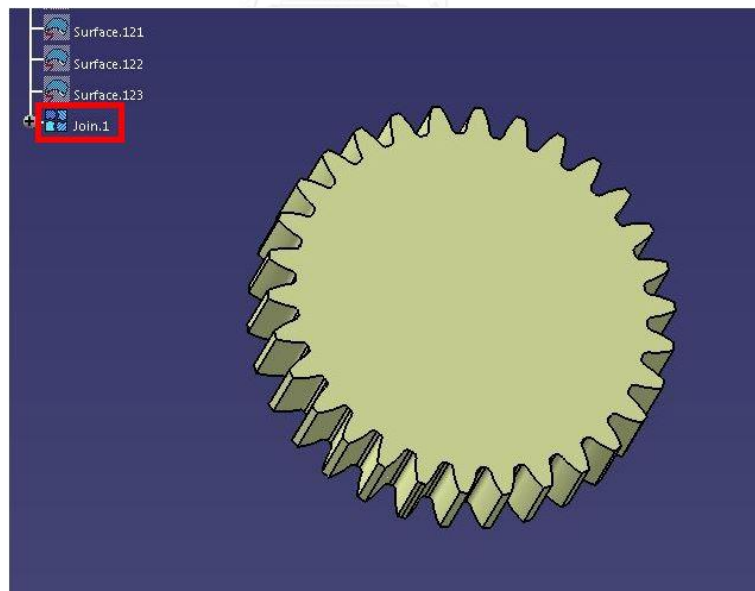
รูปที่ ง.1 โมเดลเฟืองตรงที่นำเข้าไปในโปรแกรม CATIA

เนื่องจากโมเดลที่นำเข้าเกิดจากการสร้างผิว (Surface) หลายๆ ผิวมาประกอบเป็นเฟืองตรง จึงทำให้ยังไม่สามารถแก้ไขโมเดลเฟืองได้ จึงต้องทำโมเดลให้กลายเป็นโมเดลแข็ง (Solid Model) ก่อน เลือกโหมดไปที่ Shape โดยการกดปุ่ม Start → Shape → Generative Shape Design หลังจากนั้นเลือก Geometrical Set.1 ดังแสดงในรูปที่ ง.1 และกดปุ่ม Join บนแถบเครื่องมือ (Toolbar) ดังแสดงในรูปที่ ง.2 หลังจากนั้นจึงกด ok อีกครั้งหนึ่งเพื่อรวมผิวทุกๆ ผิวเข้าด้วยกัน



รูปที่ ง.2 ปุ่ม Join บนแถบเครื่องมือ

ภายหลังจากที่รวมผิวเข้าด้วยกันแล้ว โมเดลเฟืองตรงจะมีสีเหลืองอ่อนซึ่งคือสีของพื้นผิวที่ได้ถูกรวมเข้าด้วยกันดังแสดงในรูปที่ ง.3



รูปที่ ง.3 พื้นผิวโมเดลเฟืองตรงที่ได้ถูกรวมเข้าด้วยกัน

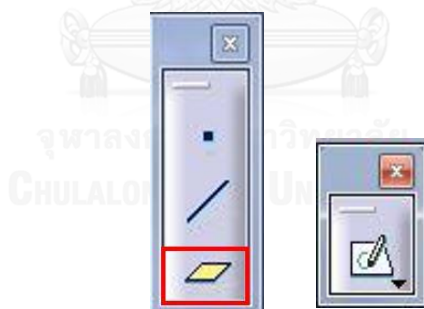
หลังจากนั้นจึงเลือกโหมดไปที่ของแข็ง โดยการกดปุ่ม Start → Mechanical Design → Part Design หลังจากนั้นจึงสร้างโมเดลแข็งโดยเลือกกลุ่มของพื้นผิวที่ได้ถูกรวมเข้าด้วยกัน Join.1 ดังแสดงในรูปที่ ง.3 แล้วกดปุ่ม Close Surface บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.4



รูปที่ ง.4 ปุ่ม Close Surface บนแถบเครื่องมือ

ในขั้นตอนนี้เราได้สร้างโมเดลแข็งของเฟืองตรงเสร็จสิ้นแล้ว ทำการเลือก กลุ่มของพื้นผิว Join.1 อีกครั้งหนึ่ง คลิกขวาและกด Hide ก็จะแสดงโมเดลแข็งของเฟืองตรงซึ่งมีสีเทาเหมือนดังตอนแรกในรูปที่ ง.1 ซึ่งในขั้นนี้เราสามารถที่จะแก้ไขและนำโมเดลเฟืองตรงไปใช้งานต่อได้แล้ว

ในขั้นถัดไปจะทำการสร้างรูเพลานบนเฟืองตรง โดยขั้นแรกกำหนดระนาบ (plane) อ้างอิงบนหน้าของเฟืองตรงโดยการคลิกที่หน้าเฟืองตรงแล้วกดปุ่ม Plane และตามด้วยปุ่ม Sketch บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูป แล้วเลือกที่ระนาบเดิมอีกครั้งหนึ่งเพื่อเขียนแบบวงกลมรูเพลาน



รูปที่ ง.5 ปุ่ม Plane และปุ่ม Sketch (จากซ้ายไปขวา) บนแถบเครื่องมือ

ต่อมากดปุ่ม Circle บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.6 เพื่อวาดวงกลมแล้วคลิกที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางเฟืองตรงเพื่อกำหนดจุดศูนย์กลางวงกลมและกำหนดอีกจุดหนึ่งซึ่งกำหนดขนาดของวงกลม



รูปที่ ง.6 ปุ่ม Circle บนแถบเครื่องมือ

ถัดมาทำการกำหนดขนาดของรูเพลลาโดยกดปุ่ม Constraint บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.7



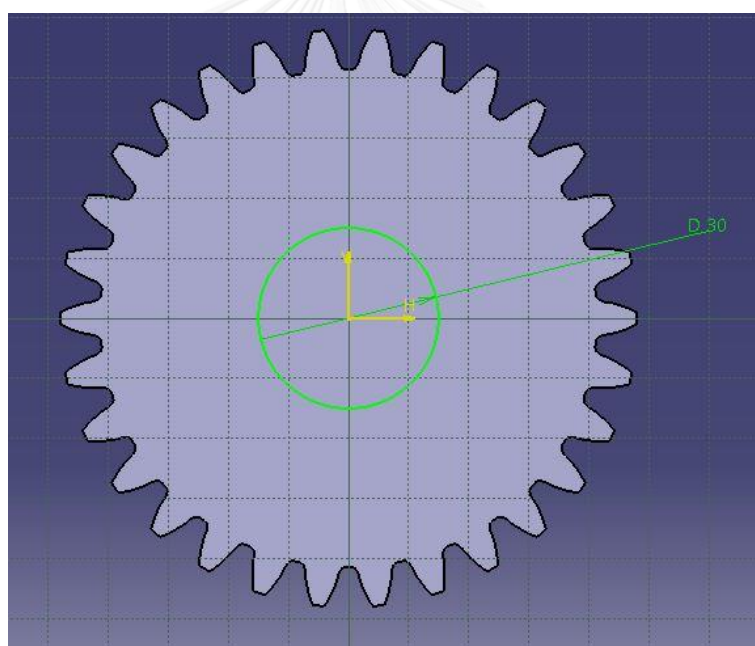
รูปที่ ง.7 ปุ่ม Constraint บนแถบเครื่องมือ

ต่อมาเลือกไปที่แบบวงกลมที่ได้วาดไว้ก่อนหน้า หลังจากนั้นก็ดับเบิลคลิก (Double Clicks) ที่มิติ (Dimension) หรือขนาดของวงกลม ณ ขณะนั้น แล้วกำหนดขนาดของรูเพลลาให้มีเส้นผ่านศูนย์กลาง (Diameter) 30 มิลลิเมตรดังแสดงในรูปที่ ง.8



รูปที่ ง.8 กำหนดเส้นผ่านศูนย์กลางของแบบวงกลมให้มีขนาด 30 มิลลิเมตร

หลังจากกำหนดค่าต่างๆ เสร็จสิ้นก็จะได้แบบวงกลมตามที่ต้องการบนผิวเฟืองตรงดังแสดงในรูปที่ ง.9



รูปที่ ง.9 แบบวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง 30 มิลลิเมตร

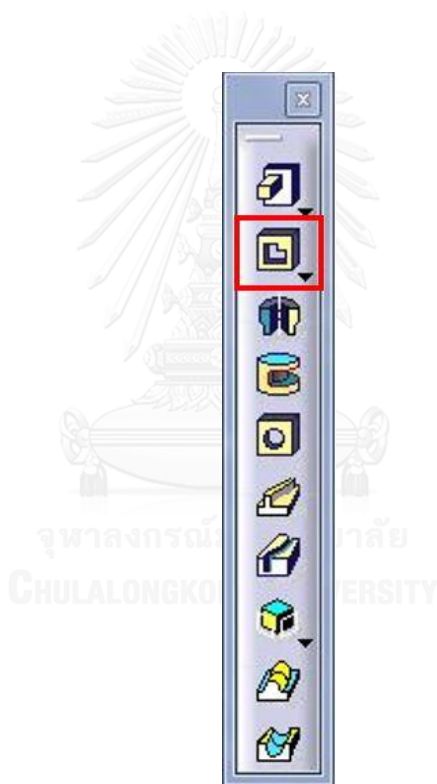
หลังจากนั้นกดปุ่ม Exit Workbench บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.10 เพื่อออกจาก  
การเขียนแบบ





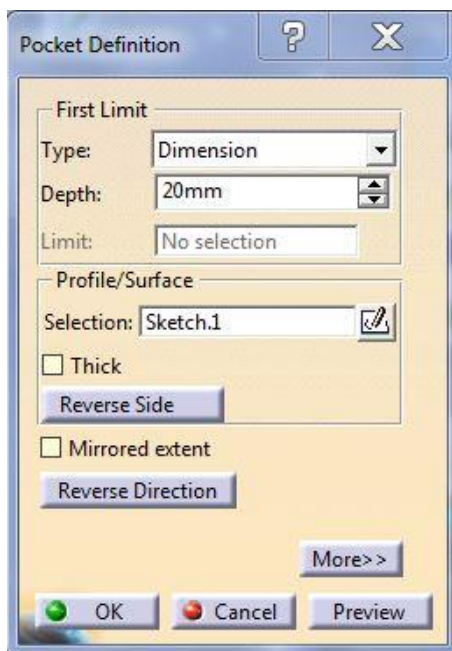
รูปที่ ง.10 ปุ่ม Exit Workbench บนแถบเครื่องมือ

หลังจากนั้นทำการเลือกแบบวงกลม และกดปุ่ม Pocket บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.11



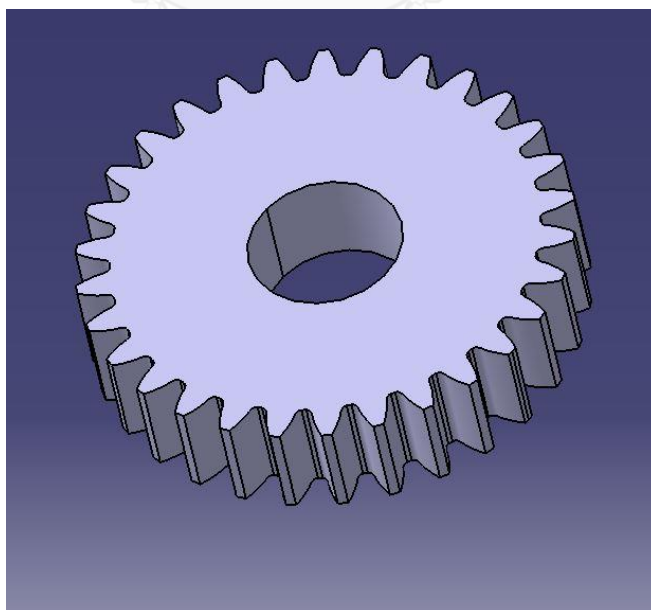
รูปที่ ง.11 ปุ่ม Pocket บนแถบเครื่องมือ

หลังจากนั้นกำหนดความลึก (Depth) ที่ต้องการจะเจาะบนโมเดลเฟือง ซึ่งก็คือ 20 มิลลิเมตร ทะลุตลอดความหนาเฟืองตรง ดังแสดงในรูปที่ ง.12 หลังจากนั้น กด ok แต่หากแนวการเจาะไม่เข้าหาโมเดลเฟืองให้กดปุ่ม Reverse Direction แล้วจึงกดปุ่ม ok



รูปที่ ง.12 กำหนดความลึกของรูปที่ต้องการเจาะ 20 มิลลิเมตร

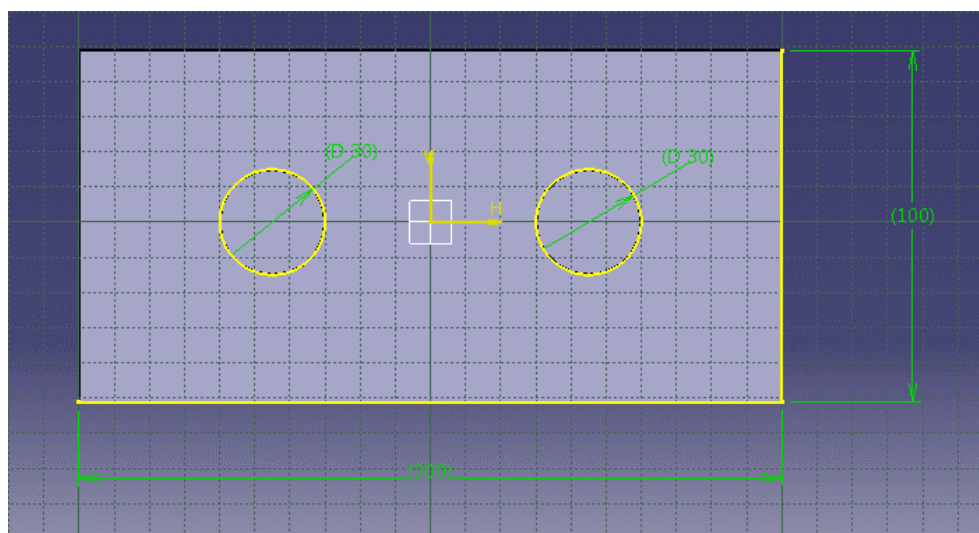
เมื่อกำหนดค่าต่างๆ เรียบร้อยก็จะได้โมเดลเฟืองตรงดังแสดงในรูปที่ ง.13 หลังจากนั้นจึงทำขั้นตอนทั้งหมดซ้ำอีกครั้งหนึ่งเพื่อสร้างโมเดลเฟืองตรงอีกชิ้นหนึ่งที่เป็นคู่ฟันขบของเฟืองชิ้นแรก



รูปที่ ง.13 โมเดลเฟืองตรงที่เจาะรูเพลาลแล้ว

หลังจากสร้างโมเดลเฟืองตรงเสร็จสิ้นจึงทำการสร้างโมเดลฐานโดยมีเพลา (Shaft) ซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางพอดีกับขนาดของรูบนเฟืองตรง โดยแสดงตัวอย่างขนาดของโมเดลฐานในรูปที่

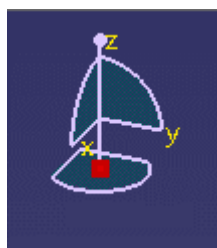
ง.14



รูปที่ ง.14 มิติของโมเดลฐาน

หลังจากสร้างโมเดลต่างๆ เสร็จสิ้นแล้วจึงทำการประกอบชิ้นส่วนต่างๆ เข้าด้วยกัน โดยเลือกไปที่ Start → Mechanical Design → Assembly Design หลังจากนั้นบนหน้าจอแสดงผล คลิกขวาที่ Product1 → Components → Existing Component... แล้วทำการเลือกนำเข้าโมเดลต่างๆ ที่จะนำมาประกอบทั้งหมด

หลังจากนั้นใช้เข็มทิศ (Compass) บนหน้าจอแสดงผลทางด้านขวาบนดังแสดงในรูปที่ ง.15 เพื่อเคลื่อนโมเดลไปในทิศทางที่ต้องการโดยคลิกซ้ายที่เข็มทิศแล้วลากไปวางยังโมเดลที่ต้องการจะเคลื่อนเพื่อขยับ



รูปที่ ง.15 เข็มทิศเพื่อใช้ขยับโมเดล

หลังจากกดปุ่ม Coincidence Constraint บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.16 โดยคลิกซ้ายครั้งแรกที่แกนของรูเพลลาของเฟืองตรงแล้วคลิกซ้ายอีกครั้งที่แกนของเพลลาฐาน แล้วทำซ้ำอีกครั้งหนึ่งในเฟืองตรงที่เหลือ



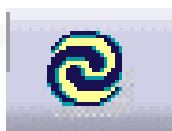
รูปที่ ง.16 ปุ่ม Coincidence Constraint บนแถบเครื่องมือ

หลังจากนั้นจึงกดปุ่ม Contact Constraint บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.17 โดยคลิกซ้าย 2 ครั้งไปบนคู่พื้นผิวที่ต้องการจะให้สัมผัสกัน



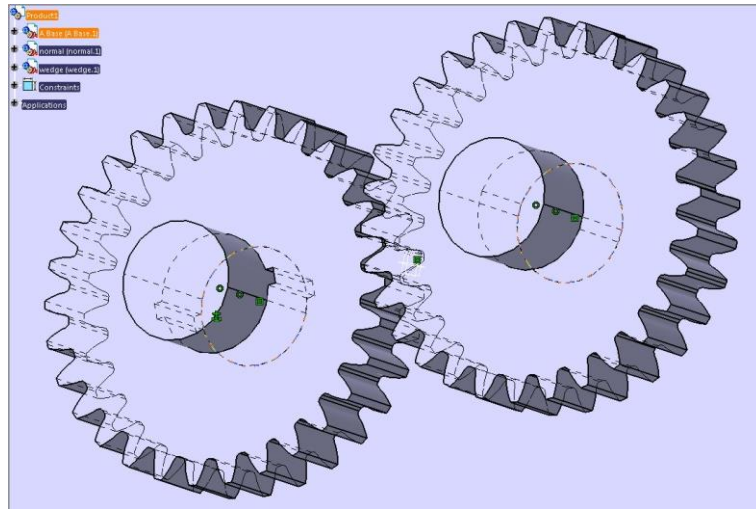
รูปที่ ง.17 ปุ่ม Contact Constraint บนแถบเครื่องมือ

หลังจากตั้งข้อกำหนด (Constraint) ต่างๆ แล้วให้กดปุ่ม Update ดังแสดงในรูปที่ ง.18 เพื่อ  
ดูการประกอบในขั้นตอนสุดท้าย



รูปที่ ง.18 ปุ่ม Update บนแถบเครื่องมือ

หลังจากกดปุ่ม Update โมเดลต่างๆ จะถูกประกอบเข้าด้วยกันตามข้อกำหนดดังแสดงในรูป  
ที่ ง.19



รูปที่ ง.19 ปุ่ม โมเดลเฟืองตรงที่ถูกประกอบบนฐาน

หลังจากประกอบชิ้นส่วนเข้าด้วยกันแล้วขั้นตอนต่อไปคือการจำลองการขบกันของเฟืองตรง โดยเลือกไปที่ Start → Digital Mockup → DMU Kinematics หลังจากเข้ามาในโหมดจำลองกดปุ่ม Assembly Constraint Conversion บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปเพื่อให้การจำลองการเคลื่อนไหวนั้นเป็นไปตามข้อกำหนดดังแสดงในรูปที่ ง.20



รูปที่ ง.20 ปุ่ม Assembly Constraint Conversion บนแถบเครื่องมือ

กดปุ่ม Auto Create เพื่อสร้างกลไกการเคลื่อนไหวกจากข้อกำหนดที่ได้สร้างก่อนหน้านี้ดัง  
แสดงในรูปที่ ง.21



รูปที่ ง.21 ปุ่ม Auto Create บนแผง Assembly Constraint Conversion

หลังจากนั้นกดปุ่ม Revolute Joint ตรงลูกศรชี้ลงเพื่อเลือกชนิด Revolute Joint แบบ  
ต่างๆ บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.22



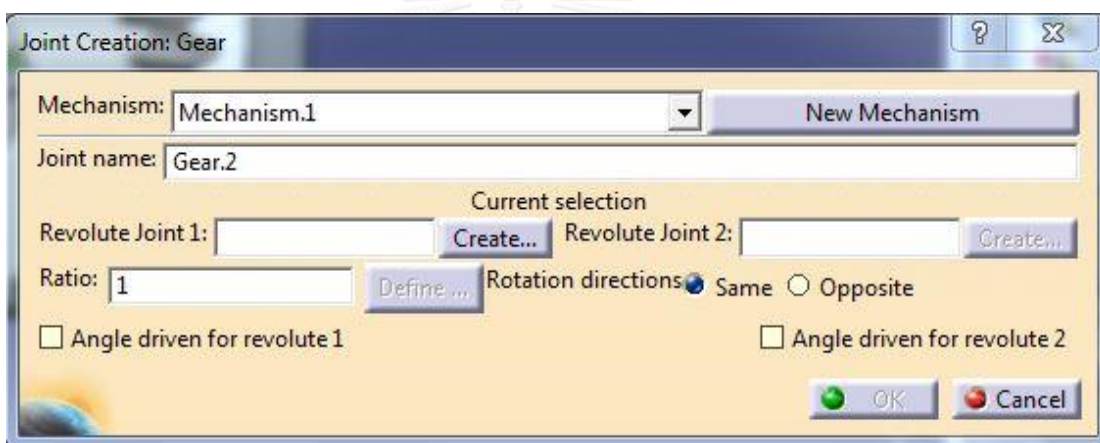
รูปที่ ง.22 ปุ่ม Revolute Joint บนแถบเครื่องมือ

หลังจากกดปุ่ม Revolute Joint แล้วให้เลือก Gear Joint ที่ตรงกับลักษณะการเคลื่อนที่ของระบบดังแสดงในรูปที่ ง.23



รูปที่ ง.23 ปุ่ม Gear Joint บนแถบเครื่องมือ

หลังจากกดปุ่ม Gear Joint ให้ทำการเลือก Revolute Joint 1 และ 2 จาก Applications → Mechanism → Joints ตามลำดับในด้านซ้ายของหน้าจอแสดงผลและทำการคลิกเลือก Angle driven for revolute 1 ดังแสดงในรูปที่ ง.24



รูปที่ ง.24 แผงควบคุม Gear Joint บนแถบเครื่องมือ

หลังจากนั้นจึงกดปุ่ม Fixed Part บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.25 แล้วเลือกโมเดลฐานเพื่อยึดให้หนึ่งอยู่กับที่ ขณะที่เกิดการเคลื่อนไหว



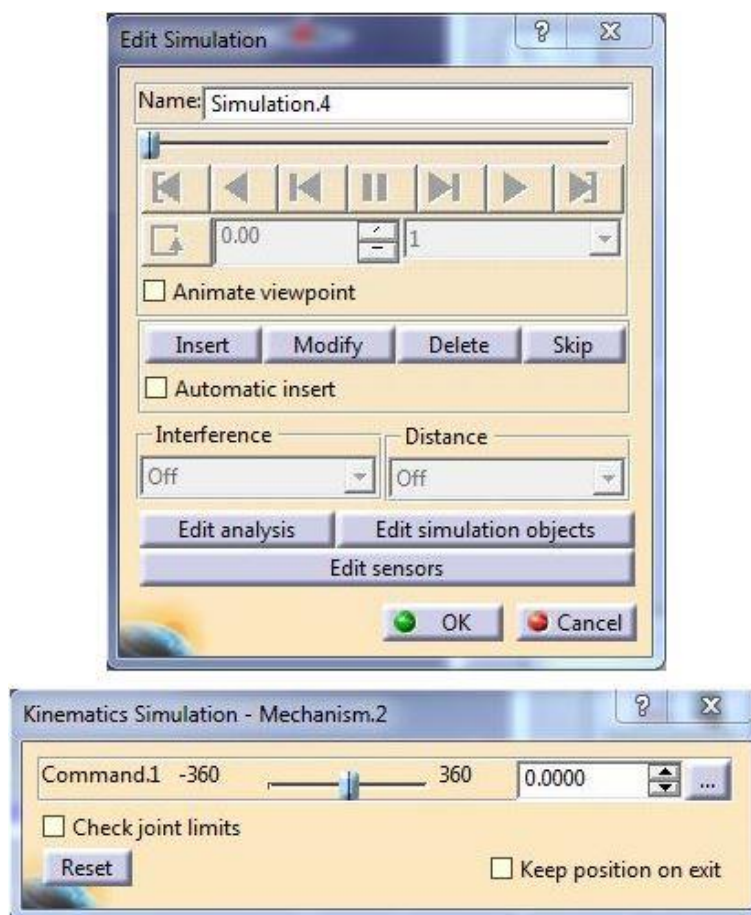


รูปที่ ง.25 ปุ่ม Fixed Part บนแถบเครื่องมือ

หลังจากนั้นกดปุ่ม Simulation บนแถบเครื่องมือดังแสดงในรูปที่ ง.26 เพื่อจำลองการขบของเฟืองตรง



รูปที่ ง.26 ปุ่ม Simulation บนแถบเครื่องมือ



รูปที่ ง.27 แผงควบคุม Simulation บนแถบเครื่องมือ

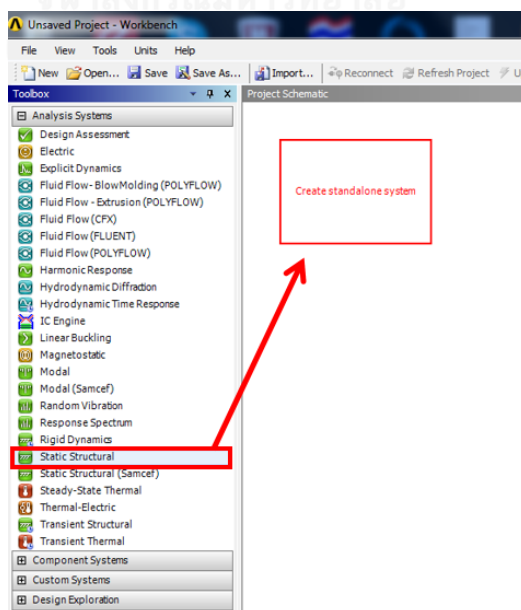
หลังจากกดปุ่ม Simulation แผงควบคุมจากปรากฏขึ้น ในแผงควบคุม Kinematics Simulation จะสามารถกำหนดมุมที่เฟืองหมุนไปจากตำแหน่งเดิมได้ นอกจากนั้นทำการเลือกปุ่ม Keep position on exit เพื่อให้เฟืองยังคงอยู่ในตำแหน่งนั้นหลังจากได้ทำการจำลองเกิดขึ้น เมื่อเลือกตำแหน่งสุดท้ายของการหมุนโดยการกำหนดมุมที่หมุนจึงกดปุ่ม Insert ในแผง Edit Simulation และกด OK เมื่อเสร็จสิ้นการกำหนดการจำลองโดยแสดงในรูปที่ ง.27

## ภาคผนวก จ.

### การตั้งค่าโปรแกรม ANSYS สำหรับปัญหาการสัมผัส

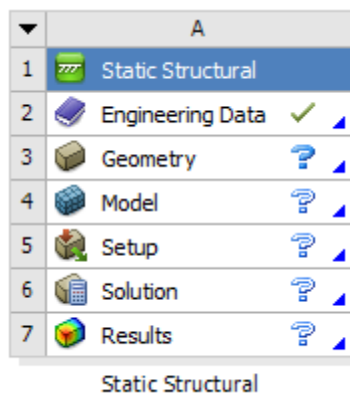
โปรแกรม ANSYS เป็นโปรแกรม CAE (Computer Aided Engineering) หรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในงานวิศวกรรมในการแก้ปัญหาการคำนวณโดยการหาคำตอบโดยประมาณ โปรแกรม CAE ได้มีการพัฒนาโดยอิงจากระเบียบหลายวิธี ได้แก่ ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) ระเบียบวิธีเหล่านี้จะทำการเปลี่ยนสมการกำกับ (Governing Equation) ที่แสดงความจริงของปัญหาทางวิศวกรรมในแขนงต่างๆ ได้แก่ ปัญหาเชิงโครงสร้างสร้าง ปัญหาความร้อน ปัญหาการไหล ฯลฯ ให้กลายเป็นระบบสมการคณิตศาสตร์ในรูปเมตริกซ์ หลังจากนั้นจึงทำการแก้ระบบสมการเหล่านั้นด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ซึ่งในการศึกษานี้ได้ประยุกต์ใช้โปรแกรม ANSYS ในการแก้ปัญหาการกดกันของพินเพื่อตรง โดยรายละเอียดของการตั้งโปรแกรมสำหรับแก้ปัญหาดังกล่าวจะแสดงต่อไป

