

การเปรียบเทียบวิถีลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลสำหรับการอนุมานแบบเบย์เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ

นางสาวณภัชนันท์ อุทธโยธา



บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ปีการศึกษา 2554 ที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของวิทยานิพนธ์ ที่ส่งผ่านทางบัณฑิตวิทยาลัย

The abstract and full text of theses from the academic year 2011 in Chulalongkorn University Intellectual Repository (CUIR)
are the thesis authors' files submitted through the University Graduate School.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2559

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A COMPARISON OF MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS FOR BAYESIAN INFERENCE
WITH RANK CONSTRAINTS

Miss Napatchanan Uttayotha



A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Statistics

Department of Statistics

Faculty of Commerce and Accountancy

Chulalongkorn University

Academic Year 2016

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การเปรียบเทียบวิธีลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลสำหรับการ
โดย	อนุมานแบบเบย์เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ
สาขาวิชา	นางสาวณภัชชนันท์ อุทธโยธา
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก	สถิติ
	รองศาสตราจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบุลย์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้หัวข้อวิทยานิพนธ์
ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

.....คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการ

บัญชี

(รองศาสตราจารย์ ดร. พสุ เดชะรินทร์)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการ

(อาจารย์ ดร. อัครินทร์ ไพบูลย์พานิช)

.....อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบุลย์)

.....กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิฐรา พึ่งพาพงศ์)

.....กรรมการภายนอกมหาวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เจริญชัย โชมพัตราภรณ์)

ณภัชนันท์ อุทธโยธา : การเปรียบเทียบวิธีลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลสำหรับการอนุมานแบบเบย์เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ (A COMPARISON OF MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS FOR BAYESIAN INFERENCE WITH RANK CONSTRAINTS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รศ. ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์, 91 หน้า.

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการสุ่มตัวอย่างของลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โล (Markov chain Monte Carlo: MCMC) แบบใหม่ที่เรียกว่า โพลาร์เมโทรโพลิสฮิตแอนด์รันแบบแกมมา (Gamma type Polar Metropolis Hit-and-Run: PMHR-G) ซึ่งพัฒนามาจากวิธีโพลาร์เมโทรโพลิสฮิตแอนด์รันแบบปกติ (Normal type Polar Metropolis Hit-and-Run: PMHR-N) เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์บนเงื่อนไขที่ตัวแปรมีการจัดเรียงอันดับอย่างสมบูรณ์ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ที่นำเสนอกับวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N และวิธี MCMC อื่นที่รู้จักกันดีอีก 2 วิธี ได้แก่ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs) และวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบฮิตแอนด์รัน (Hit-and-Run: HR) การวัดประสิทธิภาพอาศัยค่าขอบเขตบนของความเชื่อมั่นแบบข้างเดียวของตัวประกอบอัตราส่วนที่ปรับลดแล้ว (corrected potential scale reduction factor: PSRF) ประกอบกับกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของตัวแปรที่สนใจศึกษา ข้อมูลที่ใช้เป็นข้อมูลจำลอง โดยมีจำนวนมิติ 3 ระดับคือ 10, 50 และ 100 ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ 4 ระดับคือ 0, 0.5, 0.75 และ 0.9 และมีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย 3 ลำดับคือ เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับเพิ่ม ซึ่งมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 และเวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับลด ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง -1 จากการทดลองทั้งหมด 36 กรณี พบว่าจากเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพทั้ง 2 เกณฑ์ โดยมี 25 กรณี (69.44%) ให้ผลสรุปตรงกัน สำหรับกรณีที่ผลสรุปตรงกันและสามารถวัดประสิทธิภาพได้ มีทั้งหมด 13 กรณี พบว่า 12 กรณี (92.31%) ที่การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงที่สุด และมีเพียง 1 กรณี (7.69%) เท่านั้นที่พบว่าวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีประสิทธิภาพสูงที่สุด

ภาควิชา สถิติ

ลายมือชื่อนิสิต

สาขาวิชา สถิติ

ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาหลัก

ปีการศึกษา 2559

5781530626 : MAJOR STATISTICS

KEYWORDS: MARKOV CHAIN MONTE CARLO / GAMMA TYPE POLAR METROPOLIS HIT-AND-RUN / NORMAL-TYPE POLAR METROPOLIS HIT-AND-RUN / GIBBS / HIT-AND-RUN

NAPATCHANAN UTTAYOTHA: A COMPARISON OF MARKOV CHAIN MONTE CARLO METHODS FOR BAYESIAN INFERENCE WITH RANK CONSTRAINTS. ADVISOR: ASSOC. PROF. SEKSAN KIATSUPAIBUL, Ph.D., 91 pp.

This research proposes a new Markov chain Monte Carlo (MCMC) sampler called Gamma-type Polar Metropolis Hit-and-Run (PMHR-G). The new sampler is developed from the Normal-type Polar Metropolis Hit-and-Run (PMHR-N) for parameter estimation conditional on a complete ranking of the variables. A study is performed to compare the efficiency among PMHR-G, PMHR-N and another two well-known MCMC sampler, namely Gibbs sampler and Hit-and-Run sampler. The upper confidence bound of the corrected potential scale reduction factor (PSRF) is employed as the performance measures, along with the graph of key variables' cumulative means. The study is done on simulated data sets at three different dimensions (10, 50, 100), four different correlation coefficients (0, 0.5, 0.75, 0.9) and three different mean vectors (zero vector, increasing sequences from -1 to 1, decreasing sequences from 1 to -1). They form in total 36 experimental cases. The results show that the two performance criteria agree on 25 experimental cases (69.44%). In the cases that the two criteria, is measurable, agree on 13 experimental cases, PMHR-G performs best in 12 the cases (92.31%) and Gibbs performs best in 1 the remaining (7.69%).

Department: Statistics

Student's Signature

Field of Study: Statistics

Advisor's Signature

Academic Year: 2016

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ด้วยความกรุณาและเอาใจใส่เป็นอย่างดีของ รองศาสตราจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ และความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มาโดยตลอด ผู้วิจัยจึงขอกราบ ขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.อักรินทร์ ไพบูลย์พานิช ประธานกรรมการสอบ วิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิฐธา พึ่งพาพงศ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วย ศาสตราจารย์ ดร.เจริญชัย โชมพัตราภรณ์ กรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำในการ ปรับปรุงแก้ไขวิทยานิพนธ์ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น และขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ ความรู้แก่ผู้วิจัยจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัว ที่ช่วยสนับสนุนใน ทุกๆ ด้านและคอยเป็นกำลังใจเสมอมา สุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ ทุกคนที่คอยให้คำปรึกษา คำแนะนำ และให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ตลอดมา

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญตาราง.....	ญ
สารบัญภาพ	ฐ
บทที่ 1	1
บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย.....	3
1.3 ขอบเขตการวิจัย	3
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	4
บทที่ 2	5
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	5
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
2.1.1 วิธีในกลุ่ม MCMC.....	5
2.1.1.1 การสุ่มตัวอย่างแบบ HR.....	5
2.1.1.2 การสุ่มตัวอย่างแบบ MH.....	6
2.1.1.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs.....	7
2.1.1.4 การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N	7
2.1.2 เทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน (Gelman-Rubin Diagnostic: GRD).....	8
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10

บทที่ 3	11
วิธีดำเนินการวิจัย	11
3.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G	11
3.2 การดำเนินการวิจัย.....	12
3.2.1 ขอบเขตการวิจัย	12
3.2.2 การเก็บรวบรวมข้อมูล	13
3.2.2.1 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ HR.....	13
3.2.2.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs.....	14
3.2.2.3 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N	15
3.2.2.4 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G	16
3.3 การวิเคราะห์และสรุปผลการวิจัย.....	17
บทที่ 4	18
ผลการวิจัย	18
4.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G	18
4.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G	22
4.3 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR.....	23
บทที่ 5	53
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	53
5.1 สรุปผลการวิจัย	53
5.2 อภิปรายผล	68
5.3 ข้อเสนอแนะ	71
รายการอ้างอิง	73

ภาคผนวก..... 75

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ 91



สารบัญตาราง

ตารางที่ 1	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$	23
ตารางที่ 2	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$	26
ตารางที่ 3	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$	29
ตารางที่ 4	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$	31
ตารางที่ 5	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$	33
ตารางที่ 6	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$	36
ตารางที่ 7	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$	38
ตารางที่ 8	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$	41
ตารางที่ 9	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$	43
ตารางที่ 10	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$	46
ตารางที่ 11	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$	48
ตารางที่ 12	แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\boldsymbol{\mu} = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$	50

ตารางที่ 13	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0$	55
ตารางที่ 14	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.5$	56
ตารางที่ 15	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.75$	57
ตารางที่ 16	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.9$	58
ตารางที่ 17	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ทั้งหมด 36 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ	59
ตารางที่ 18	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0$	61
ตารางที่ 19	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.5$	62
ตารางที่ 20	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.75$	63
ตารางที่ 21	ผลการสรุปประสิทธิภาพจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.9$	64
ตารางที่ 22	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ทั้งหมด 36 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ	65
ตารางที่ 23	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพ ทั้ง 2 เกณฑ์ที่ให้ผลตรงกัน รวมทั้งหมด 25 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ	67
ตารางที่ 24	แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา ρ สำหรับกรณี $k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$	69

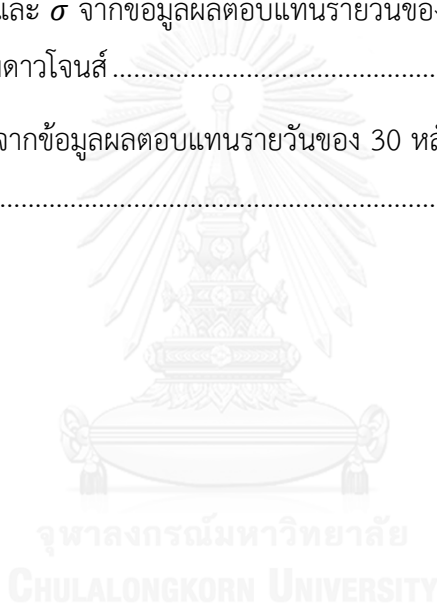
ตารางที่ 25 แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา k สำหรับกรณี $\rho = 0.5, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ 69

ตารางที่ 26 แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา μ สำหรับกรณี $\rho = 0.5, k = 10$ 70

ตารางที่ 27 สถิติเชิงพรรณนาของ μ, σ และ ρ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ 71

ตารางที่ 28 แสดงค่า μ และ σ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ 76

ตารางที่ 29 แสดงค่า ρ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ 77



สารบัญภาพ

- ภาพที่ 1 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \rho = 0, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ..... 25
- ภาพที่ 2 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \rho = 0.5, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ..... 27
- ภาพที่ 3 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ..... 30
- ภาพที่ 4 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \rho = 0.9, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ..... 32
- ภาพที่ 5 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ..... 34
- ภาพที่ 6 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.5, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ..... 37
- ภาพที่ 7 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75,$

	$k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ	39
ภาพที่ 8	กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.9, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ	42
ภาพที่ 9	กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ	44
ภาพที่ 10	กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.5, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ	47
ภาพที่ 11	กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ	49
ภาพที่ 12	กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.9, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ	51
ภาพที่ 13	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ทั้งหมด 36 กรณี... 54	
ภาพที่ 14	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $\bar{X}_{(p)}$ ทั้งหมด 36 กรณี..... 60	
ภาพที่ 15	ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากเกณฑ์วัดประสิทธิภาพ ทั้ง 2 เกณฑ์ ที่ให้ผลสรุปตรงกันทั้งหมด 25 กรณี	66

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การอนุมานสถิติแบบเบย์ส์ พิจารณาจากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (Posterior Density Function) ซึ่งแปรผันตรงกับผลคูณของฟังก์ชันภาวะความน่าจะเป็น (Likelihood Function) และฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (Prior Density Function) พารามิเตอร์ของตัวแบบสามารถประมาณด้วยค่าคาดหวังภายใต้การแจกแจงภายหลัง ในกรณีที่การแจกแจงภายหลังไม่ได้อยู่ในรูปมาตรฐาน การประมาณพารามิเตอร์แบบเบย์ส์จะมีความซับซ้อน นักสถิติจึงได้พัฒนาวิธีของลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โล (Markov Chain Monte Carlo: MCMC) เพื่อใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังที่ซับซ้อน โดย MCMC เป็นการจำลองตัวอย่างที่มีลักษณะเป็นลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov Chain) ที่มีการแจกแจงลู่เข้าสู่การแจกแจงภายหลัง และเมื่อมีการลู่เข้าการแจกแจงภายหลังแล้ว พารามิเตอร์สามารถประมาณด้วยค่าเฉลี่ยของตัวอย่างที่สร้างจาก MCMC ซึ่งวิธีในกลุ่มของ MCMC มีหลายวิธี เช่น วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs) วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบฮิตแอนด์รัน (Hit-and-Run: HR) และวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบเมโทรโพลิส-เฮสติง (Metropolis-Hasting: MH) เป็นต้น

การอนุมานสถิติแบบเบย์ส์ที่มีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับถูกศึกษาโดย (Chiarawongse, Kiatsupaibul, Tirapat, & Van Roy, 2012) ซึ่งมีตัวแบบเป็นดังนี้ ให้ \mathbf{X} เป็นเวกเตอร์ของพารามิเตอร์ที่ต้องการประมาณ โดยมีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบปกติ k ตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector : $\boldsymbol{\mu}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix : $\boldsymbol{\Sigma}$)

$$\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

และมีข้อมูลประกอบเชิงอันดับ แสดงในรูปอสมการเชิงเส้น $k - 1$ อสมการ

$$X_i \leq X_{i+1} \text{ เมื่อ } i = 1, 2, \dots, k - 1$$

การแจกแจงภายหลังของ \mathbf{X} จึงเป็นแบบปกติที่ถูกจำกัดขอบเขตด้วยการจัดเรียงอันดับของตัวแปร (Truncated Normal Posterior Distribution: π)

ให้ $R = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^k | x_i \leq x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, k - 1\}$ และ I_R เป็นตัวแปรบ่งชี้ (Indicator Variable) บน R ฟังก์ชันความหนาแน่นภายหลัง (Posterior Density Function: π') ของ \mathbf{X} เป็นดังนี้

$$\pi'(x|X \in R) \propto I_R \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right]$$

ค่าคาดหวังภายใต้การแจกแจงภายหลัง (Posterior Expectation) เป็นดังนี้

$$E[h(X)|X \in R] = \frac{\int_{y \in R} h(y) \exp\left[\frac{1}{2}(y - \mu)^T \Sigma^{-1}(y - \mu)\right] dy}{\int_{y \in R} \exp\left[\frac{1}{2}(y - \mu)^T \Sigma^{-1}(y - \mu)\right] dy}$$

โดย h เป็นฟังก์ชันจำนวนจริงใด ๆ การประมาณค่าคาดหวังดังกล่าว ซึ่งเป็นค่าคาดหวังภายใต้การแจกแจงภายหลังสามารถใช้วิธีของ MCMC มาตรฐาน เช่น Gibbs และ HR ในการประมาณได้ โดย MCMC เป็นการจำลองตัวอย่าง $\{X^{(n)}, n = 1, 2, \dots, N\}$ ที่มีลักษณะเป็นลูกโซ่มาร์คอฟที่มีการแจกแจงสู่เข้าการแจกแจงภายหลัง (Posterior Distribution) และค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจะสู่เข้าค่าคาดหวังภายใต้การแจกแจงภายหลังนั้นคือ เมื่อ $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(X^{(n)}) \rightarrow E[h(X)|X \in R] \quad a.s.$$

โดยที่ N เป็นจำนวนรอบของการจำลองตัวอย่าง และการสู่เข้าจะเกิดขึ้นเมื่อลูกโซ่มาร์คอฟอยู่ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม (Henderson & Nelson, 2006) นอกจากนี้การประมาณค่าดังกล่าวยังสามารถใช้เทคนิคปริพันธ์เวียนเกิด (Recursive Integration) ในการประมาณได้ แต่มีข้อจำกัดคือ สามารถใช้ได้เฉพาะกรณีที่ตัวแปรสุ่มสร้างมาจากตัวแบบปัจจัยเดียว (One-Factor Model) (Kiatsupaibul, Hayter, & Liu, 2017)

(Chiarawongse et al., 2012) พบว่าการประมาณค่าเมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ MCMC มาตรฐาน ได้แก่ Gibbs และ HR สู่เข้าช้า จึงได้เสนอวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบโพลาร์เมโทรโพลิสฮิตแอนด์รัน (Polar Metropolis Hit-and-Run) ในที่นี้จะเรียกว่าวิธีโพลาร์เมโทรโพลิสฮิตแอนด์รันแบบปกติ (Normal Type Polar Metropolis Hit-and-Run: PMHR-N) ซึ่งเป็นการนำเอาขั้นตอนวิธี HR และวิธี MH มารวมกันโดยทำบนคู่อันดับเชิงขั้ว (Polar Coordinates) และพบว่าวิธีนี้ทำให้การสู่เข้าของ PMHR-N เร็วกว่าวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs และ HR

อย่างไรก็ตามความเร็วในการสู่เข้าจากการสุ่มตัวอย่างด้วยวิธี PMHR-N ก็ยังไม่เร็วมากพอ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อตัวแปรมีจำนวนเพิ่มมากขึ้นและในกรณีที่ตัวแปรแต่ละตัวมีความสัมพันธ์กันในระดับที่สูงขึ้น ด้วยเหตุนี้ทางผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาและพัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น ด้วยขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบโพลาร์เมโทรโพลิสฮิตแอนด์รันแบบแกมมา (Gamma Type Polar Metropolis Hit-and-Run: PMHR-G)

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาและพัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น ด้วยขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1.3.1 ข้อมูลที่ใช้ศึกษาเป็นข้อมูลจำลอง โดยจำลองข้อมูล (\mathbf{X}) ภายใต้ข้อกำหนดดังนี้

1.3.1.1 กำหนดให้ $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ขนาด k มิติ โดยที่ $k = 10, 50, 100$

1.3.1.2 กำหนดให้เวกเตอร์สุ่ม \mathbf{X} มีการเรียงอันดับอย่างสมบูรณ์นั่นคือ $X_i \leq X_{i+1}$ ทุก $i = 1, 2, \dots, k - 1$

1.3.1.3 กำหนดให้การแจกแจงก่อนของ \mathbf{X} มีการแจกแจงแบบปกติ k ตัวแปร $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ โดยที่เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector : $\boldsymbol{\mu}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix : $\boldsymbol{\Sigma}$)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector: $\boldsymbol{\mu}$) มีค่า 3 ลำดับคือ

$$\text{ลำดับที่ 1 : } \boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$$

ลำดับที่ 2 : $\boldsymbol{\mu} = \left[\frac{2}{k-1}i - 1; i = 0, 1, \dots, k - 1 \right]_{1 \times k}^T = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับเพิ่ม ซึ่งมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 และมีระยะห่างเท่าๆกัน

ลำดับที่ 3 : $\boldsymbol{\mu} = \left[1 - \frac{2}{k-1}i; i = 0, 1, \dots, k - 1 \right]_{1 \times k}^T = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับลด ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง -1 และมีระยะห่างเท่าๆกัน

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ) มีค่า 4 ระดับคือ

$$\text{ระดับที่ 1 : } \rho = 0$$

$$\text{ระดับที่ 2 : } \rho = 0.5$$

$$\text{ระดับที่ 3 : } \rho = 0.75$$

$$\text{ระดับที่ 4 : } \rho = 0.9$$

1.3.2 กำหนดให้ $X_{(p)}^{(n)}$ แทนเปอร์เซ็นต์ไทล์ p ของตัวอย่างที่ n จาก MCMC โดยที่ $p = 25, 50, 75$ และ $n = 1, 2, \dots, N$ เมื่อ N คือจำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง และให้ $\bar{X}_{(p)}$ แทน ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่เปอร์เซ็นต์ไทล์ p ซึ่งสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\bar{X}_{(p)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{(p)}^{(n)}$$

กรณีที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ไม่เป็นจำนวนเต็มจะใช้จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าแทน เช่น ตำแหน่งที่ 2.5 จะใช้ตำแหน่งที่ 2 แทน

1.3.3 จำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง (N)

เมื่อ $k = 10, 50, 100$ กรณี $\rho = 0$ จะกำหนดให้ N สำหรับแต่ละ k เป็น 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ ส่วนกรณี $\rho = 0.5, 0.75, 0.9$ จะกำหนด N สำหรับแต่ละ k เป็น 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

หมายเหตุ: การกำหนดจำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง (N) จะพิจารณาจาก N ที่ทำให้วิธี PMHR-G เกิดการลู่เข้า โดยพิจารณาการลู่เข้าจากเกณฑ์ในข้อ 3. และ N สูงสุดจะมีค่าไม่เกิน 20 เท่าของ N ในกรณี $\rho = 0$

1.3.4 เกณฑ์ที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ

เชิงปริมาณ: ค่า $\hat{R}_{0.975}$ ซึ่งเป็นค่าขอบเขตบนของความเชื่อมั่นแบบข้างเดียวของตัวประกอบอัตราส่วนที่ปรับลดแล้ว (PSRF) ที่ 97.5% ความเชื่อมั่น จากเทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน (Gelman-Rubin Diagnostic)

เชิงคุณภาพ: กราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 เพื่อนำผลการศึกษาไปใช้เป็นแนวทางในการตัดสินใจว่าควรจะใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในการจำลองข้อมูลสำหรับการอนุมานแบบเบย์ส์เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ

1.4.2 เพื่อใช้หลักการและโปรแกรมที่เขียนได้ไปประยุกต์ใช้ เช่นนำไปใช้ประมาณค่าคาดหวังของผลตอบแทนในอนาคตเพื่อเป็นแนวทางในการวางแผนการลงทุน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การดำเนินงานวิจัยเรื่อง การเปรียบเทียบวิธีลูกโซ่มาร์คอฟมอนติคาร์โลสำหรับการอนุมานแบบเบย์เมื่อมีเงื่อนไขบังคับเชิงอันดับ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารงานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อดังต่อไปนี้

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 วิธีในกลุ่ม MCMC

2.1.1.1 การสุ่มตัวอย่างแบบ HR

2.1.1.2 การสุ่มตัวอย่างแบบ MH

2.1.1.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs

2.1.1.4 การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N

2.1.2 เทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน (Gelman-Rubin Diagnostic: GRD)

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 วิธีในกลุ่ม MCMC

2.1.1.1 การสุ่มตัวอย่างแบบ HR

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ HR ถูกนำเสนอโดย (Smith, 1984) เป็นการจำลองตัวอย่างแบบลูกโซ่มาร์คอฟที่มีการแจกแจงของตัวอย่างคู่เข้าสู่การแจกแจงสม่าเสมอบนเซต $R \subset \mathcal{R}^k$ และต่อมา (Bélisle, Romeijn, & Smith, 1993) ได้ปรับให้วิธี HR สามารถจำลองการแจกแจงอื่นนอกเหนือจากการแจกแจงสม่าเสมอบน R สำหรับการแจกแจงเป้าหมายทั่วไป การสุ่มตัวอย่างแบบ HR มีขั้นตอนวิธีดังนี้

กำหนด: 1. $R \subset \mathcal{R}^k$

2. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)}$

2. ที่จุดปัจจุบัน $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ จำลองทิศทาง \mathbf{d} บนพื้นผิวทรงกลมใน \mathfrak{R}^k ที่มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย สร้างเส้นตรง L ผ่านจุด $\mathbf{x}^{(n)}$ ในทิศทาง \mathbf{d} และอยู่ภายใน R

$$L^{(n)} = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x}^{(n)} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$$

3. สุ่มจุดใหม่ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n+1)}$ บนเส้นตรง $L^{(n)}$ ด้วยการแจกแบบมีเงื่อนไข $\pi'(\mathbf{x} | \mathbf{X} \in L^{(n)})$

4. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงลู่เข้า การแจกแจง π

2.1.1.2 การสุ่มตัวอย่างแบบ MH

(Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, & Teller, 1953) ได้เสนอขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบเมโทรโพลิส ซึ่งเป็นการจำลองตัวอย่างแบบลูกโซ่มาร์คอฟ ที่มีการแจกแจงของตัวอย่างลู่เข้าสู่การแจกแจงแบบสมมาตรในสองชั้น โดยสร้างตัวเลือกจากความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ Q จากนั้นทำการยอมรับตัวเลือกด้วยความน่าจะเป็น α ต่อมา (Hastings, 1970) ได้ปรับให้วิธีเมโทรโพลิสสามารถจำลองการแจกแจงทั่วไปได้ และได้เปลี่ยนชื่อเป็นขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ MH

สมมติให้ ณ จุดตัวอย่างปัจจุบัน $\mathbf{x}^{(n)}$ ผู้จำลองสามารถสร้างจุดตัวอย่างถัดไป \mathbf{x}^* ได้ด้วยความน่าจะเป็นเปลี่ยนสถานะ Q ที่มี p.d.f. ของการเปลี่ยนสถานะเป็น $q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ และกำหนดให้ π' เป็น p.d.f. ของการแจกแจงเป้าหมาย π นิยามความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก \mathbf{x}^* เมื่อจุดปัจจุบันเป็น $\mathbf{x}^{(n)}$ ใช้สัญลักษณ์ $\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$

$$\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \begin{cases} \min\left(\frac{\pi'(\mathbf{x}^*)q(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(n)})}{\pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)}, 1\right); & \pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) > 0 \\ 1 & ; \pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = 0 \end{cases}$$

ขั้นตอนวิธีการของการสุ่มตัวอย่างแบบ MH มีดังนี้

กำหนด: 1. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

2. p.d.f. q ของการเปลี่ยนสถานะ Q

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$

2. สุ่มจุด \mathbf{x}^* จากฟังก์ชันความหนาแน่นที่กำหนด $q(\mathbf{x})$

3. สุ่ม $y \sim U(0,1)$ และ คำนวณความน่าจะเป็น $\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ ซึ่ง

$$\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \begin{cases} \min\left(\frac{\pi'(\mathbf{x}^*)q(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(n)})}{\pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)}, 1\right); & \pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) > 0 \\ 1 & \pi'(\mathbf{x}^{(n)})q(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = 0 \end{cases}$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$ มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

4. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงลู่เข้า
การแจกแจง π

2.1.1.3 การสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs

การสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ เป็นการจำลองตัวอย่างจากการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ถูกอธิบายโดย (Geman & Geman, 1984) ซึ่งขั้นตอนวิธีของ Gibbs เป็นกรณีเฉพาะของขั้นตอนวิธีของ MH ที่มีการเปลี่ยนสถานะเพียง 1 องค์ประกอบ และมี $\alpha = 1$ นั่นคือตัวเลือกที่ถูกสุ่มโดยวิธี Gibbs จะถูกยอมรับเสมอ ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีดังนี้

กำหนด: 1. $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$

2. $\mathbf{X}_{-i} = [X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k]^T$

3. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่ม $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}]^T$

2. สุ่ม i จาก $\{1, 2, \dots, k\}$ ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน

3. จำลอง $X_i^{(n+1)}$ จากการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $\pi'(x_i | \mathbf{x}_{-i}^{(n)})$

4. ตั้งค่า $\mathbf{X}^{(n+1)} = [x_1^{(n)}, \dots, x_i^{(n+1)}, \dots, x_k^{(n)}]^T$

5. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงลู่เข้า
การแจกแจง π

2.1.1.4 การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N เสนอโดย (Chiarawongse et al., 2012) ซึ่งเป็นการรวมขั้นตอนวิธี HR เข้ากับขั้นตอนวิธี MH และทำบนคู่อันดับเชิงขั้ว (Polar Coordinates) ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N มีดังนี้

กำหนด: 1. ให้ $\|\mathbf{x}\|$ แทนขนาดของ \mathbf{x}

2. ให้ S เป็นพื้นที่ผิวของส่วนที่ทับซ้อนระหว่างทรงกลมใน k มิติ (Hypersphere) ที่มีรัศมีเท่ากับ $\|\mathbf{x}\|$ และรูปหลายเหลี่ยมใน k มิติ (Polytope: R) และให้เส้นตรง

$$L = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$$

3. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

4. p.d.f. q_L ของการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $\pi(\mathbf{x} | \mathbf{X} \in L)$

5. p.d.f. q_S ของการแจกแจงสม่ำเสมอ (Uniform Distribution) บนพื้นผิว S

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)}$

2. ที่จุดปัจจุบัน $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ จำลองทิศทางปัจจุบัน $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{x}^{(n)}}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|}$ สร้างเส้นตรง L ผ่านจุด $\mathbf{x}^{(n)}$ ในทิศทาง \mathbf{d}

$$L^{(n)} = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x}^{(n)} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$$

3. สุ่มจุดใหม่ $\mathbf{X}^{(n+1)}$ บนเส้นตรง L หรือบนพื้นผิว S ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน และสุ่ม $y \sim U(0,1)$

บนเส้นตรง L : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_L

$$\text{และคำนวณ } \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\left(\frac{\|\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|}\right)^{k-1}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

บนพื้นผิว S : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_S

$$\text{และคำนวณ } \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\frac{\pi'(\mathbf{x}^*)}{\pi'(\mathbf{x}^{(n)})}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

4. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงสู่เข้า การแจกแจง π

2.1.2 เทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน (Gelman-Rubin Diagnostic: GRD)

GRD ถูกนำเสนอโดย (Gelman & Rubin, 1992) และต่อมาได้ถูกพัฒนาโดย (Brooks & Gelman, 1998) GRD เป็นเทคนิคที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์การลู่เข้าของ MCMC ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจสอบว่าผู้จำลองควรหยุดการจำลองเมื่อไหร่ ระเบียบวิธีที่นำเสนอปรับจาก (Flegal, Haran,

& Jones, 2008) กำหนดให้ $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots, N\}$ เป็นลูกโซ่มาร์คอฟที่ได้จากการจำลอง MCMC ซึ่งเข้าสู่การแจกแจงสถานะคงตัว (Stationary Distribution) π และกำหนดให้ตัววัดผลที่สถานะคงตัวเป็น

$$\pi h = E[h(\mathbf{X})]$$

ขั้นตอนของ GRD มีดังนี้

1. จำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่เป็นอิสระกัน m ลูกโซ่ โดยที่ $m \geq 2$ แต่ละลูกโซ่มีความยาว $N = 2l$ ดังนั้นจึงต้องจำลองทั้งหมดเท่ากับ $2lm$

2. สำหรับลูกโซ่ที่ j โดยที่ $j = 1, 2, \dots, m$ ให้ตัดการจำลอง l ค่าแรกทิ้งไป และทำการวิเคราะห์บนการจำลอง l ค่าสุดท้าย ดังนั้นเมื่อตัดการจำลอง l ค่าแรกของทุกลูกโซ่ทิ้งไปจะเหลือ lm ค่าที่จะใช้วิเคราะห์ต่อไป

3. กำหนดให้ $\{\mathbf{X}_j^{(1)}, \mathbf{X}_j^{(2)}, \dots, \mathbf{X}_j^{(l)}\}$ และให้ $Y_{ji} = h(\mathbf{X}_j^{(i)})$ โดยที่ $j = 1, 2, \dots, m$ และ $i = 1, 2, \dots, l$ ทำการคำนวณค่าดังต่อไปนี้

\bar{Y}_j . แทน ค่าเฉลี่ยของตัววัดผลในลูกโซ่ที่ j

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l Y_{ji}$$

$\bar{Y}_{..}$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัววัดผลทั้งหมดและเป็นค่าประมาณแบบจุดของตัววัดผลที่สถานะคงตัว πh

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{Y}_j$$

S_j^2 แทน ความแปรปรวนของตัวอย่างในลูกโซ่ที่ j (Variance)

$$S_j^2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2$$

B แทน ความแปรปรวนระหว่างลูกโซ่ (Between-chain Variance)

$$B = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..})^2$$

W แทน ค่าเฉลี่ยของความแปรปรวนภายในลูกโซ่ (Average of the m Within-chain Variance)

$$W = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j^2$$

4. กำหนดให้ V มีค่าตามนิยามต่อไปนี้

$$V = \frac{l-1}{l} W + \frac{m+1}{ml} B$$

และให้ความเป็นองศาอิสระ (Degree of Freedom: df)

$$df \approx \frac{2V^2}{\widehat{var}(V)}$$

โดยที่ $\widehat{var}(V) = \left(\frac{l-1}{l}\right)^2 \widehat{var}(W) + \left(\frac{m+1}{ml}\right)^2 \widehat{var}(B) + 2\frac{(m+1)(l-1)}{ml^2} \widehat{cov}(W, B)$

ซึ่ง $\widehat{var}(W)$, $\widehat{var}(B)$ และ $\widehat{cov}(W, B)$ คำนวณด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$\widehat{var}(W) = \frac{\sum_{j=1}^m (S_j^2 - W)^2}{m(m-1)}$$

$$\widehat{var}(B) = \frac{2B^2}{m-1}$$

$$\widehat{cov}(W, B) = \frac{l}{m} \{ \widehat{cov}(S_j^2, \bar{Y}_j^2) - 2\bar{Y} \cdot \widehat{cov}(S_j^2, \bar{Y}_j) \}$$

5. นิยามตัวประกอบอัตราส่วนที่ปรับลดแล้ว (Corrected Potential Scale Reduction Factor: PSRF or \hat{R})

$$\hat{R} = \sqrt{\frac{df + 3V}{df + 1W}}$$

ลูกโซ่มาร์คอฟทั้ง m ลูกโซ่จะลู่เข้าหาค่าตัววัดผลที่แท้จริง เมื่อ \hat{R} มีค่าเข้าใกล้ 1

อย่างไรก็ตาม ค่า \hat{R} ที่ได้อาจมีความผิดพลาดทางสถิติ ดังนั้น GRD จึงเสนอให้สังเกตค่า $\hat{R}_{1-\alpha}$ ซึ่งเป็นค่าขอบเขตบนของความเชื่อมั่นแบบข้างเดียวของ \hat{R} ที่ $100(1-\alpha)\%$ ความเชื่อมั่นซึ่งคำนวณค่า $\hat{R}_{1-\alpha}$ ได้จาก

$$\hat{R}_{1-\alpha} = \sqrt{\frac{df + 3}{df + 1} \left\{ \frac{l-1}{l} + F_{1-\alpha, m-1, w} \left(\frac{m+1}{ml} \frac{B}{W} \right) \right\}}$$

โดยที่ $F_{1-\alpha, m-1, w}$ เป็นค่าวิกฤติของการแจกแจงเอฟที่ $1-\alpha$ เปอร์เซ็นไทล์ มีองศาความเป็นอิสระเป็น $m-1$ และ w ซึ่งคำนวณได้จาก

$$w = \frac{2W^2}{m(\widehat{var}(W))}$$

จะหยุดการจำลองเมื่อ

$$\hat{R}_{1-\alpha} < \epsilon$$

ซึ่ง (Gelman, Carlin, Stern, & Rubin, 2014) แนะนำให้ใช้ $\epsilon = 1.1$ ที่ 97.5% ความเชื่อมั่น

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

(Chiarawongse et al., 2012) นำเสนอขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N และการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบที่ลู่เข้าจากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ซึ่งพัฒนามาจากวิธี PMHR-N เพื่อให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ MCMC จากวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้งหมด 4 วิธี ได้แก่ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR โดยการเขียนโปรแกรมและประมวลผลใน R ในบทนี้จะเป็นการนำเสนอวิธีการดำเนินการวิจัยซึ่งมีรายละเอียดตามหัวข้อดังต่อไปนี้

3.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G

3.2 การดำเนินการวิจัย

3.2.1 ขอบเขตการวิจัย

3.2.2 การเก็บรวบรวมข้อมูล

3.2.2.1 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ HR

3.2.2.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs

3.2.2.3 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N

3.2.2.4 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

3.2.3 การวัดประสิทธิภาพ

3.3 การวิเคราะห์และสรุปผลการวิจัย

3.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G

การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N เริ่มจากหาสาเหตุที่ทำให้เกิดข้อบกพร่องในการลู่อู่เข้า ซึ่งทางผู้วิจัยพบว่าในขั้นตอนการยอมรับตัวเลือกตามหลักการของวิธี MH มีการปฏิเสธตัวเลือกบนเส้นตรง L มากกว่าการยอมรับจึงเป็นเหตุที่ทำให้การลู่อู่เข้าช้า ดังนั้นเราจึงต้องการหาการแจกแจงที่เหมาะสมสำหรับการสุ่มตัวเลือกบนเส้นตรง L เพื่อให้เกิดการยอมรับตัวเลือกมากขึ้น นั่นคือในการพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N เป็น PMHR-G เราจะเปลี่ยนแปลงการสุ่มตัวเลือกบนเส้นตรง L จากการแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงอื่นที่เหมาะสมแทน และเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงการแจกแจงของตัวเลือกก็จะทำให้ความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก (α) ตามหลักการของวิธี MH เปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังนั้นเราจึงต้องหา α ใหม่ที่เหมาะสมสำหรับการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ซึ่งทั้งหมดนี้เป็นผลลัพธ์ของงานวิจัยและจะแสดงในบทที่ 4 หัวข้อ 4.1

3.2 การดำเนินการวิจัย

3.2.1 ขอบเขตการวิจัย

3.2.1.1 ข้อมูลที่ใช้ศึกษาเป็นข้อมูลจำลอง โดยจำลองข้อมูล (\mathbf{X}) ภายใต้ข้อกำหนดดังนี้

3.2.1.1.1 กำหนดให้ $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ขนาด k มิติ โดย $k = 10, 50, 100$

3.2.1.1.2 กำหนดให้เวกเตอร์สุ่ม \mathbf{X} มีการเรียงอันดับอย่างสมบูรณ์ นั่นคือ $X_i \leq X_{i+1}$ ทุก $i = 1, 2, \dots, k - 1$

3.2.1.1.3 กำหนดให้การแจกแจงก่อนของ \mathbf{X} มีการแจกแจงแบบปกติ k ตัวแปร $N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ โดยที่เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector : $\boldsymbol{\mu}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix : $\boldsymbol{\Sigma}$)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย (Mean Vector: $\boldsymbol{\mu}$) มีค่า 3 ลำดับคือ

$$\text{ลำดับที่ 1 : } \boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$$

ลำดับที่ 2 : $\boldsymbol{\mu} = \left[\frac{2}{k-1}i - 1; i = 0, 1, \dots, k - 1 \right]_{1 \times k}^T = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับเพิ่ม ซึ่งมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 และมีระยะห่างเท่าๆกัน

ลำดับที่ 3 : $\boldsymbol{\mu} = \left[1 - \frac{2}{k-1}i; i = 0, 1, \dots, k - 1 \right]_{1 \times k}^T = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ เป็นเวกเตอร์ที่มีสมาชิกอยู่ในรูปของลำดับลด ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 1 ถึง -1 และมีระยะห่างเท่าๆกัน

ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ) มีค่า 4 ระดับคือ

$$\text{ระดับที่ 1 : } \rho = 0$$

$$\text{ระดับที่ 2 : } \rho = 0.5$$

$$\text{ระดับที่ 3 : } \rho = 0.75$$

$$\text{ระดับที่ 4 : } \rho = 0.9$$

3.2.1.2 กำหนดให้ $X_{(p)}^{(n)}$ แทน เปอร์เซ็นไทล์ p ของตัวอย่างที่ n จาก MCMC โดยที่ $p = 25, 50, 75$ และ $n = 1, 2, \dots, N$ เมื่อ N คือจำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง และให้ $\bar{X}_{(p)}$ แทน ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่เปอร์เซ็นไทล์ p ซึ่งคำนวณได้ดังนี้

$$\bar{X}_{(p)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_{(p)}^{(n)}$$

กรณีที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ไม่เป็นจำนวนเต็มจะใช้จำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าแทน เช่นตำแหน่งที่ 2.5 จะใช้ตำแหน่งที่ 2 แทน

3.2.1.3 จำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง (N)

เมื่อ $k = 10, 50, 100$ กรณี $\rho = 0$ จะกำหนดให้ N สำหรับแต่ละ k เป็น 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ ส่วนกรณี $\rho = 0.5, 0.75, 0.9$ จะกำหนด N สำหรับแต่ละ k เป็น 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

หมายเหตุ: การกำหนดจำนวนรอบในการจำลองตัวอย่าง (N) จะพิจารณาจาก N ที่ทำให้วิธี PMHR-G เกิดการลู่เข้า โดยพิจารณาการลู่เข้าจากเกณฑ์ในข้อ 3.2.1.4 และ N สูงสุดจะมีค่าไม่เกิน 20 เท่าของ N ในกรณี $\rho = 0$

3.2.1.4 เกณฑ์ที่ใช้เปรียบเทียบประสิทธิภาพ

เชิงปริมาณ: ค่า $\hat{R}_{0.975}$ ซึ่งเป็นค่าขอบเขตบนของความเชื่อมั่นแบบข้างเดียวของตัวประกอบอัตราส่วนที่ปรับลดแล้ว (PSRF) ที่ 97.5% ความเชื่อมั่น จากเทคนิคการวินิจฉัยแบบเกลแมนและรูบิน (Gelman-Rubin Diagnostic: GRD)

เชิงคุณภาพ: กราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$

3.2.2 การเก็บรวบรวมข้อมูล

เก็บรวบรวมข้อมูลจากการจำลองข้อมูลด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้งหมด 4 แบบ ได้แก่ HR, Gibbs, PMHR-N และ PMHR-G ซึ่งมี k, μ, ρ และ N เป็นไปตามขอบเขตที่กำหนด โดยการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 แบบ มีรายละเอียดของขั้นตอนดังนี้

3.2.2.1 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ HR

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ HR มีดังนี้

กำหนด: 1. $R \subset \mathfrak{R}^k$

2. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)}$

2. ที่จุดปัจจุบัน $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ จำลองทิศทาง \mathbf{d} บนพื้นผิวทรงกลมใน \mathfrak{R}^k ที่มีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย

3. สุ่มเลือก λ ; $\lambda \in \mathfrak{R}$ จากการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}^{(n)})}{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}}$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{\frac{1}{\mathbf{d}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}}}$ ซึ่งถูกจำกัดอยู่ในบริเวณ $[A, B]$ โดยที่

$A = \max[\lambda_b; \lambda_b < 0, -\infty]$ และ $B = \min[\lambda_b; \lambda_b > 0, \infty]$ เมื่อ

$$\lambda_b = \frac{x_1^{(n)} - x_2^{(n)}}{d_2 - d_1}, \frac{x_2^{(n)} - x_3^{(n)}}{d_3 - d_2}, \dots, \frac{x_{k-1}^{(n)} - x_k^{(n)}}{d_k - d_{k-1}}$$

4. สร้างเส้นตรง L ผ่านจุด $\mathbf{x}^{(n)}$ ในทิศทาง \mathbf{d} และอยู่ภายใน R

$$L^{(n)} = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x}^{(n)} + \lambda\mathbf{d}\} \cap R$$

5. สุ่มจุดใหม่ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n+1)}$ บนเส้นตรง $L^{(n)}$ ด้วยการแจกแบบมีเงื่อนไข $\pi'(\mathbf{x} | \mathbf{X} \in L^{(n)})$

6. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2 จนจำนวนจุดตัวอย่างเท่ากับ N
ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงสู่เข้าการแจกแจง π

3.2.2.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีดังนี้

กำหนด: 1. $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]^T$

2. $\mathbf{X}_{-i} = [X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k]^T$

3. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่ม $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} = [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}]^T$
โดยที่ $x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \dots \leq x_k^{(n)}$