ทำการเปิดโปรแกรม ANSYS และคลิกเลือกลักษณะของปัญหาที่ต้องการซึ่งในที่นี้คือโหมด Static Structural แล้วทำการคลิกซ้ายแล้วลากไปที่กล่องดังแสดงในรูปที่ จ.1



รูปที่ จ.1 การเลือกโหมดปัญหาต่างๆ ในโปรแกรม ANSYS

ต่อมาหลังจากที่ลากโหมดดังกล่าวมาวางในกล่องแล้วจะปรากฏกล่องที่แสดงถึงลำดับขั้นตอนว่าอยู่ในขั้นตอนไหนของกระบวนการแก้ปัญหาที่แสดงในรูปที่ จ.2



รูปที่ จ.2 กล่องแสดงขั้นตอนในการแก้ปัญหา

จากรูปที่ จ.2 ให้ดับเบิลคลิกซ้ายไปที่ Engineering Data หน้าจอใหม่จะปรากฏขึ้นดังแสดงในรูปที่ จ.3 ซึ่งแสดงถึงคุณสมบัติทางวิศวกรรมต่างๆ ของชิ้นงานที่เราสนใจ โดยในตัวอย่างนี้ชิ้นงานของวัสดุคือ Structural Steel ที่มีค่า Young's Modulus เป็น 200 GPa และมีค่า Poisson's Ratio คือ 0.3 ซึ่งค่าของวัสดุสามารถปรับเปลี่ยนได้โดยพิมพ์ค่าที่ต้องการในหลักที่ B

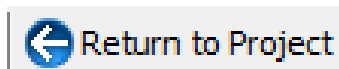
Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Density	7850	kg m <sup>-3</sup>	
3	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion			
6	Isotropic Elasticity			
7	Derive from	Young's Modulus and Poisson's ...		
8	Young's Modulus	2E+11	Pa	
9	Poisson's Ratio	0.3		
10	Bulk Modulus	1.6667E+11	Pa	
11	Shear Modulus	7.6923E+10	Pa	
12	Alternating Stress Mean Stress	Tabular		
16	Strain-Life Parameters			
24	Tensile Yield Strength	2.5E+08	Pa	
25	Compressive Yield Strength	2.5E+08	Pa	
26	Tensile Ultimate Strength	4.6E+08	Pa	
27	Compressive Ultimate Strength	0	Pa	

Outline of Schematic A2: Engineering Data			
	A	B	C D
1	Contents of Engineering Data	Source	Description
2	Material		
3	Structural Steel	General_Materials.xml	Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110.1
*	Click here to add a new material		

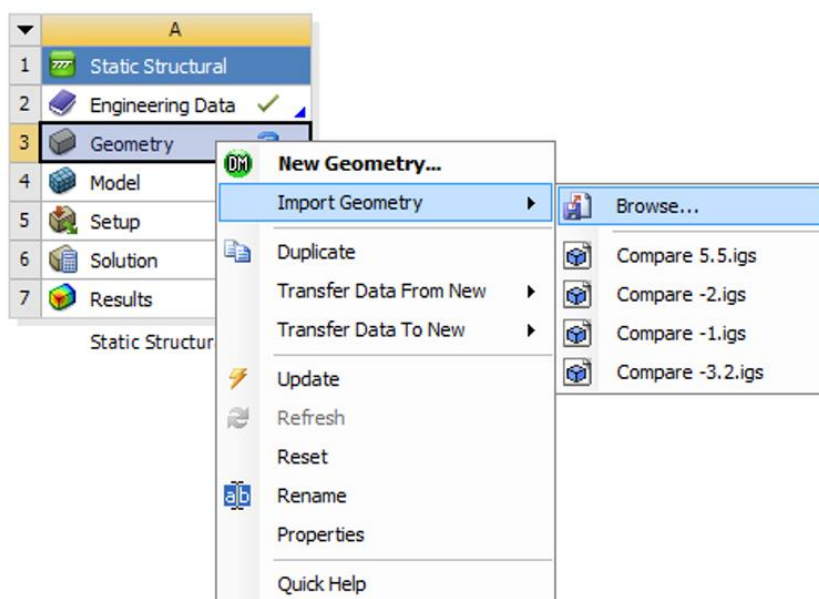
รูปที่ จ.3 คุณสมบัติทางวิศวกรรมต่างๆ ของชิ้นงาน

หลังจากที่ได้ตั้งค่าคุณสมบัติของชิ้นงานตามที่ต้องการแล้วจึงคลิกปุ่ม Return to Project ดังแสดงในรูปที่ จ.4 เพื่อปิดหน้าต่างแสดงคุณสมบัติของวัสดุและกลับไปยังโครงการต่อ



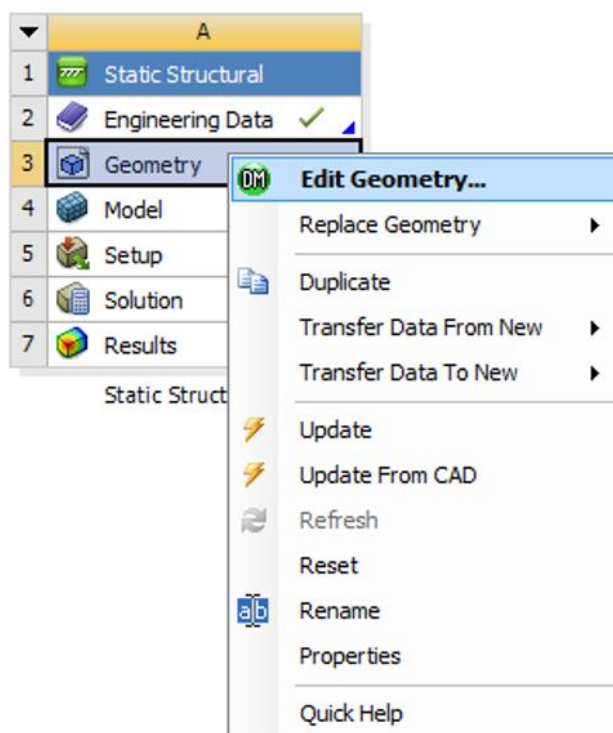
รูปที่ จ.4 ไอคอนย้อนกลับไปยังโครงการ

ต่อมาคือขั้นตอนใส่โมเดลของปัญหาที่เราสนใจ ให้คลิกขวาในช่อง Geometry → Import Geometry → Browse... แล้วทำการเลือกโมเดลของปัญหาที่เราสนใจในสกุลไฟล์ .igs ดังแสดงในรูปที่ จ.5 ซึ่งในตัวอย่างนี้นำเข้าโมเดลการขบกันของชุดเฟืองที่ตั้งค่าการขบในตำแหน่งพิตซ์โดยโปรแกรม CATIA เรียบร้อยแล้ว



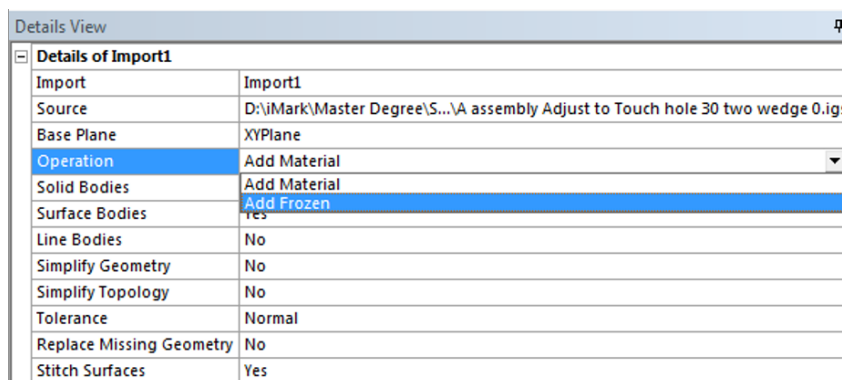
รูปที่ จ.5 การนำเข้าโมเดลปัญหาที่สนใจ

เนื่องจากโมเดลที่นำเข้าเป็นโมเดลสามมิติแต่เพื่อลดเวลาในการคำนวณลงจึงทำปัญหาให้ง่ายโดยการพิจารณาเป็นปัญหาสองมิติแทนดังนั้นจึงต้องทำการแก้ไขโมเดลก่อนจึงดำเนินการในขั้นตอนต่อไปได้ หลังจากขั้นตอนก่อนหน้าทำการคลิกขวาที่ Geometry → Edit Geometry ดังแสดงในรูปที่ จ.6



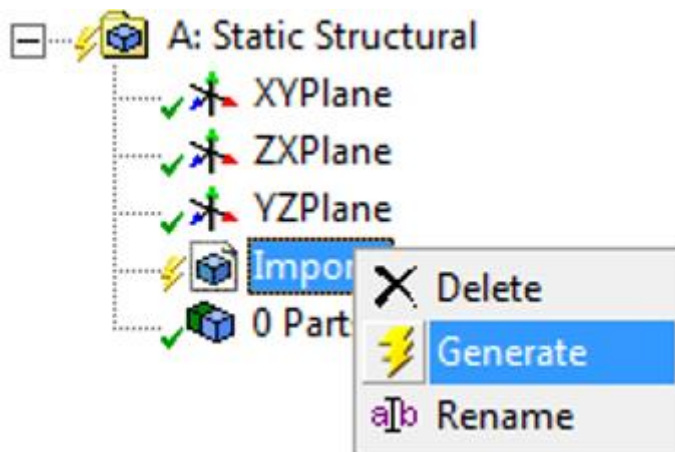
รูปที่ จ.6 แก้ไขโมเดล

ภายหลังจากกดเลือก Edit Geometry โปรแกรม Design Modeler ซึ่งเป็นโปรแกรม CAD ย่อยของ โปรแกรม ANSYS จะปรากฏขึ้นมาให้ทำการเลือก Operation → Add Frozen ดังแสดงในรูปที่ จ.7



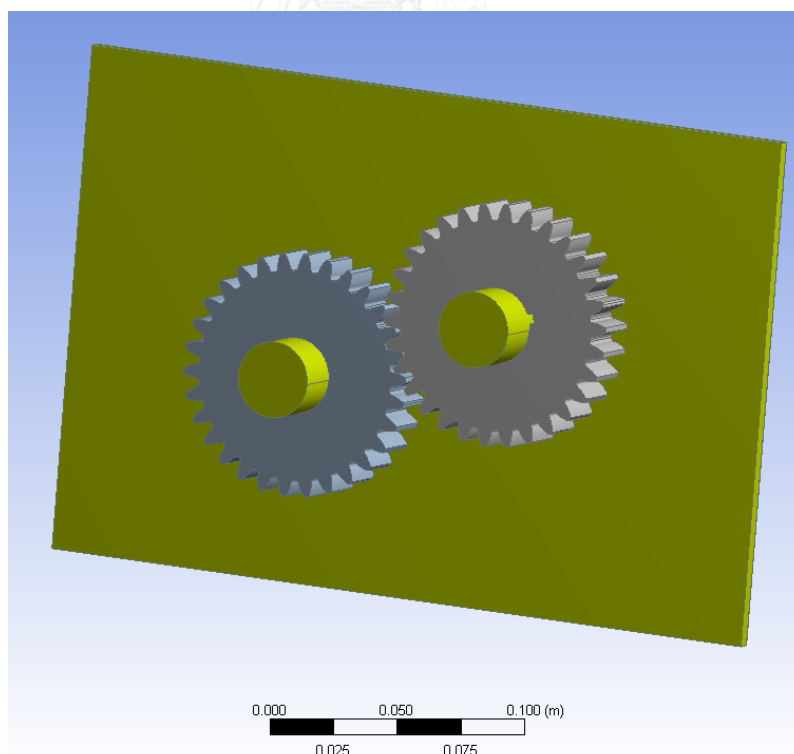
รูปที่ จ.7 ขั้นตอนการสร้างโมเดล Add Frozen

ต่อมาจึงเลือกไปที่ไอคอน Import คลิกขวาแล้วกด Generate ดังแสดงในรูปที่ ง.8



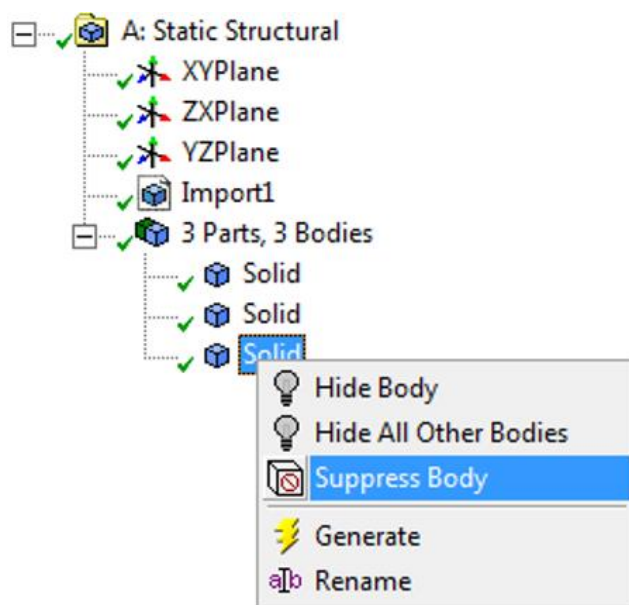
รูปที่ ง.8 ขั้นตอนการสร้างโมเดล Generate

โมเดลของชุดเฟืองที่นำเข้าจากโปรแกรม CATIA จะถูกสร้างออกมาในรูปที่ ง.9



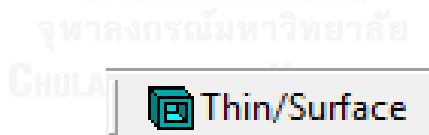
รูปที่ ง.9 ชุดโมเดลเฟืองตรง

ในปัญหานี้เนื่องจากไม่ต้องการรวมฐานของชุดเฟืองให้อยู่ในขอบเขตที่พิจารณาด้วยจึงทำการคลิกขวาที่ Solid แล้วเลือก Suppress Body ดังรูปที่ จ.10



รูปที่ จ.10 การแยกฐานชุดเฟืองออกจากขอบเขตปัญหาที่จะพิจารณา

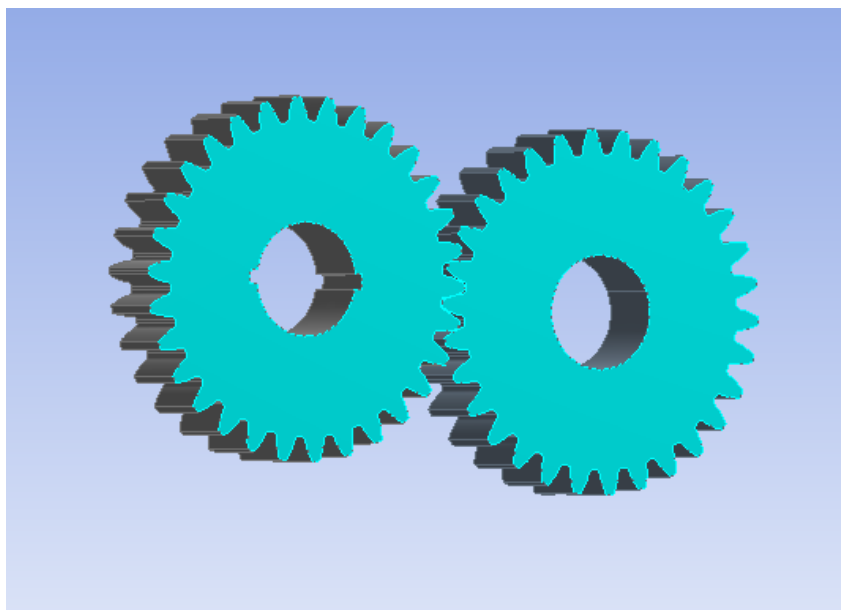
หลังจากนั้นจึงทำการดัดแปลงโมเดลเฟืองให้เป็นสองมิติโดยคลิกที่ไอคอน Thin/Surface ดังแสดงในรูปที่ จ.11 ซึ่งจะดัดแปลงโมเดลให้เหลือเฉพาะพื้นผิวส่วนที่เลือกเท่านั้น



รูปที่ จ.11 พื้นผิวบาง

ทำการเลือกพื้นผิวที่ด้านข้างเฟืองที่จะพิจารณาซึ่งต้องอยู่ในระนาบ X-Y เท่านั้นดังแสดงในรูปที่ จ.12 จึงจะสามารถพิจารณาโมเดลแบบสองมิติได้





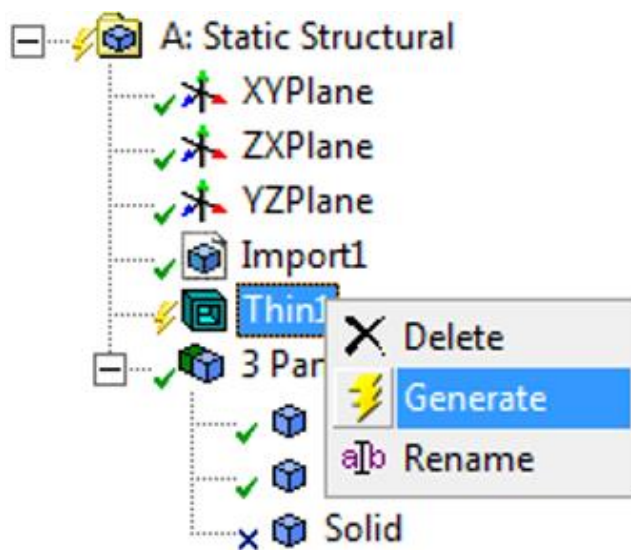
รูปที่ จ.12 พื้นผิวด้านข้างเฟืองที่พิจารณา

ทำการเปลี่ยนค่าความหนาให้เป็น 0 ดังแสดงในรูปที่ จ.13

Details View	
[-] Details of Thin1	
Thin/Surface	Thin1
Selection Type	Faces to Keep
Geometry	2 Faces
Direction	Inward
<input type="checkbox"/> FD1, Thickness (>=0)	0 m
<input type="checkbox"/> FD2, Face Offset (>=0)	0 m

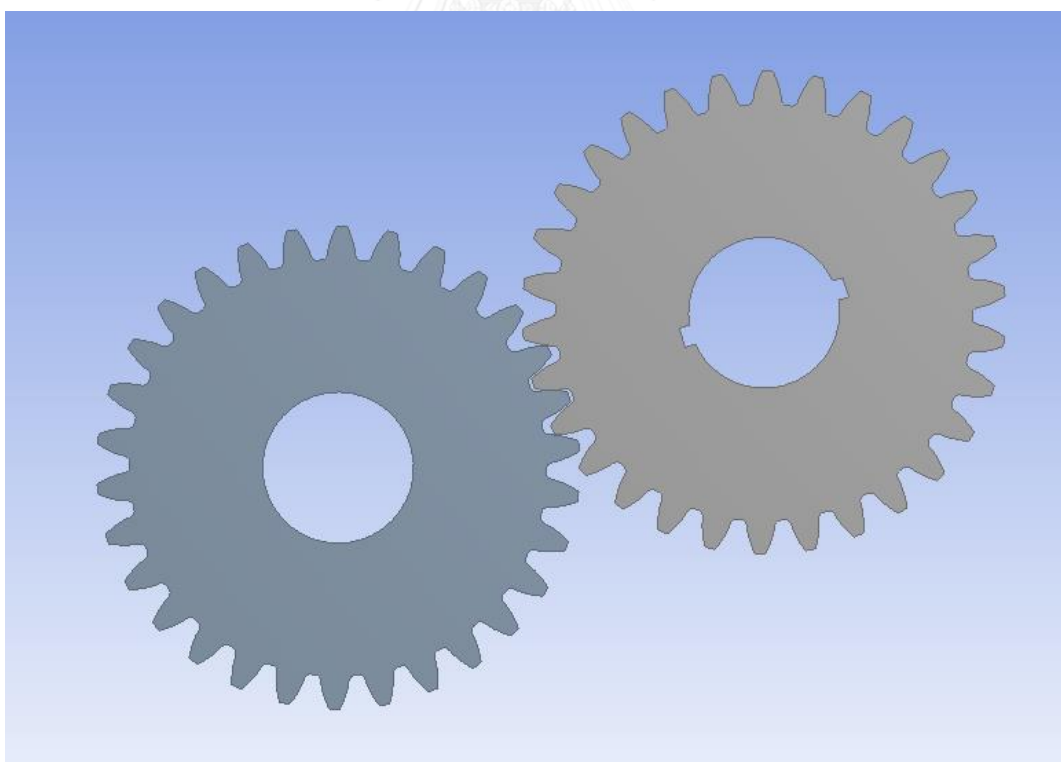
รูปที่ จ.13 การตั้งค่าความหนาของผิวข้างเฟืองที่พิจารณา

หลังจากนั้นจึงทำการเลือกที่ไอคอน Thin คลิกขวาแล้วเลือก Generate เพื่อตัดแปลงโมเดลเฟืองเดิมให้เหลือเฉพาะพื้นผิวที่เลือกดังแสดงในรูปที่ จ.14



รูปที่ จ.14 การดัดแปลงโมเดลเฟืองเดิมให้เหลือเฉพาะพื้นผิวที่พิจารณา

โมเดลเฟืองจะถูกดัดแปลงให้กลายเป็นพื้นผิวดังแสดงในรูปที่ จ.15



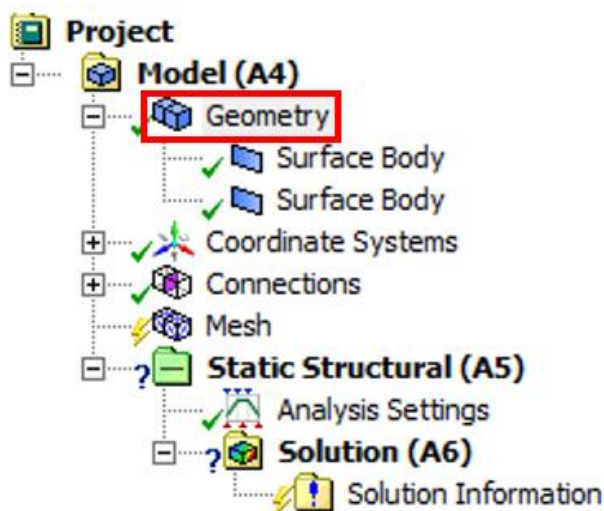
รูปที่ จ.15 โมเดลเฟืองที่ถูกดัดแปลงให้กลายเป็นพื้นผิว

หลังจากนั้นคลิกซ้ายไปที่ Geometry ในกล่องรูปที่ จ.2 ในแผงฝั่งขวาจะปรากฏดังแสดงในรูปที่ จ.16 ให้ปรับโหมดการวิเคราะห์เป็นแบบสองมิติ

Properties of Schematic A3: Geometry	
A	B
Property	Value
2	General
3	Component ID: Geometry
4	Directory Name: SYS
5	Geometry Source
6	Geometry File Name: D:\Mark\Master Degree\SpurGearModel\A IGIS\A assembly Adjust to Touch hole 30 two wedge 0.igs
7	CAD Plug-In: DesignModeler [8260]
8	Basic Geometry Options
9	Parameters: <input checked="" type="checkbox"/>
10	Parameter Key: DS
11	Attributes: <input type="checkbox"/>
12	Material Properties: <input type="checkbox"/>
13	Advanced Geometry Options
14	Analysis Type: 2D
15	Use Associativity: <input checked="" type="checkbox"/>
16	Import Coordinate Systems: <input type="checkbox"/>
17	Import Work Points: <input type="checkbox"/>
18	Reader Mode Saves Updated File: <input type="checkbox"/>
19	Import Using Instances: <input checked="" type="checkbox"/>
20	Smart CAD Update: <input type="checkbox"/>
21	Enclosure and Symmetry Processing: <input checked="" type="checkbox"/>
22	Decompose Disjoint Faces: <input checked="" type="checkbox"/>

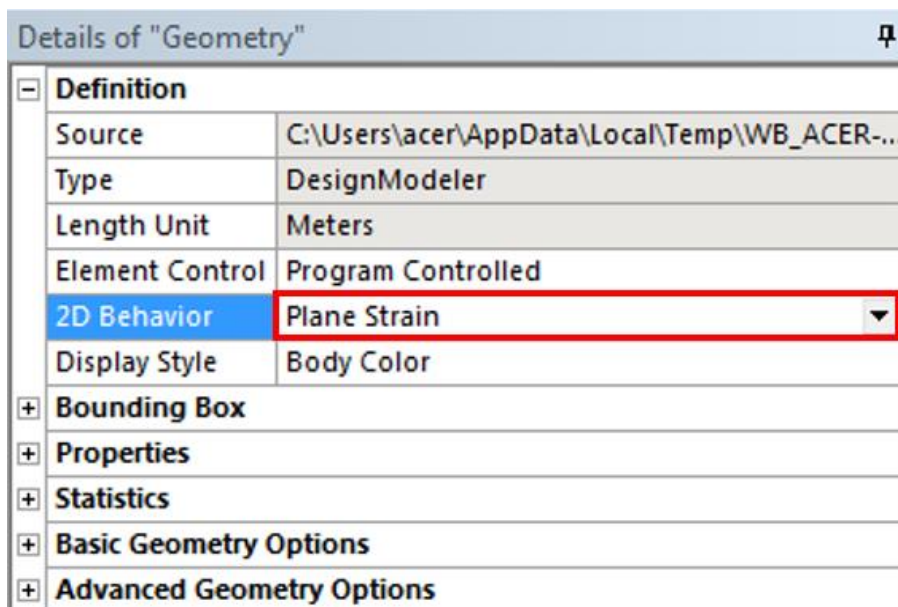
รูปที่ จ.16 เลือกโหมดการวิเคราะห์เป็นแบบสองมิติ

หลังจากนั้นให้คลิกซ้ายที่ Model ในกล่องรูปที่ จ.2 แล้วคลิกขวาแล้วเลือก Edit โปรแกรม ANSYS จะทำการเปิดโปรแกรมย่อย Mechanical เพื่อคำนวณสำหรับแก้ปัญหาวิศวกรรมเชิงโครงสร้าง ในแผนผังด้านข้างของโปรแกรมทางซ้ายให้เลือกที่ Geometry ดังแสดงในรูปที่ จ.17



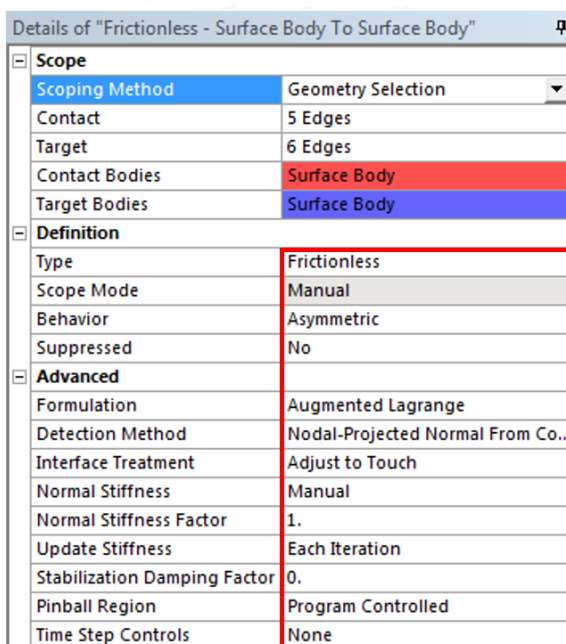
รูปที่ จ.17 หัวข้อ Geometry

ในแผนผังด้านซ้ายให้เปลี่ยน 2D Behavior เป็น Plain Strain ดังแสดงในรูปที่ จ.18



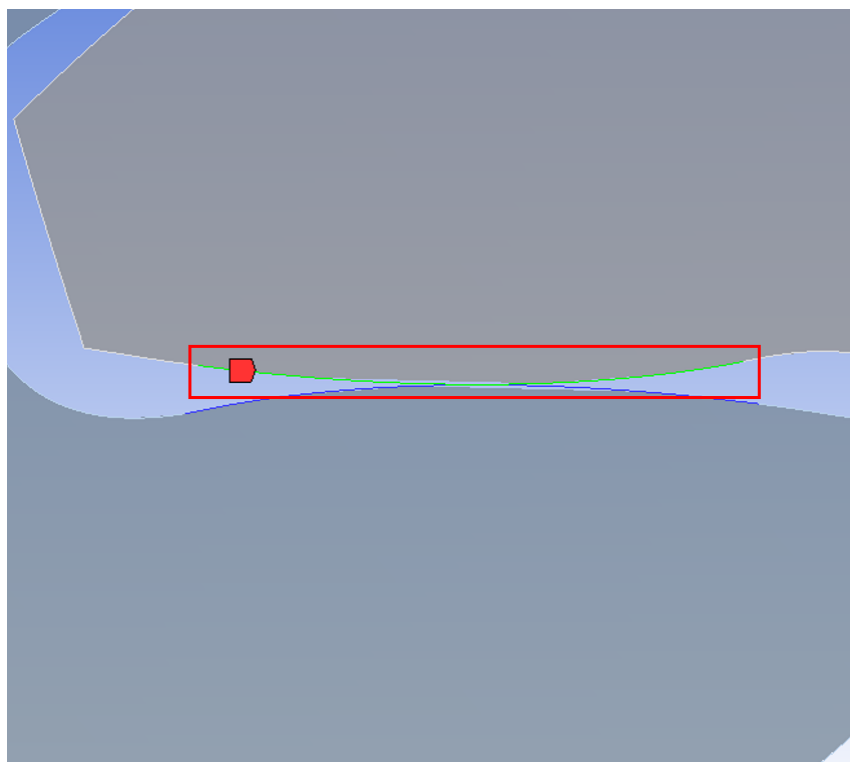
รูปที่ จ.18 พฤติกรรมของวัสดุในสองมิติ

ต่อมาให้คลิกที่ Connections → Contacts จะแสดงแผนผังออกมา ให้เปลี่ยนลักษณะการสัมผัสดังแสดงในรูปที่ จ.19