2. สุ่ม i จาก $\{1, 2, \dots, k\}$ ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน

3. กำหนดทิศทาง \mathbf{d} โดยให้ค่าของเวกเตอร์ \mathbf{d} ตำแหน่งที่ $i = 1$ ส่วนตำแหน่งอื่นๆ ให้ค่าเป็น 0

4. จำลอง $X_i^{(n+1)}$ จากการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $\pi'(x_i | \mathbf{x}_{-i}^{(n)})$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}^{(n)})}{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}\mathbf{d}}$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $\sqrt{\frac{1}{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}\mathbf{d}}}$ ซึ่งถูกจำกัดอยู่ในบริเวณ $[A, B]$ โดยที่

$$A = \begin{cases} -\infty, & i = 1 \\ X_{i-1}^{(n)}, & i \neq 1 \end{cases} \quad \text{และ} \quad B = \begin{cases} \infty, & i = k \\ X_{i+1}^{(n)}, & i \neq k \end{cases}$$

5. ตั้งค่า $\mathbf{X}^{(n+1)} = [x_1^{(n)}, \dots, x_i^{(n+1)}, \dots, x_k^{(n)}]^T$

6. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2 จนจำนวนจุดตัวอย่างเท่ากับ N
ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงลู่เข้าการแจกแจง π

3.2.2.3 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N มีดังนี้

- กำหนด: 1. ให้ $\|\mathbf{x}\|$ แทนขนาดของ \mathbf{x}
2. ให้ S เป็นพื้นที่ผิวของส่วนที่ทับซ้อนระหว่างทรงกลมใน k มิติ (hypersphere) ที่มีรัศมีเท่ากับ $\|\mathbf{x}\|$ และรูปหลายเหลี่ยมใน k มิติ (Polytope: R) และให้เส้นตรง $L = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$
3. p.d.f. π' ของการแจกแจง π
4. p.d.f. q_L ของการแจกแจงแบบมีเงื่อนไข $\pi(x | \mathbf{X} \in L)$
5. p.d.f. q_S ของการแจกแจงสม่ำเสมอบนพื้นผิว S

ขั้นตอน: 1. กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)}$

2. ที่จุดปัจจุบัน $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ จำลองทิศทางปัจจุบัน $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{x}^{(n)}}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|}$

3. สุ่มเลือก $\lambda; \lambda \in \mathfrak{R}$ จากการแจกแจงแบบปกติที่มีค่าเฉลี่ย $\frac{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{x}^{(n)})}{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}\mathbf{d}}$

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sqrt{\frac{1}{\mathbf{d}'\Sigma^{-1}\mathbf{d}}}$ ซึ่งถูกจำกัดอยู่ในบริเวณ $[-\|\mathbf{x}^{(n)}\|, \infty]$

4. สร้างเส้นตรง L ผ่านจุด $\mathbf{x}^{(n)}$ ในทิศทาง \mathbf{d} และอยู่ภายใน R

$$L^{(n)} = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x}^{(n)} + \lambda\mathbf{d}\} \cap R$$

5. สุ่มจุดใหม่ $\mathbf{X}^{(n+1)}$ บนเส้นตรง L หรือบนพื้นผิว S ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน และสุ่ม $y \sim U(0, 1)$

บนเส้นตรง L : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_L

$$\text{และคำนวณ } \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\left(\frac{\|\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|}\right)^{k-1}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

บนพื้นผิว S : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_S

$$\text{และคำนวณ } \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\frac{\pi'(\mathbf{x}^*)}{\pi'(\mathbf{x}^{(n)})}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

6. เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2 จนจำนวนจุดตัวอย่างเท่ากับ N

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงสู่เข้า
การแจกแจง π

3.2.2.4 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เป็นผลของงานวิจัยซึ่งจะแสดงใน
บทที่ 4 หัวข้อ 4.2

3.2.3 การวัดประสิทธิภาพ

เชิงปริมาณ: คำนวณค่า $\hat{R}_{0.975}$ มีขั้นตอนดังนี้

1. จำลองลูกโซ่มาร์คอฟที่เป็นอิสระกัน 5 ลูกโซ่ แต่ละลูกโซ่มีความยาว $N = 2l$ ดังนั้นจึง
ต้องจำลองทั้งหมด $10l$

2. สำหรับลูกโซ่ที่ j โดยที่ $j = 1, 2, \dots, 5$ ให้ตัดการจำลอง l ค่าแรกทิ้งไป และทำการ
วิเคราะห์บนการจำลอง l ค่าสุดท้าย ดังนั้นเมื่อตัดการจำลอง l ค่าแรกของทุกลูกโซ่ทิ้งไปจะเหลือ $5l$
ค่าที่จะใช้วิเคราะห์ต่อไป

3. คำนวณค่า $\hat{R}_{0.975}$ โดยใช้ฟังก์ชัน `gelman.diag` ใน package `coda`

เชิงคุณภาพ: คำนวณค่า $\bar{X}_{(p)}$ และนำค่าที่คำนวณได้มาพล็อตกราฟค่าเฉลี่ยสะสม

3.3 การวิเคราะห์และสรุปผลการวิจัย

วิเคราะห์ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR สำหรับแต่ละวิธีจะกำหนดให้ ρ, k, μ และ N เท่ากัน

ในเชิงปริมาณจะนำค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 วิธี มาเปรียบเทียบกัน วิธีที่มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ น้อยกว่า 1.1 สามารถแสดงได้ว่าการลู่เข้าแล้ว และวิธีที่มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เข้าใกล้ 1 มากกว่าจะมีประสิทธิภาพสูงกว่า เช่น วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975} = 1.05$ และ PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975} = 1.07$ จะได้ว่าวิธี PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี PMHR-N

ในเชิงคุณภาพจะพิจารณาจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ จากการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 วิธี โดย MCMC จะลู่เข้า เมื่อส่วนปลายของกราฟมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงเรียบและลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย* และถ้ากราฟจากวิธีใดที่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย* ได้ใกล้เคียงมากกว่า ก็สามารถแสดงได้ว่าวิธีนั้นมีประสิทธิภาพสูงกว่า

* หมายเหตุ: ค่าคาดหวังเป้าหมาย คือค่าคาดหวังที่ได้จากวิธีปริพันธ์เวียนเกิด (Recursive Integration)

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ในบทนี้จะนำเสนอผลลัพธ์จากการพัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G และขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G รวมถึงผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

4.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G

4.1.1 ค่าเฉลี่ย (μ_d) และความแปรปรวน (σ_d^2) บนเส้นตรง L

4.1.2 พารามิเตอร์ shape และ rate ของการแจกแจงแบบแกมมา

4.1.3 ความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก (α) เมื่อสุ่มตัวเลือกบนการแจกแจงแบบแกมมา

4.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

4.3 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

4.1 การพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G

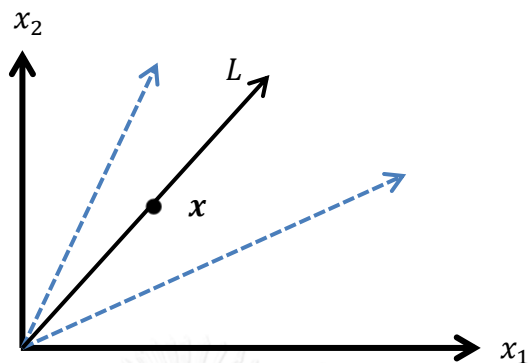
จากการหาสาเหตุที่ทำให้เกิดข้อบกพร่องในการลู่เข้าของวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N พบว่าบนเส้นตรง L มีการปฏิเสธจุดตัวเลือกมากกว่าการยอมรับเป็นจำนวนหลายเท่า ยกตัวอย่างเช่น กรณี $\rho = 0.5, k = 10, \mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $N = 300,000$ รอบ โดยทำการสุ่มจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน ซึ่งพบว่าการยอมรับจุดตัวเลือกบนพื้นผิว S 36.75% และปฏิเสธ 62.99% ส่วนบนเส้นตรง L มีการยอมรับจุดตัวเลือกเพียง 1.86% และมีการปฏิเสธถึง 98.40% นั่นจึงเป็นเหตุที่ทำให้การลู่เข้าช้า ดังนั้นทางผู้วิจัยจึงได้พัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N บนเส้นตรง L ด้วยขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

ในการพัฒนาขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างจากวิธี PMHR-N บนเส้นตรง L นั้น เราจะทำโดยเปลี่ยนแปลงจากการสุ่มตัวเลือกบนการแจกแจงแบบปกติ เป็นการสุ่มบนการแจกแจงแบบแกมมา เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว (พบในหัวข้อ 4.1.2) พบว่า p.d.f π' ที่ได้คล้ายกับ p.d.f ของแกมมา ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการทราบคือ

- ค่าเฉลี่ย (μ_d) และความแปรปรวน (σ_d^2) บนเส้นตรง L
- พารามิเตอร์ shape และ rate ของการแจกแจงแบบแกมมา

- ความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก (α) เมื่อสุ่มตัวเลือกบนการแจกแจงแบบแกมมา

4.1.1 ค่าเฉลี่ย (μ_d) และความแปรปรวน (σ_d^2) บนเส้นตรง L



$$L = \{l : l = x + \lambda d, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$$

การสุ่มตัวอย่างบนเส้นตรง L คือการเปลี่ยนแปลงรัศมี ($r = \|\mathbf{x}\|$) ในทิศทางปัจจุบัน $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ ดังนั้น $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$

กำหนดให้ $\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ จะได้ว่า $f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}$

และเนื่องจาก $\mathbf{x} = r\mathbf{d}$ ดังนั้น $f(r) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})\right\}$

ในการหาค่าเฉลี่ย (μ_d) เราจะหา r ที่ทำให้ $\pi'(r)$ มีค่าสูงสุด โดย π' คือ p.d.f ของการแจกแจงแบบปกติที่ถูกจำกัดขอบเขตด้วยการจัดเรียงอันดับของตัวแปร ซึ่ง π' ก็คือ f คูณด้วยค่าคงที่ จึงทำให้ μ_d ไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นเราสามารถหา μ_d โดยหา r ที่ทำให้ $f(r)$ มีค่าสูงสุดแทนได้

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } \ln(f(r)) &= -\frac{1}{2}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= -\frac{1}{2}\{r\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(r\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})\} \\ &= -\frac{1}{2}\{r^2 \mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d} - r\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - r\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d} + \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}\} \\ &= -\frac{1}{2}\{r^2 \mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d} - 2r\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{และ } \frac{d\ln(f(r))}{dr} = -r\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d} + \mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} = 0$$

$$\therefore r^* = \frac{\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d}} = \mu_d$$

สำหรับความแปรปรวน (σ_d^2) ก็คือส่วนกลับของสัมประสิทธิ์ของ r^2 และจาก (1) จะได้ว่า

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{d}}$$

ในการประยุกต์ใช้ขั้นตอนของวิธี MH นั้น ผู้จำลองไม่จำเป็นต้องทราบ p.d.f. π' ที่ถูกต้องของการแจกแจง π ผู้จำลองอาจทราบเพียงว่า $\pi'(\mathbf{x}) = K h(\mathbf{x}) \propto h(\mathbf{x})$ สำหรับบางฟังก์ชัน h โดย K เป็นค่าคงที่ เนื่องจากในการคำนวณความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก π' ของตัวเลือกจะถูกหารด้วย π' ของตัวอย่างปัจจุบัน ทำให้อัตราส่วนของ π' ตัดกันเหลือเพียงสัดส่วนของ h ซึ่งเราจะนำคุณสมบัตินี้มาประยุกต์ใช้กับข้อ 4.1.2 และ 4.1.3 ดังต่อไปนี้

4.1.2 พารามิเตอร์ shape และ rate ของการแจกแจงแบบแกมมา

ในการหาการแจกแจงที่เหมาะสมสำหรับตัวเลือกบนเส้นตรง L และพารามิเตอร์ของการแจกแจงนั้น เราจะพิจารณาจากขั้นตอนการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดฉากเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดให้ $\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$

$$X \sim N(\mu_d, \sigma_d^2)$$

จากการเปลี่ยนแปลงระบบพิกัดฉาก (\mathbf{X}) ให้เป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว ($r, S(\mathbf{d})$) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} d\mathbf{x} \\ &= \iint_{\mathbf{R}} K(\mathbf{d}) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_d^2}(r - \mu_d)^2\right\} r^{k-1} dr dS(\mathbf{d}) \\ &= \iint_{\mathbf{R}} K(\mathbf{d}) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_d^2}(r^2 - 2r\mu_d + \mu_d^2)\right\} r^{k-1} dr dS(\mathbf{d}) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $\rho = r^2$

$$\begin{aligned} &= \iint_{\mathbf{R}} \frac{K(\mathbf{d})}{2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_d^2}(\rho - 2\sqrt{\rho}\mu_d + \mu_d^2)\right\} \rho^{\frac{k}{2}-1} d\rho dS(\mathbf{d}) \\ &= \iint_{\mathbf{R}} \frac{K(\mathbf{d})}{2} e^{-\frac{\mu_d^2}{2\sigma_d^2}} \exp\left(-\frac{\rho}{2\sigma_d^2} + \frac{\sqrt{\rho}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \rho^{\frac{k}{2}-1} d\rho dS(\mathbf{d}) \end{aligned}$$

กำหนดให้ $C = \frac{K(\mathbf{d})}{2} e^{-\frac{\mu_d^2}{2\sigma_d^2}}$

$$= \iint_{\mathbf{R}} C \exp\left(-\frac{\rho}{2\sigma_d^2} + \frac{\sqrt{\rho}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \rho^{\frac{k}{2}-1} d\rho dS(\mathbf{d})$$

$$\text{ดังนั้น } \pi'(\rho) = C \exp\left(-\frac{\rho}{2\sigma_d^2} + \frac{\sqrt{\rho}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \rho^{\frac{k}{2}-1} = C \exp\left(\frac{\sqrt{\rho}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho}{2\sigma_d^2}\right) \rho^{\frac{k}{2}-1} \quad (2)$$

จาก (2) จะสังเกตเห็นว่ามีการแจกแจงคล้ายกับการแจกแจงแบบแกมมาที่มี shape เท่ากับ $\frac{k}{2}$ และ rate เท่ากับ $\frac{1}{2\sigma_d^2}$ ดังนั้นจึงกำหนดให้การแจกแจงของตัวเลือกเป็นการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งมี shape และ rate เท่ากับ $\frac{k}{2}$ และ $\frac{1}{2\sigma_d^2}$ ตามลำดับ

4.1.3 ความน่าจะเป็นในการยอมรับตัวเลือก (α) เมื่อสุ่มตัวเลือกบนการแจกแจงแบบแกมมา กำหนดให้ $q(\rho)$ เป็น p.d.f. ของ Gamma $\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2\sigma_d^2}\right)$

$$\alpha(\rho_0, \rho_1) = \min\left(\frac{\pi'(\rho_1)q(\rho_1, \rho_0)}{\pi'(\rho_0)q(\rho_0, \rho_1)}, 1\right)$$

$$C = \frac{K(\mathbf{d})}{2} e^{-\frac{\mu_d^2}{2\sigma_d^2}}$$

$$V = \frac{\left(\frac{1}{2\sigma_d^2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\pi'(\rho_1)q(\rho_1, \rho_0)}{\pi'(\rho_0)q(\rho_0, \rho_1)} &= \frac{C \exp\left(\frac{\sqrt{\rho_1}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho_1}{2\sigma_d^2}\right) \rho_1^{\frac{k}{2}-1}}{C \exp\left(\frac{\sqrt{\rho_0}\mu_d}{\sigma_d^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho_0}{2\sigma_d^2}\right) \rho_0^{\frac{k}{2}-1}} \times \frac{V \exp\left(-\frac{\rho_0}{2\sigma_d^2}\right) \rho_0^{\frac{k}{2}-1}}{V \exp\left(-\frac{\rho_1}{2\sigma_d^2}\right) \rho_1^{\frac{k}{2}-1}} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{\rho_1}\mu_d}{\sigma_d^2}\right)}{\exp\left(\frac{\sqrt{\rho_0}\mu_d}{\sigma_d^2}\right)} \\ &= \exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_0})\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha(\rho_0, \rho_1) = \min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_0})\right\}, 1\right)$$

$$\text{เนื่องจาก } \rho = r^2 \text{ ดังนั้น } \alpha(r_0, r_1) = \min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(r_1 - r_0)\right\}, 1\right)$$

$$\text{และเนื่องจาก } r = \|\mathbf{x}\| \text{ ดังนั้น } \alpha(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) = \min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\|\mathbf{x}_1\| - \|\mathbf{x}_0\|)\right\}, 1\right)$$

4.2 ขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

กำหนด: 1. ให้ $\|\mathbf{x}\|$ แทนขนาดของ \mathbf{x}

2. ให้ S เป็นพื้นที่ผิวของส่วนที่ทับซ้อนระหว่างทรงกลมใน k มิติ (hypersphere) ที่มีรัศมีเท่ากับ $\|\mathbf{x}\|$ และรูปหลายเหลี่ยมใน k มิติ (Polytope: R) และให้เส้นตรง

$$L = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}, \lambda \in \mathfrak{R}\} \cap R$$

3. p.d.f. π' ของการแจกแจง π

4. p.d.f. q_L ของการแจกแจงแบบ Gamma $\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2\sigma_d^2}\right)$

5. p.d.f. q_S ของการแจกแจงสม่ำเสมอบนพื้นผิว S

ขั้นตอน: 1 กำหนดค่าเริ่มต้น $n = 1$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{X}^{(n)}$

2 ที่จุดปัจจุบัน $\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ จำลองทิศทางปัจจุบัน $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{x}^{(n)}}{\|\mathbf{x}^{(n)}\|}$

3 สุ่มเลือก λ ; $\lambda \in \mathfrak{R}$ จากการแจกแจงแบบ Gamma $\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2\sigma_d^2}\right)$

4 สร้างเส้นตรง L ผ่านจุด $\mathbf{x}^{(n)}$ ในทิศทาง \mathbf{d} และอยู่ภายใน R

$$L^{(n)} = \{\mathbf{l} : \mathbf{l} = \mathbf{x}^{(n)} + \lambda \mathbf{d}\} \cap R$$

5 สุ่มจุดใหม่ $\mathbf{X}^{(n+1)}$ บนเส้นตรง L หรือบนพื้นผิว S ด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากัน และสุ่ม $y \sim U(0,1)$

บนเส้นตรง L : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_L และคำนวณ

$$\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\|\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}^{(n)}\|)\right\}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

บนพื้นผิว S : สุ่ม \mathbf{x}^* จากการแจกแจง q_S

$$\text{และคำนวณ } \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*) = \min\left(\frac{\pi'(\mathbf{x}^*)}{\pi'(\mathbf{x}^{(n)})}, 1\right)$$

ถ้า $y < \alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ กำหนดให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^*$

มิฉะนั้นให้ $\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)}$

6 เพิ่ม n ให้เป็น $n + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2 จนจำนวนจุดตัวอย่างเท่ากับ N

ผลลัพธ์: ตัวอย่างที่อยู่ในรูปลำดับของจุด $\{\mathbf{X}^{(n)}, n = 1, 2, \dots\}$ ที่มีการแจกแจงสู่เข้า การแจกแจง π

4.3 ผลการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0, 0.5, 0.75, 0.9$ จำนวนมิติ $k = 10, 50, 100$ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ กำหนดจำนวนรอบในการจำลองข้อมูล N สำหรับแต่ละ k สูงสุดไม่เกิน 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ แสดงผลของ $X_{(p)}^{(n)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ และ $n = 1, 2, \dots, N$ โดยใช้ เกณฑ์วัดในเชิงปริมาณ คือค่า $\hat{R}_{0.975}$ แสดงดังตารางที่ 1 ถึง 12 สำหรับหลักเกณฑ์การวัด คือวิธีที่มี ค่า $\hat{R}_{0.975}$ น้อยกว่า 1.1 สามารถแสดงได้ว่าการลู่เข้าแล้ว และวิธีที่มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เข้าใกล้ 1 มากกว่าจะมีประสิทธิภาพสูงกว่า และเกณฑ์วัดในเชิงคุณภาพ คือกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ แสดง ดังภาพที่ 1 ถึง 12 โดย MCMC จะลู่เข้า เมื่อส่วนปลายของกราฟมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงเรียบและ ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย และถ้ากราฟจากวิธีใดที่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายได้ใกล้เคียงมากกว่า ก็สามารถแสดงได้ว่าวิธีนั้นมีประสิทธิภาพสูงกว่า

ตารางที่ 1 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$

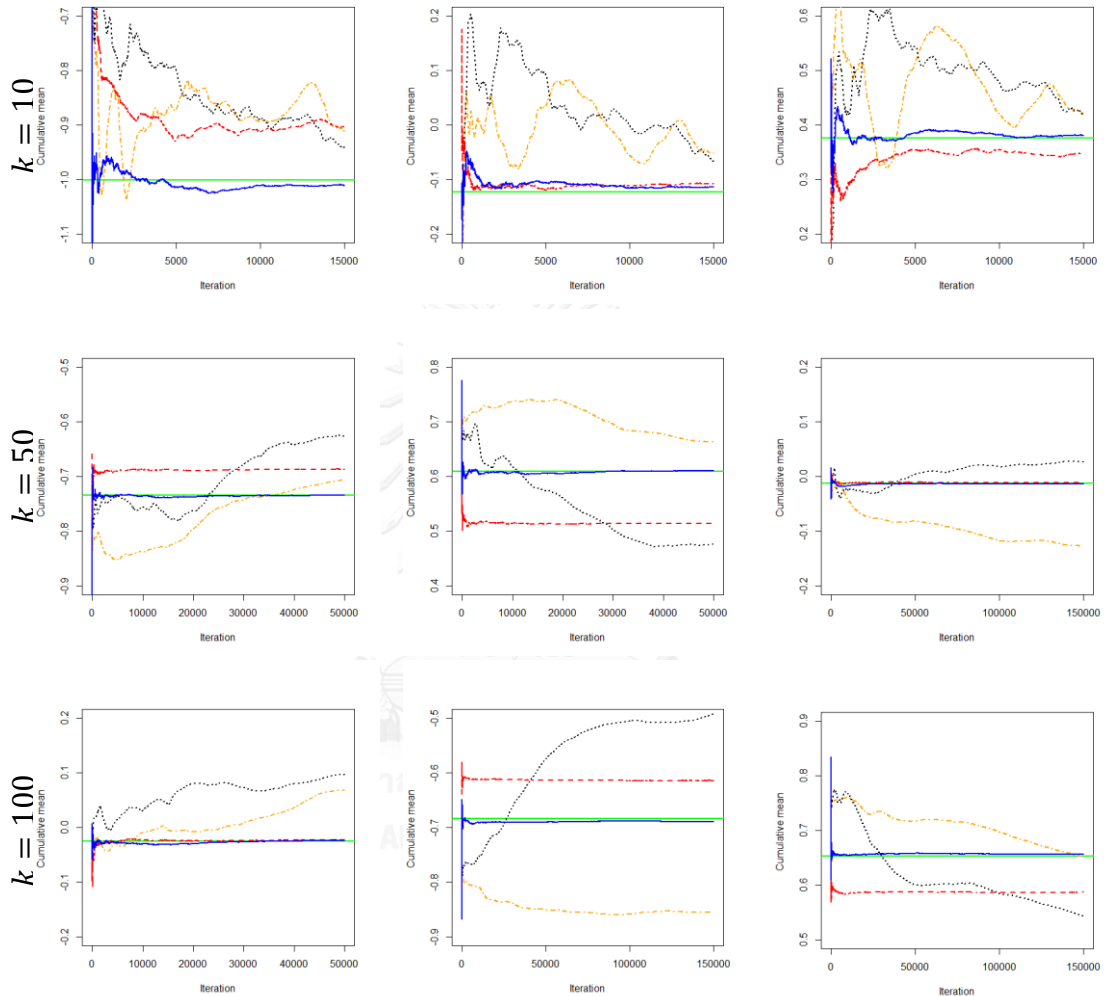
k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	15,000	25	1.0016	1.3948	1.1491	1.4449
		50	1.0029	1.0213	1.1242	1.3446
		75	1.0021	1.0706	1.2410	1.4670
50	50,000	25	1.0002	1.8634	1.5385	7.5126
		50	1.0003	1.0132	2.3008	7.9737
		75	1.0004	1.6533	1.2413	5.6815
100	150,000	25	1.0000	1.0002	4.0154	8.9826
		50	1.0000	1.0003	4.3608	5.1414
		75	1.0001	1.0002	5.5585	14.7227

จากตารางที่ 1 ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 15,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0016, 1.0029 และ 1.0021 ตามลำดับ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 และ 75 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0213 และ 1.0706 ตามลำดับ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่มีการลู่เข้าคือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 และ 75 จากวิธี PMHR-G และ PMHR-N ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 50,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0002, 1.0003 และ 1.0004 ตามลำดับ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0132 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่มีการลู่เข้าคือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 จากวิธี PMHR-G และ PMHR-N ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 150,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0000, 1.0000 และ 1.0001 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0002, 1.0003 และ 1.0002 ตามลำดับ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่มีการลู่เข้า ค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพในการลู่เข้าของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

กำหนดให้

 $p = 25$ $p = 50$ $p = 75$ 

ภาพที่ 1 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 1 ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 15,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ที่ 50 วิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่าวิธี PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ พบว่าการลู่เข้าอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ที่ 50 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ที่ 50 วิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 2 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการลู่เข้าอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.0292	1.0573	1.0361	1.2885
		50	1.0265	1.0838	1.0453	1.3172
		75	1.0338	1.0631	1.0390	1.3121
50	1,000,000	25	1.1319	1.6299	1.3392	6.8864
		50	1.1304	1.4781	1.4662	8.6851
		75	1.1012	1.6065	1.1326	7.9020
100	3,000,000	25	2.5894	4.7805	3.0769	4.4138
		50	2.5538	5.4719	3.4459	9.3561
		75	3.0111	6.2483	3.0565	6.1336

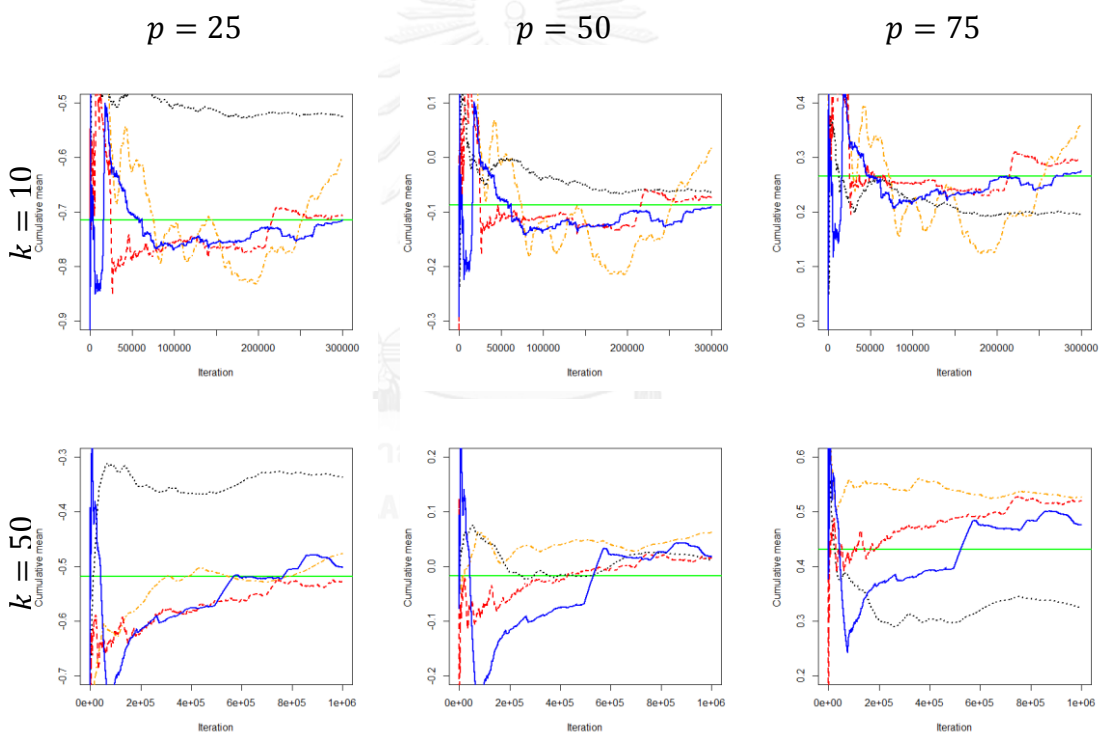
จากตารางที่ 2 ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการลู่เข้าอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0292, 1.0265 และ 1.0338 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0573, 1.0838 และ 1.0631 ตามลำดับ และวิธี Gibbs มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0316, 1.0453 และ 1.0390 ตามลำดับ ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ที่มี

การลู่เข้าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < Gibbs < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี Gibbs และวิธี Gibbs สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

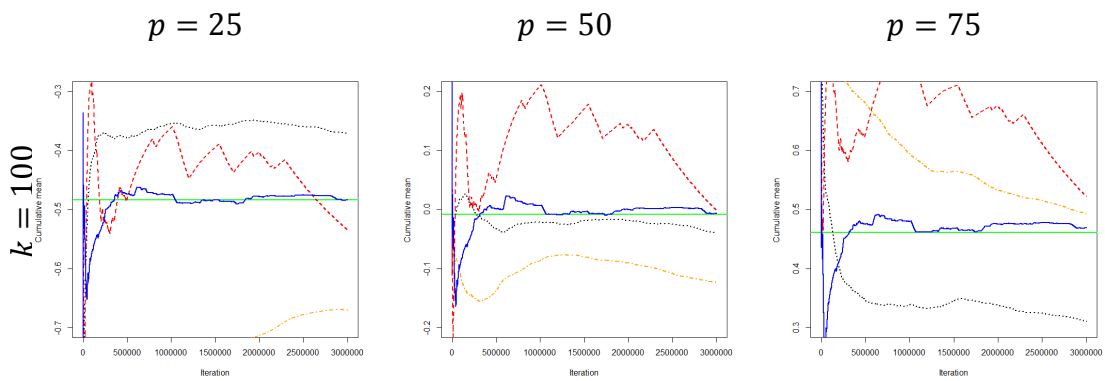
ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการลู่เข้าตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 2 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ



ภาพที่ 2 (ต่อ) กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 2 ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) เฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 และ 50 ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตเห็นว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 วิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ตารางที่ 3 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$

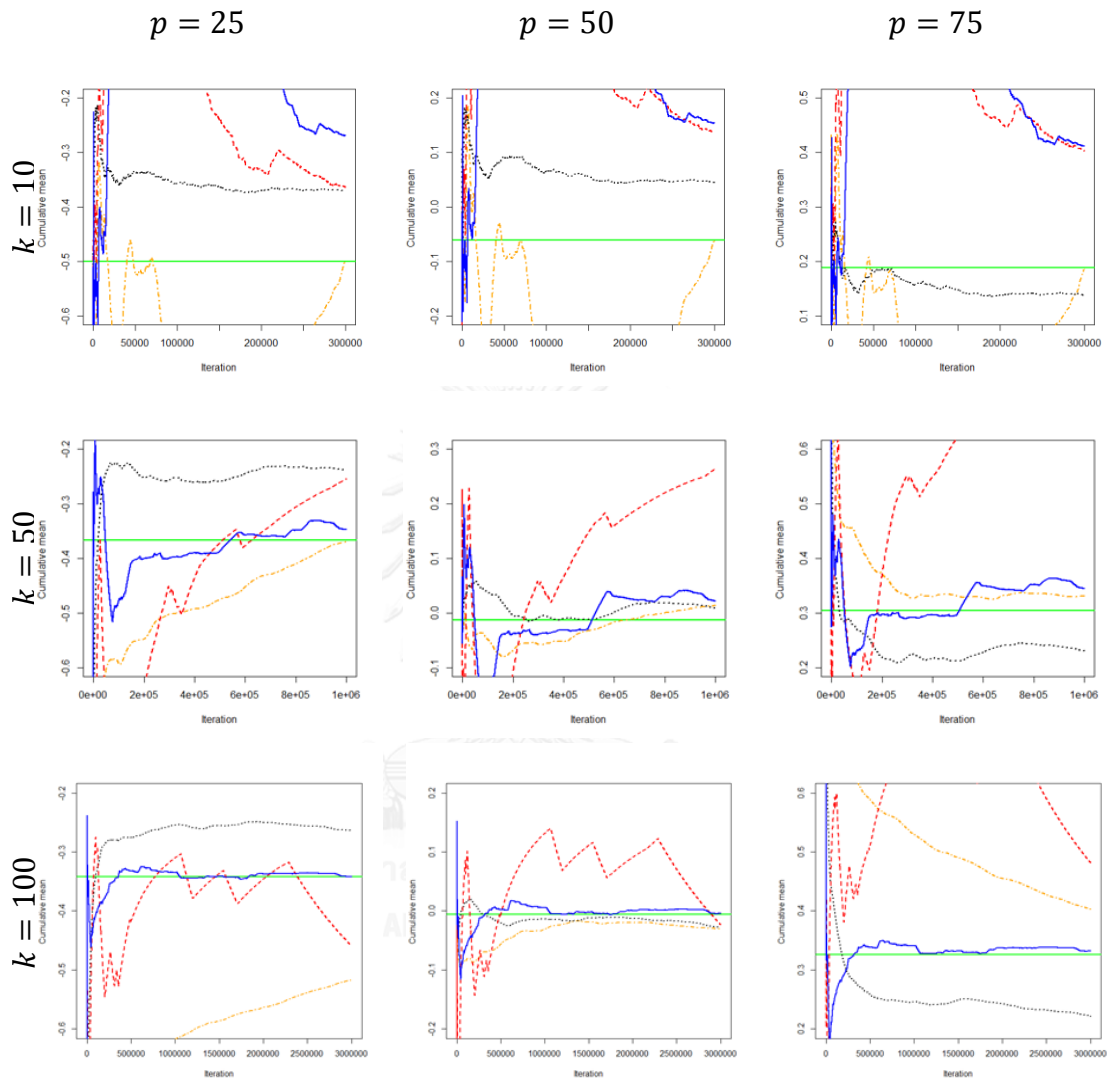
k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.3224	1.4368	1.0294	1.3769
		50	1.2648	1.4737	1.0483	1.3908
		75	1.3200	1.5035	1.0420	1.3946
50	1,000,000	25	1.1267	2.7676	1.3438	13.9942
		50	1.1259	5.0094	1.4730	15.9717
		75	1.1094	8.8927	1.1367	14.0072
100	3,000,000	25	2.5753	NA	NA	NA
		50	2.5437	NA	NA	NA
		75	3.0015	NA	NA	NA

จากตารางที่ 3 ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0294, 1.0483 และ 1.0420 ตามลำดับ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้



ภาพที่ 3 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 3 ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 10, 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับ k เท่ากับ 300,000 และ 1,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ไล่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ไล่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ตารางที่ 4 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$

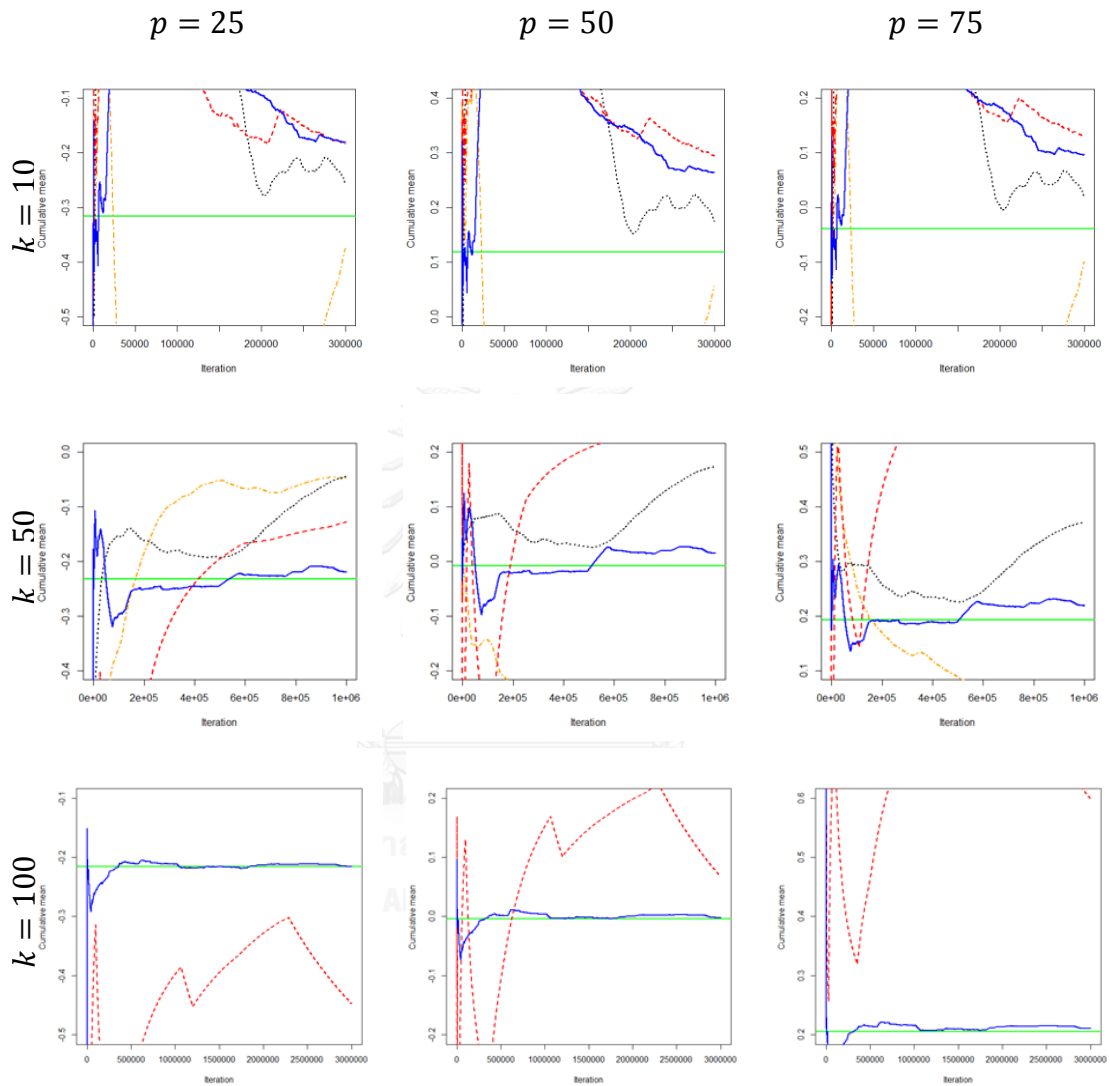
k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.3572	3.1679	NA	3.6422
		50	1.2840	3.2757	NA	3.6787
		75	1.3308	3.2083	NA	3.6759
50	1,000,000	25	1.1143	NA	NA	NA
		50	1.1113	NA	NA	NA
		75	1.1141	NA	NA	NA
100	3,000,000	25	2.5594	NA	NA	NA
		50	2.5333	NA	NA	NA
		75	2.9927	NA	NA	NA

จากตารางที่ 4 ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ไล่เข้าสู่ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ยังไม่ไล่เข้าสู่ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 4 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 4 ในกรณี $\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 10, 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 และ 1,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่ง

ในกรณี $\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ในขณะที่การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 5 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	15,000	25	1.0162	1.0449	1.0219	1.1198
		50	1.0023	1.0029	1.0552	1.1044
		75	1.0041	1.0155	1.1530	1.0702
50	50,000	25	1.0451	1.0809	1.3504	16.9665
		50	1.0010	1.0022	2.7754	11.7247
		75	1.0278	1.0668	1.7573	9.4732
100	150,000	25	1.0159	1.1213	3.5145	8.8415
		50	1.0005	1.0070	3.2313	9.4175
		75	1.0099	1.1631	4.3790	8.8413

จากตารางที่ 5 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 15,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0162, 1.0023 และ 1.0041 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0449, 1.0029 และ 1.0155 ตามลำดับ ในขณะที่การสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 และ 50 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0219 และ 1.0552 ตามลำดับ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ HR ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 75 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0702 และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 ค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < Gibbs < PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ณ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 ประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี Gibbs และวิธี Gibbs สูงกว่าวิธี PMHR-N สำหรับตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N < Gibbs ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ณ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี

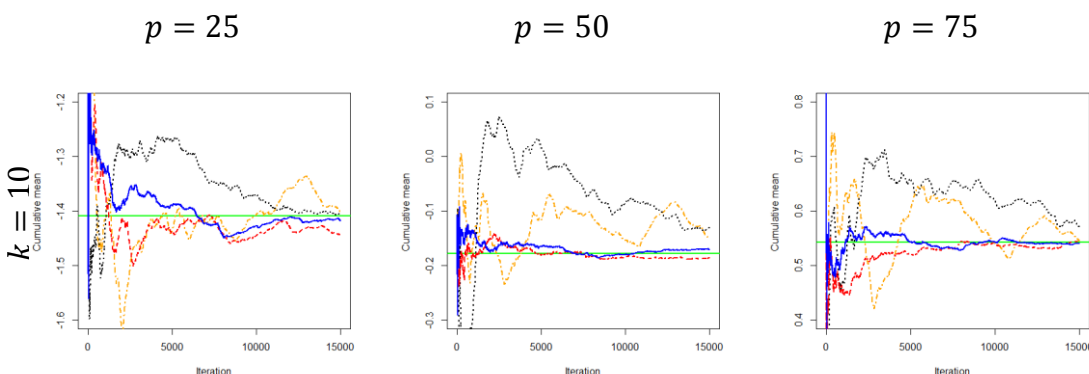
PMHR-N และวิธี PMHR-N สูงกว่าวิธี Gibbs และตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N < HR ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่า ณ ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 ประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N และวิธี PMHR-N สูงกว่าวิธี HR

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 50,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซนต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0451, 1.0010 และ 1.0278 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0809, 1.0022 และ 1.0668 ตามลำดับ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

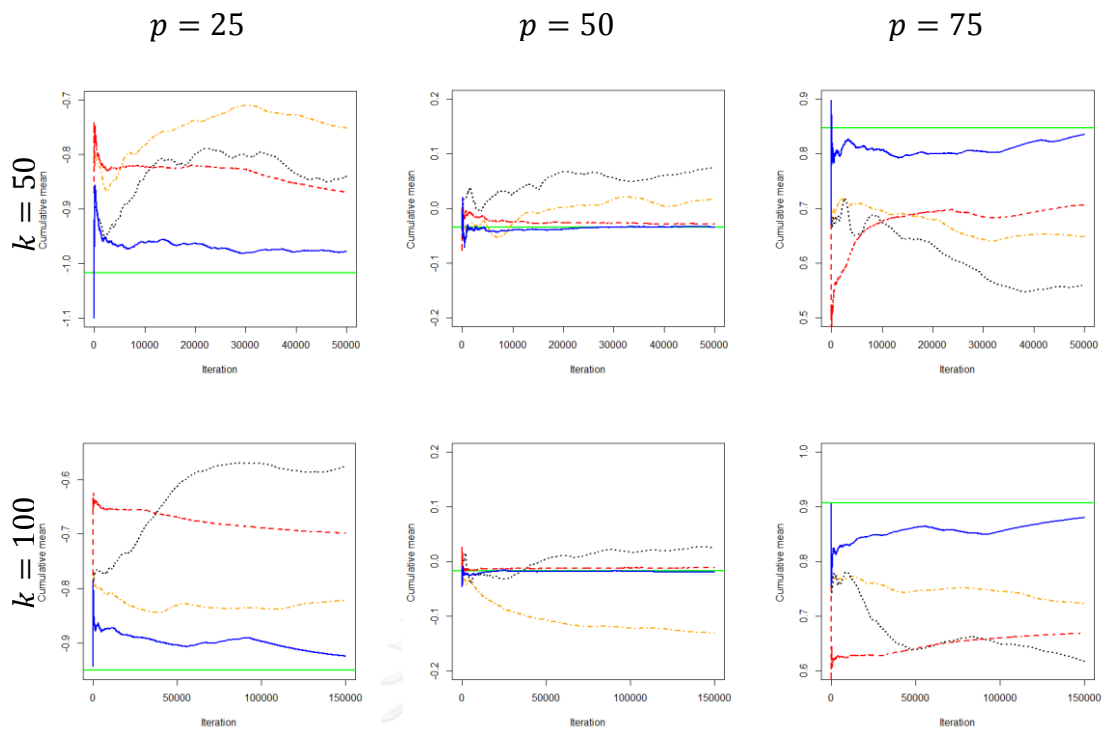
ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 150,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซนต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0159, 1.0005 และ 1.0099 ตามลำดับ ในขณะที่ PMHR-N พบว่าลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0070 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของวิธี PMHR-G < PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 5 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ