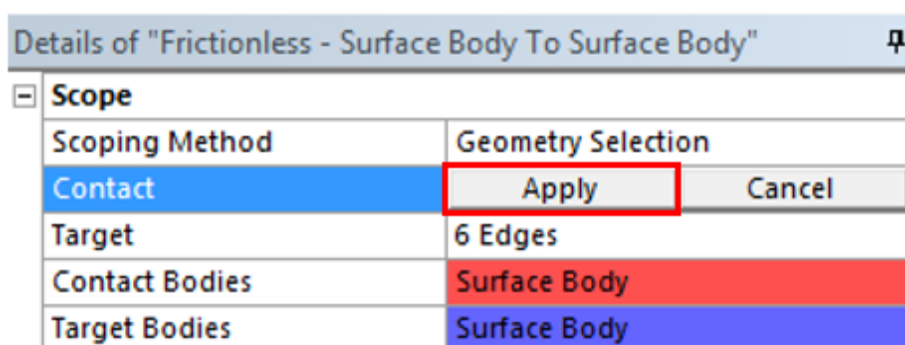


รูปที่ จ.19 รายละเอียดการตั้งค่าการสัมผัส

นอกจากนั้นยังต้องทำการเลือกผิว Contact ซึ่งคือผิวที่กำลังจะไปกระทบและเลือกผิว Target ซึ่งคือผิวที่จะถูกกระทบโดยการเลือกไปที่ขอบผิววัสดุดังแสดงในรูปที่ จ.20 และกด Apply ดังแสดงในรูปที่ จ.21 โดยผิวที่ถูกเลือกเป็นผิว Contact หรือ Target จะเป็นบริเวณที่สันนิษฐานว่าจะเกิดการสัมผัส ซึ่งโปรแกรมจะตรวจหาการสัมผัสในบริเวณดังกล่าว

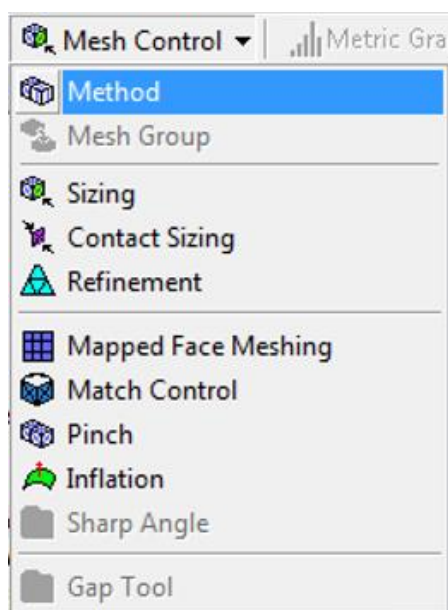


รูปที่ จ.20 ผิวที่ถูกเลือก



รูปที่ จ.21 การตั้งผิวที่ถูกเลือกให้เป็น Contact

ต่อมาในขั้นตอน Meshing คือการแบ่งโมเดลเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ให้กดไอคอน Mesh Control และเลือก Method ดังแสดงในรูปที่ จ.22



รูปที่ จ.22 การเลือกชนิดของเอลิเมนต์

ทำการเลือกวัตถุทั้งหมดและกด Apply ในช่อง Geometry ในลักษณะที่คล้ายกับการเลือกผิวที่กล่าวไปข้างต้นและในช่อง Method ให้เปลี่ยนเป็น Triangles ดังแสดงในรูปที่ จ.23

Details of "All Triangles Method" - Method	
<b>Scope</b>	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	2 Bodies
<b>Definition</b>	
Suppressed	No
Method	Triangles
Element Midside Nodes	Use Global Setting

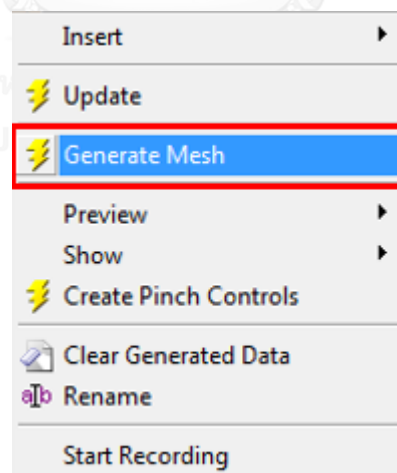
รูปที่ จ.23 รายละเอียดการตั้งค่าลักษณะการแบ่งเอลิเมนต์

ต่อมาเลือกไอคอน Mesh Control อีกครั้งแล้วเลือก Sizing ตามในรูปที่ จ.22 และทำการเลือกผิวขอบที่ต้องการแบ่งอย่างละเอียดและกด Apply ในลักษณะคล้ายกับที่กล่าวมาข้างต้น หลังจากนั้นจึงตั้งค่าการแบ่ง Mesh ที่ผิวตามแสดงในรูปที่ จ.24 ซึ่งในตัวอย่างนี้กำหนดขนาดเอลิเมนต์ตรงบริเวณผิวที่  $5 \times 10^{-6}$  m ซึ่งถือว่าเพียงพอกับขนาดของเฟืองในตัวอย่างนี้ที่มีมิติประมาณ  $0.1 \times 0.1$  m<sup>2</sup>

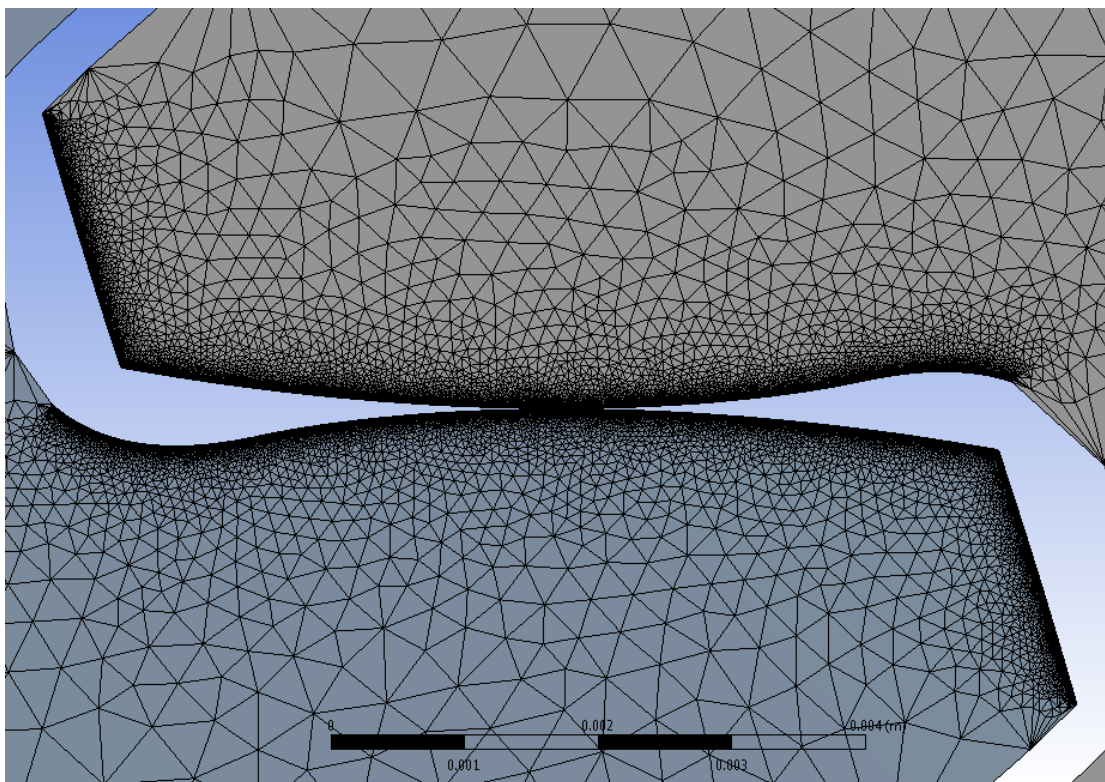
Details of "Edge Sizing" - Sizing	
<b>Scope</b>	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	21 Edges
<b>Definition</b>	
Suppressed	No
Type	Element Size
<input type="checkbox"/> Element Size	5.e-006 m
Behavior	Hard
Bias Type	No Bias

รูปที่ จ.24 รายละเอียดการแบ่ง Mesh ที่ผิวขอบ

หลังจากนั้นคลิกขวาที่ไอคอน Mesh ตามในรูปที่ จ.17 แล้วเลือก Generate Mesh ดังแสดงในรูปที่ จ.25 เพื่อให้โปรแกรมแบ่งโมเดลปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในรูปที่ จ.26

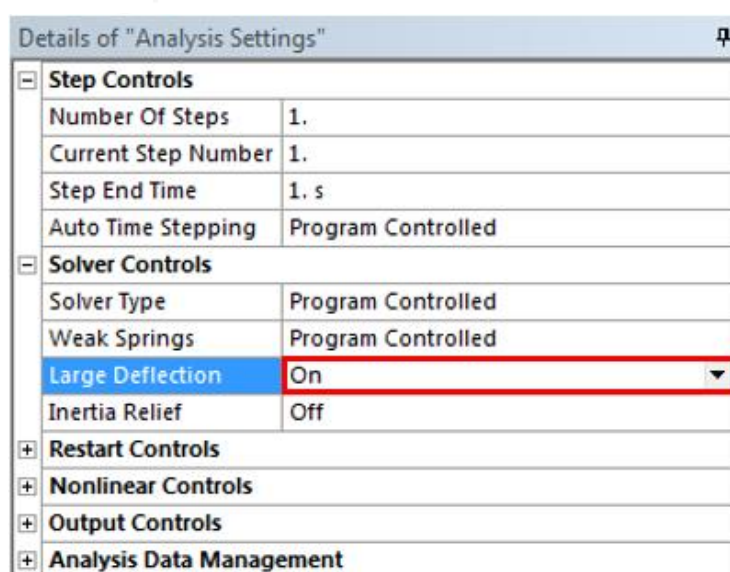


รูปที่ จ.25 การเลือกสร้าง Mesh



รูปที่ จ.26 โมเดลที่แบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ

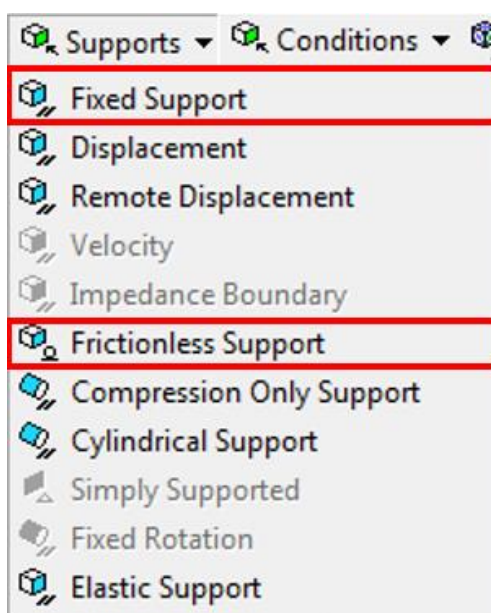
ภายหลังจากนั้นในขั้นตอน Static Structural → Analysis Settings ให้ตั้งค่าในหัวข้อ Large Deflection เป็น On ดังแสดงในรูปที่ จ.27



รูปที่ จ.27 การตั้งค่า Large Deflection

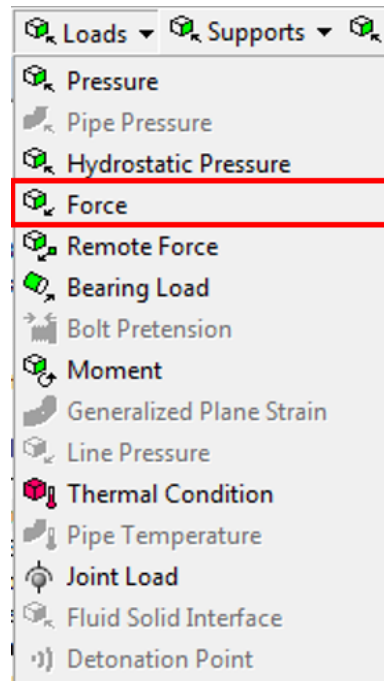


ต่อมาทำการเลือกไอคอน Supports แบบ Frictionless Support และกด Apply ที่ขอบผิวของรูเพลลาเฟืองตาม และกดไอคอน Supports แบบ Fixed Support และกด Apply ที่ขอบผิวของรูเพลลาเฟืองข้างดังแสดงในรูปที่ จ.28



รูปที่ จ.28 การเลือกประเภทจุดรองรับ

ภายหลังจากกำหนดจุดรองรับในโมเดลแล้วต่อมาคือการใส่แรงกระทำโดยในตัวอย่างนี้จะใส่แรงที่มีขนาดสมมูลกับทอร์ค 250 N-m เมื่อคิดในแบบ Plain Strain หรือคิดแรงแบบแรงต่อหนึ่งความยาวหน่วยแล้ว โดยในโปรแกรมนี้สามารถกดใส่แรงที่ไอคอน Loads ดังแสดงในรูปที่ จ.29

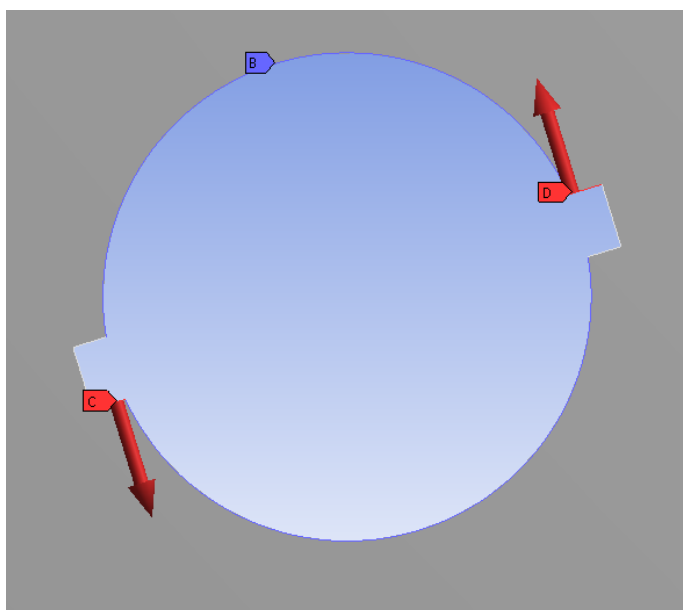


รูปที่ จ.29 การใส่โหลดลักษณะต่างๆ

โดยในการใส่ Force นั้นให้เลือกที่พื้นผิวที่ถูกกระทำแล้วกด Apply ส่วนขนาดของแรงนั้นสามารถใส่เป็นแบบ Components คือใส่แรงในแนวแกน X Y และ Z แยกกันได้หรือใส่แรงในลักษณะ Vector และเลือกขอบเพื่อกำหนดทิศทางของ Vector แล้วกด Apply โดยแรงจะมีทิศทางไปในทิศทางเดียวกันกับผิวนั้น โดยในตัวอย่างนี้ใส่แรงแบบ Vector ที่มีขนาด 390625 N ดังแสดงในรูปที่ จ.30 โดยใส่ไปที่ทั้งสองร่องลึมหันดังแสดงในรูปที่ จ.31

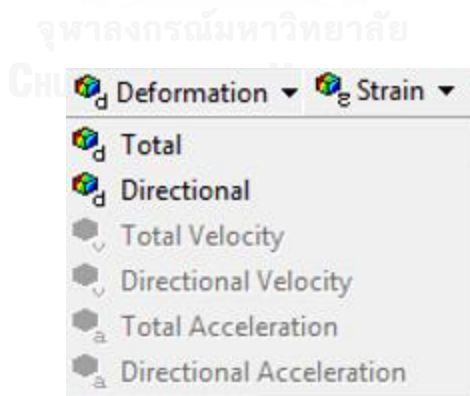
Details of "Force"	
<b>Scope</b>	
Scoping Method	Geometry Selection
Geometry	1 Edge
<b>Definition</b>	
Type	Force
Define By	Vector
<input type="checkbox"/> Magnitude	-3.9063e+005 N (ramped)
Direction	Click to Change
Suppressed	No

รูปที่ จ.30 รายละเอียดการตั้งค่าแรงที่กระทำ

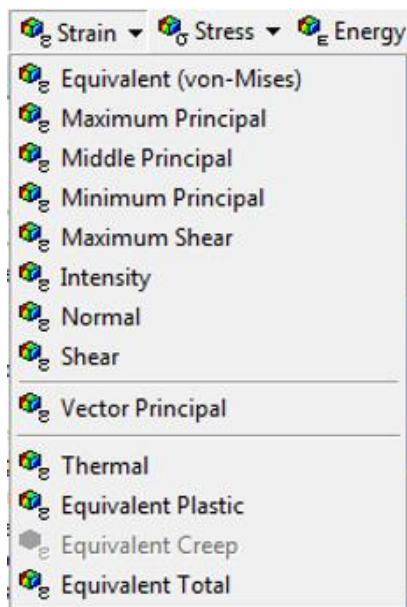


รูปที่ จ.31 แรงกระทำที่ร็องลิม

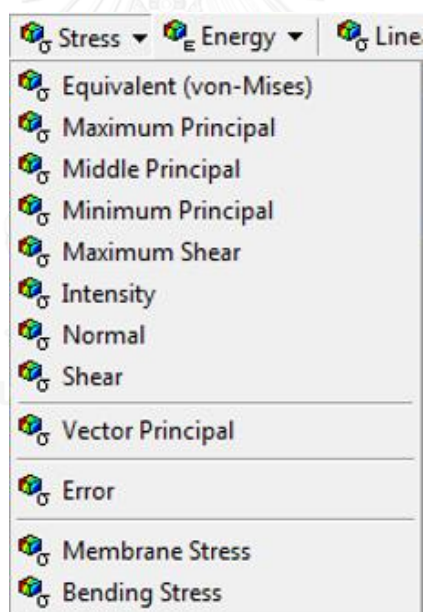
ในขั้นต่อมาคือการเลือกดูผลลัพธ์ของการคำนวณ ซึ่งในปัญหาเชิงโครงสร้างสามารถเลือกดูผลลัพธ์ได้หลายรูปแบบได้แก่การดูผลลัพธ์ค่าเคลื่อนตัว ค่าความเครียด และค่าความเค้นต่างๆ ซึ่งสามารถกดดูได้ที่ไอคอนดังแสดงในรูปที่ จ.32-จ.34 โดยสามารถดูได้ทั้งวัตถุหรือกดเลือกดูเฉพาะบางส่วนได้



รูปที่ จ.32 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าเคลื่อนตัว

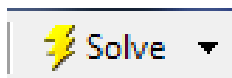


รูปที่ จ.33 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าความเครียด

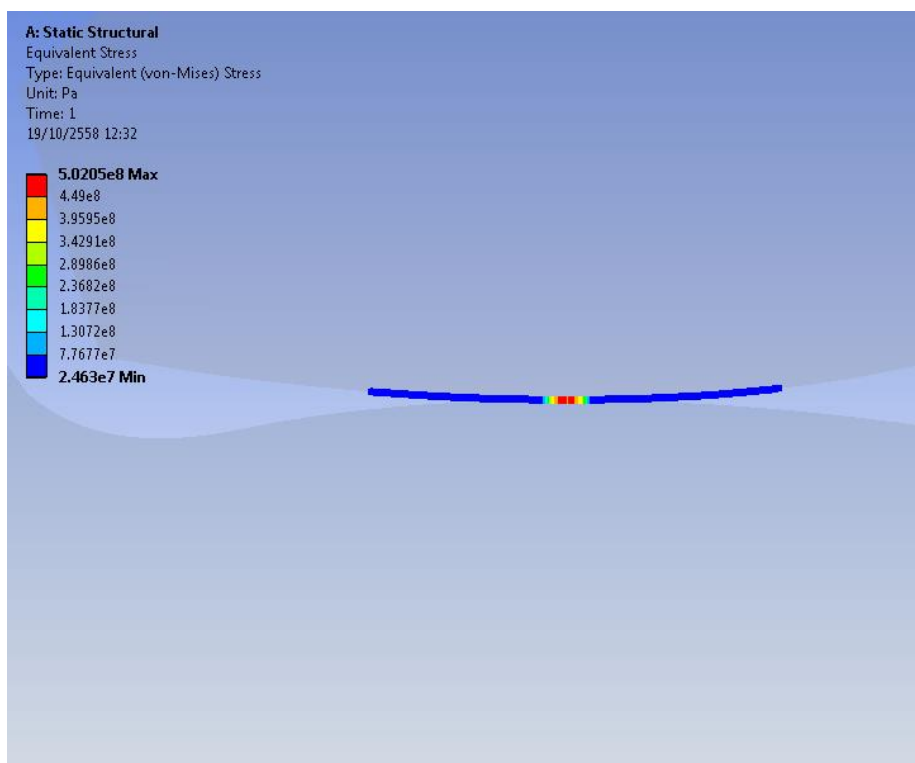


รูปที่ จ.34 การเลือกดูผลลัพธ์ค่าความเค้น

ซึ่งในตัวอย่างนี้เลือกดูค่าความเค้นพอนมิสเชสและความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X Y และ Z ของผิวที่สัมผัส หลังจากจึงกดไอคอน Solve ดังแสดงในรูปที่ จ.35 เพื่อให้โปรแกรมคำนวณผลลัพธ์ออกมาโดยแสดงผลลัพธ์ออกมาในรูปแบบของแถบสี ซึ่งในตัวอย่างนี้เลือกดูค่าความเค้นพอนมิสเชสบริเวณขอบผิวที่เกิดการสัมผัสดังแสดงในรูปที่ จ.36



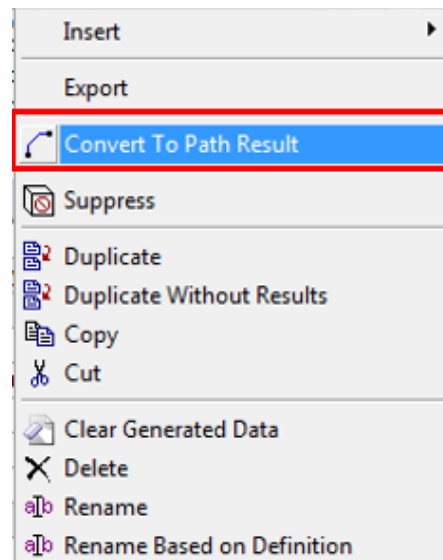
รูปที่ จ.35 ไอคอนแก้ปัญหา



รูปที่ จ.36 แถบสีค่าความเค้นฟอนมิสเซอร์บริเวณผิวที่เกิดการสัมผัส

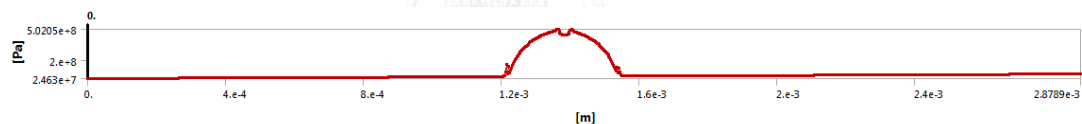
CHULALONGKORN UNIVERSITY

นอกจากนี้ในการหาค่าความกว้างการเสียรูปไม่สามารถหาได้โดยตรง ในตัวอย่างนี้จึงพิจารณาจากความกว้างของบริเวณที่มีค่าความเค้นสูงกว่าบริเวณอื่นโดยในตัวอย่างนี้พิจารณาโดยดูจากค่าความเค้นฟอนมิสเซอร์ ทำการคลิกขวาที่ Equivalent Stress ที่แสดงค่าความเค้นของขอบผิวที่พิจารณาก่อนหน้านี้แล้วคลิกที่ Convert to Path Result ดังแสดงในรูปที่ จ.37



รูปที่ จ.37 การเลือกให้แสดงการกระจายความเค้น

ภายหลังจากการกดปุ่ม Convert to Path Result โปรแกรมจะแสดงกราฟระหว่างค่าความเค้นและความยาวของขอบผิวที่เลือกดังแสดงในรูปที่ จ.38 ซึ่งสามารถพิจารณาหาค่าการเสียรูปของพื้นผิวที่เกิดการสัมผัสได้



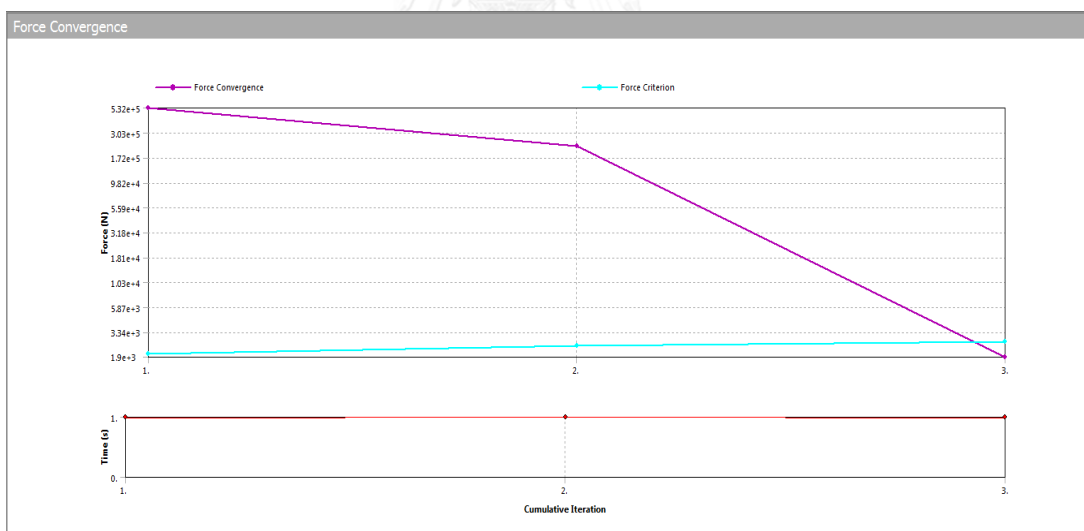
รูปที่ จ.38 กราฟระหว่างความเค้นและความยาวของขอบผิวที่พิจารณา

เนื่องจากปัญหาการสัมผัสเป็นปัญหาประเภทไม่เชิงเส้น ดังนั้นในการแก้ปัญหาจึงต้องใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสันในการทำซ้ำด้วยซึ่งสามารถดูขั้นตอนของการทำซ้ำว่าการคำนวณกำลังลู่เข้า (Convergence) หรือไม่โดยกดไปที่ Solution → Solution Information และปรับที่ Solution Output เป็น Force Convergence ดังแสดงในรูปที่ จ.39

Details of "Solution Information"	
Solution Information	
Solution Output	Force Convergence
Newton-Raphson Residuals	0
Update Interval	2.5 s
Display Points	All
FE Connection Visibility	
Activate Visibility	Yes
Display	All FE Connectors
Draw Connections Attached To	All Nodes
Line Color	Connection Type
Visible on Results	No
Line Thickness	Single
Display Type	Lines

รูปที่ จ.39 การปรับค่าการแสดงผลของผลลัพธ์

โดยโปรแกรมจะแสดงขั้นตอนและจำนวนครั้งการทำซ้ำของการคำนวณที่แสดงการลู่เข้าของแรงภายนอกและแรงภายในดังแสดงในรูปที่ จ.40