ภาพที่ 5 (ต่อ) กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 5 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 15,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 และ 75 สำหรับ Gibbs ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 วิธี PMHR-G และวิธี Gibbs ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน ส่วนตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 และ 75 วิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่าวิธี PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 วิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่าวิธี PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

ตารางที่ 6 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.0020	1.0069	1.0119	1.3054
		50	1.0030	1.0093	1.0241	1.3263
		75	1.0032	1.0092	1.0193	1.3449
50	1,000,000	25	1.0432	1.0901	1.1857	7.9730
		50	1.0227	1.0308	1.2545	11.1141
		75	1.0260	1.0321	1.1395	9.3002
100	3,000,000	25	3.7885	2.7407	2.0448	2.5618
		50	3.1217	2.8237	2.3255	2.2021
		75	3.2316	3.4081	2.2083	1.9213

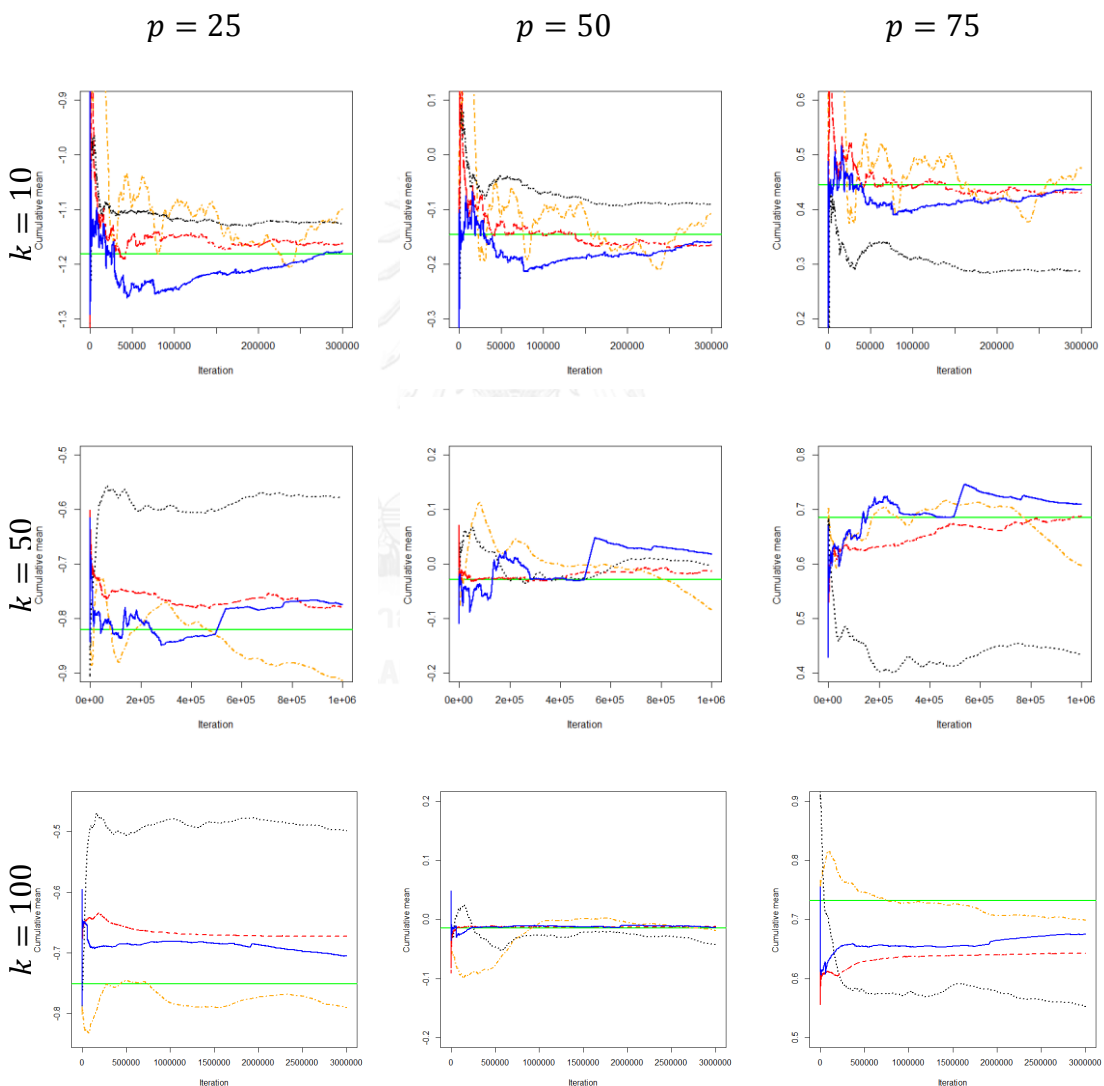
จากตารางที่ 6 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0020, 1.0030 และ 1.0032 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0069, 1.0093 และ 1.0092 ตามลำดับ และวิธี Gibbs มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0119, 1.0241 และ 1.0193 ตามลำดับ ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N < Gibbs ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N และวิธี PMHR-N สูงกว่าวิธี Gibbs ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0432, 1.0227 และ 1.0260 ตามลำดับ และวิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0901, 1.0308 และ 1.0321 ตามลำดับ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$, $\rho = 0.5$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่ออกทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 6 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$, $\rho = 0.5$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 6 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่การลู่เข้าวิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 และ 75 ส่วน PMHR-G, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ส่วน Gibbs ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 วิธี PMHR-G, PMHR-N และ HR ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G, PMHR-N และ HR มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 7 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.0322	1.0058	1.0098	1.1119
		50	1.0450	1.0057	1.0202	1.1160
		75	1.0445	1.0062	1.0161	1.1210
50	1,000,000	25	1.0781	1.2949	1.1513	6.9506
		50	1.0972	1.3246	1.2136	7.1672
		75	1.1146	1.5680	1.1137	7.7739
100	3,000,000	25	2.3632	4.8275	NA	3.6470
		50	2.2517	5.1566	NA	7.9296
		75	1.8994	5.7788	NA	6.2972

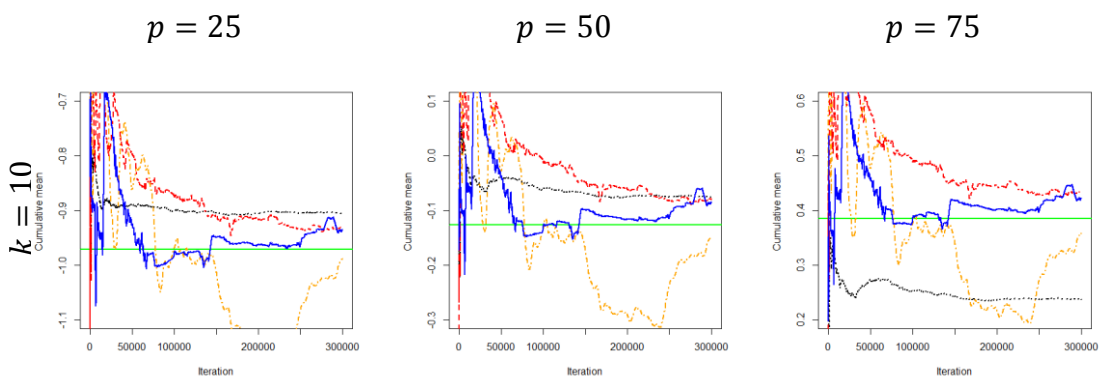
จากตารางที่ 7 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0322, 1.0450 และ 1.0445 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0058, 1.0057 และ 1.0062 ตามลำดับ และวิธี Gibbs มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0098, 1.0202 และ 1.0161 ตามลำดับ ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-N < Gibbs < PMHR-G ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-N สูงกว่าวิธี Gibbs และวิธี Gibbs สูงกว่า PMHR-G ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 และ 50 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0781 และ 1.0972 ตามลำดับ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

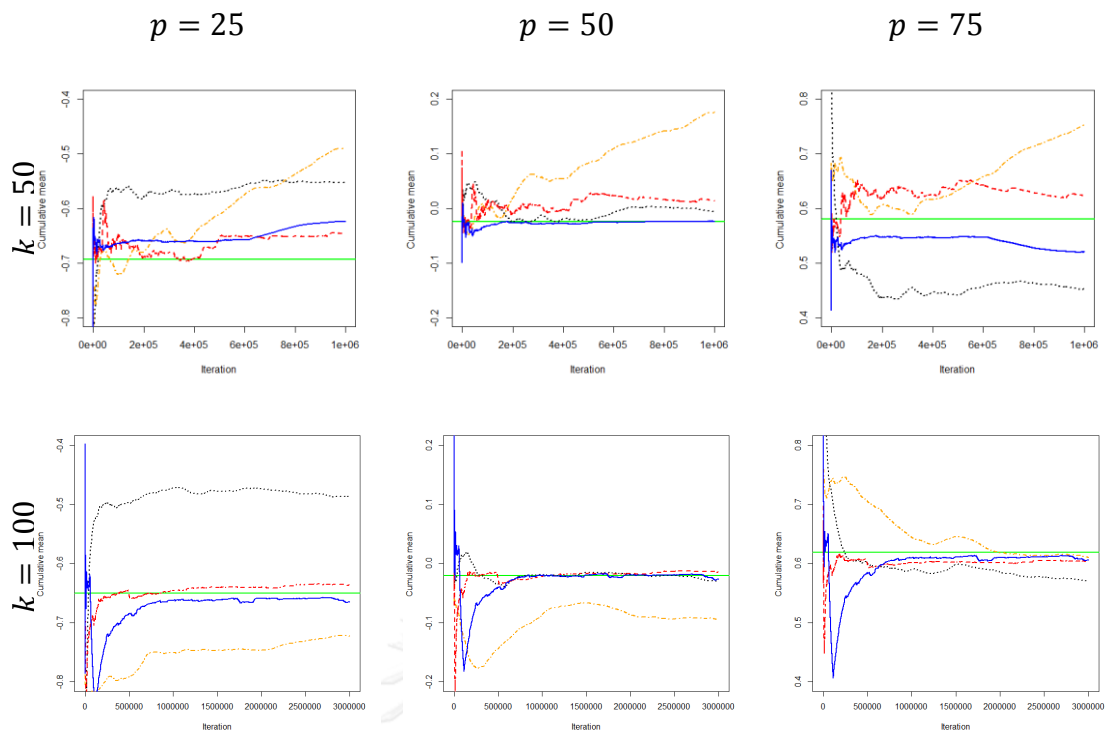
ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- . - HR



ภาพที่ 7 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.75, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ



ภาพที่ 7 (ต่อ) กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 7 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ส่วน PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ สำหรับ Gibbs และ HR ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 และ 75 ตามลำดับ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 วิธี PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน สำหรับตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 วิธีที่มีการลู่เข้าคือ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs ก็สามารถลู่เข้าได้ใกล้เคียงกันทั้งหมด ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G,

PMHR-N และ Gibbs มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน ส่วนตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 75 วิธี PMHR-G และ HR ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกันและลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายได้มากกว่าวิธี PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G และ HR มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกันและมีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี PMHR-N

ตารางที่ 8 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.0314	1.0576	1.0063	2.0173
		50	1.0299	1.0679	1.0135	2.0271
		75	1.0297	1.0809	1.0104	2.0360
50	1,000,000	25	3.1210	2.3225	NA	9.7861
		50	3.2710	1.9406	NA	8.9283
		75	3.3881	2.4528	NA	8.6733
100	3,000,000	25	NA	NA	NA	NA
		50	NA	NA	NA	NA
		75	NA	NA	NA	NA

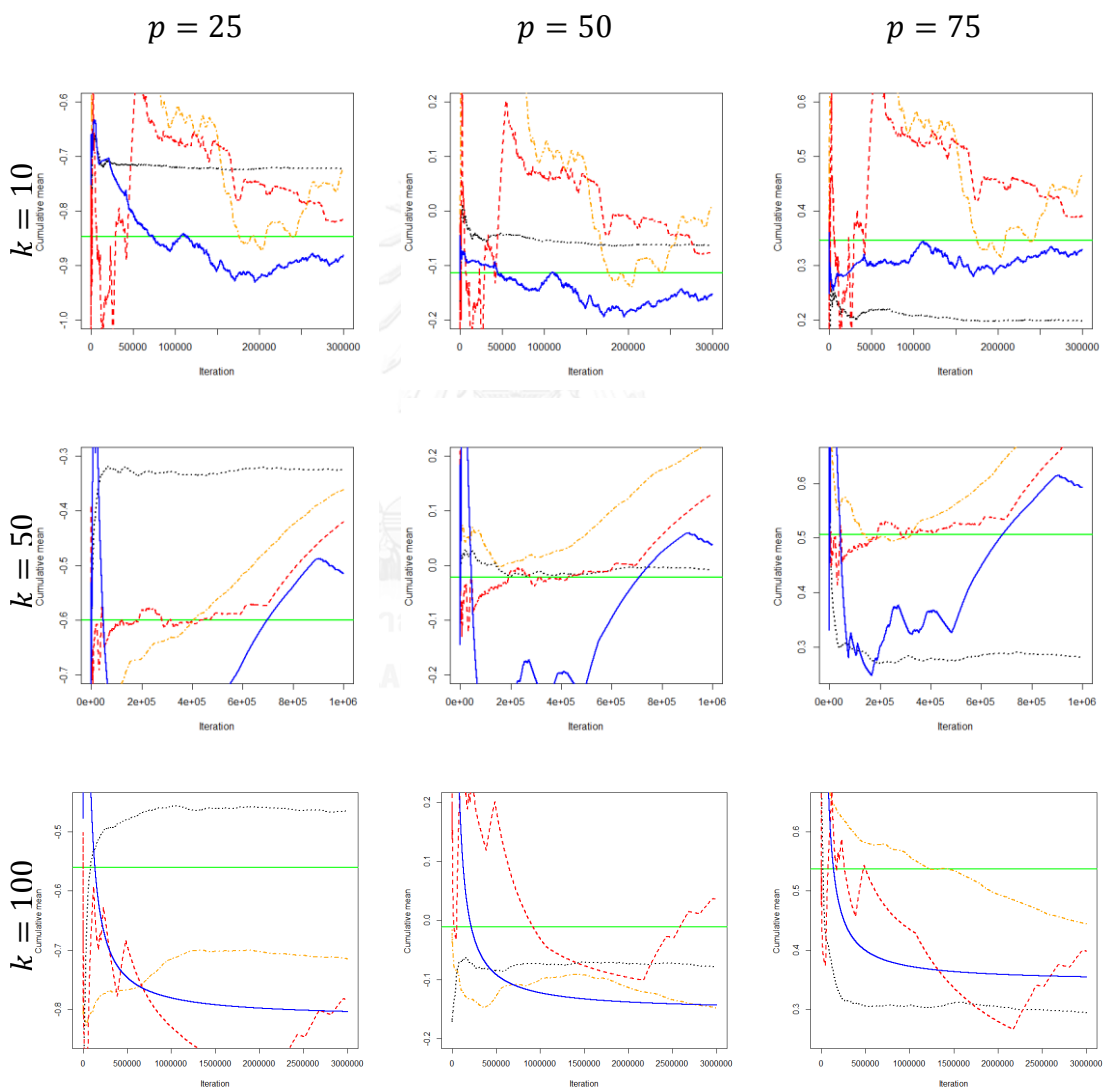
จากตารางที่ 8 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.9$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ เท่ากับ 1.0314, 1.0299 และ 1.0297 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0576, 1.0679 และ 1.0809 ตามลำดับ และวิธี Gibbs มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0063, 1.0135 และ 1.0104 ตามลำดับ ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี Gibbs < PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี Gibbs สูงกว่าวิธี PMHR-G และวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \rho = 0.9$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วน Gibbs ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$, $\rho = 0.9$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 8 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$, $\rho = 0.9$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 8 ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ส่วน PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ตารางที่ 9 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	15,000	25	1.0045	1.0541	1.1083	1.8069
		50	1.0088	1.0179	1.2526	1.7303
		75	1.0084	1.0124	1.3793	1.7544
50	50,000	25	1.0009	1.0399	2.5594	14.9245
		50	1.0006	1.0029	3.0783	11.3945
		75	1.0008	1.0146	2.0157	11.3733
100	150,000	25	1.0884	1.1785	4.6182	7.7732
		50	1.0010	1.0032	5.7855	9.9683
		75	1.0809	1.1561	7.0532	11.4349

จากตารางที่ 9 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 15,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0045, 1.0088 และ 1.0084 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0541, 1.0179 และ 1.0124 ตามลำดับ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้

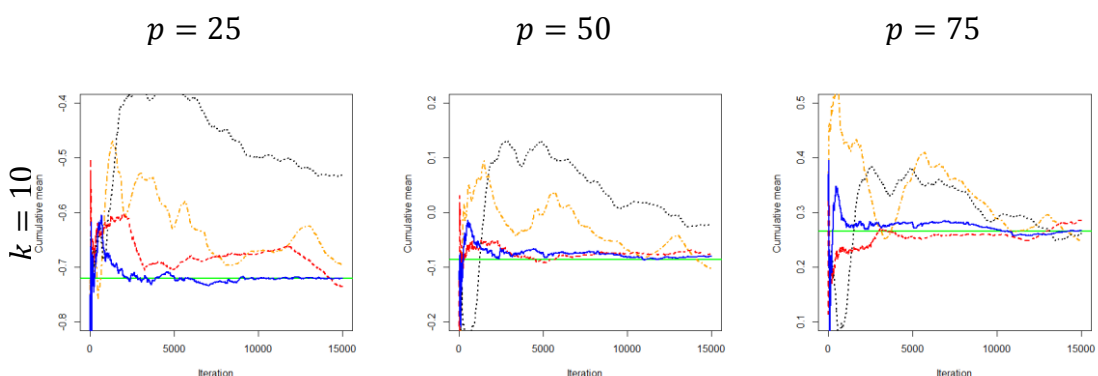
ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 50,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G และ PMHR-N ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เป็นดังนี้ วิธี PMHR-G มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ เท่ากับ 1.0009, 1.0006 และ 1.0008 ตามลำดับ วิธี PMHR-N มีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0399, 1.0029 และ 1.0146 ตามลำดับ ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

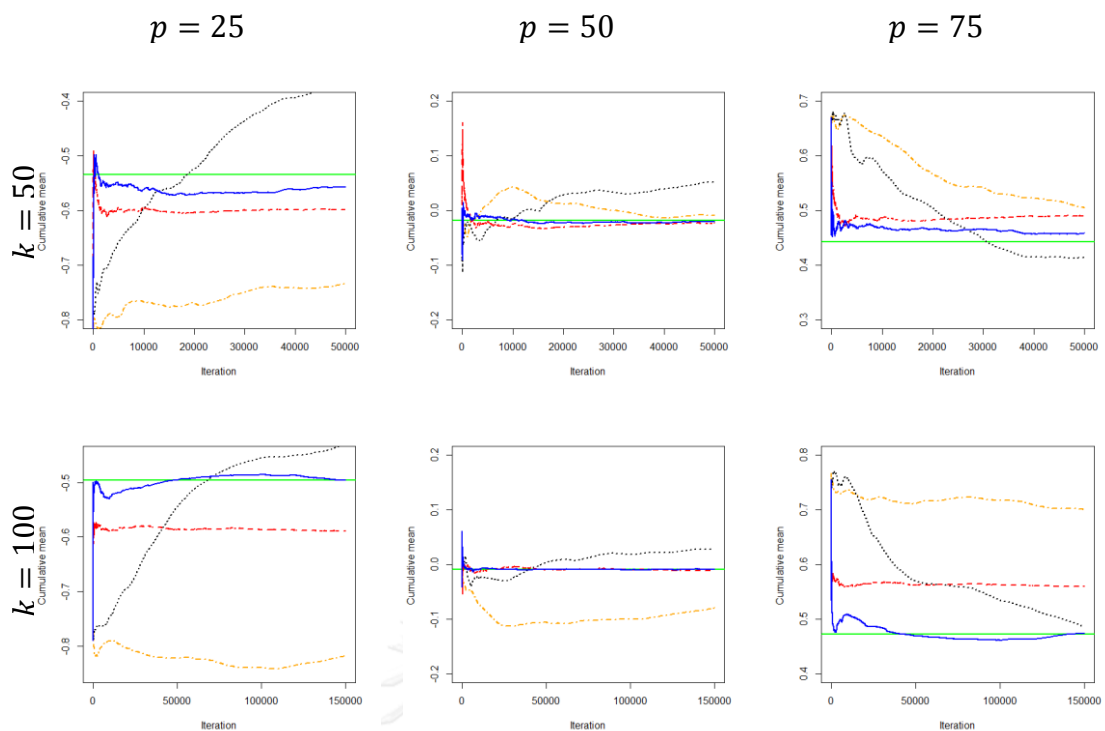
ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 150,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0884, 1.0010 และ 1.0809 ตามลำดับ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ เท่ากับ 1.0032 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ลู่เข้าคือตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 จากวิธี PMHR-G และ PMHR-N ซึ่งค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากวิธี PMHR-G < PMHR-N ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าประสิทธิภาพของวิธี PMHR-G สูงกว่าวิธี PMHR-N

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 9 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T, \rho = 0, k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ



ภาพที่ 9 (ต่อ) กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 15,000 50,000 และ 150,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 9 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) ทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ในขณะที่ PMHR-N และ Gibbs เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 และ 75 ตามลำดับ ส่วน HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 และ 75 วิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่าวิธี PMHR-N และ Gibbs ตามลำดับ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 วิธี PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี PMHR-N และตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 75 วิธี PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี Gibbs

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ HR ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ส่วน Gibbs ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ และจะสังเกตได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 วิธี PMHR-G ลู่เข้าใกล้ค่าคาดหวังเป้าหมายมากกว่า

PMHR-N และ HR ตามลำดับ ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี PMHR-N และ PMHR-N มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธี HR

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ในขณะที่ PMHR-N ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ส่วน Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ และจะสังเกตเห็นได้ว่าตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 วิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N ลู่เข้าได้ใกล้เคียงกัน ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าวิธี PMHR-G และวิธี PMHR-N มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

ตารางที่ 10 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.5$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.2619	1.5356	1.0635	1.7248
		50	1.2663	1.6281	1.0899	1.7654
		75	1.2780	1.6500	1.0824	1.7624
50	1,000,000	25	2.0150	NA	NA	NA
		50	2.3760	NA	NA	NA
		75	2.0663	NA	NA	NA
100	3,000,000	25	3.3167	NA	NA	NA
		50	3.3749	NA	NA	NA
		75	3.6927	NA	NA	NA

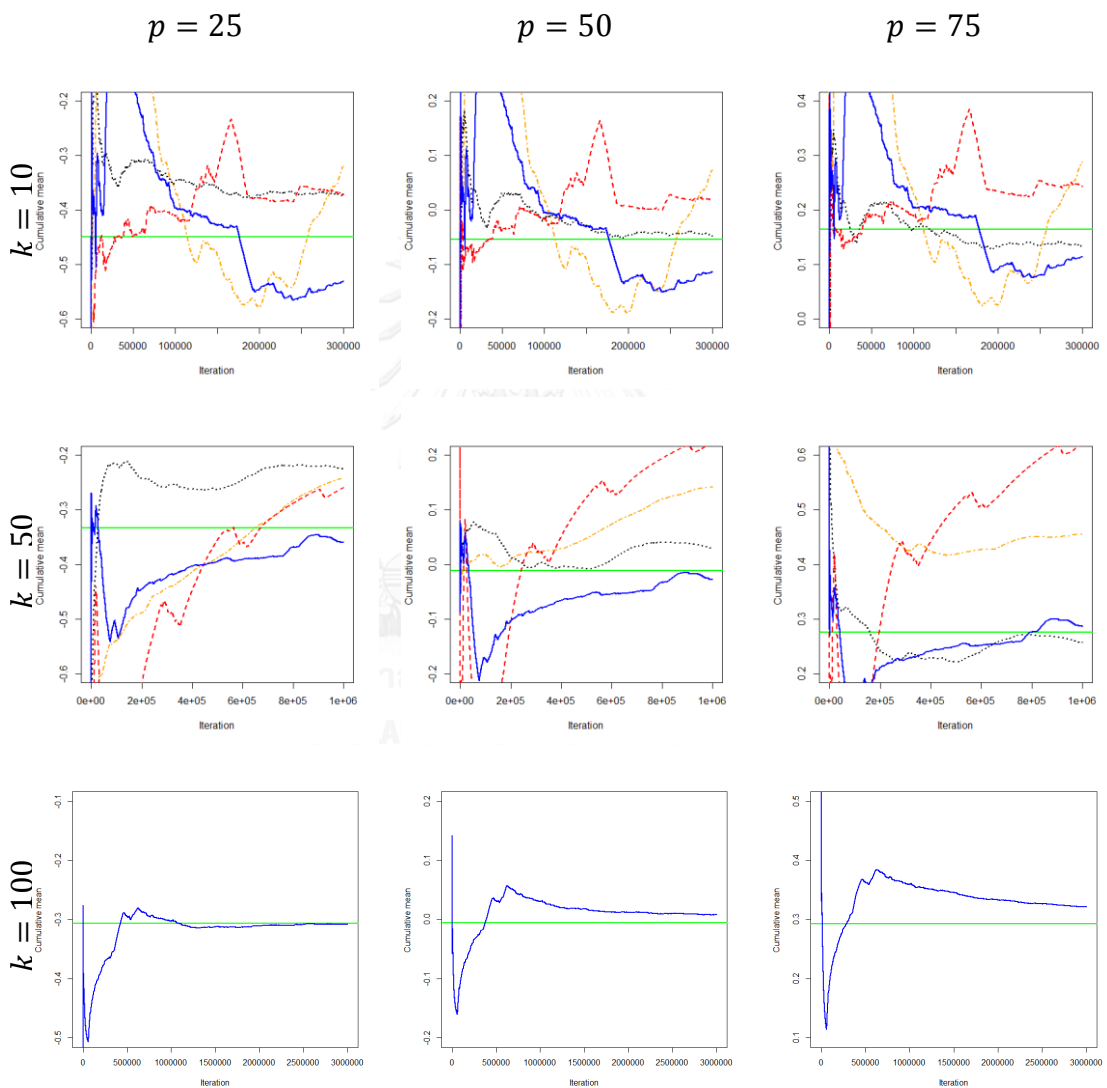
จากตารางที่ 10 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ซึ่งมีค่า $\hat{R}_{0.975}$ ณ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25, 50 และ 75 เท่ากับ 1.0635, 1.0899 และ 1.0824 ตามลำดับ ส่วน PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ

PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 10 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 10 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมาย (Target) เฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 50 ส่วน PMHR-G, PMHR-N และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 1,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.5$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายเฉพาะตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ที่ 25 และ 50 ส่วน PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 11 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.75$

k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	2.4608	3.0216	3.7986	3.8479
		50	2.6509	2.8536	3.8694	3.9666
		75	2.7575	2.7805	3.8714	3.9718
50	1,000,000	25	3.0207	NA	NA	NA
		50	2.7724	NA	NA	NA
		75	2.1460	NA	NA	NA
100	3,000,000	25	6.9036	NA	NA	NA
		50	8.7426	NA	NA	NA
		75	9.3246	NA	NA	NA

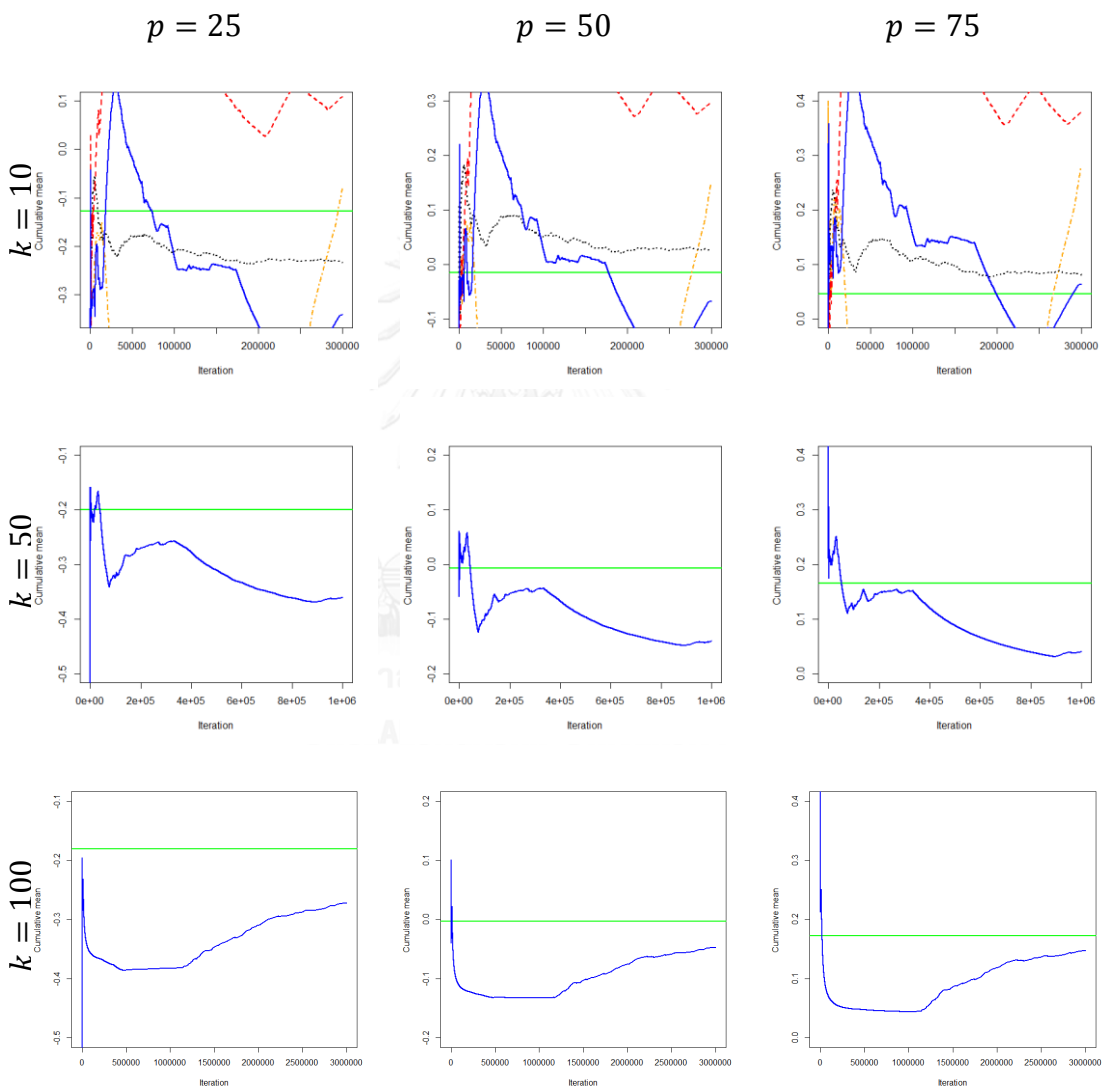
จากตารางที่ 11 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ

PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทม์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และHR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- . - HR



ภาพที่ 11 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และHR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 11 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.75$ และ $k = 50, 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 12 แสดงค่า $\hat{R}_{0.975}$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ และ $\rho = 0.9$

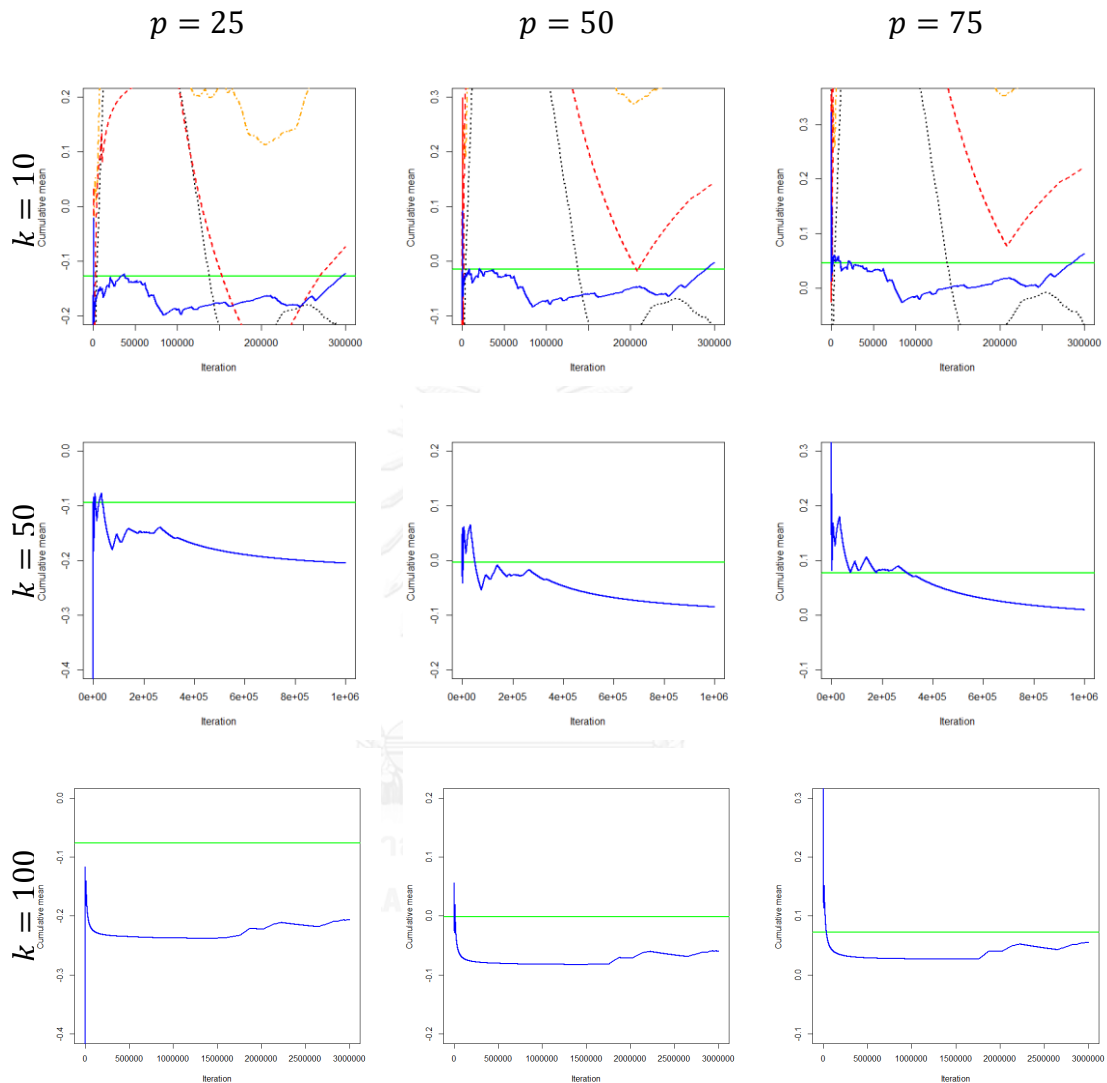
k	N	p	$\hat{R}_{0.975}$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
10	300,000	25	1.3577	NA	NA	NA
		50	1.3706	NA	NA	NA
		75	1.3634	NA	NA	NA
50	1,000,000	25	4.4792	NA	NA	NA
		50	4.6053	NA	NA	NA
		75	4.2466	NA	NA	NA
100	3,000,000	25	NA	NA	NA	NA
		50	NA	NA	NA	NA
		75	NA	NA	NA	NA

จากตารางที่ 12 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 10, 50$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 และ 1,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 3,000,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

กำหนดให้

- Target
- PMHR-G
- - - PMHR-N
- ... Gibbs
- - - HR



ภาพที่ 12 กราฟแสดงค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ที่ $p = 25, 50, 75$ จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$, $k = 10, 50, 100$ และ N สำหรับแต่ละ k เท่ากับ 300,000 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ

เมื่อพิจารณาภาพที่ 12 ในกรณี $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 10$ เมื่อทำการจำลองข้อมูล 300,000 รอบ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์

ในกรณี $\boldsymbol{\mu} = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$, $\rho = 0.9$ และ $k = 50,100$ เมื่อทำการจำลองข้อมูลสำหรับแต่ละ k เท่ากับ 1,000,000 และ 3,000,000 รอบตามลำดับ พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ยังไม่ลู่เข้าสู่ค่าคาดหวังเป้าหมายทุกตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ไม่สามารถวิเคราะห์ได้



บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ซึ่งพัฒนามาจากวิธี PMHR-N เพื่อให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น และทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR เมื่อค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0, 0.5, 0.75, 0.9$ จำนวนมิติ $k = 10, 50, 100$ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ โดยใช้เกณฑ์วัดในเชิงปริมาณ คือค่า $\hat{R}_{0.975}$ และเกณฑ์วัดในเชิงคุณภาพ คือกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ โดยที่ $p = 25, 50, 75$

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 การพัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้นด้วย PMHR-G

ในการพัฒนาขั้นตอนวิธี PMHR-N ทำโดยการเปลี่ยนแปลงการสุ่มจุดตัวเลือก \mathbf{x}^* บนเส้นตรง L จากการแจกแจงแบบปกติเป็นการแจกแจงแบบแกมมา และมี $\alpha(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^*)$ ความน่าจะเป็นในการยอมรับจุดตัวเลือก \mathbf{x}^* ณ จุดปัจจุบัน $\mathbf{x}^{(n)}$ เมื่อสุ่มจุดตัวเลือกด้วยการแจกแจงแบบแกมมา คือ $\min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\|\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}^{(n)}\|)\right\}, 1\right)$ เมื่อ $\mu_d = \frac{d'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{d'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}d}$ และ $\sigma_d^2 = \frac{1}{d'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}d}$

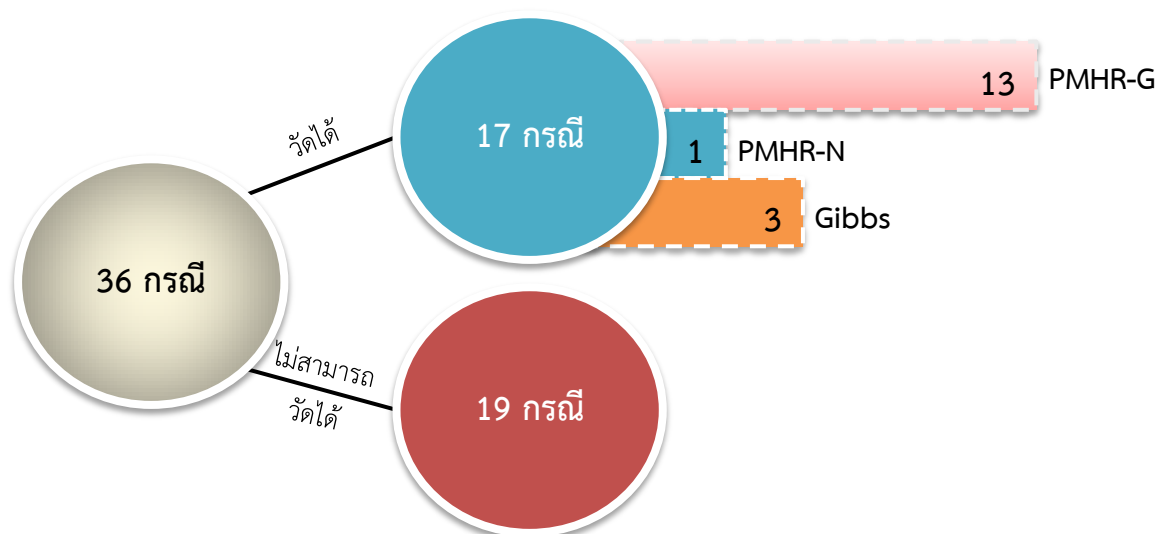
5.1.2 ผลการวิเคราะห์ค่า $\hat{R}_{0.975}$ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่อู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

เปอร์เซ็นต์การลู่อู่เข้า

สำหรับทุก $\rho, k, \boldsymbol{\mu}$ และ p พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่อู่เข้ามากที่สุด รองลงมาคือ PMHR-N, Gibbs และ HR ตามลำดับ โดยมีรายละเอียดดังตารางที่ 13 ถึง 16

ประสิทธิภาพ

เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 แบบ จากทั้งหมด 36 กรณี ซึ่งแบ่งกรณีตาม ρ, k และ $\boldsymbol{\mu}$ สามารถสรุปได้ดังภาพที่ 13



ภาพที่ 13 ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $R_{0,975}$ ทั้งหมด 36 กรณี

จากภาพที่ 13 พบว่าจากทั้งหมด 36 กรณี มีกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (มีอย่างน้อย 1 วิธีที่เกิดการลู่เข้า) 17 กรณี และที่เหลืออีก 19 กรณี ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (ไม่มีวิธีใดที่เกิดการลู่เข้าหรือไม่สามารถวิเคราะห์ได้) จากกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ 17 กรณี พบว่ามี 13 กรณี ที่การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด ส่วนการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N มีประสิทธิภาพสูงสุด มีเพียง 1 กรณี และอีก 3 กรณี พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีประสิทธิภาพสูงสุด โดยมีรายละเอียดของแต่ละกรณีดังตารางที่ 17

ตารางที่ 13 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $R_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0$

ρ	k	p	$\mu = [0,0, \dots, 0]^T_{1 \times k}$					$\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$					$\mu = [1, \dots, -1]^T_{1 \times k}$				
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	
0	10	25	*	-	-	-	-	*	✓	✓	-	-	*	✓	-	-	
		50	*	✓	-	-	-	*	✓	✓	-	-	*	✓	-	-	
		75	*	✓	-	-	-	*	✓	-	✓	-	*	✓	-	-	
	50	25	*	-	-	-	-	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	
		50	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	
		75	*	-	-	-	-	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	
	100	25	*	✓	-	-	-	*	-	-	-	-	*	-	-	-	
		50	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	-	*	✓	-	-	
		75	*	✓	-	-	-	*	-	-	-	-	*	-	-	-	
รวม (*)			9 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	9 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	9 (100%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)		
รวม (ผู้เข้า)			9 (100%)	6 (66.7%)	0 (0%)	0 (0%)	9 (100%)	7 (77.8%)	2 (22.2%)	1 (11.1%)	9 (100%)	7 (77.8%)	0 (0%)	0 (0%)			
			15 (41.7%)			19 (52.8%)			16 (44.4%)								
			50 (46.3%)														

* เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ และเข้าใกล้ 1 มากสุด หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ยังไม่ใส่เข้า

✓ เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่เกิดการสุ่มซ้ำแล้ว

ตารางที่ 14 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.5$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$					$\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$					$\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$					
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
0.5	10	25	*	✓	✓	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	*	-	-
		50	*	✓	✓	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	*	-	-
		75	*	✓	✓	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	*	-	-
	50	25	-	-	-	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	NA	NA	NA
		50	-	-	-	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	NA	NA	NA
		75	-	-	-	-	*	✓	-	✓	✓	-	-	-	-	NA	NA	NA
	100	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA	NA
		50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA	NA
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA	NA
รวม (*)			3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (66.7%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (สุ่มเข้า)			3 (33.3%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	6 (66.7%)	6 (66.7%)	6 (66.7%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	
			9 (25%)					15 (41.67%)					3 (8.3%)					
			27 (25%)															

* เป็นวิธีการที่มีค่า $\hat{R}_{0.975} < 1.1$ และเข้าใกล้ 1 มากสุด หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ยังไม่สุ่มเข้า

✓ เป็นวิธีการที่มีค่า $\hat{R}_{0.975} < 1.1$ หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่เกิดการสุ่มเข้าแล้ว NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 15 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $R_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.75$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]^T_{1 \times k}$				$\mu = [-1, \dots, 1]^T_{1 \times k}$				$\mu = [1, \dots, -1]^T_{1 \times k}$						
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR			
0.75	10	25	-	-	*	-	✓	*	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
		50	-	-	*	-	✓	*	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
		75	-	-	*	-	✓	*	-	✓	-	-	-	-	-	-	-
	50	25	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-	-	-	NA	NA
		50	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-	-	-	NA	NA
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
	100	25	-	NA	NA	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	-	NA	NA	NA
		50	-	NA	NA	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	-	NA	NA	NA
		75	-	NA	NA	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	-	NA	NA	NA
รวม (*)		0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	0 (0%)	2 (22.2%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (ผู้เข้า)		0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	0 (0%)	5 (55.6%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
		3 (8.3%)				11 (30.6%)				0 (0%)							
		14 (13%)															

* เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ และเข้าใกล้ 1 มากสุด หรือกล่าวได้ว่า เป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ไม่ใส่เข้า

✓ เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่เกิดการใส่เข้าแล้ว NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 16 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากค่า $R_{0.975}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.9$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$				$\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$				$\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$						
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR			
0.9	10	25	-	-	NA	-	✓	*	-	✓	*	-	-	NA	NA	NA	NA
		50	-	-	NA	-	✓	*	-	✓	*	-	-	NA	NA	NA	NA
		75	-	-	NA	-	✓	*	-	✓	*	-	-	NA	NA	NA	NA
	50	25	-	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	NA	-	-	NA	NA	NA
		50	-	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	NA	-	-	NA	NA	NA
		75	-	NA	NA	NA	-	-	NA	-	-	NA	-	-	NA	NA	NA
	100	25	-	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
		50	-	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
		75	-	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
รวม (*)		0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (ลู่ออก)		0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
		0 (0%)				9 (25%)				0 (0%)							
		0 (0%)				9 (8.3%)				0 (0%)							

* เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ และเข้าใกล้ 1 มากสุด หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ยังไม่ลู่ออก
 ✓ เป็นวิธีการที่มีค่า $R_{0.975} < 1.1$ หรือกล่าวได้ว่าเป็นวิธีการที่เกิดการลู่ออกแล้ว NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 17 ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ ทั้งหมด 36 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ

กรณี	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*	กรณี	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*
1	0	10	μ_1	PMHR-G	19	0.75	10	μ_1	Gibbs
2			μ_2	PMHR-G	20			μ_2	PMHR-N
3			μ_3	PMHR-G	21			μ_3	X
4		50	μ_1	PMHR-G	22		μ_1	X	
5			μ_2	PMHR-G	23		μ_2	PMHR-G	
6			μ_3	PMHR-G	24		μ_3	X	
7		100	μ_1	PMHR-G	25		μ_1	X	
8			μ_2	PMHR-G	26		μ_2	X	
9			μ_3	PMHR-G	27		μ_3	X	
10	0.5	10	μ_1	PMHR-G	28	0.9	10	μ_1	X
11			μ_2	PMHR-G	29			μ_2	Gibbs
12			μ_3	Gibbs	30			μ_3	X
13		50	μ_1	X	31		μ_1	X	
14			μ_2	PMHR-G	32		μ_2	X	
15			μ_3	X	33		μ_3	X	
16		100	μ_1	X	34		μ_1	X	
17			μ_2	X	35		μ_2	X	
18			μ_3	X	36		μ_3	X	

$$\mu_1 = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \mu_2 = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \mu_3 = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$$

X ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้

* วิธีการสุ่มตัวอย่าง หมายถึง วิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี ยกตัวอย่าง เช่น กรณีที่ 2 วิธีการสุ่มตัวอย่าง PMHR-G หมายถึง กรณี $\rho = 0, k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด

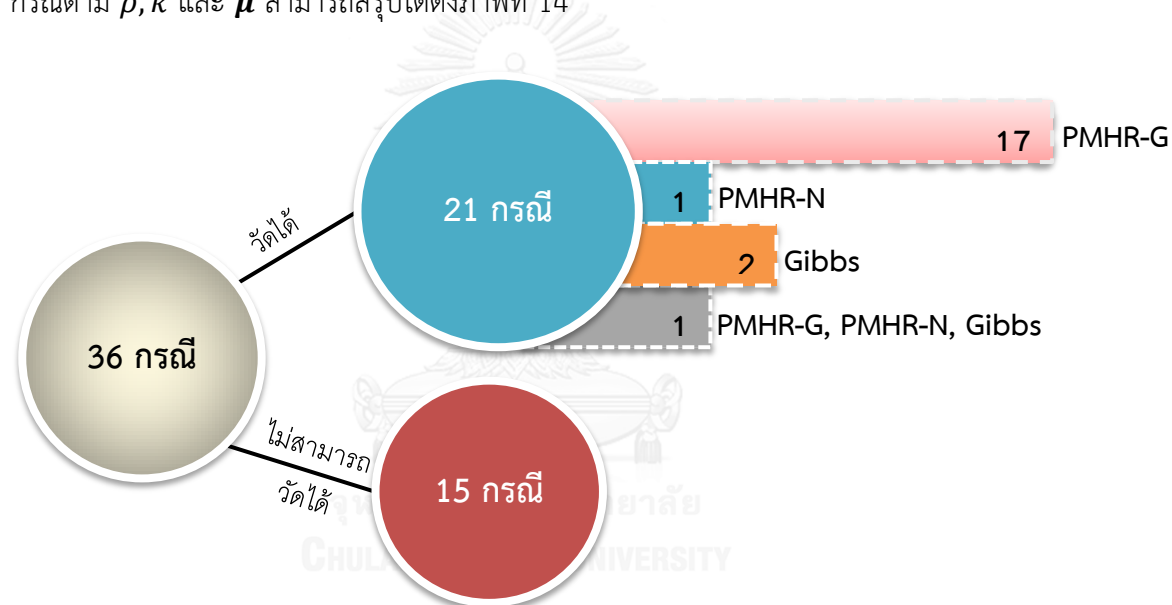
5.1.3 ผลการวิเคราะห์กราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลู่เข้าของ MCMC จากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR

เปอร์เซ็นต์การลู่เข้า

สำหรับทุก ρ, k, μ และ p พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่เข้ามากที่สุด รองลงมาคือ PMHR-N, Gibbs และ HR ตามลำดับ โดยมีรายละเอียดดังตารางที่ 18 ถึง 21

ประสิทธิภาพ

เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 แบบ จากทั้งหมด 36 กรณี ซึ่งแบ่งกรณีตาม ρ, k และ μ สามารถสรุปได้ดังภาพที่ 14



ภาพที่ 14 ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากค่า $\bar{X}_{(p)}$ ทั้งหมด 36 กรณี

จากภาพที่ 14 พบว่าจากทั้งหมด 36 กรณี มีกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (มีอย่างน้อย 1 วิธีที่เกิดการลู่เข้า) 21 กรณี และที่เหลืออีก 15 กรณี ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (ไม่มีวิธีใดที่เกิดการลู่เข้าหรือไม่สามารถวิเคราะห์ได้) จากกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ 21 กรณี พบว่ามี 17 กรณี ที่การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N มีประสิทธิภาพสูงสุด มี 1 กรณี การสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีประสิทธิภาพสูงสุด มี 2 กรณี และอีก 1 กรณี พบว่าการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน โดยมีรายละเอียดของแต่ละกรณีดังตารางที่ 22

ตารางที่ 18 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากราคาค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}(p)$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$				$\mu = [-1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$				$\mu = [1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$			
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR
0	10	25	*	-	-	-	*	-	-	*	-	-	-	-
		50	*	✓	-	-	*	✓	-	*	✓	-	-	-
		75	*	-	-	-	*	✓	-	*	-	✓	-	-
0	50	25	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		50	*	*	-	-	*	✓	-	*	✓	-	-	✓
		75	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0	100	25	*	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-
		50	*	*	-	-	*	✓	-	*	*	-	-	-
		75	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
รวม (*)	รวม (สุ่มเข้า)	9 (100%)	2 (22.2%)	0 (0%)	0 (0%)	5 (55.6%)	0 (0%)	1 (11.1%)	0 (0%)	7 (77.8%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	
		9 (100%)	3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	5 (55.6%)	4 (44.4%)	1 (11.1%)	0 (0%)	7 (77.8%)	3 (33.3%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	
			12 (33.3%)				10 (27.8%)				12 (33.3%)			
			34 (31.5%)											

* เป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ยังไม่สุ่มเข้า

✓ เป็นวิธีการที่เกิดการสุ่มเข้าแล้ว

ตารางที่ 19 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากราคาเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}^{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.5$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$				$\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$				$\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$						
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR			
0.5	10	25	*		-	-	*		-	✓		-	-	-	-	-	-
		50	*		-	-	*		-	✓		-	-	-	*		-
		75	-		-	-	*		-	✓		-	-	-	-		-
	50	25	-		-	-	-		-	-		-	-	-	-		-
		50	-		-	-	-		-	*		-	-	-	-		-
		75	-		-	-	-		-	*		-	-	-	-		-
	100	25	*		-	-	-		-	-		-	-	-	*		NA
		50	*		-	-	-		-	*		-	-	*		NA	NA
		75	*		-	-	-		-	-		-	-	-	NA		NA
รวม (*)		5 (55.6%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (44.4%)	3 (33.3%)	0 (0%)	1 (11.1%)	2 (22.2%)	0 (0%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (สุ่มเข้า)		5 (55.6%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (44.4%)	6 (66.7%)	0 (0%)	1 (11.1%)	2 (22.2%)	0 (0%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	
		6 (16.7%)				11 (30.6%)				3 (8.3%)							
		20 (18.5%)															

* เป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ยังไม่สุ่มเข้า

✓ เป็นวิธีการที่เกิดการสุ่มเข้าแล้ว NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 20 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}(p)$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.75$

ρ	k	p	$\mu = [0,0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$				$\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$				$\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$							
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR				
0.75	10	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
		50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	50	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA
		50	-	-	-	-	*	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA
	100	25	*	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-	-	-	-	NA
		50	*	-	-	-	*	-	*	-	*	-	*	-	-	-	-	NA
		75	*	-	-	-	*	-	✓	-	*	-	*	-	-	-	-	NA
รวม (*)		3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (44.4%)	2 (22.2%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
		3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	4 (44.4%)	3 (33.3%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (ดูเข้า)			3 (8.3%)				9 (25%)										0 (0%)	
							12 (11.1%)											

* เป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี

- เป็นวิธีการที่ยังไม่ดูเข้า

✓ เป็นวิธีการที่เกิดการดูเข้าแล้ว

NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 21 ผลการสรุปประสิทธิภาพจากราคาเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ของแต่ละวิธีการสุ่มตัวอย่างจำแนกตาม μ, k, p เมื่อ $\rho = 0.9$

ρ	k	p	$\mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$				$\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$				$\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$					
			PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR	PMHR-G	PMHR-N	Gibbs	HR		
0.9	10	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		50	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	50	25	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
		50	-	-	-	-	-	-	*	-	-	-	-	-	NA	NA
		75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
	100	25	*	-	NA	NA	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
		50	*	-	NA	NA	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
		75	*	-	NA	NA	-	-	-	-	-	-	-	-	NA	NA
รวม (*)		3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
		3 (33.3%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (11.1%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	
รวม (ดูเข้า)			3 (8.3%)					1 (2.8%)						0 (0%)		
								4 (3.7%)								

* เป็นวิธีการที่ให้ประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี - เป็นวิธีการที่ไม่ได้เข้า

✓ เป็นวิธีการที่เกิดการดูเข้าแล้ว NA ไม่สามารถวิเคราะห์ได้

ตารางที่ 22 ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ ทั้งหมด 36 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ

กรณี	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*	กรณี	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*
1	0	10	μ_1	PMHR-G	19	0.75	10	μ_1	X
2			μ_2	PMHR-G	20			μ_2	X
3			μ_3	PMHR-G	21			μ_3	X
4		50	μ_1	PMHR-G	22		50	μ_1	X
5			μ_2	PMHR-G	23			μ_2	PMHR-G
6			μ_3	PMHR-G	24			μ_3	X
7		100	μ_1	PMHR-G	25		100	μ_1	PMHR-G
8			μ_2	PMHR-G	26			μ_2	PMHR-G
9			μ_3	PMHR-G	27			μ_3	X
10	0.5	10	μ_1	PMHR-G	28	0.9	10	μ_1	X
11			μ_2	PMHR-G	29			μ_2	X
12			μ_3	Gibbs	30			μ_3	X
13		50	μ_1	X	31		50	μ_1	X
14			μ_2	PMHR-N	32			μ_2	Gibbs
15			μ_3	X	33			μ_3	X
16		100	μ_1	PMHR-G	34		100	μ_1	PMHR-G
17			μ_2	***	35			μ_2	X
18			μ_3	PMHR-G	36			μ_3	X

$$\mu_1 = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \mu_2 = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \mu_3 = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$$

X ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้

*** วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N และ Gibbs มีประสิทธิภาพเท่ากัน

* วิธีการสุ่มตัวอย่าง หมายถึง วิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี ยกตัวอย่าง เช่น กรณีที่ 2 วิธีการสุ่มตัวอย่าง PMHR-G หมายถึง กรณี $\rho = 0, k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด

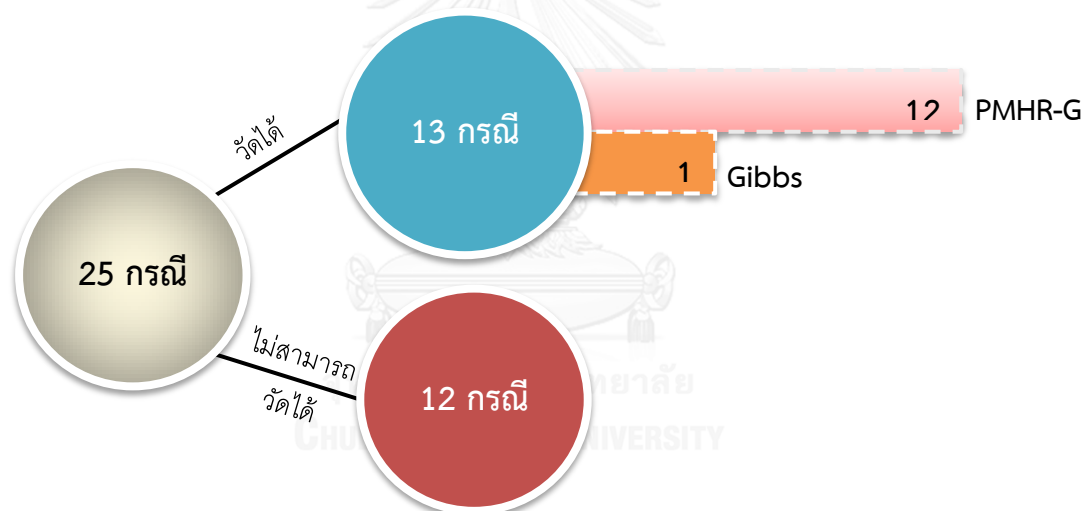
5.1.4 ผลสรุปการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการสุมตัวอย่างแบบ PMHR-G, PMHR-N, Gibbs และ HR จากเกณฑ์วัดประสิทธิภาพทั้ง 2 เกณฑ์

เปอร์เซ็นต์การลู่เข้า

เปอร์เซ็นต์การลู่เข้าของวิธีการสุมตัวอย่างทั้ง 4 แบบ ทั้ง 2 เกณฑ์ให้ผลสรุปในการทำงานเดียวกัน คือการสุมตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่เข้ามากที่สุด รองลงมาคือ PMHR-N, Gibbs และ HR ตามลำดับ

ประสิทธิภาพ

เมื่อพิจารณาประสิทธิภาพของวิธีการสุมตัวอย่างทั้ง 4 แบบ ทั้งหมด 36 กรณี พบว่าทั้ง 2 เกณฑ์ให้ผลสรุปตรงกัน 25 กรณี (69.44%) สามารถสรุปได้ดังภาพที่ 15



ภาพที่ 15 ผลการสรุปวิธีการสุมตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากเกณฑ์วัดประสิทธิภาพ ทั้ง 2 เกณฑ์ ที่ให้ผลสรุปตรงกันทั้งหมด 25 กรณี

จากภาพที่ 15 พบว่าจากทั้งหมด 25 กรณีที่ทั้ง 2 เกณฑ์ให้ผลสรุปตรงกัน ซึ่งแบ่งเป็นกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (มีอย่างน้อย 1 วิธีที่เกิดการลู่เข้า) 13 กรณี และไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ (ไม่มีวิธีใดที่เกิดการลู่เข้าหรือไม่สามารถวิเคราะห์ได้) 12 กรณี สำหรับกรณีที่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ 13 กรณี พบว่าการสุมตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงที่สุด 12 กรณี

(92.31%) และการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs มีประสิทธิภาพสูงสุดที่ 1 กรณี (7.69%) โดยมีรายละเอียดแต่ละกรณีดังตารางที่ 23

ตารางที่ 23 ผลการสรุปวิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดจากเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพทั้ง 2 เกณฑ์ที่ให้ผลตรงกัน รวมทั้งหมด 25 กรณี จำแนกตาม ρ, k และ μ

กรณีที่	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*	กรณีที่	ρ	k	μ	วิธีการสุ่มตัวอย่าง*	
1	0	10	μ_1	PMHR-G	15	0.75	10	μ_3	X	
2			μ_2	PMHR-G	16			μ_1	X	
3			μ_3	PMHR-G	17			μ_2	PMHR-G	
4		50	μ_1	PMHR-G	18		μ_3	X		
5			μ_2	PMHR-G	19		100	μ_3	X	
6			μ_3	PMHR-G	20			μ_1	X	
7		100	μ_1	PMHR-G	21	μ_3		X		
8			μ_2	PMHR-G	22	0.9	μ_1	X		
9			μ_3	PMHR-G	23		μ_3	X		
10		0.5	10	μ_1	PMHR-G		24	100	μ_2	X
11				μ_2	PMHR-G	25	μ_3		X	
12				μ_3	Gibbs	PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด รวม 12 กรณี				
13		0.5	50	μ_1	X	Gibbs มีประสิทธิภาพสูงสุด รวม 1 กรณี				
14				μ_3	X	ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้ รวม 12 กรณี				

$$\mu_1 = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T, \mu_2 = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T, \mu_3 = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$$

X ไม่สามารถวัดประสิทธิภาพได้

* วิธีการสุ่มตัวอย่าง หมายถึง วิธีการสุ่มตัวอย่างที่มีประสิทธิภาพสูงสุดในแต่ละกรณี ยกตัวอย่าง เช่น กรณีที่ 2 วิธีการสุ่มตัวอย่าง PMHR-G หมายถึง กรณี $\rho = 0, k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงสุด

5.2 อภิปรายผล

5.2.1 จากเกณฑ์การวัดประสิทธิภาพทั้ง 2 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์วัดในเชิงปริมาณ คือค่า $\hat{R}_{0.975}$ และเกณฑ์วัดในเชิงคุณภาพ คือกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ $\bar{X}_{(p)}$ พบว่ามีบางกรณีที่ให้ผลแตกต่างกัน เช่น ผลจากค่า $\hat{R}_{0.975}$ มีค่าน้อยกว่า 1.1 ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าลู่เข้า แต่ผลที่ได้จากกราฟสรุปได้ว่ายังไม่ลู่เข้า สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เป็นเพราะส่วนปลายของกราฟอาจมีลักษณะแกว่งไปมา ยังไม่เป็นแนวเส้นตรงที่เรียบขนานไปกับค่าคาดหวังเป้าหมาย ดังนั้นจึงสรุปได้ว่ากราฟยังไม่ลู่เข้า หรือส่วนปลายของกราฟอาจมีลักษณะเป็นแนวเส้นตรงที่เรียบแล้ว แต่ลู่เข้าไปยังค่าอื่นที่ไม่ใช่ค่าคาดหวังเป้าหมาย จึงสรุปได้ว่ากราฟยังไม่ลู่เข้าเช่นกัน และอีกสาเหตุหนึ่งที่เป็นไปได้คือ ค่า $\hat{R}_{0.975}$ ที่ได้ เกิดจากการคำนวณ MCMC ทั้งหมด 5 ลูกโซ่ แต่กราฟเกิดจากการคำนวณ MCMC เพียงลูกโซ่เดียว จึงเป็นเหตุที่ทำให้ผลสรุปจากเกณฑ์การวัดทั้ง 2 เกณฑ์แตกต่างกัน