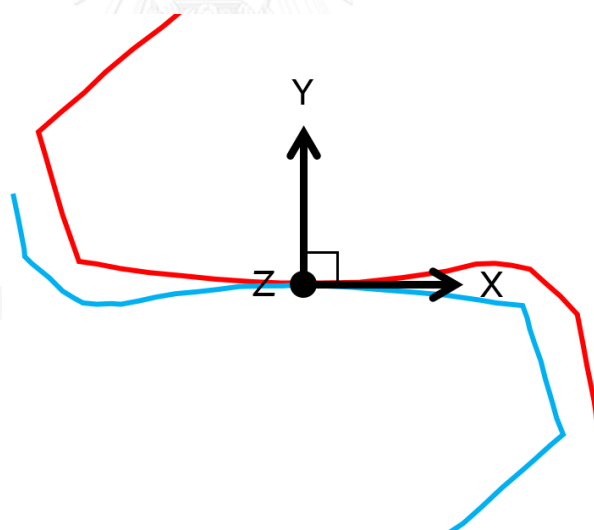


รูปที่ จ.40 การลู่เข้าของแรง

## ภาคผนวก ฉ.

### ผลการคำนวณค่าความเค้นของเฟืองชุดต่างๆ

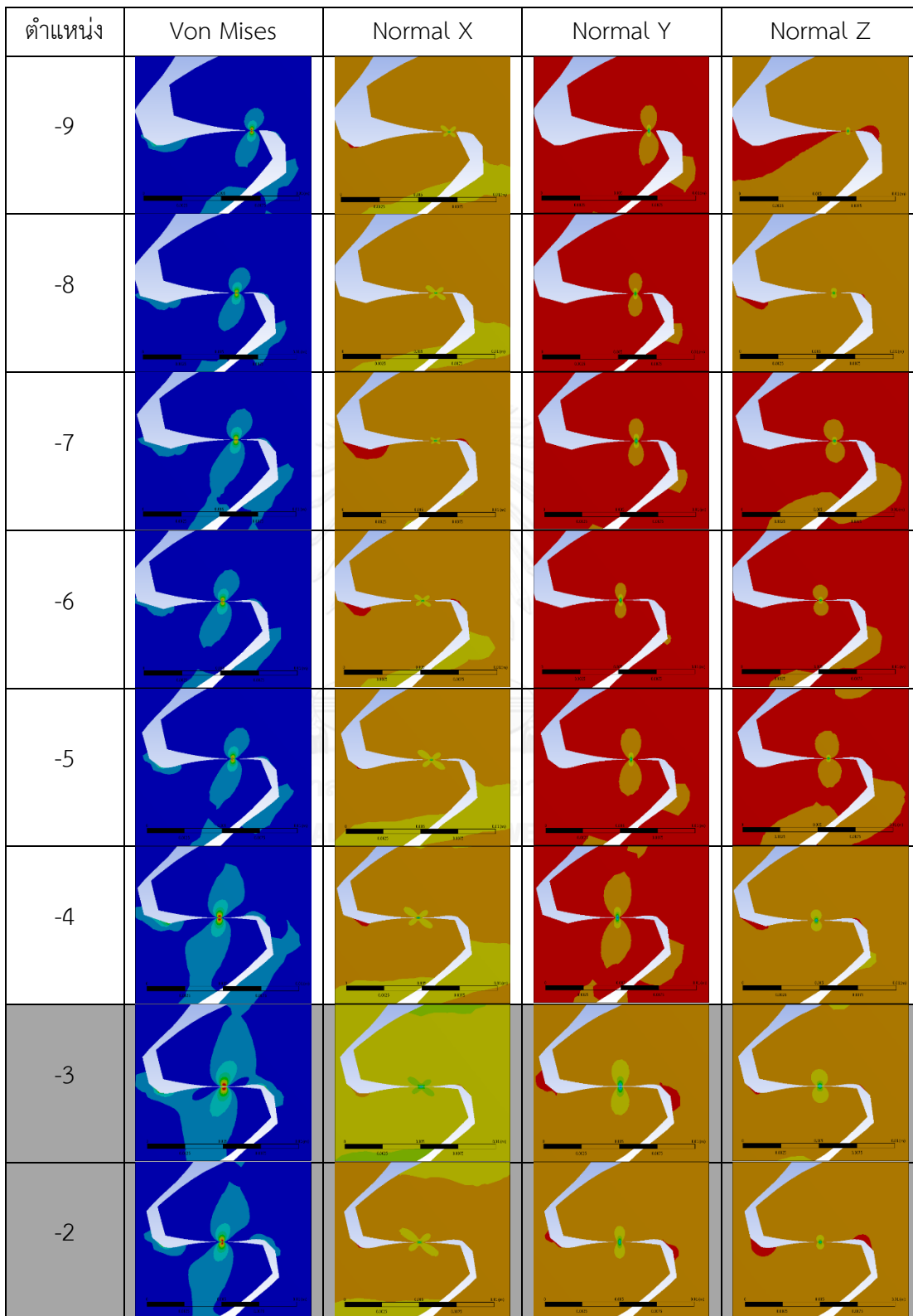
ในบทนี้ แสดงผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเซส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง A – I ในตารางที่ ฉ.1 – ฉ.18 โดยตำแหน่งในการขบถูกระบุเป็นตัวเลขที่แสดงถึงองศาที่เฟืองหมุนไปจากตำแหน่งพิตช์ (ตำแหน่ง 0 ) โดยตำแหน่งที่มีค่าลบมากที่สุดจะแสดงตำแหน่งเริ่มต้นการขบหรือตำแหน่งที่โคนของเฟืองเข้าขบกับปลายฟันของเฟืองตามและตำแหน่งที่มีค่าบวกมากที่สุดจะแสดงตำแหน่งสิ้นสุดการขบหรือปลายฟันของเฟืองเข้าขบกับโคนฟันของเฟืองตาม ซึ่งจำนวนตำแหน่งที่เกิดขึ้นในหนึ่งรอบการขบนั้นขึ้นอยู่กับเรขาคณิตของเฟืองชุดนั้นๆ นอกจากนี้ตำแหน่งที่เกิดการขบหนึ่งคู่ฟันจะแสดงเป็นแถบสีเทา ส่วนตำแหน่งที่เกิดการขบสองคู่ฟันจะแสดงเป็นแถบสีขาว โดยชุดเฟืองถูกประกอบโดยวางตัวในทิศทางตามแกน X-Y ตามในรูปที่ ฉ.1

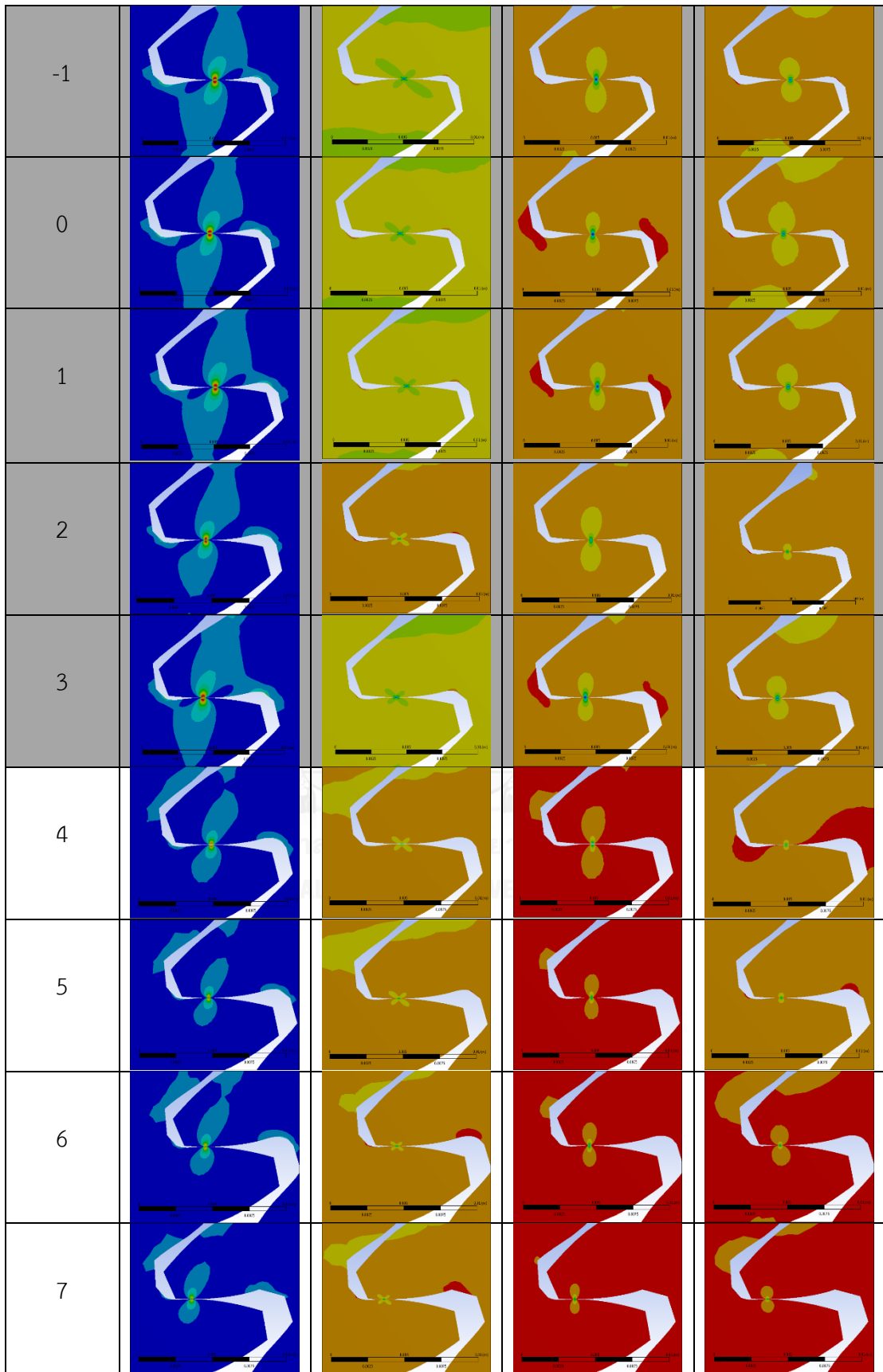


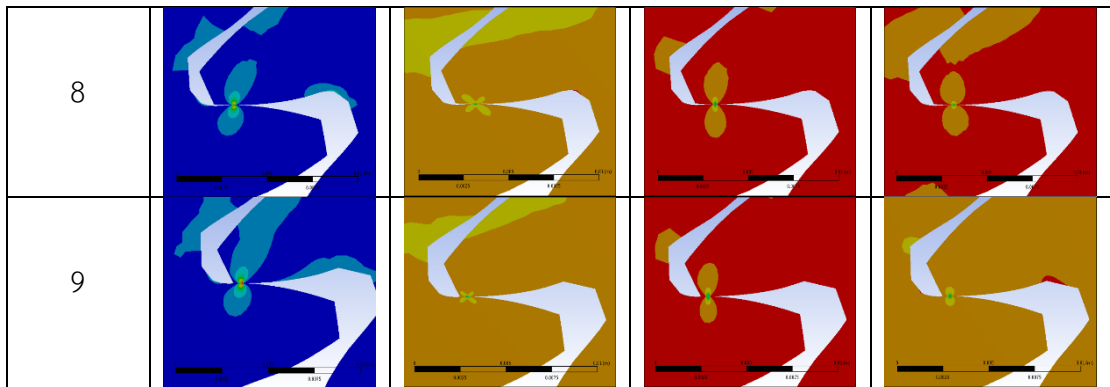
รูปที่ ฉ.1 การวางตัวของชุดเฟืองตามแนวแกน X-Y



ตารางที่ ฉ.1 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง A







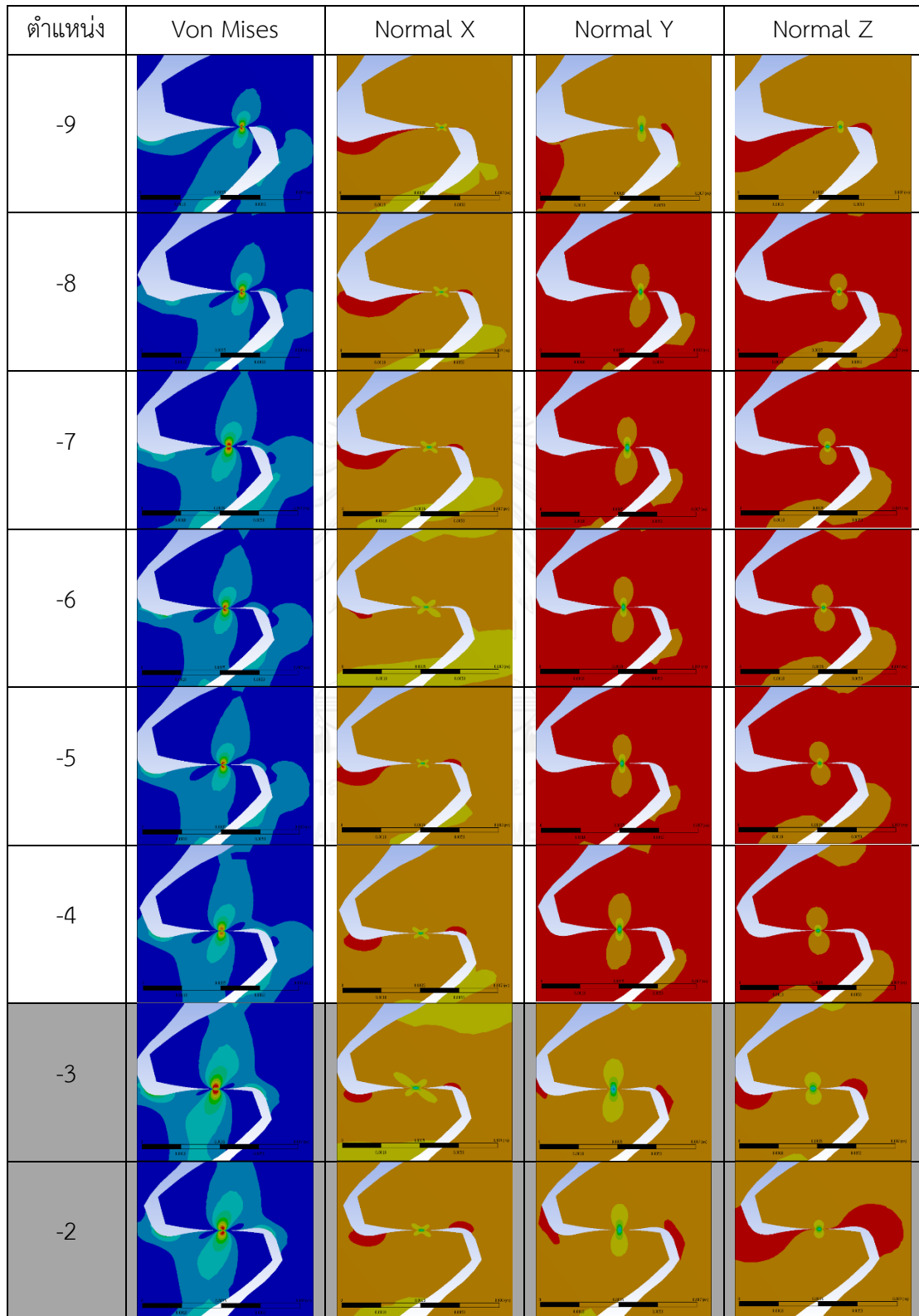
\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

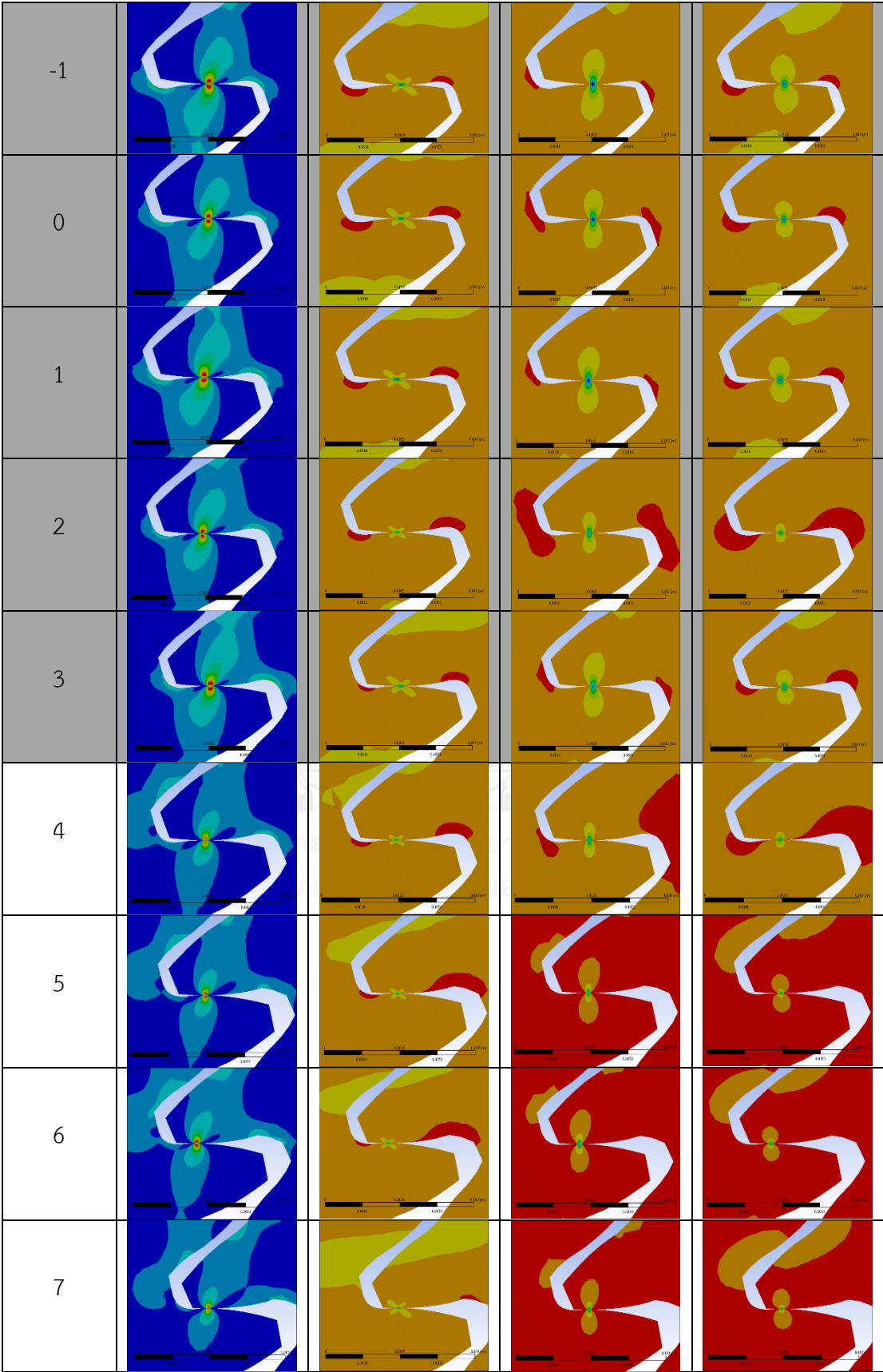


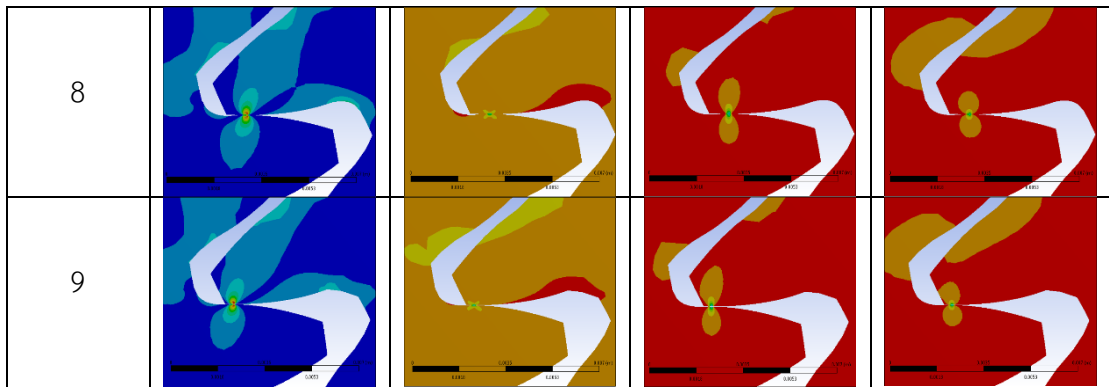
ตารางที่ ๑.2 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเซส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง A

ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-9	320.50	-786.71	-812.04	-479.63	0.205
-8	304.27	-734.88	-775.92	-453.24	0.23242
-7	314.90	-754.45	-804.27	-467.62	0.2499
-6	360.31	-864.01	-920.55	-535.37	0.2349
-5	359.67	-867.46	-917.47	-535.48	0.2574
-4	362.85	-872.93	-924.46	-539.22	0.26989
-3	462.97	-1105.9	-1184.1	-686.98	0.35487
-2	471.66	-1149.8	-1198.9	-704.60	0.3573
-1	481.76	-1149.4	-1230.9	-714.08	0.3748
0	502.14	-1213.6	-1279.3	-747.22	0.3423
1	472.47	-1135.3	-1206.6	-702.4	0.36235
2	485.07	-1174.9	-1236	-723.26	0.3799
3	472.33	-1130.9	-1207.1	-701.39	0.3749
4	379.3	-906.42	-969.98	-562.92	0.2474
5	347.02	-828.27	-887.63	-514.77	0.2449
6	309.65	-739.58	-791.78	-459.41	0.2549
7	294.11	-710.48	-714.19	-416.32	0.24241
8	293.93	-704.18	-750.84	-436.5	0.24241
9	316.92	-761.22	-809.09	-471.09	0.23741

ตารางที่ ๓.3 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง B







\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

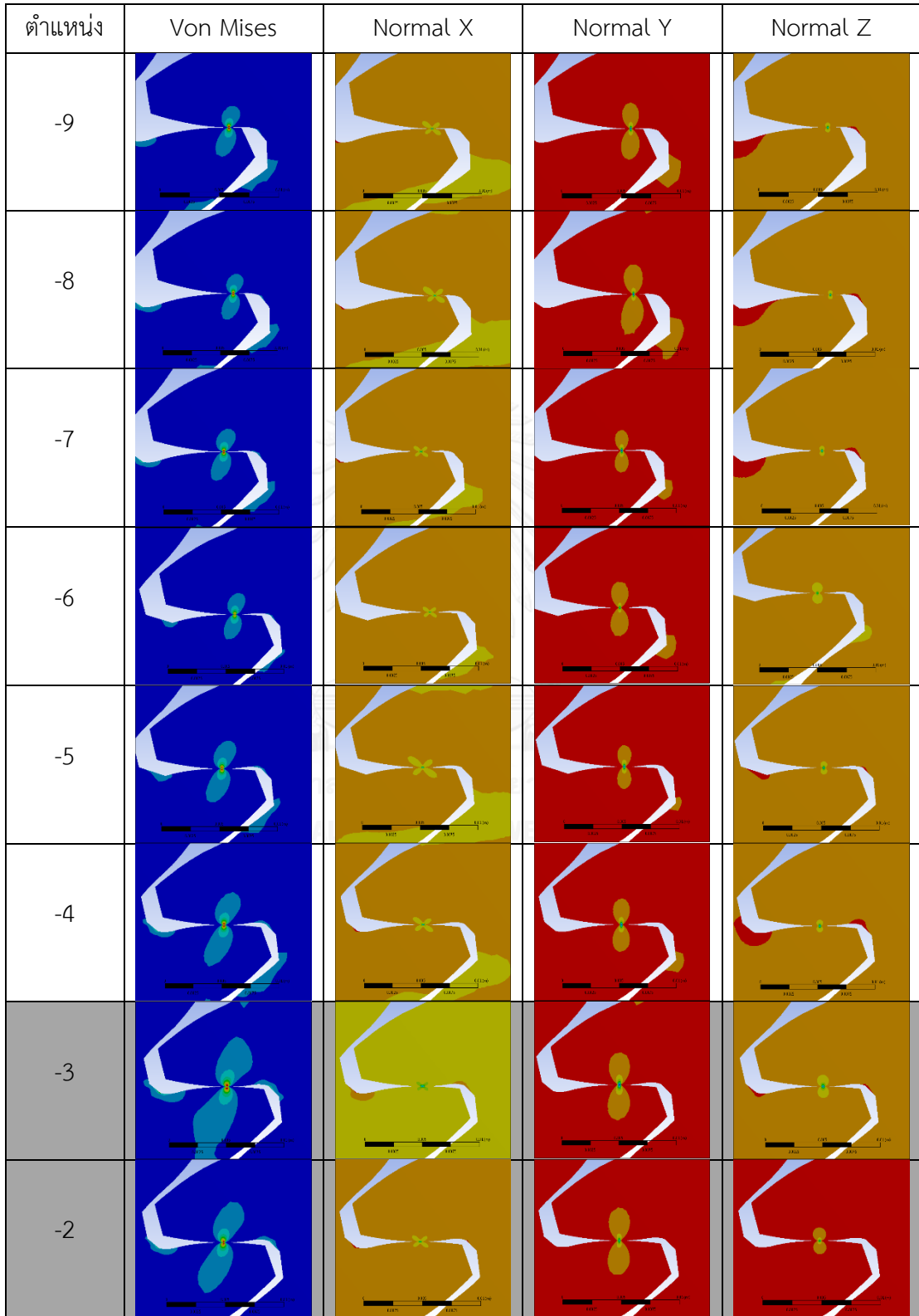


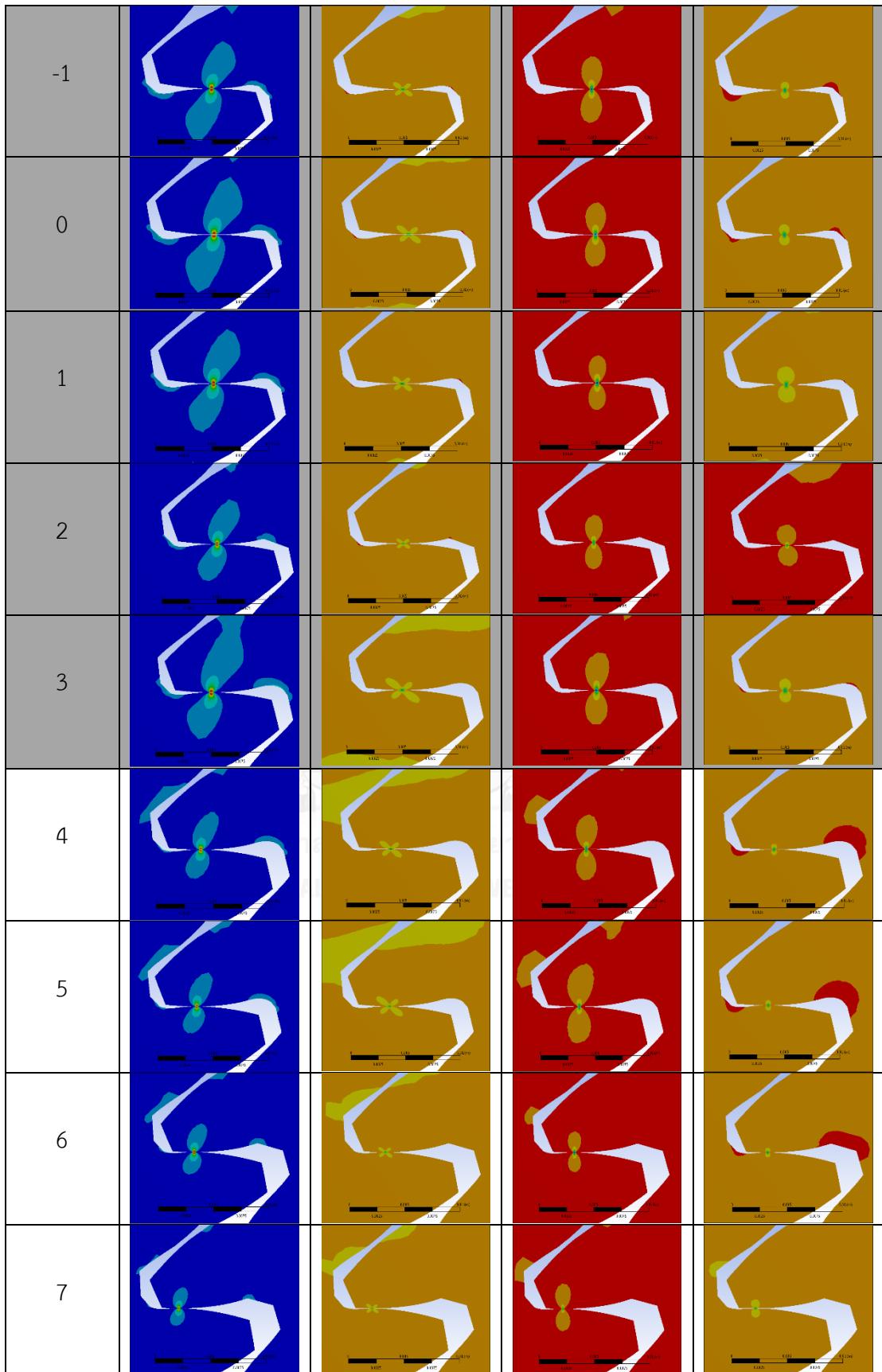
ตารางที่ ๑.4 ค่าการคำนวณความเค้นฟอนมิสเซส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง B

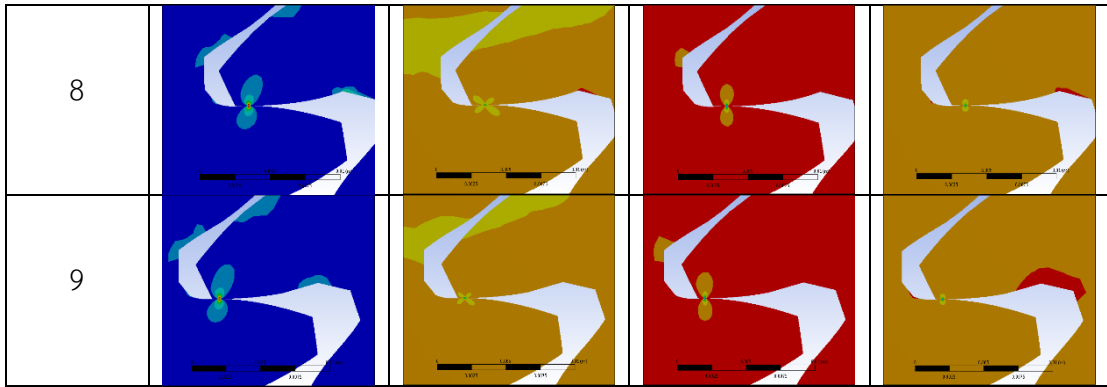
ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-9	456.53	-1090.5	-1167.5	-677.42	0.21475
-8	429.8	-1041.5	-1095	-640.95	0.21293
-7	464.66	-1102.7	-1189.5	-687.64	0.24374
-6	529.22	-1270.4	-1352	-786.72	0.23145
-5	529.33	-1270.2	-1352.4	-788.58	0.23145
-4	504.16	-1193.2	-1291.4	-745.38	0.2573
-3	669.42	-1573.7	-1716	-986.92	0.3287
-2	670.68	-1598.5	-1716	-994.36	0.3294
-1	674.02	-1589.4	-1727.6	-993.02	0.37476
0	755.77	-1799.8	-1933.9	-1120	0.31227
1	673.38	-1570	-1727.1	-989.11	0.37477
2	683.3	-1612.9	-1750.9	-1009.1	0.3323
3	667.52	-1562.4	-1711.3	-982.1	0.32979
4	525.05	-1238.3	-1345.4	-775.1	0.26731
5	502.35	-1181.1	-1287.7	-740.65	0.23659
6	455.89	-1076.4	-1167.9	-673.29	0.23395
7	447.65	-1051.8	-1147.2	-659.69	0.21633
8	445.48	-1051.9	-1141.1	-657.9	0.21882
9	470.84	-1124.7	-1203.9	-698.59	0.1975



ตารางที่ ๑.5 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง C







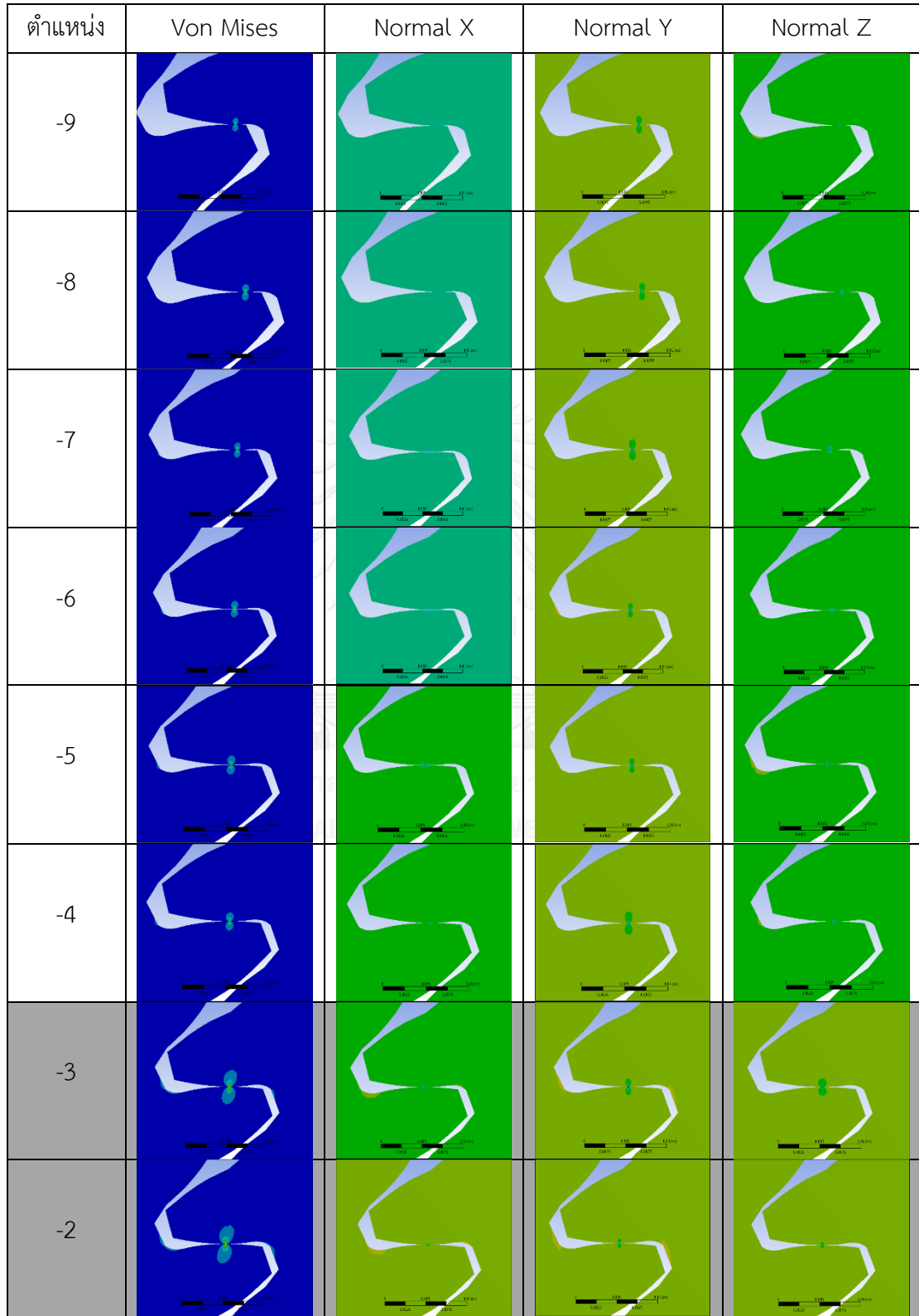
\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

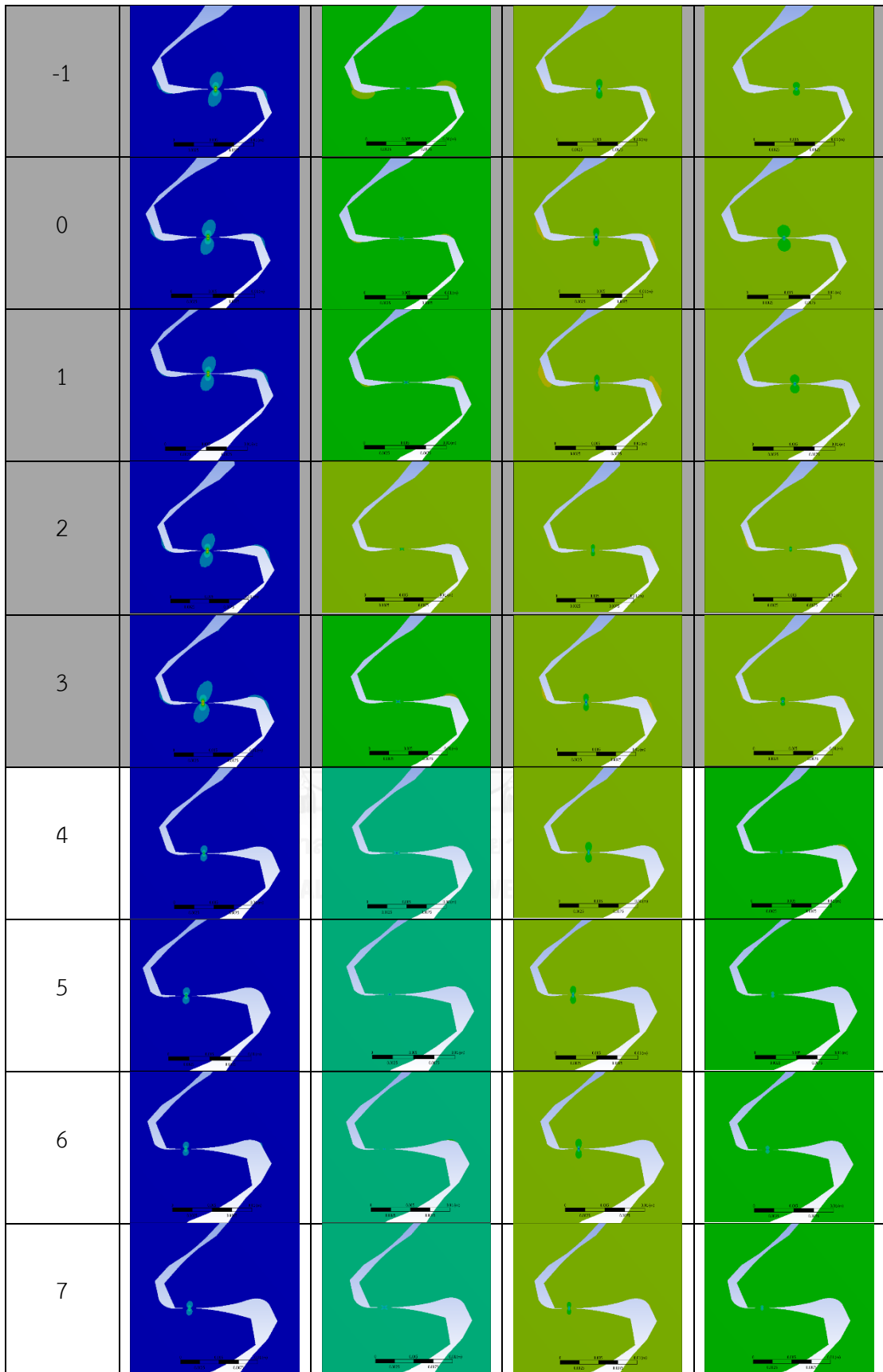


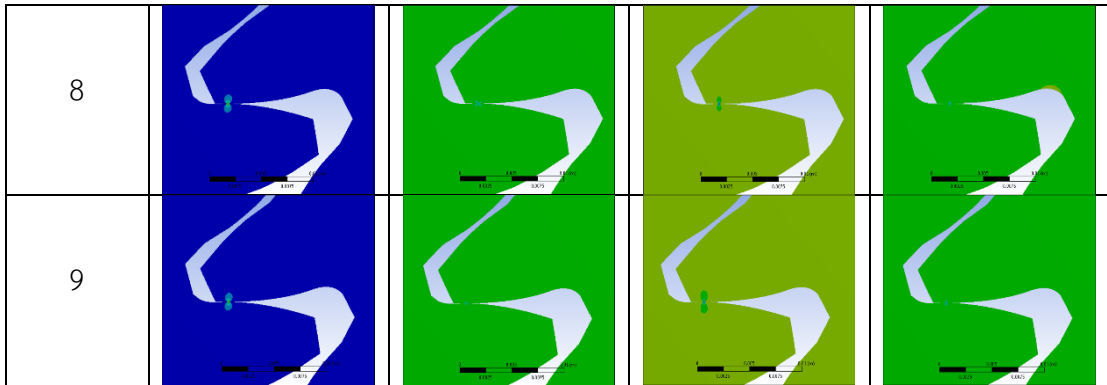
ตารางที่ ๑.๖ ค่าการคำนวณความเค้นฟอนมิสเซส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง C

ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-9	273.68	-664.98	-696.36	-408.4	0.20709
-8	280.2	-692.21	-708	-419.55	0.19965
-7	280.32	-690.39	-708.52	-419.67	0.2171
-6	261.74	-644.62	-661.87	-391.95	0.27455
-5	269.41	-651.73	-686.74	-401.54	0.26453
-4	267.09	-644.35	-681.16	-397.47	0.23211
-3	352.19	-846.88	-898.38	-523.06	0.3568
-2	328.81	-806.06	-833.66	-491.92	0.3619
-1	378.42	-916.3	-964.89	-563.66	0.3519
0	350.76	-853.84	-891.54	-523.62	0.3694
1	374.73	-907.3	-955.39	-557.56	0.3543
2	344.25	-840.89	-872.29	-514.56	0.3569
3	364.83	-875.86	-931.91	-542.33	0.3918
4	253.68	-612.69	-646.92	-377.88	0.2795
5	268.45	-649.57	-684.21	-400.14	0.27207
6	277.08	-678.15	-700.33	-413.55	0.2221
7	252.12	-619	-638.7	-377.31	0.23959
8	281.58	-686.29	-718.65	-420.25	0.19959
9	261.69	-627.08	-667.13	-388.26	0.2246

ตารางที่ ๑.๗ ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง D







\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

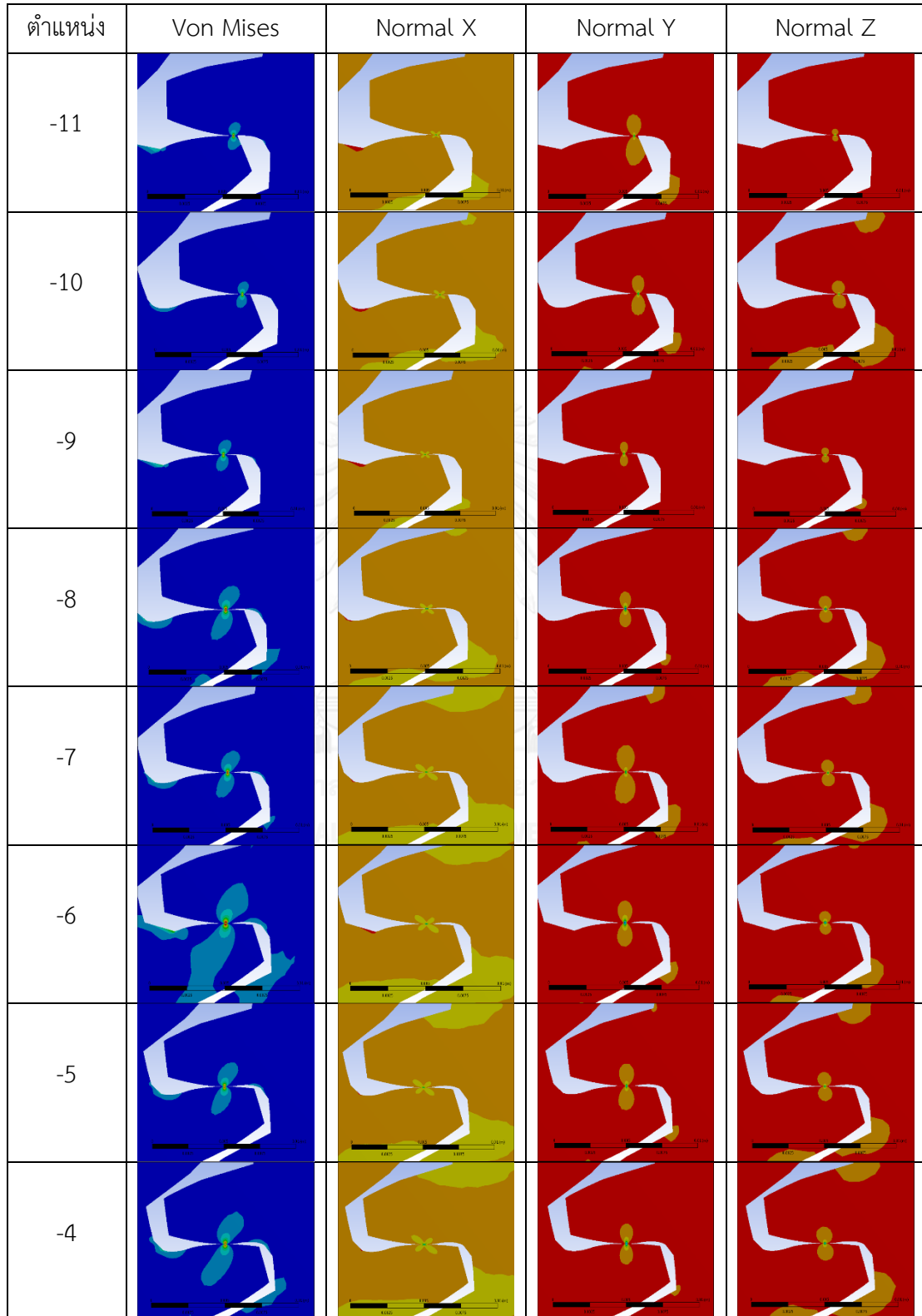


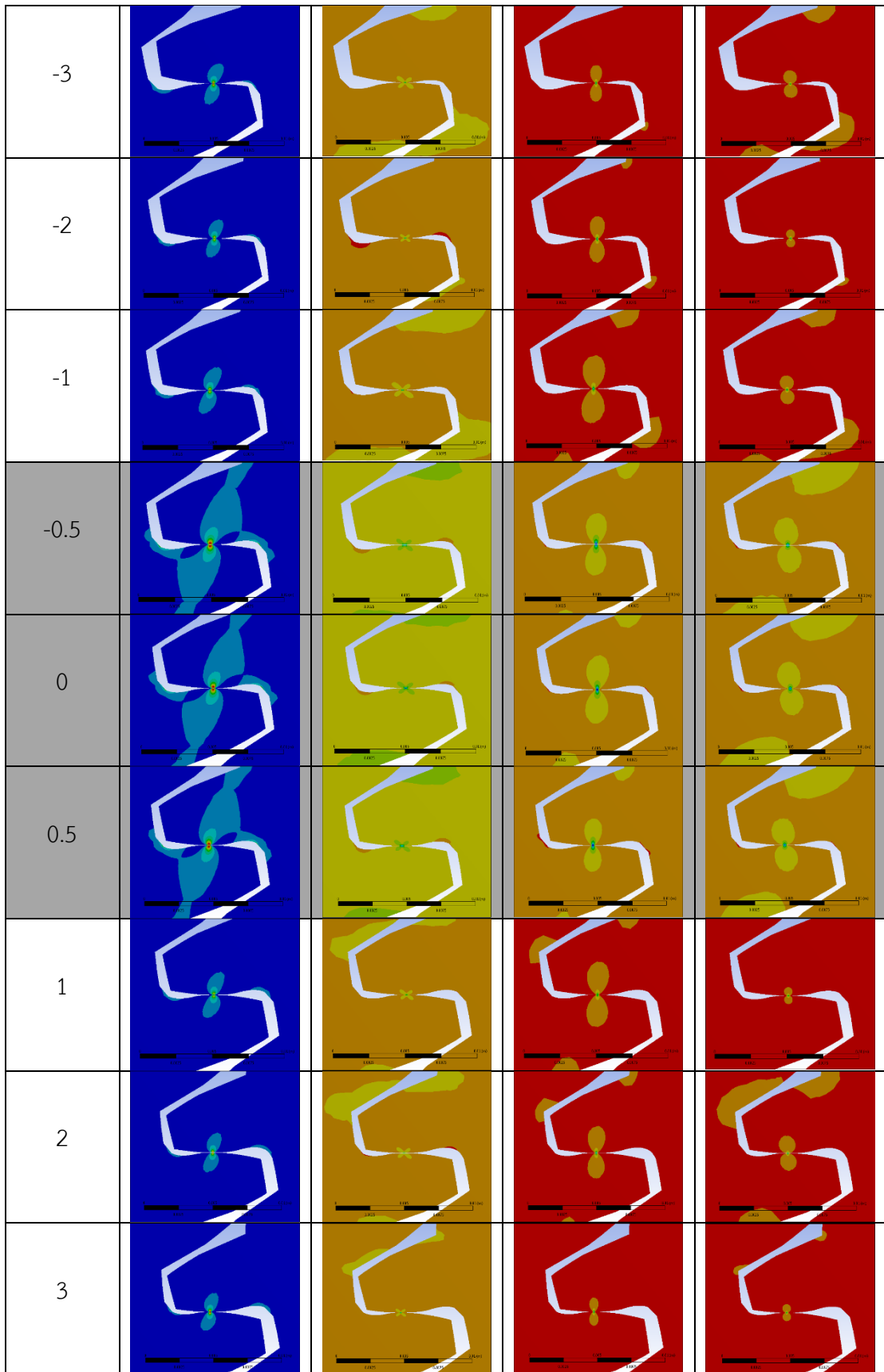
ตารางที่ ๘.8 ค่าการคำนวณความเค้นฟอนมิสเซส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง D

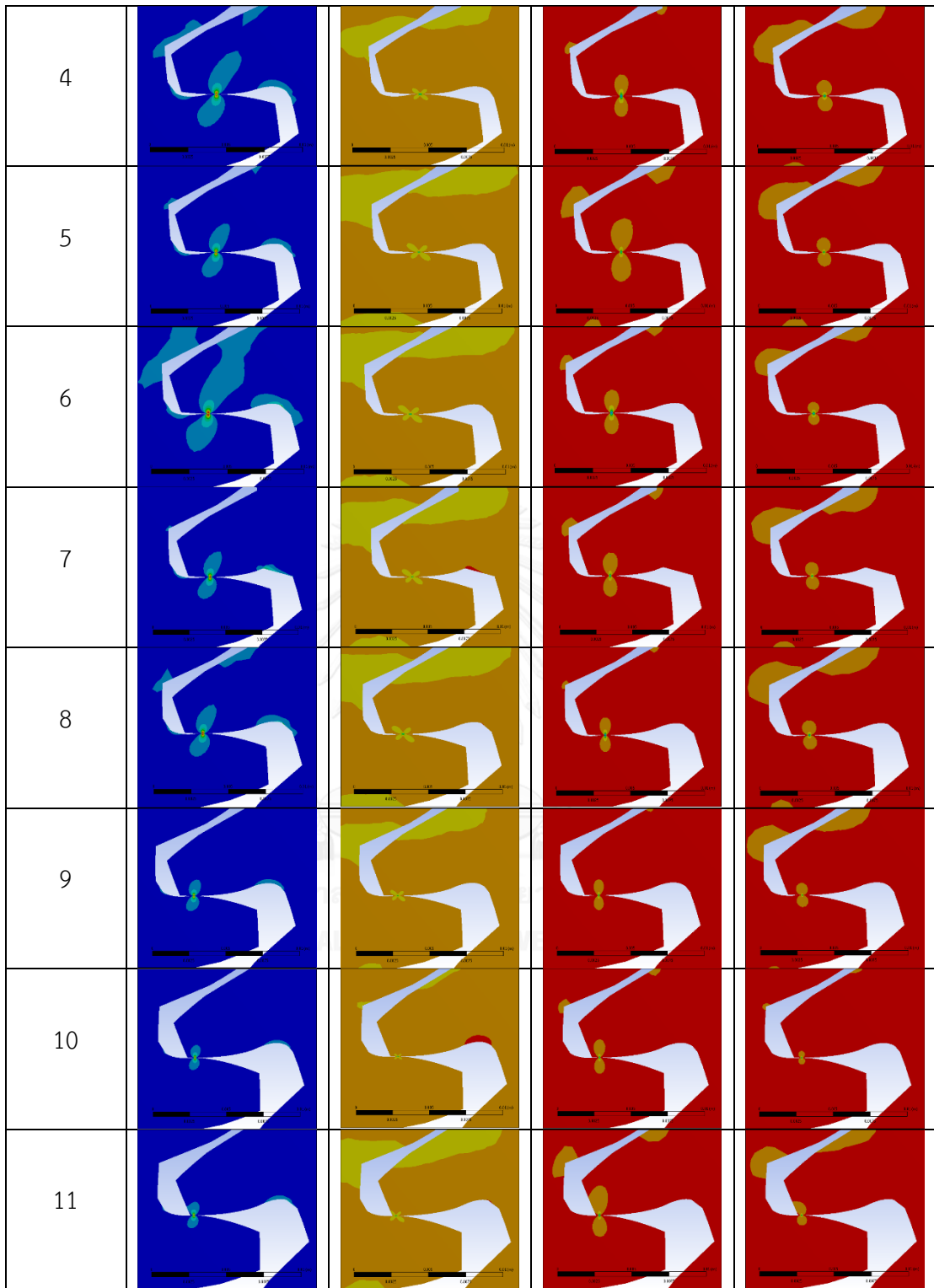
ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-9	245.47	-602.38	-621.64	-367.21	0.2143
-8	245.07	-603.72	-619.25	-366.89	0.1919
-7	195.14	-479.98	-492.99	-291.89	0.2800
-6	195.68	-479.81	-495.13	-292.48	0.2724
-5	215.67	-529.65	-545.37	-322.51	0.2824
-4	215.19	-529.36	-543.82	-321.95	0.2899
-3	306.66	-754.81	-776.21	-458.64	0.3600
-2	270.63	-666.95	-684.14	-405.32	0.3549
-1	297.47	-729.84	-754.78	-444.41	0.3599
0	290.92	-708.36	-740.19	-434.31	0.3550
1	298.98	-731.59	-760.88	-446.95	0.3549
2	262.24	-643.49	-664.55	-392.41	0.3524
3	309.65	-750.66	-787.22	-461.37	0.3449
4	211.77	-516.70	-537.00	-316.11	0.2925
5	211.50	-517.03	-535.88	-315.87	0.2800
6	192.42	-472.30	-486.83	-287.74	0.2725
7	193.72	-474.24	-490.92	-289.55	0.2700
8	244.19	-596.75	-618.90	-364.70	0.1968
9	244.37	-595.12	-620.27	-364.62	0.2018



ตารางที่ ๑.๙ ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง E



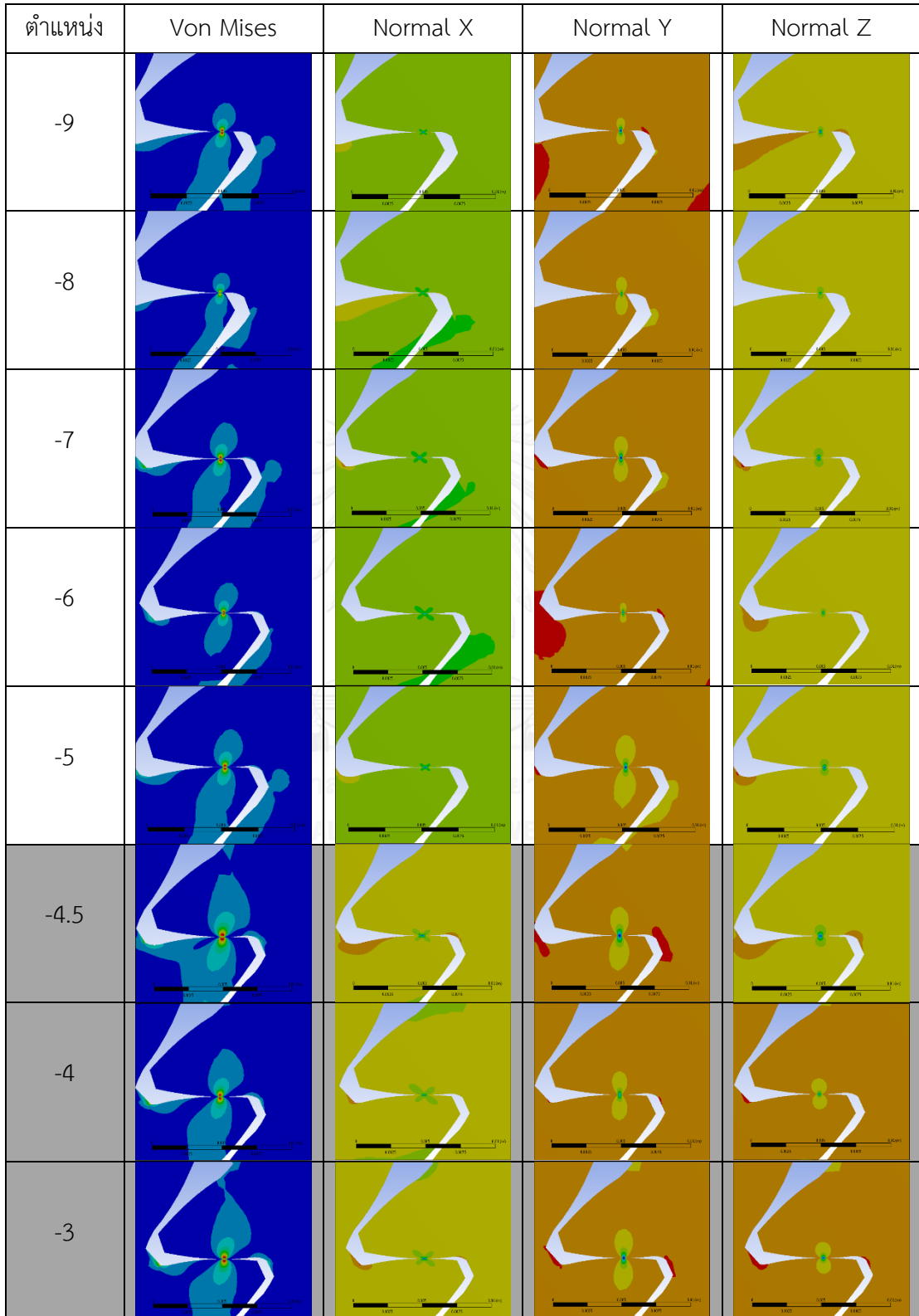


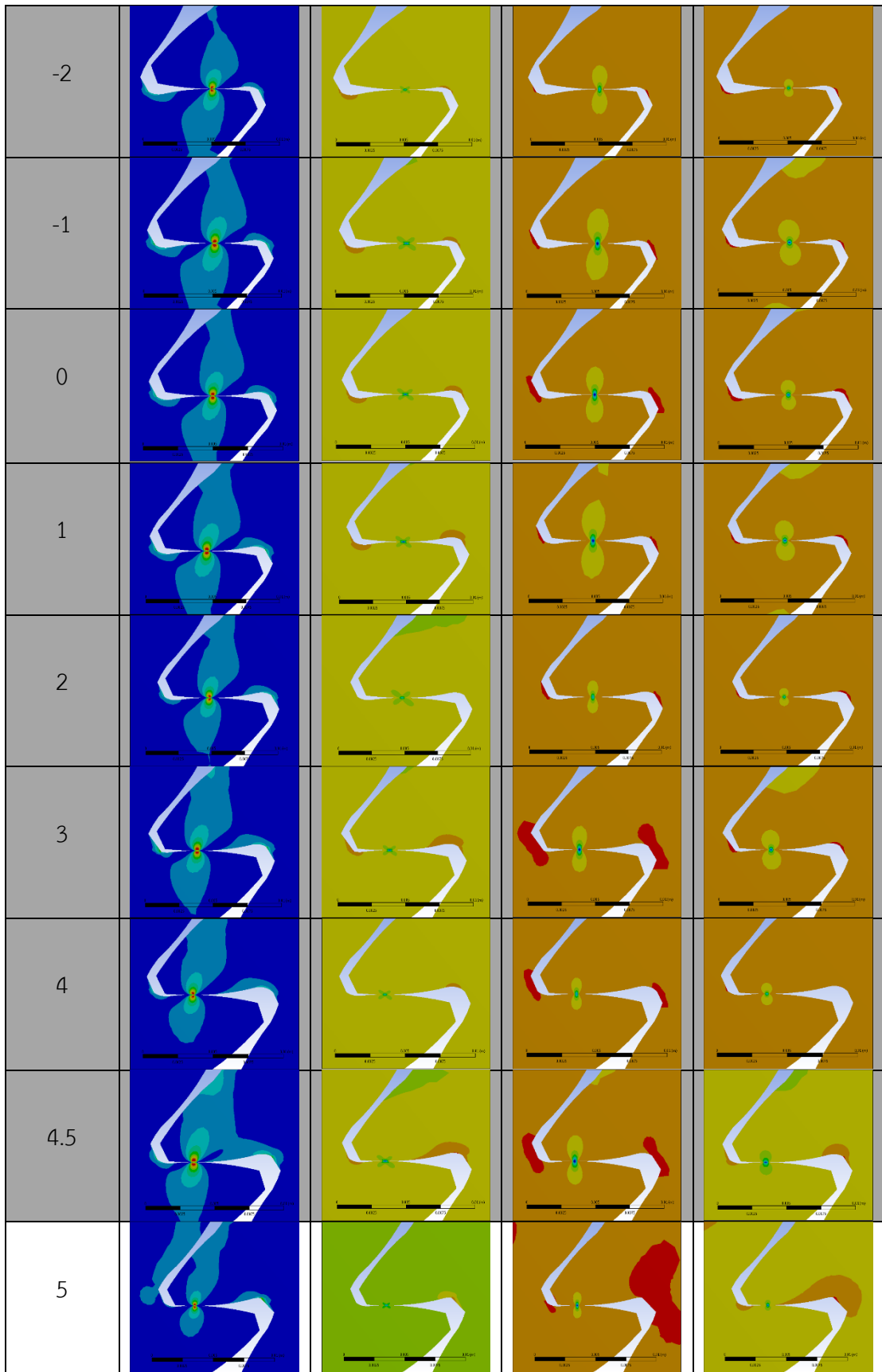


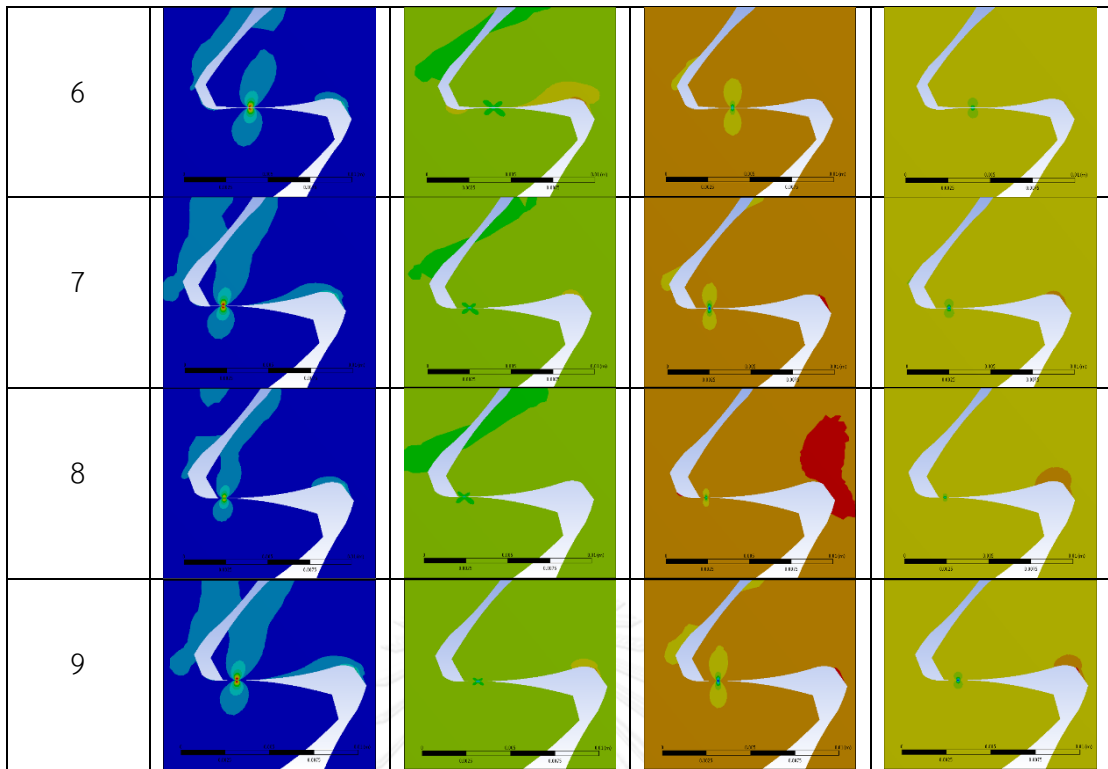
ตารางที่ ฉ.10 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง E

ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-11	587.4	-1007.2	-1279	-685.85	0.13888
-10	393.13	-963.96	-996.58	-588.16	0.14486
-9	471.66	-1166	-1190	-706.79	0.15537
-8	449.53	-1102.4	-1139.5	-672.57	0.17511
-7	447.19	-1109.4	-1125.4	-670.41	0.17604
-6	348.73	-851.1	-885.98	-521.12	0.22229
-5	444.33	-1088.7	-1126.7	-664.63	0.18497
-4	394.73	-968.16	-1000.3	-590.55	0.22496
-3	438.4	-1083	-1106.6	-656.88	0.1724
-2	438.01	-1076.1	-1109.2	-655.6	0.21483
-1	416.53	-1014.6	-1058.4	-621.9	0.24231
-0.5	581.71	-1415.8	-1479.2	-868.48	0.28477
0	585.64	-1422.9	-1490.5	-874.02	0.26979
0.5	579.98	-1405.5	-1477.5	-864.91	0.26479
1	408.75	-995.69	-1038.5	-610.27	0.2398
2	427.58	-1055.4	-1080.1	-640.55	0.22957
3	430.87	-1058.8	-1091.1	-644.95	0.1945
4	395.01	-968.01	-1001.6	-590.88	0.2145
5	438.57	-1071.5	-1113.7	-655.56	0.1771
6	337.19	-820.56	-857.6	-503.45	0.21948
7	411.63	-1010.5	-1042.8	-616.01	0.18456
8	446.76	-1093.8	-1133.2	-668.07	0.18955
9	498.09	-1237.4	-1251.9	-746.8	0.1573
10	477.82	-1126.5	-1224.5	-705.3	0.13738
11	559.75	-1210.6	-1359.8	-771.12	0.13

ตารางที่ ๑.11 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง F







\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

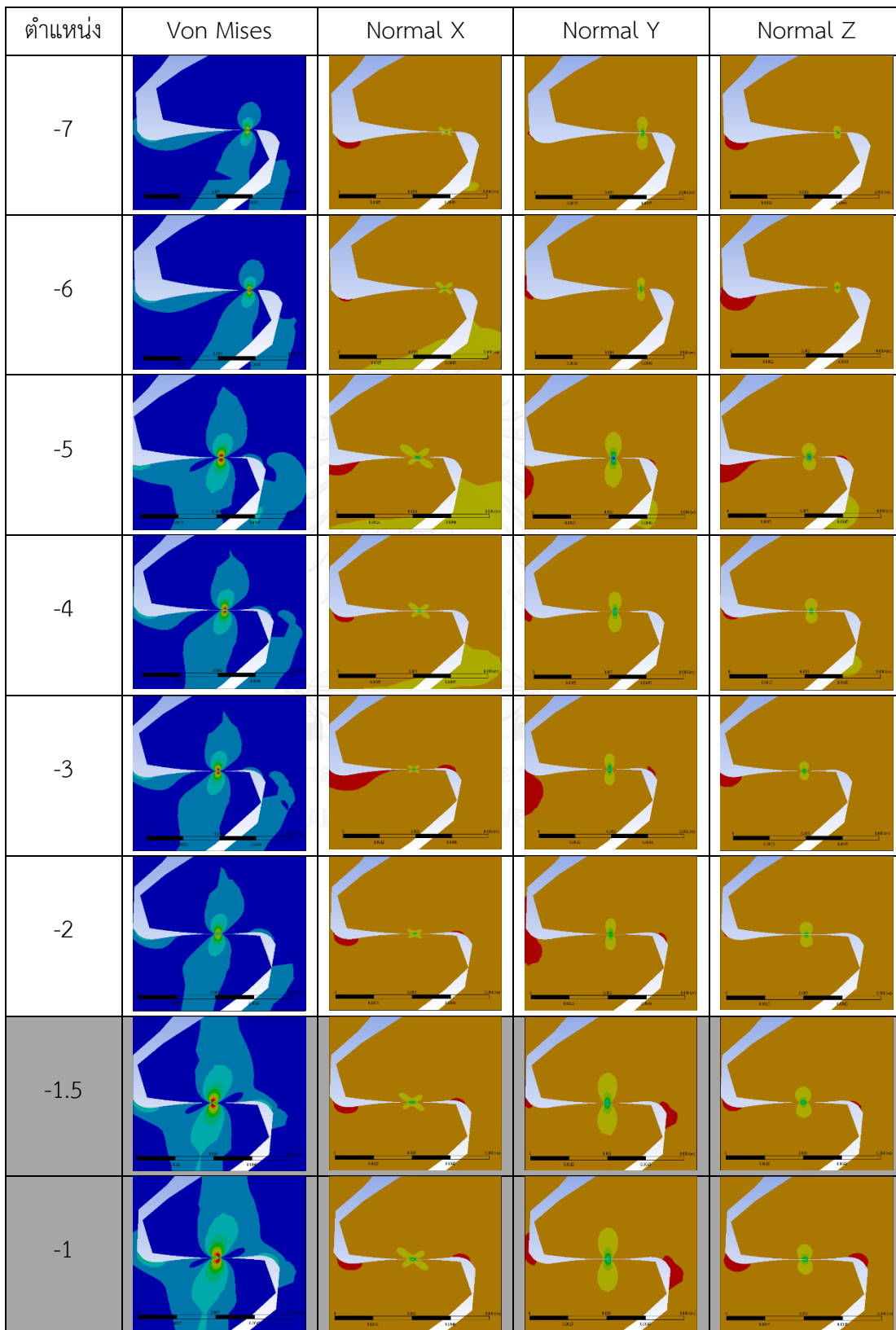


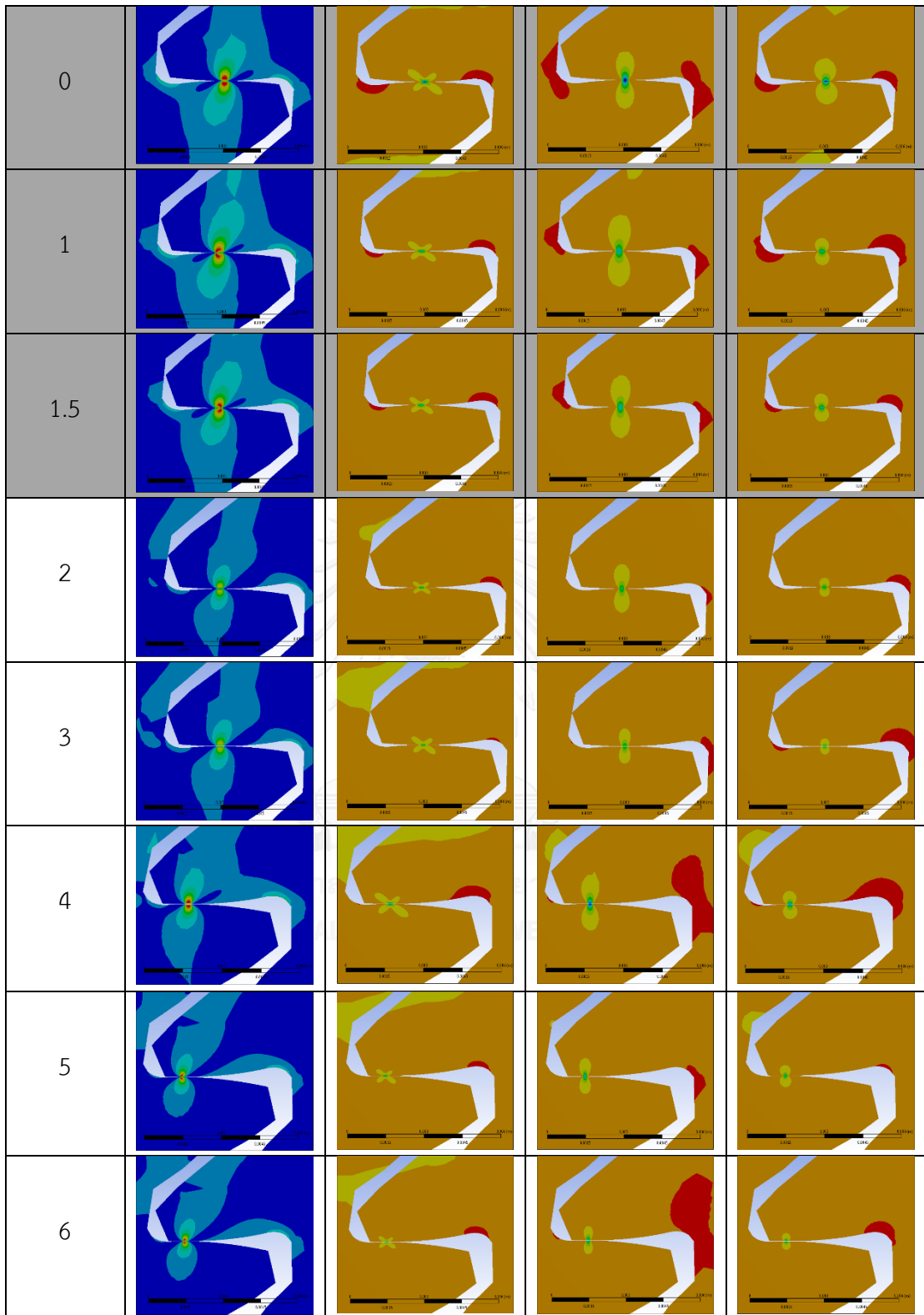
ตารางที่ ฉ.12 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง F

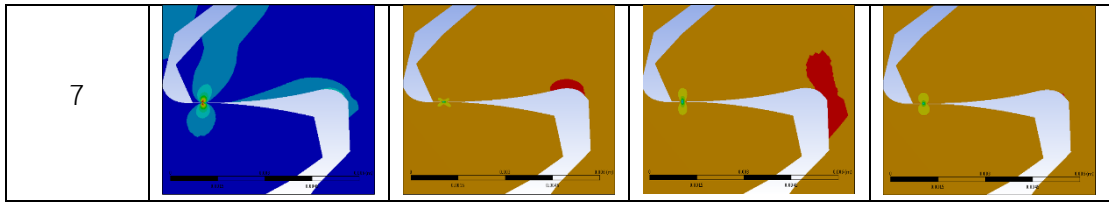
ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-9	327.47	-803.8	-830.87	-489.92	0.2495
-8	298.28	-725.26	-757.38	-444.79	0.27191
-7	326.2	-797.56	-831.09	-487.5	0.27685
-6	329.35	-806.63	-835.39	-492.6	0.2694
-5	325.46	-795.32	-829.2	-486.09	0.27935
-4.5	396.52	-950.1	-1012.9	-588.89	0.4066
-4	466.06	-1138.3	-1183.7	-696.59	0.3967
-3	448.93	-1080.1	-1145.7	-667.73	0.3692
-2	414.42	-1006.3	-1054.7	-618.3	0.3817
-1	415	-997.66	-1059.6	-617.17	0.3892
0	450.71	-1085.5	-1150.4	-670.77	0.3567
1	411.1	-987.52	-1049.3	-611.04	0.39666
2	394.23	-947.73	-1006.8	-586.35	0.3642
3	446.14	-1061.9	-1141.6	-660.75	0.3792
4	436.95	-1049	-1116.3	-649.57	0.391
4.5	393.53	-931.05	-1007.5	-581.56	0.3932
5	326.44	-787.1	-832.37	-485.84	0.2837
6	308.63	-747.91	-786.26	-460.25	0.2917
7	326.63	-787.7	-833.14	-486.25	0.23274
8	290.63	-678.15	-745.15	-426.99	0.26246
9	327.61	-790.02	-835.66	-487.7	0.2253



ตารางที่ ๑.13 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง G







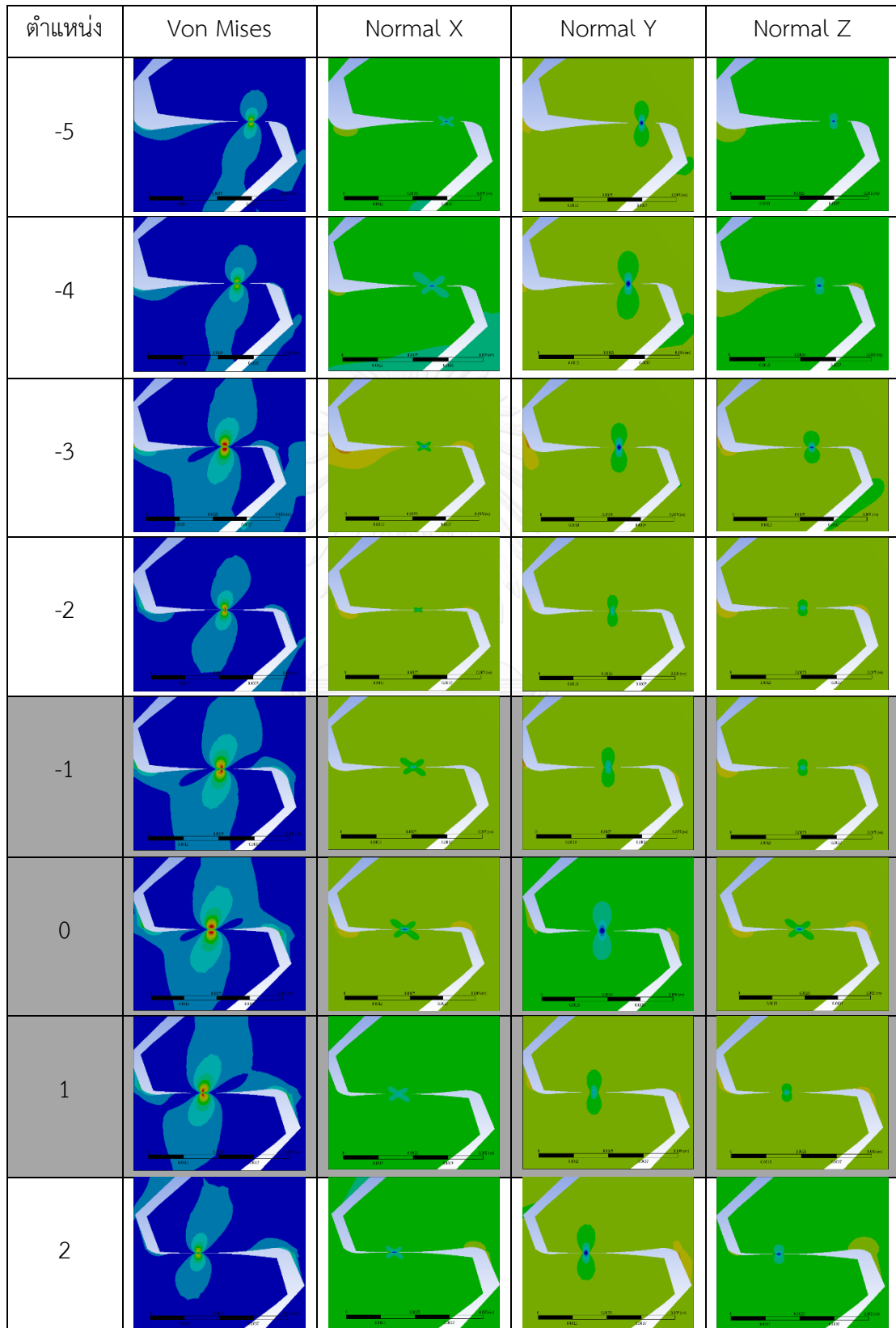
\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน

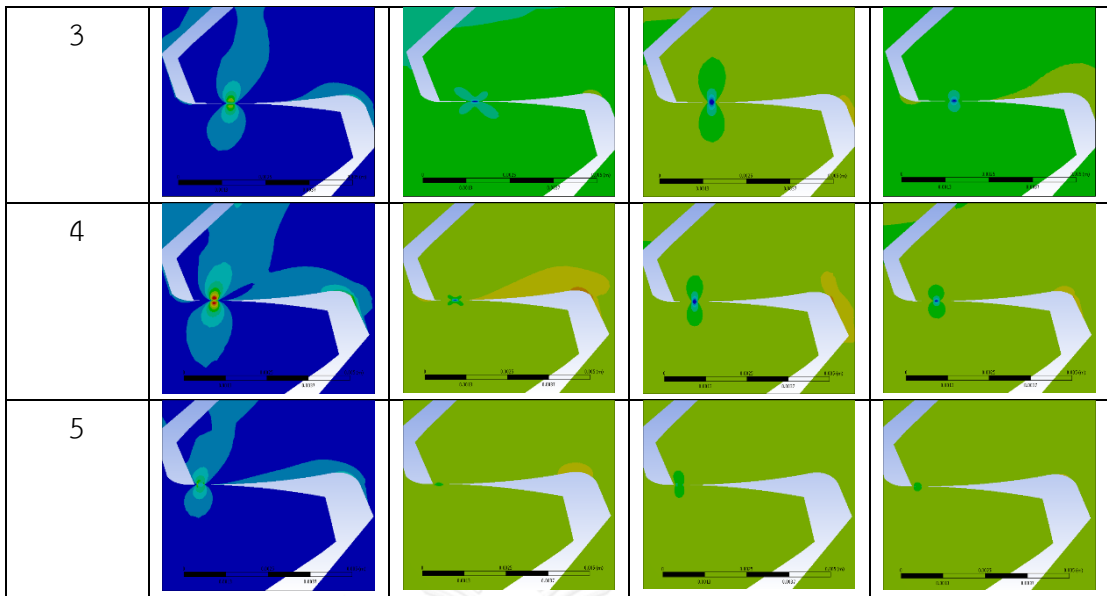


ตารางที่ ฉ.14 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง G

ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-7	338.74	-809.77	-864.79	-502.37	0.20446
-6	344.39	-839.29	-875.51	-514.44	0.16955
-5	357.77	-853.32	-915.29	-530.58	0.23438
-4	353.22	-856.03	-899.84	-526.76	0.24437
-3	348.85	-845.01	-888.88	-520.17	0.24438
-2	337.34	-795.29	-864.22	-497.85	0.2868
-1.5	469.37	-1108.2	-1200.2	-692.54	0.3241
-1	447.26	-1058.8	-1144.2	-660.87	0.3416
0	517.01	-1216.3	-1325.8	-762.27	0.3092
1	444.23	-1016.7	-1139.7	-646.9	0.34409
1.5	449.47	-1055.4	-1152.4	-662.24	0.3366
2	339.95	-803.14	-870.5	-502.09	0.28924
3	338.31	-794.13	-866.64	-498.23	0.2718
4	353.66	-826.25	-906.68	-519.88	0.2369
5	349.43	-846.48	-890.32	-521.04	0.23689
6	320.19	-760.68	-819.72	-474.12	0.20945
7	350.75	-837.07	-897.22	-520.29	0.16706

ตารางที่ ๑.15 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเชส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง H





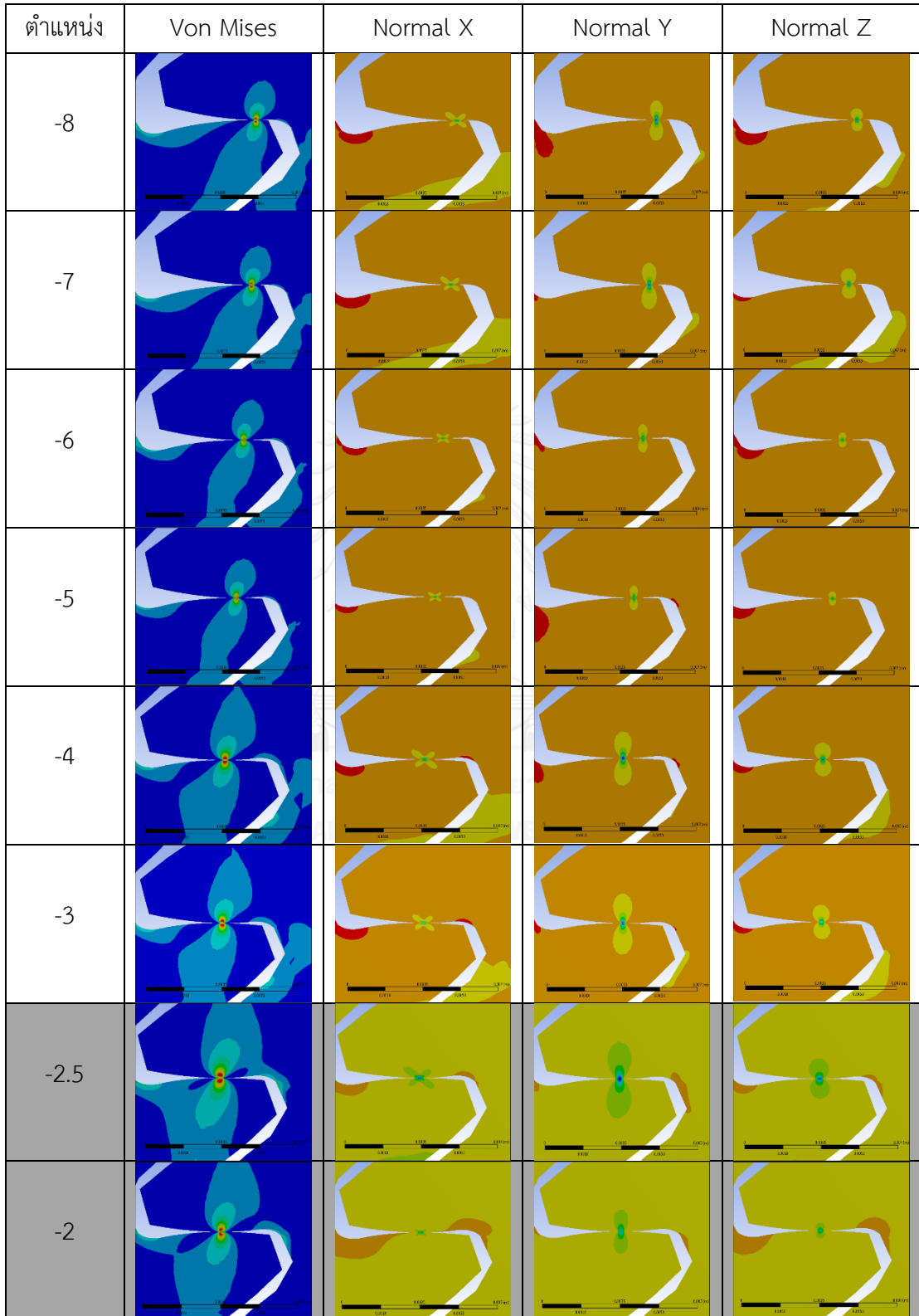
\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน



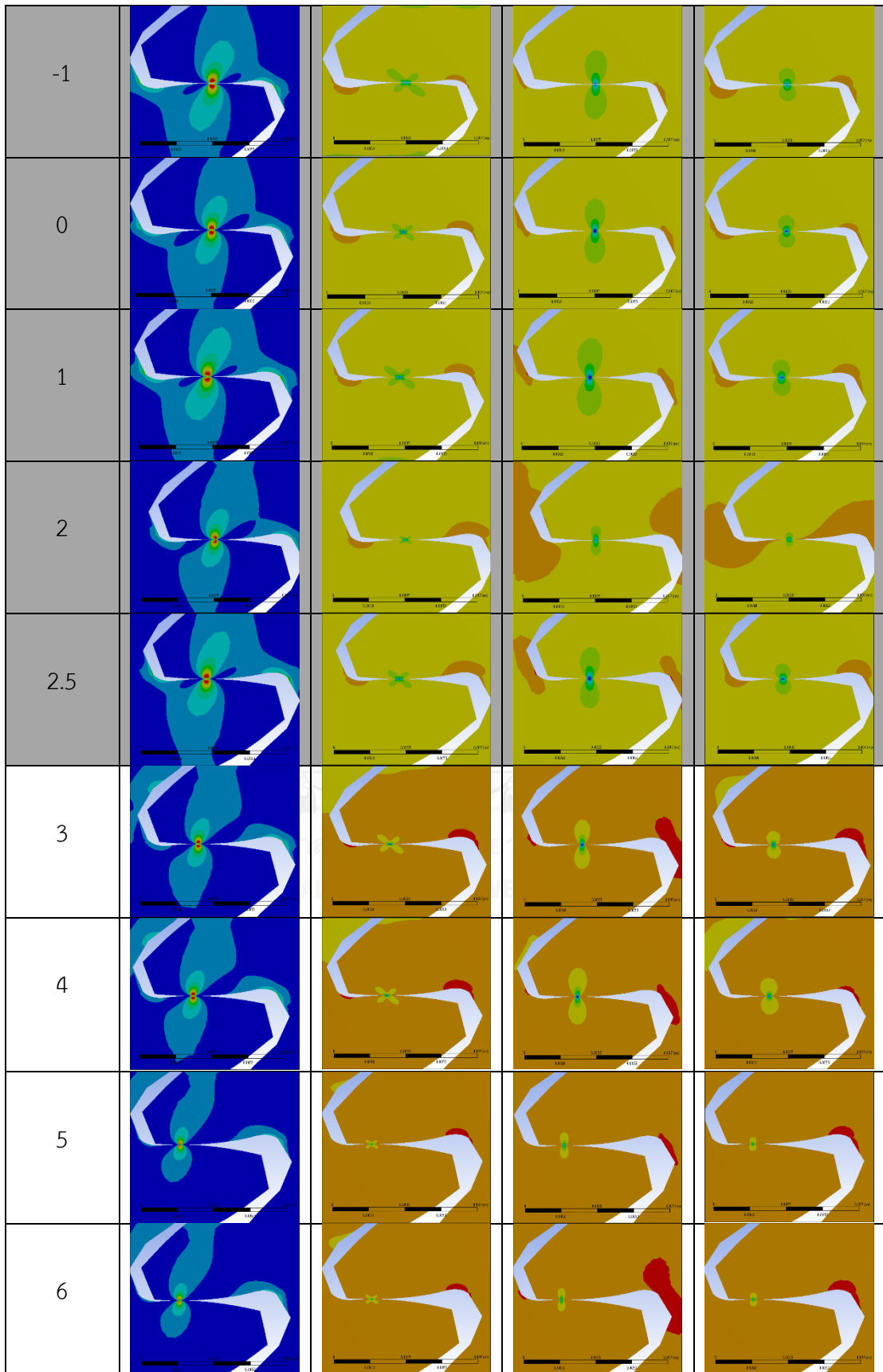
ตารางที่ ฉ.16 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง H

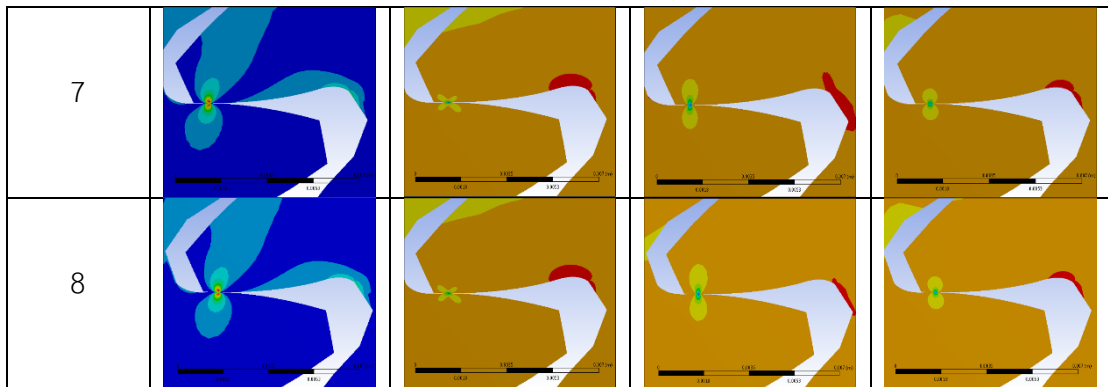
ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-5	248.25	-601.49	-632.83	-369.98	0.1948
-4	235.23	-565.88	-600.58	-349.94	0.2572
-3	255.41	-613.83	-652.96	-379.43	0.2771
-2	255.43	-613.98	-653.01	-379.46	0.2671
-1	332.93	-793.07	-851.94	-493.50	0.3173
0	367.22	-867.75	-940.83	-542.58	0.3322
1	364.05	-814.66	-932.71	-537.92	0.3148
2	254.38	-606.18	-650.75	-377.08	0.2648
3	235.23	-565.88	-600.58	-349.94	0.2472
4	248.43	-591.19	-635.80	-368.10	0.2174
5	247.96	-590.01	-634.62	-367.39	0.2274

ตารางที่ ๑.17 ผลการคำนวณความเค้นฟอนมิสเสส ค่าความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y และ Z ในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง I









\*สเกลสีของแต่ละภาพมีช่วงแตกต่างกัน



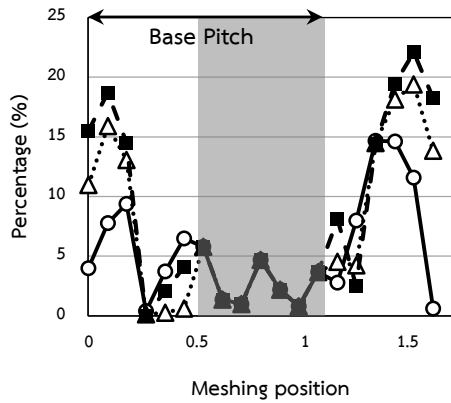
ตารางที่ ฉ.18 ค่าการคำนวณความเค้นพอนมิสเชส ความเค้นในแนวแกนตั้งฉาก X Y Z และความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูปในตำแหน่งต่างๆ ในหนึ่งรอบการขบของชุดเฟือง I

ตำแหน่ง	Von Mises (MPa)	Normal X (MPa)	Normal Y (MPa)	Normal Z (MPa)	Deformed Length 2b (mm)
-8	342.98	-834.8	-871.17	-511.79	0.22466
-7	343.35	-835.34	-872.13	-512.24	0.22964
-6	335.78	-809.72	-856.73	-499.94	0.2296
-5	335.55	-809.36	-856.1	-499.64	0.22956
-4	362.23	-868.87	-925.56	-538.33	0.27197
-3	362.09	-868.69	-925.16	-538.16	0.26697
-2.5	449.33	-1067.2	-1148.7	-663.86	0.35423
-2	478.02	-1154.8	-1219	-712.15	0.34177
-1	446.45	-1027.2	-1144.6	-651.54	0.39424
0	516.97	-1237.5	-1320.7	-767.48	0.3393
1	427.62	-1010.1	-1093.9	-631.2	0.39424
2	450.25	-1078.1	-1151	-712.15	0.32187
2.5	456.42	-1080.3	-1168.8	-674.74	0.3543
3	354.36	-856.74	-902.03	-527.63	0.267
4	354.53	-854.05	-903.41	-527.24	0.262
5	328.19	-781.28	-839.3	-486.17	0.23454
6	328.37	-781.72	-839.77	-486.45	0.2271
7	339.08	-806.91	-866.91	-502.14	0.21953
8	339.39	-807.51	-867.75	-502.58	0.21704

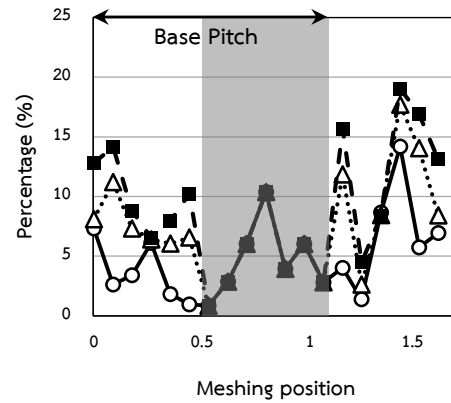
## ภาคผนวก ข.

### ผลการคำนวณค่าความแตกต่างระหว่างสองวิธี

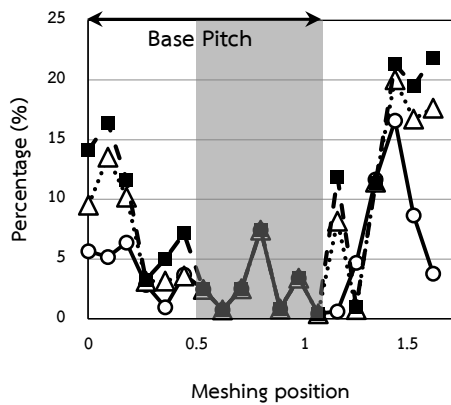
จากการคำนวณค่าความเค้นโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่อัตราส่วนการแบ่งแรงต่างๆ กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แสดงให้เห็นว่า ถ้าสามารถเลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ ในการคำนวณโดยแบบจำลองคณิตศาสตร์ ก็จะสามารถคำนวณค่าความเค้นได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น ในที่นี้จึงทำการเลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ โดยการหาค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากค่าแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่อัตราส่วนการแบ่งแรงค่าต่างๆ กับค่าจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ดังแสดงในรูปที่ ข.1-ข.9 หลังจากนั้นจึงหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความแตกต่างตลอดรอบการขบดังแสดงในตารางที่ ข.1-ข.9 เพื่อการเลือกอัตราส่วนการแบ่งแรงที่เหมาะสมสำหรับชุดเฟืองนั้นๆ โดยพิจารณาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าความแตกต่างที่อัตราส่วนการแบ่งแรงที่มีค่าดังกล่าวน้อยที่สุด



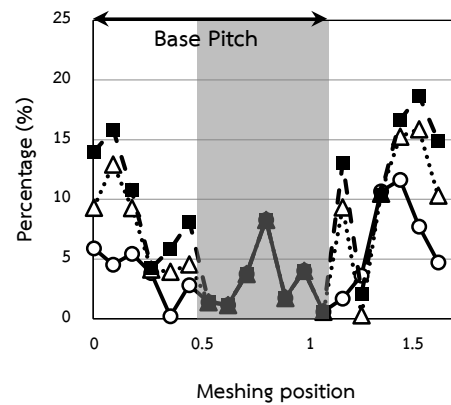
(ก)



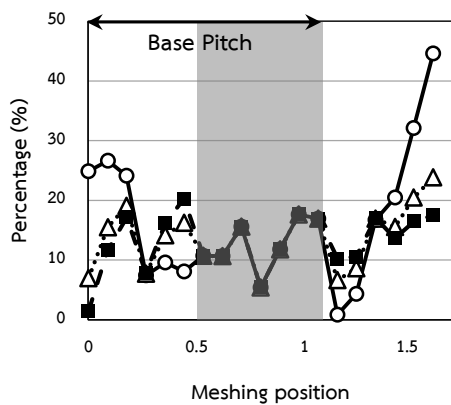
(ข)



(ค)



(ง)

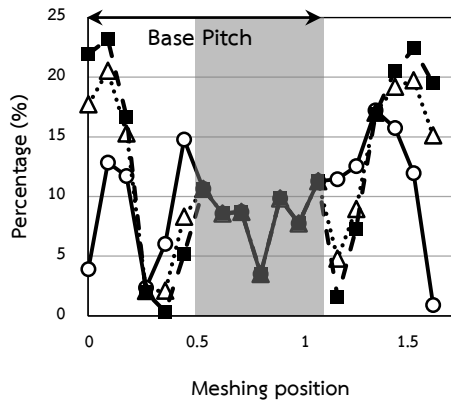


(จ)

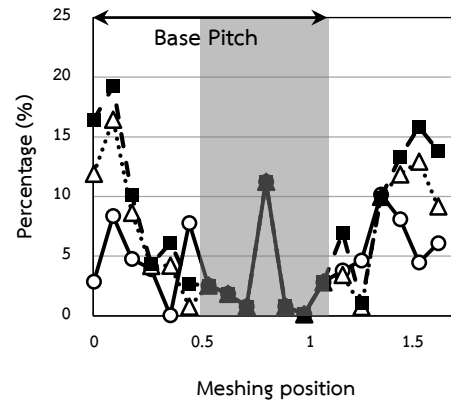
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



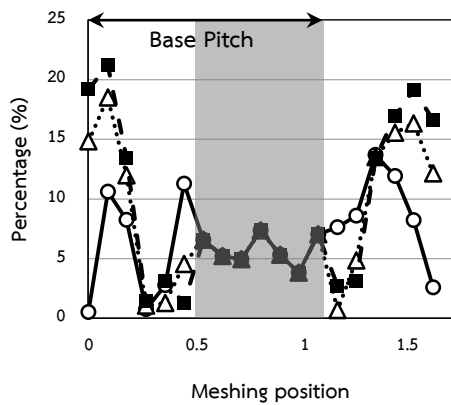
รูปที่ ช.1 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง A



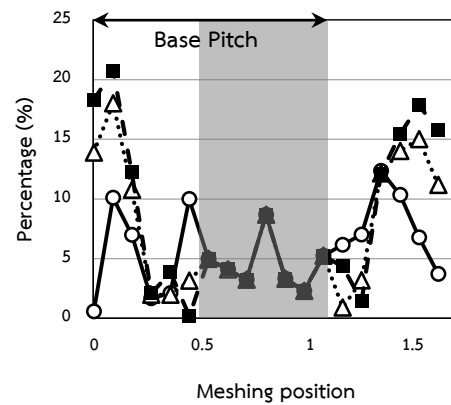
(ก)



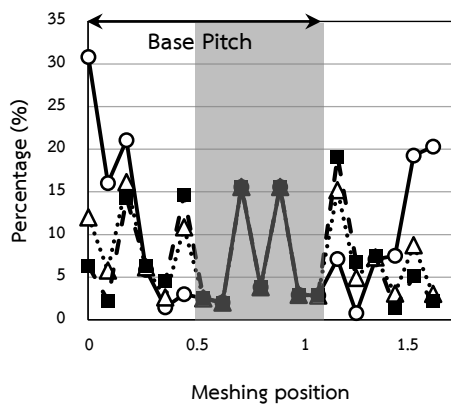
(ข)



(ค)



(ง)

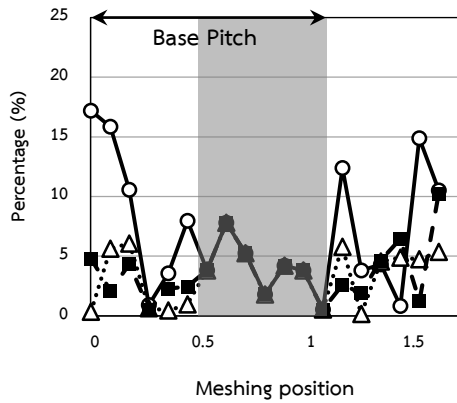


(จ)

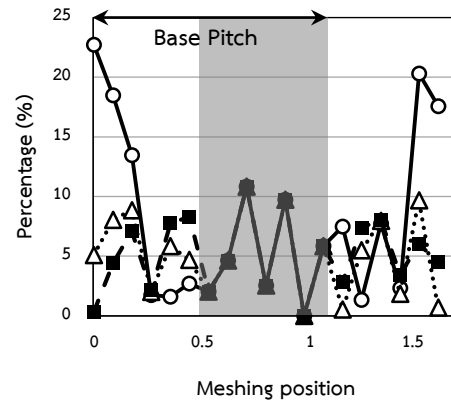


- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)

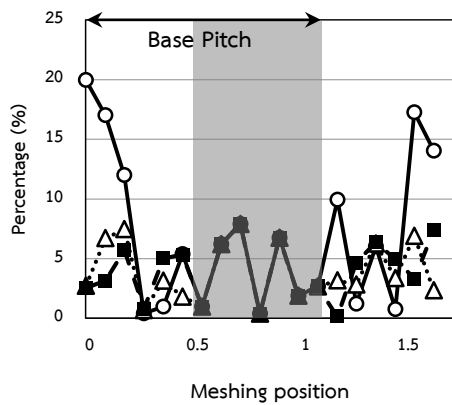
รูปที่ ช.2 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง B



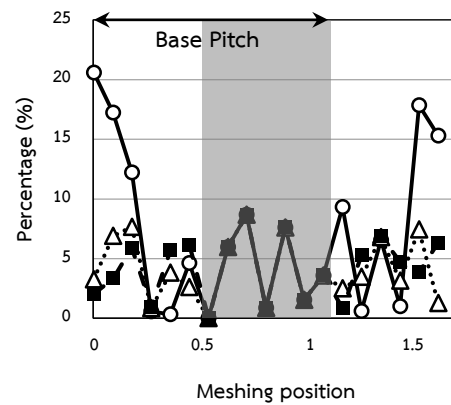
(ก)



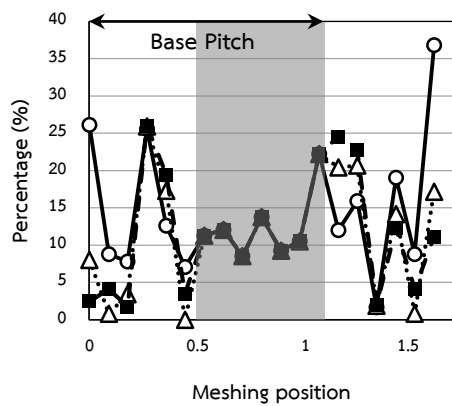
(ข)



(ค)



(ง)

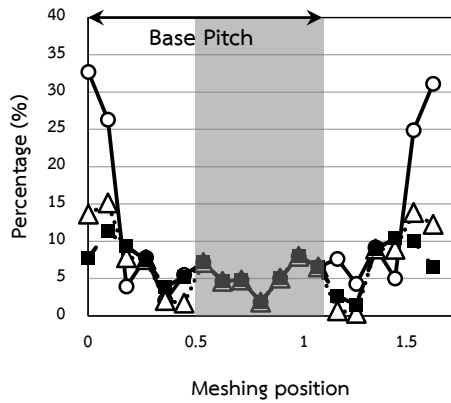


(จ)

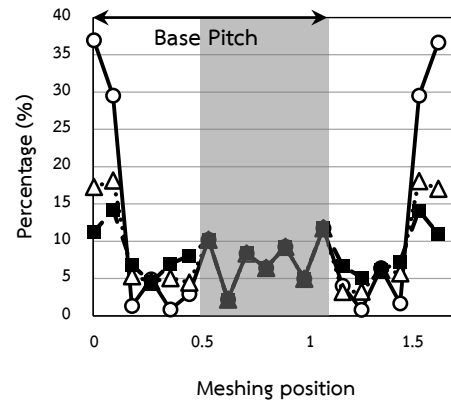
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



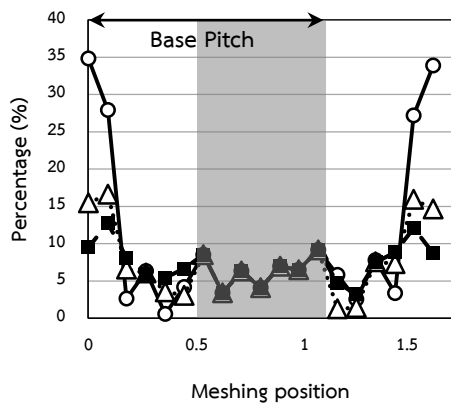
รูปที่ 3.3 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง C



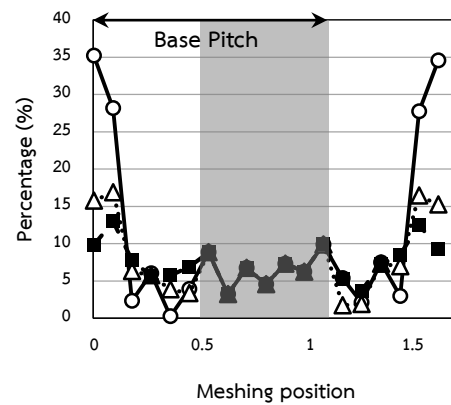
(ก)



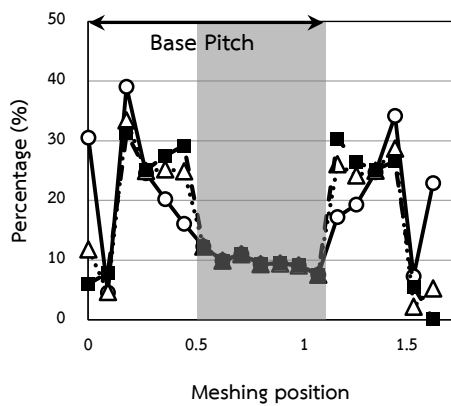
(ข)



(ค)



(ง)



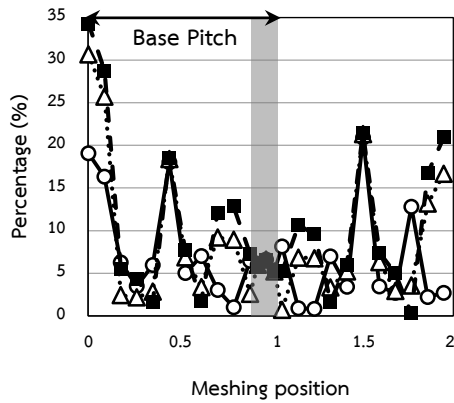
(จ)

- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)

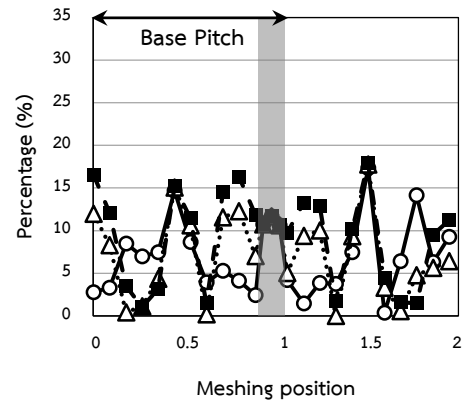


รูปที่ ๔.4 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง D

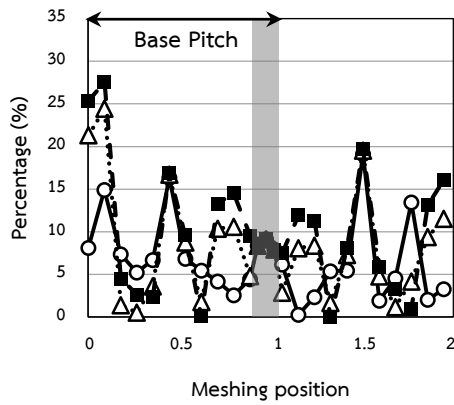




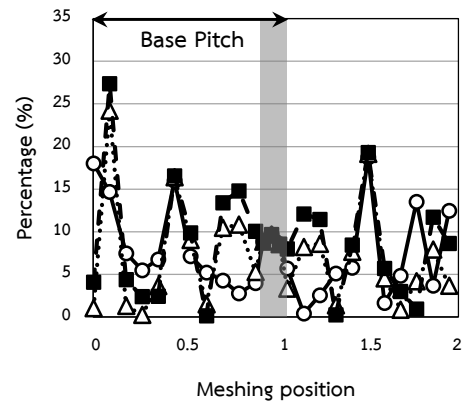
(ก)



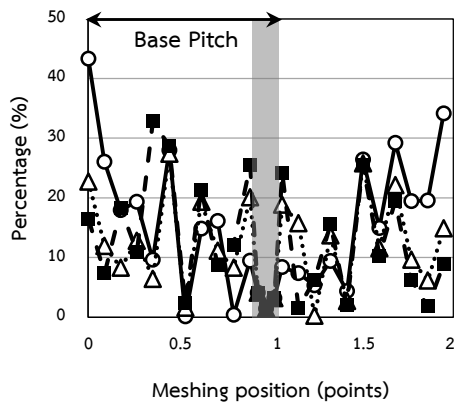
(ข)



(ค)

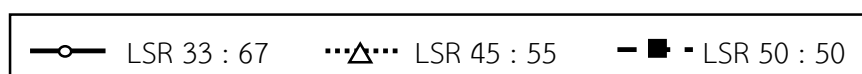


(ง)

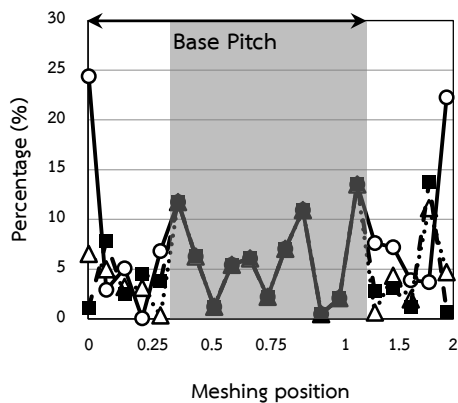


(จ)

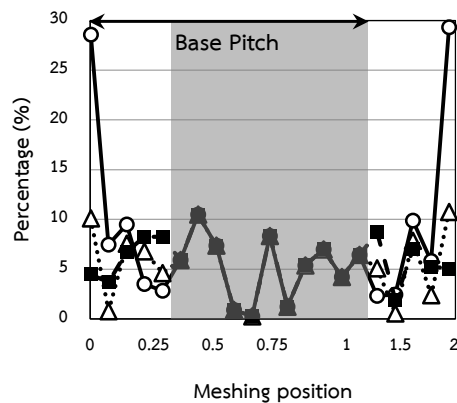
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



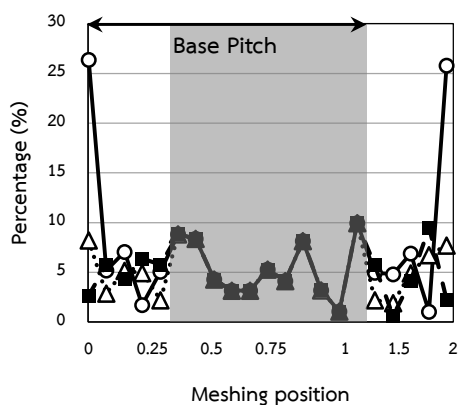
รูปที่ ๕.5 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง E



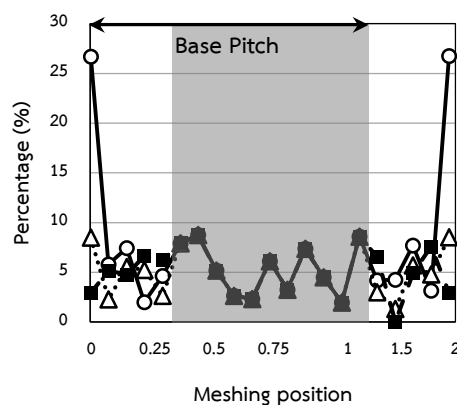
(ก)



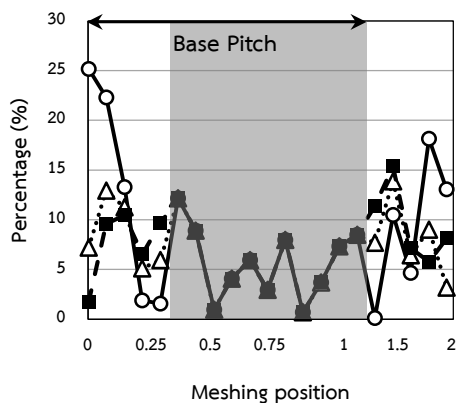
(ข)



(ค)

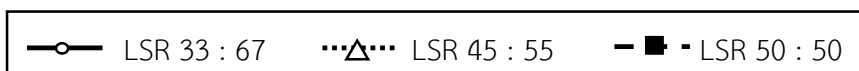


(ง)

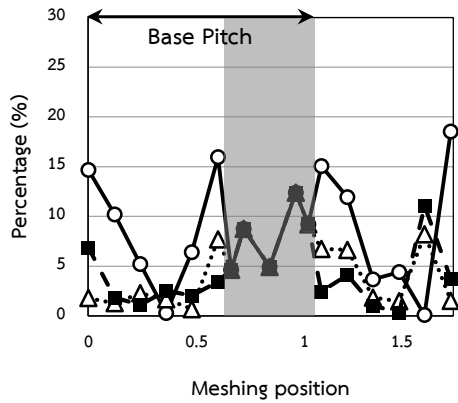


(จ)

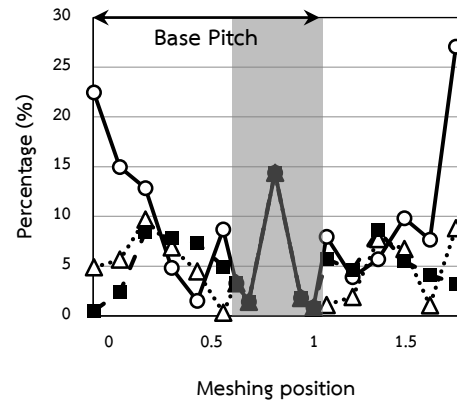
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



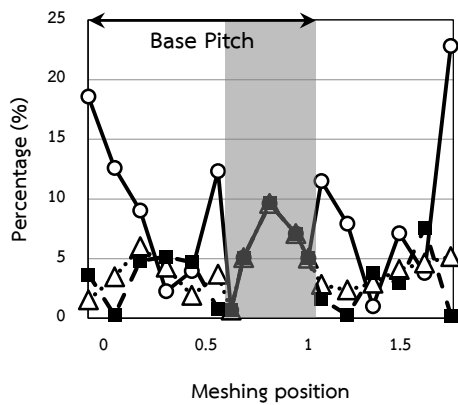
รูปที่ ๗.6 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง F



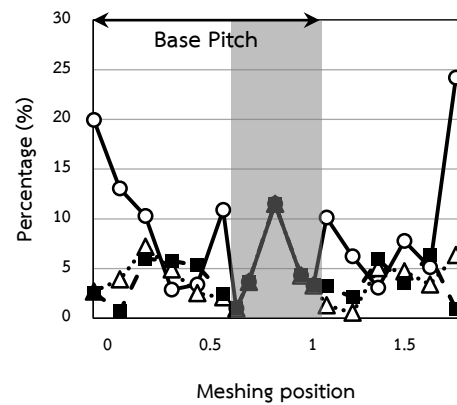
(ก)



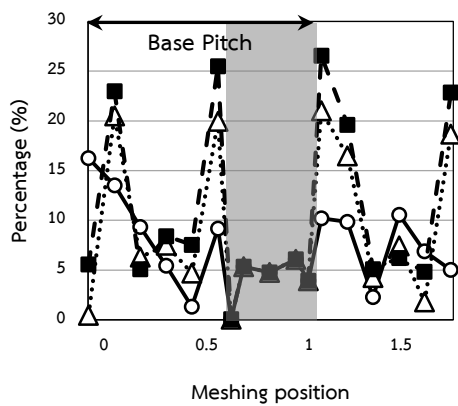
(ข)



(ค)



(ง)

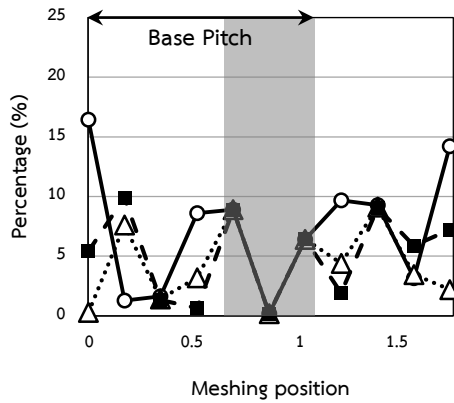


(จ)

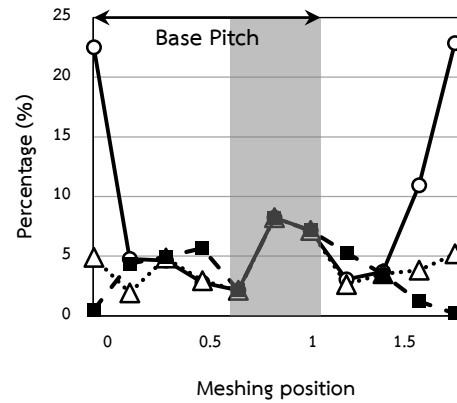
- (ก) ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นฟอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



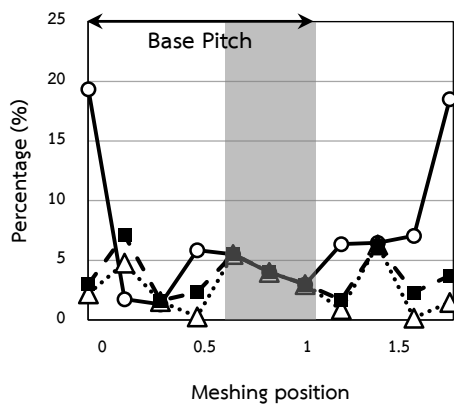
รูปที่ ๗.7 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง G



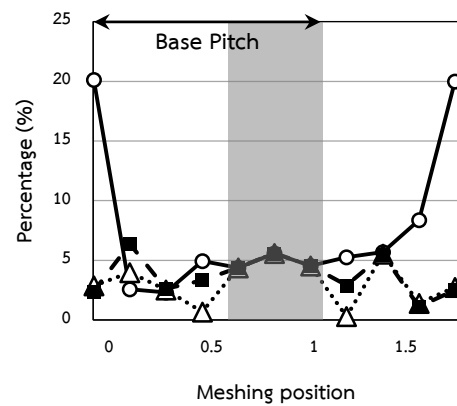
(ก)



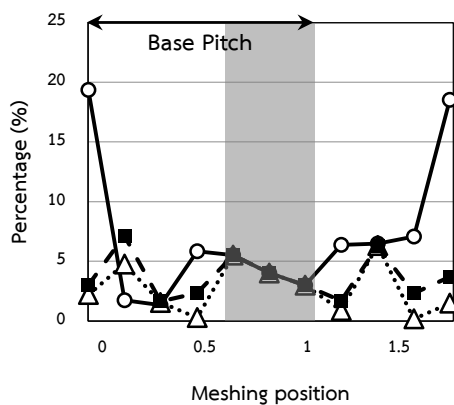
(ข)



(ค)



(ง)

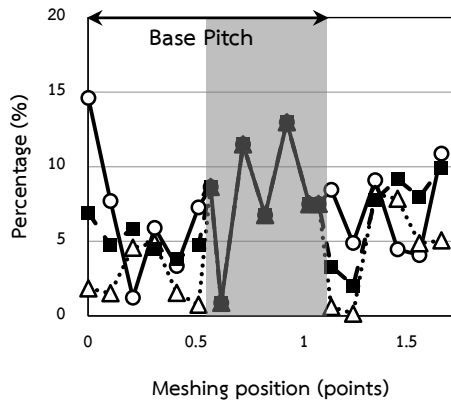


(จ)

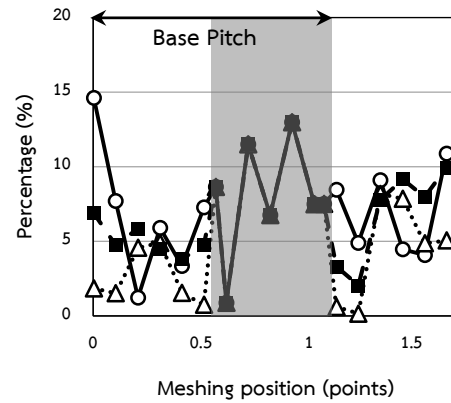
- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



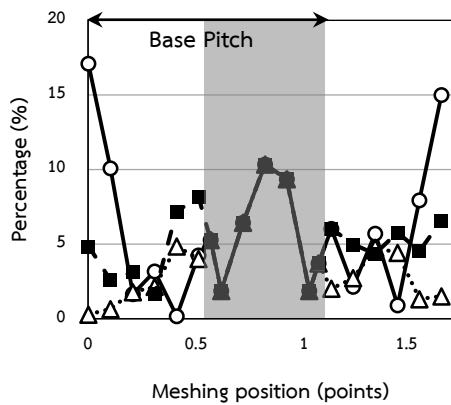
รูปที่ ๗.8 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง H



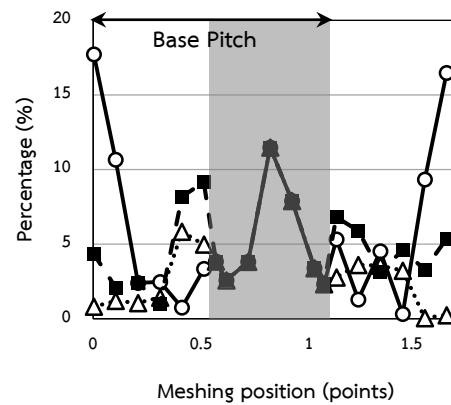
(ก)



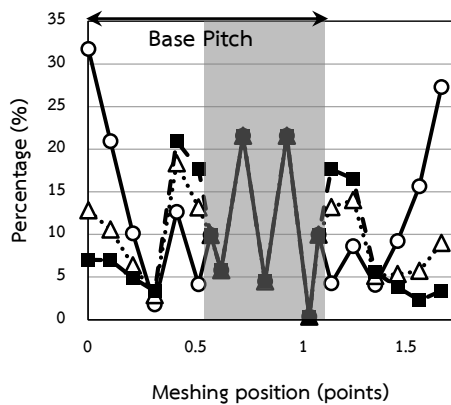
(ข)



(ค)



(ง)



(จ)

- (ก) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน X
- (ข) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Y
- (ค) ความเค้นตึงฉากในแนวแกน Z
- (ง) ความเค้นพอนมิสเชส
- (จ) ค่าความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป (2b)



รูปที่ ช.9 ค่าความแตกต่างเทียบเป็นเปอร์เซ็นต์ระหว่างผลจากแบบจำลองคณิตศาสตร์กับผลจากระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของชุดเฟือง I

ตารางที่ ข.1 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง A

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X	<u>5.449</u>	7.106	8.379	<u>4.529</u>	6.692	7.616
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y	<u>5.058</u>	7.457	9.004	<u>3.460</u>	4.229	5.178
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Z	<u>4.668</u>	7.153	8.556	<u>4.174</u>	6.289	7.342
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	<u>4.415</u>	6.673	8.194	<u>3.262</u>	4.962	5.983
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป	16.235	13.700	<u>13.088</u>	10.776	5.158	<u>4.818</u>

ตารางที่ ข.2 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง B

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X	<u>9.565</u>	11.116	11.462	<u>4.561</u>	5.954	7.585
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y	<u>4.484</u>	6.022	7.362	<u>3.349</u>	5.176	6.175
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Z	<u>6.690</u>	8.182	9.041	<u>3.676</u>	5.572	6.770
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	<u>5.645</u>	7.170	8.135	<u>3.356</u>	5.398	6.639
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป	9.771	7.429	<u>7.140</u>	8.660	<u>5.179</u>	5.683

ตารางที่ ข.3 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง C

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	6.839	<u>3.516</u>	3.725	5.291	<u>2.397</u>	2.498
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	8.059	<u>5.073</u>	5.155	7.228	3.416	<u>3.104</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	6.935	<u>3.904</u>	4.007	6.405	2.494	<u>2.454</u>
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	7.074	<u>4.103</u>	4.228	6.702	2.738	<u>2.587</u>
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	14.207	<u>11.491</u>	11.680	8.405	<u>7.850</u>	7.990

ตารางที่ ข.4 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง D

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	10.441	6.896	<u>6.473</u>	10.010	4.547	<u>2.875</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	10.979	8.499	<u>8.175</u>	12.301	5.406	<u>3.246</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	10.631	<u>7.608</u>	7.291	11.115	4.817	<u>2.619</u>
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	10.692	7.815	<u>7.497</u>	11.370	4.890	<u>2.668</u>
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	17.334	<u>16.051</u>	16.298	9.878	<u>9.687</u>	10.375

ตารางที่ ข.5 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง E

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X	<u>6.981</u>	8.715	10.298	<u>5.837</u>	7.893	8.680
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y	<u>7.030</u>	7.524	9.367	<u>4.345</u>	4.906	5.404
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Z	<u>6.865</u>	8.350	9.989	<u>4.699</u>	6.419	7.280
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	7.747	<u>7.242</u>	8.897	<u>5.105</u>	5.936	6.388
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป	14.917	<u>12.017</u>	12.621	11.433	<u>7.963</u>	9.581

ตารางที่ ข.6 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง F

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน X	7.189	<u>5.143</u>	5.152	6.446	<u>3.925</u>	4.248
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Y	7.579	<u>5.424</u>	5.563	7.706	3.362	<u>2.786</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากในแนวแกน Z	7.075	<u>5.074</u>	5.083	5.390	<u>2.621</u>	2.679
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	7.212	<u>5.064</u>	5.075	6.841	2.485	<u>2.393</u>
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสียรูป	8.280	<u>6.943</u>	7.093	7.063	<u>3.683</u>	3.827



ตารางที่ ข.7 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง G

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	8.610	4.804	<u>4.727</u>	5.531	<u>3.579</u>	3.660
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	8.769	<u>4.760</u>	4.998	7.536	3.904	<u>3.548</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	8.255	4.139	<u>3.721</u>	5.988	<u>2.175</u>	2.823
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	8.270	<u>4.023</u>	4.032	6.354	<u>2.638</u>	2.667
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	<u>7.058</u>	8.777	10.612	<u>4.299</u>	7.366	8.837

ตารางที่ ข.8 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง H

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	7.251	<u>4.291</u>	5.168	5.304	<u>3.273</u>	3.581
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	8.428	4.302	<u>3.927</u>	7.509	<u>2.015</u>	2.671
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	7.203	<u>2.748</u>	3.698	6.114	2.136	<u>1.862</u>
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	7.621	<u>3.147</u>	3.755	6.355	1.838	<u>1.634</u>
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	10.707	<u>8.992</u>	9.438	9.158	<u>6.929</u>	7.260

ตารางที่ ข.9 ข้อมูลทางสถิติของค่าความแตกต่างต่างๆ ของชุดเฟือง I

ตัวแปรที่เปรียบเทียบ	ค่าเฉลี่ย			ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน		
	33 : 67	45 : 55	50 : 50	33 : 67	45 : 55	50 : 50
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน X	7.243	<u>5.135</u>	6.653	3.674	3.833	<u>3.123</u>
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Y	5.791	<u>3.567</u>	4.209	6.324	<u>3.440</u>	4.291
ค่าความเค้นตั้งฉากใน แนวแกน Z	5.953	<u>3.655</u>	5.202	4.712	2.761	<u>2.470</u>
ค่าความเค้นพอนมิสเซส	5.793	<u>3.376</u>	4.825	5.118	2.777	<u>2.770</u>
ความกว้างผิวสัมผัสที่เสีย รูป	11.800	10.013	<u>9.678</u>	8.971	<u>6.016</u>	7.210

### ภาคผนวก ซ.

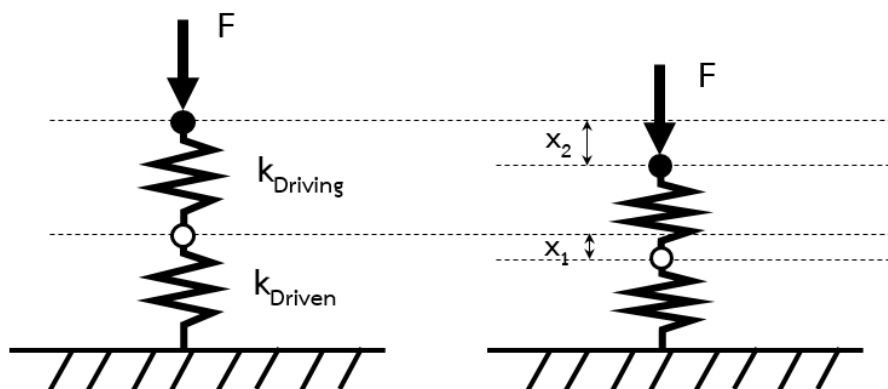
#### การคำนวณค่าความแข็งเกร็งของเฟือง

ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตรงที่ตำแหน่งการขบต่างๆ จะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่งการขบตั้งแต่โคนฟันถึงปลายฟัน โดยพิจารณาว่าการเสีรูบของเฟือง ซึ่งเป็นผลมาจากการสัมผัส การตัดโค้ง และการเสีรูบที่ขอบเฟือง ดังนั้นค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขับหรือเฟืองตามหาได้จาก

$$\frac{1}{k_{Driving, Driven}} = \frac{1}{k_C} + \frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_R} \quad (\text{ซ.1})$$

โดย	$k_{Driving}$ , $k_{Driven}$	คือความแข็งเกร็งของเฟืองขับหรือเฟืองตามตามลำดับ
	$k_C$	คือ ความแข็งเกร็งจากการสัมผัส (Contact Stiffness)
	$k_B$	คือ ความแข็งเกร็งจากการตัดโค้ง (Bending Stiffness)
	$k_R$	คือ ความแข็งเกร็งจากการการเสีรูบที่ขอบเฟือง (Rim . Thickness Stiffness)

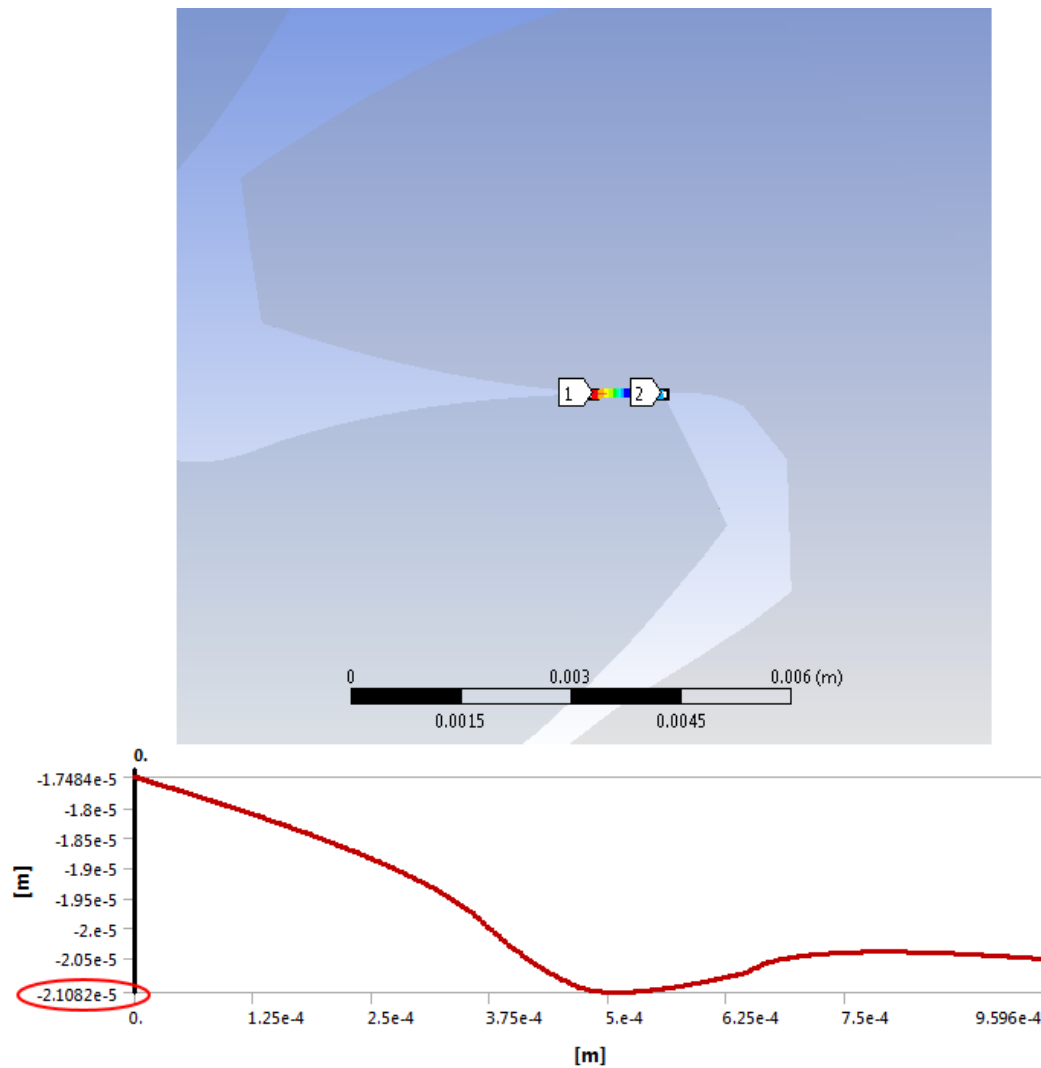
โดยในการศึกษานี้ได้จำลองการขบอัดกันของเฟืองโดยประกอบชุดเฟือง ให้เฟืองตามหยุดนิ่งกับที่และใส่ทอร์คที่เฟืองขับเพื่อขบอัดเฟืองดังแสดงในรูปของโมเดลสปริงได้ดังรูปที่ ซ.1



รูปที่ ซ.1 การเสีรูบของเฟืองขับและเฟืองตาม

เนื่องจากโปรแกรม ANSYS จะคำนวณค่าเคลื่อนตัวและแสดงผลออกมาได้ ซึ่งในกรณีตามโมเดลสปริง ในรูปที่ ซ.1 คือค่า  $x_1$  และ  $x_2$  แต่เนื่องจากค่า  $x_2$  เป็นผลจากการเสียรูปของทั้งสปริงข้อและสปริงตาม ดังนั้นในการศึกษานี้จึงทำการอ่านค่าเคลื่อนตัวของสปริงตาม  $x_1$  (ค่าเคลื่อนตัวของจุดสีขาว) ซึ่งเป็นค่ายุบตัวของสปริงจริงๆ เพื่อคำนวณค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม หลังจากนั้นจึงคำนวณค่าความแข็งแรงของคู่เฟืองข้อและเฟืองตามโดยพิจารณาให้ค่าความแข็งแรงของเฟืองข้อมีค่าเท่ากับค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม โดยการคำนวณจะตั้งค่าโปรแกรมให้เกิดการสัมผัสเพียงแค่นิ่งคู่ฟัน และทำการเก็บค่าความแข็งแรงของเฟืองตาม ตั้งแต่เริ่มการขบจนกระทั่งสิ้นสุดการขบ

เนื่องจากในการประกอบชุดเฟืองได้จัดวางให้แนวแรงกดอยู่ในแนวเดียวกับแกน Y ดังนั้นในการหาค่าความแข็งแรงของเฟืองตามซึ่งคำนวณผลจากการสัมผัส การตัดโค้ง และการเสียรูปที่ขอบเฟือง จะพิจารณาจากการอ่านค่าเคลื่อนตัวในแนวแกน Y ดังแสดงตัวอย่างการสัมผัสที่ตำแหน่งสัมผัสกันของโคนของเฟืองข้อกับปลายฟันของเฟืองตามดังแสดงในรูปที่ ซ.2 โดยเก็บค่าเคลื่อนตัวตามแนวแกน Y ที่มีขนาดมากที่สุด จากขอบของเฟืองตาม



รูปที่ ๒.๒ บริเวณขอบที่เกิดการสัมผัสและค่าเคลื่อนตัวตามแนวแกน Y

หลังจากนั้นจึงคำนวณหาค่าความแข็งแกร่งของเฟืองตามจากสมการ

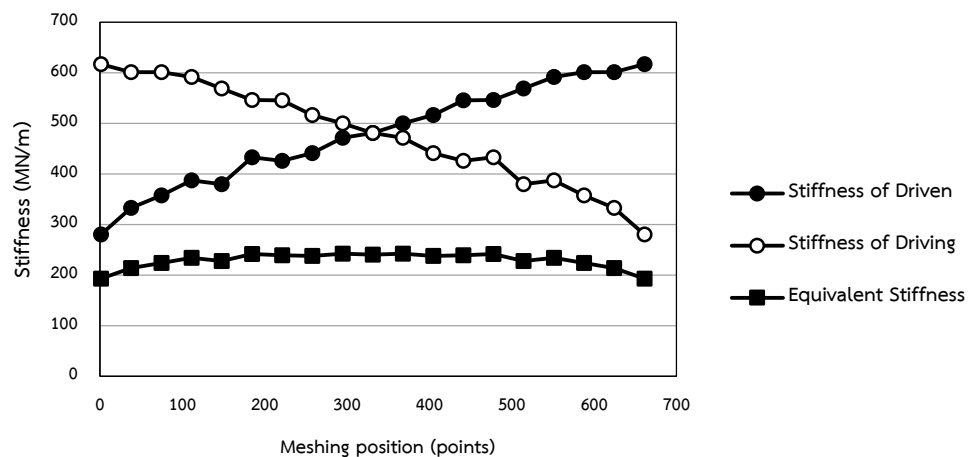
$$k_{Driven} = \frac{F}{x_1} \quad (\text{ช.2})$$

โดย  $x_1$  คือ ขนาดของค่าเคลื่อนตัวที่ผิวสัมผัสของเฟืองตามในแนวแกน Y ที่อ่านได้จากโปรแกรม ANSYS

$F$  คือ ขนาดของแรงที่สมมูลกับทอร์คที่กระทำกับชุดเฟือง

จากขั้นตอนดังกล่าวสามารถหาค่าความแข็งเกร็งของเฟืองตาม  $k_{Driven}$  ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขับ  $k_{Driving}$  และค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม  $k_{Eq}$  ที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ดังแสดงตัวอย่างค่าความแข็งเกร็งต่างๆ ของชุดเฟือง A ในรูปที่ ซ.3 โดยขณะเริ่มการขบ โคนของเฟืองขับจะสัมผัสกับปลายของเฟืองตาม และเมื่อขบไปเรื่อยๆ จนถึงตำแหน่งสิ้นสุดการขบ ปลายของเฟืองขับจะสัมผัสกับโคนของเฟืองตาม โดยค่าความแข็งเกร็งของคู่เฟืองขับและเฟืองตาม  $k_{Eq}$  สามารถหาได้โดย

$$\frac{1}{k_{Eq}} = \frac{1}{k_{Driving}} + \frac{1}{k_{Driven}} \quad (ซ.3)$$



รูปที่ ซ.3 ค่าความแข็งเกร็งของเฟืองขับ เฟืองตามและคู่เฟืองที่ตำแหน่งการขบต่างๆ ของชุดเฟือง A

### ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นายธีรเดช ฤทธิไกรเกรียง เกิดเมื่อวันที่ 10 มิถุนายน พ.ศ.2534 ที่จังหวัด กรุงเทพมหานคร สำเร็จการศึกษาปริญญาวิศวกรรมบัณฑิตสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชา วิศวกรรมยานยนต์ จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในปี พ.ศ. 2557 และเข้าศึกษาต่อในหลักสูตร วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ที่คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย ในปีการศึกษา 2557

#### ผลงานทางวิชาการ

Theeradesh Rithikraikriang and Chanat Ratanasumamawong, Determination of Stress Distribution on Spur Gear Teeth by Using a Mathematical Model and The Finite Element Method, Proceedings of The 5th TSME International Conference on Mechanical Engineering, 17 - 19 December 2014, The Empress, Chiang Mai, Thailand