5.2.2 เมื่อพิจารณาเปอร์เซ็นต์การลู่เข้าของวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 แบบ พบว่าจากเกณฑ์การวัดทั้ง 2 เกณฑ์ให้ผลสรุปในทำนองเดียวกัน คือการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่เข้ามากที่สุด รองลงมาคือ PMHR-N, Gibbs และ HR ตามลำดับ และเนื่องจากในการทดลองแต่ละกรณีเราได้กำหนดให้ทุกวิธีการสุ่มตัวอย่างมี N เท่ากัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า วิธี PMHR-N ลู่เข้าได้เร็วกว่า Gibbs และ HR ตามลำดับ ซึ่งผลที่ได้นี้สอดคล้องกับผลงานวิจัยของ (Chiarawongse et al., 2012) ที่ได้ทำการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของจำนวนรอบที่ลู่เข้าจากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR

การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่เข้ามากกว่า PMHR-N เนื่องจากการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกมากกว่า ยกตัวอย่างเช่น กรณี $\rho = 0.5, k = 10, \mu = [0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ พบว่า PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L 100% และบนพื้นผิว S 40.85% ส่วน PMHR-N มีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L 1.86% และบนพื้นผิว S 36.75% ด้วยเหตุนี้จึงทำให้การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ลู่เข้าเร็วกว่า PMHR-N

5.2.3 ข้อจำกัดของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

เปอร์เซ็นต์การลู่เข้าของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G จะลดลงเมื่อ ρ สูงขึ้น เนื่องจากเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ลดลงเมื่อ ρ สูงขึ้น โดยเฉพาะที่ $\rho = 0.75$ และ 0.9 ยกตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนด $k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และพิจารณา ρ ที่ระดับต่างๆ จะมีเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวอย่างเลือกเป็นดังตารางที่ 24

ตารางที่ 24 แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา ρ สำหรับกรณี $k = 10, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$

ρ	บนเส้นตรง L		บนพื้นผิว S	
	ยอมรับ	ปฏิเสธ	ยอมรับ	ปฏิเสธ
0	30.94%	69.06%	75.50%	24.50%
0.5	13.42%	86.58%	50.92%	49.08%
0.75	2.66%	97.34%	31.74%	68.26%
0.9	0.03%	99.97%	11.11%	88.89%

เปอร์เซ็นต์การลู่เข้าของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G จะลดลงเมื่อ k สูงขึ้น เนื่องจาก เปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L ลดลงเมื่อ k สูงขึ้น ส่วนบนพื้นผิว S เปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกจะไม่ขึ้นกับ k ยกตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนด $\rho = 0.5, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และพิจารณา k ที่ระดับต่างๆ จะมีเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวอย่างเลือกเป็นดังตารางที่ 25

ตารางที่ 25 แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวอย่างเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา k สำหรับกรณี $\rho = 0.5, \mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$

k	บนเส้นตรง L		บนพื้นผิว S	
	ยอมรับ	ปฏิเสธ	ยอมรับ	ปฏิเสธ
10	13.42%	86.58%	50.92%	49.08%
50	1.40%	98.60%	23.85%	76.15%
100	0.07%	99.93%	41.82%	58.18%

การสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีเปอร์เซ็นต์การลู่เข้า ที่ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ มากที่สุด รองลงมาคือ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ เนื่องจากที่ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ มีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวอย่างเลือกโดยรวมบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S มากที่สุด รองลงมาคือ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดให้ $\rho = 0.5, k = 10$ และพิจารณา μ ที่ลำดับต่างๆ จะมีเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวอย่างเลือกเป็นดังตารางที่ 26

ตารางที่ 26 แสดงเปอร์เซ็นต์การยอมรับและปฏิเสธจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L และบนพื้นผิว S ของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G เมื่อพิจารณา μ สำหรับกรณี $\rho = 0.5, k = 10$

μ	บนเส้นตรง L		บนพื้นผิว S	
	ยอมรับ	ปฏิเสธ	ยอมรับ	ปฏิเสธ
$[0, 0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$	100.00%	0.00%	40.85%	59.15%
$[-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$	13.42%	86.58%	50.92%	49.08%
$[1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$	26.53%	73.66%	28.36%	71.64%

จากตารางที่ 26 จะสังเกตได้ว่าที่ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ มีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L เป็น 100% เนื่องจากความน่าจะเป็นในการยอมรับจุด (α) คือ $\min\left(\exp\left\{\frac{\mu_d}{\sigma_d^2}(\|x^*\| - \|x^{(n)}\|)\right\}, 1\right)$ โดยที่ $\mu_d = \frac{d'\Sigma^{-1}\mu}{d'\Sigma^{-1}d}$ ซึ่งเมื่อ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ จะได้ว่า $\mu_d = 0$ ดังนั้นจึงทำให้ $\alpha = 1$ เสมอ และยังสามารถสรุปได้ว่า เมื่อ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ สำหรับทุก ρ และทุก k เปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L เป็น 100% เสมอ เพราะไม่ว่า ρ ใน Σ จะมีค่าเท่าไรก็ตาม μ_d ก็ยังคงมีค่าเป็น 0 เสมอ ส่วน α ก็ไม่มีพจน์ที่ขึ้นกับ k ดังนั้น α จะไม่เปลี่ยนแปลงไปตาม k

สรุปข้อจำกัดของการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G สำหรับกรณีที่ $\mu = [0, \dots, 0]_{1 \times k}^T$ สามารถใช้ได้กับทุก k และ ρ ที่มีค่าในระดับไม่สูงมาก ($\rho = 0, 0.5$) เพราะถึงแม้ว่าเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวเลือกบนเส้นตรง L สำหรับทุก ρ จะเป็น 100% เสมอ แต่เปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวเลือกบนพื้นผิว S จะลดลงเมื่อ ρ สูงขึ้น ส่วนกรณีที่ $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และ $\mu = [1, \dots, -1]_{1 \times k}^T$ เมื่อ ρ มีค่าในระดับต่ำ ($\rho = 0$) สามารถใช้ได้กับทุก k และเมื่อ ρ ที่มีค่าในระดับปานกลาง ($\rho = 0.5$) ควรใช้กับ k ที่มีค่าในระดับไม่สูงมาก

5.2.4 กรณีที่ไม่สามารถวิเคราะห์ผลได้ สำหรับเกณฑ์วัดในเชิงคุณภาพ พบในวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N, Gibbs และ HR ซึ่งในขั้นตอนการสุ่มตัวอย่างกรณีดังกล่าวพบว่าสมาชิกของตัวอย่างบางมิติมีค่าเป็นอนันต์ และเมื่อทำการจำลองตัวอย่างในรอบถัดไปโดยใช้จุดตัวอย่างที่มีค่าเป็นอนันต์เป็นจุดเริ่มต้นก็จะทำให้ไม่สามารถคำนวณค่าต่างๆ ตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้ สำหรับเกณฑ์วัดในเชิงปริมาณ พบในวิธีการสุ่มตัวอย่างทั้ง 4 แบบ ซึ่งมีสาเหตุมาจากการที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบของโคเลสกี (Cholesky's decomposition) ในขั้นตอนของฟังก์ชัน gelman.diag ได้ เนื่องจากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมที่ใช้ในการวิเคราะห์ไม่เป็นบวกแน่นอน

5.3 ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยนี้ไปใช้

จากผลการวิจัยสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการประมาณค่าคาดหวังของผลตอบแทนภายใต้การแจกแจงภายหลังของหลักทรัพย์กับข้อมูลจริงได้ ตัวอย่างเช่น จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ (Dow Jones Industrial Average) มีค่าสถิติเชิงพรรณนา (Descriptive Statistics) ของค่าเฉลี่ย (Mean: μ) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation: σ) และ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient: ρ) ดังตารางที่ 27 ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ข้อมูลจริงมีค่า μ เข้าใกล้ 0 โดยมีค่าน้อยกว่า σ เฉลี่ย 130 เท่า และมีค่า ρ โดยเฉลี่ย 0.4627 ซึ่งใกล้เคียงกับกรณีทดลองในงานวิจัยคือ กรณี $\mu = [0, \dots, 0]^T_{1 \times k}$, $\rho = 0.5$ โดยกรณีนี้มีผลสรุปคือ วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G มีประสิทธิภาพสูงที่สุด

ตารางที่ 27 สถิติเชิงพรรณนาของ μ , σ และ ρ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์

	Min.	1 st Qu.	Median	Mean	3 rd Qu.	Max.
μ	-0.0013	-0.0003	0.0002	0.0001	0.0004	0.0014
σ	0.0095	0.0117	0.0131	0.0130	0.0143	0.0162
ρ	0.2366	0.4068	0.4583	0.4627	0.5139	0.8637

หมายเหตุ: ตัวอย่างใช้ข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์ ตั้งแต่วันที่ 16 กรกฎาคม 2014 ถึง วันที่ 31 ธันวาคม 2015 จาก Thomson Reuters ซึ่งสามารถพบข้อมูลของ μ , σ และ ρ ได้ในภาคผนวก

ข้อเสนอแนะเพื่อการศึกษาวิจัยครั้งต่อไป

1. ในการวิจัยครั้งนี้ได้กำหนดจำนวนรอบสูงสุดในจำลองข้อมูล (N) ไว้แล้ว จึงทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งในบางกรณีการจำลองข้อมูลอาจจะยังไม่ลู่เข้าจึงทำให้ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้ การแก้ไขปัญหาดังกล่าวอาจทำได้โดยเพิ่ม N
2. ในการวิจัยครั้งนี้ได้พัฒนาขั้นตอนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N เฉพาะบนเส้นตรง L ดังนั้นผู้ที่สนใจที่จะพัฒนาให้วิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ก็ควรพัฒนาขั้นตอนบนพื้นผิว S ด้วย

3. สำหรับวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G ถึงแม้จะมีเปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดตัวเลือกมากกว่าวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N แต่ในกรณีที่ ρ และ k สูงขึ้น ก็จะทำให้เปอร์เซ็นต์การยอมรับจุดเลือกบนเส้นตรง L ลดลงมากและส่งผลให้เกิดการลู่เข้าช้าลง ดังนั้นจึงควรพัฒนาในกรณีดังกล่าวต่อไป



รายการอ้างอิง

- Bélisle, C. J., Romeijn, H. E., & Smith, R. L. (1993). Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions. *Mathematics of Operations Research*, 18(2), 255-266.
- Brooks, S. P., & Gelman, A. (1998). General methods for monitoring convergence of iterative simulations. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7(4), 434-455.
- Chiarawongse, A., Kiatsupaibul, S., Tirapat, S., & Van Roy, B. (2012). Portfolio selection with qualitative input. *Journal of Banking & Finance*, 36(2), 489-496.
- Flegal, J. M., Haran, M., & Jones, G. L. (2008). Markov chain Monte Carlo: Can we trust the third significant figure? *Statistical Science*, 250-260.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., & Rubin, D. B. (2014). *Bayesian data analysis* (Vol. 2): Chapman & Hall/CRC Boca Raton, FL, USA.
- Gelman, A., & Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 457-472.
- Geman, S., & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, gibbs distributions, and the bayesian restoration of images. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6(6), 721-741.
- Hastings, W. K. (1970). Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1), 97-109.
- Henderson, S. G., & Nelson, B. L. (2006). *Handbooks in operations research and management science: simulation* (Vol. 13): Elsevier.
- Kiatsupaibul, S., Hayter, A. J., & Liu, W. (2017). Rank constrained distribution and moment computations. *Computational Statistics & Data Analysis*, 105, 229-242.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087-1092.

Smith, R. L. (1984). Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions. *Operations Research*, 32(6), 1296-1308.





ภาคผนวก

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
CHULALONGKORN UNIVERSITY

ตารางที่ 28 แสดงค่า μ และ σ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์

ลำดับที่	หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์	μ	σ
1	3M	0.0001	0.0113
2	AMERICAN EXPRESS	-0.0008	0.0128
3	APPLE	0.0003	0.0157
4	BOEING	0.0003	0.0132
5	CATERPILLAR	-0.0013	0.0154
6	CHEVRON	-0.0010	0.0162
7	CISCO SYSTEMS	0.0002	0.0134
8	COCA COLA	0.0001	0.0096
9	E I DU PONT DE NEMOURS	0.0002	0.0154
10	EXXON MOBIL	-0.0007	0.0136
11	GENERAL ELECTRIC	0.0004	0.0127
12	GOLDMAN SACHS GP.	0.0002	0.0131
13	HOME DEPOT	0.0014	0.0125
14	INTEL	0.0002	0.0159
15	INTERNATIONAL BUS.MCHS.	-0.0009	0.0129
16	JP MORGAN CHASE & CO.	0.0003	0.0132
17	JOHNSON & JOHNSON	0.0000	0.0103
18	MCDONALDS	0.0004	0.0112
19	MERCK & COMPANY	-0.0002	0.0133
20	MICROSOFT	0.0007	0.0161
21	NIKE 'B'	0.0013	0.0144
22	PFIZER	0.0002	0.0117
23	PROCTER & GAMBLE	-0.0001	0.0095
24	TRAVELERS COS.	0.0004	0.0103
25	UNITED TECHNOLOGIES	-0.0005	0.0117
26	UNITEDHEALTH GROUP	0.0009	0.0149

ลำดับที่	หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์	μ	σ
27	VERIZON COMMUNICATIONS	-0.0003	0.0096
28	VISA 'A'	0.0009	0.0138
29	WAL MART STORES	-0.0006	0.0122
30	WALT DISNEY	0.0005	0.0131

ตารางที่ 29 แสดงค่า ρ จากข้อมูลผลตอบแทนรายวันของ 30 หลักทรัพย์ในดัชนีอุตสาหกรรมดาวโจนส์

	3M	AMERICAN. EXPRESS	APPLE	BOEING	CATERPILLAR
3M	1	0.4715	0.4940	0.5729	0.5358
AMERICAN.EXPRESS		1	0.4082	0.4077	0.4320
APPLE			1	0.4990	0.4259
BOEING				1	0.4467
CATERPILLAR					1

	CHEVRON	CISCO. SYSTEMS	COCA. COLA	E.I.DU.PONT.DE. NEMOURS	EXXON. MOBIL
3M	0.4382	0.5837	0.4112	0.4424	0.4885
AMERICAN. EXPRESS	0.3796	0.3755	0.3727	0.3306	0.3786
APPLE	0.3374	0.5186	0.3303	0.3371	0.4012
BOEING	0.3578	0.5259	0.3837	0.3583	0.4036
CATERPILLAR	0.6074	0.4396	0.2887	0.3858	0.6024
CHEVRON	1	0.4353	0.3473	0.4063	0.8637
CISCO.SYSTEMS		1	0.3987	0.3905	0.5071
COCA.COLA			1	0.2894	0.3869
E.I.DU.PONT.DE. NEMOURS				1	0.4350
EXXON.MOBIL					1

	GENERAL. ELECTRIC	GOLDMAN. SACHS.GP	HOME. DEPOT	INTEL	INTERNATIONA L.BUS.MCHS.
3M	0.5838	0.5886	0.5377	0.5005	0.4882
AMERICAN.					
EXPRESS	0.4623	0.6106	0.4818	0.3694	0.3809
APPLE	0.4107	0.5207	0.4572	0.4112	0.4375
BOEING	0.4808	0.5592	0.5087	0.4409	0.4414
CATERPILLAR	0.5598	0.5457	0.3694	0.4446	0.4557
CHEVRON	0.5228	0.5311	0.4038	0.3931	0.4558
CISCO.SYSTEMS	0.5017	0.5817	0.5103	0.5654	0.5233
COCA.COLA	0.3666	0.4362	0.3555	0.3188	0.4411
E.I.DU.PONT.DE.					
NEMOURS	0.4577	0.4518	0.3548	0.3470	0.3148
EXXON.MOBIL	0.5583	0.5876	0.4339	0.4558	0.4939
GENERAL. ELECTRIC	1	0.5762	0.4627	0.4591	0.4876
GOLDMAN. SACHS.GP.		1	0.5839	0.5024	0.5633
HOME.DEPOT				0.4206	0.4513
INTEL				1	0.4518
INTERNATIONA L.BUS.MCHS.					1

	JP MORGAN CHASE & CO	JOHNSON & JOHNSON	MCDONALDS	MERCK & COMPANY	MICRO SOFT
3M	0.6118	0.6219	0.5496	0.5306	0.4920
AMERICAN					
EXPRESS	0.6016	0.5182	0.3433	0.4563	0.4169

	JP MORGAN CHASE & CO	JOHNSON & JOHNSON	MCDO NALDS	MERCK & COMPANY	MICRO SOFT
APPLE	0.5098	0.4443	0.4266	0.3576	0.4863
BOEING	0.5744	0.5484	0.5011	0.4592	0.4169
CATERPILLAR	0.5130	0.4171	0.3949	0.3584	0.4509
CHEVRON	0.5657	0.4106	0.3795	0.4335	0.4212
CISCO.					
SYSTEMS	0.6146	0.4906	0.5150	0.5019	0.5740
COCA.COLA	0.4367	0.4927	0.4938	0.4393	0.3764
E.I.DU.PONT.					
DE. NEMOURS	0.4580	0.3688	0.4027	0.3192	0.3763
EXXON.MOBIL	0.6220	0.5044	0.4589	0.4677	0.4354
GENERAL.					
ELECTRIC	0.5858	0.5486	0.5256	0.4567	0.4569
GOLDMAN.					
SACHS.GP	0.8632	0.6266	0.5385	0.5324	0.5507
HOME.DEPOT	0.6120	0.5694	0.5067	0.4727	0.4581
INTEL	0.4907	0.4317	0.3584	0.4357	0.5687
INTERNATION					
AL.BUS.MCHS	0.5557	0.5129	0.4583	0.4793	0.4984
JP MORGAN					
CHASE & CO	1	0.6253	0.5608	0.5481	0.5392
JOHNSON &					
JOHNSON		1	0.5847	0.6701	0.4887
MCDONALDS			1	0.4848	0.4788
MERCK &					
COMPANY				1	0.4816
MICROSOFT					1

	NIKE 'B'	PFIZER	PROCTER & GAMBLE	TRAVELERS .COS	UNITED. TECHNOLOGIES
3M	0.4487	0.4831	0.5178	0.5898	0.6439
AMERICAN.					
EXPRESS	0.4306	0.4625	0.4637	0.5012	0.4847
APPLE	0.4532	0.4027	0.4192	0.4268	0.4429
BOEING	0.4492	0.3985	0.4593	0.5146	0.5762
CATERPILLAR	0.3212	0.3504	0.3446	0.4074	0.4815
CHEVRON	0.3146	0.4175	0.4132	0.4452	0.4209
CISCO.					
SYSTEMS	0.4911	0.4615	0.5054	0.5355	0.5673
COCA.COLA	0.3833	0.3804	0.5719	0.5421	0.4411
E.I.DU.PONT.					
DE. NEMOURS	0.2565	0.3415	0.3721	0.3882	0.3853
EXXON.MOBIL	0.3559	0.4826	0.4851	0.5052	0.4730
GENERAL.					
ELECTRIC	0.3768	0.4973	0.4857	0.4975	0.5422
GOLDMAN.					
SACHS.GP	0.5125	0.5674	0.5405	0.6395	0.5599
HOME.DEPOT	0.5700	0.4733	0.4938	0.5849	0.4826
INTEL	0.3209	0.4175	0.4113	0.4053	0.4073
INTERNATION					
AL.BUS.MCHS	0.4017	0.4532	0.4635	0.4791	0.5403
JP MORGAN					
CHASE & CO	0.5172	0.5427	0.5230	0.6778	0.5839
JOHNSON &					
JOHNSON	0.4695	0.6005	0.5874	0.6387	0.5540
MCDONALDS	0.4583	0.4533	0.5273	0.5227	0.4379
MERCK &					
COMPANY	0.3579	0.6457	0.4822	0.5227	0.4432

	NIKE 'B'	PFIZER	PROCTER & GAMBLE	TRAVELERS. COS	UNITED. TECHNOLOGIES
MICROSOFT	0.3812	0.4672	0.5322	0.4896	0.4173
NIKE 'B'	1	0.3588	0.4499	0.4942	0.4055
PFIZER		1	0.4796	0.5343	0.4415
PROCTER & GAMBLE			1	0.5888	0.4714
TRAVELERS. COS				1	0.5851
UNITED. TECHNOLOGIES					1
	UNITEDHEA LTH.GROUP	VERIZON. COMMUNICATIONS	VISA 'A'	WAL.MART .STORES	WALT. DISNEY
3M	0.4571	0.5425	0.5131	0.4389	0.4427
AMERICAN. EXPRESS	0.4561	0.5026	0.5189	0.3464	0.4330
APPLE	0.3959	0.4359	0.4161	0.3517	0.4135
BOEING	0.4297	0.4695	0.4752	0.4367	0.4830
CATERPILLAR	0.3115	0.4182	0.4080	0.2368	0.3162
CHEVRON	0.3520	0.4426	0.4221	0.2386	0.3540
CISCO. SYSTEMS	0.4007	0.5090	0.4966	0.4041	0.4644
COCA.COLA	0.3258	0.4985	0.3848	0.4165	0.3350
E.I.DU.PONT. DE. NEMOURS	0.2678	0.3924	0.3395	0.2366	0.3426
EXXON MOBIL	0.3990	0.4899	0.4590	0.2773	0.4206
GENERAL ELECTRIC	0.4023	0.4896	0.4797	0.3446	0.4049

	UNITEDHEA LTH.GROUP	VERIZON. COMMUNICATIONS	VISA 'A'	WAL.MAR T.STORES	WALT. DISNEY
GOLDMAN					
SACHS GP.	0.5027	0.5657	0.6066	0.4007	0.5605
HOME DEPOT	0.5058	0.4779	0.4944	0.5126	0.4926
INTEL	0.3177	0.4235	0.3508	0.2681	0.3770
INTERNATIONA					
LBUS.MCHS	0.3578	0.5097	0.4623	0.3447	0.3789
JP MORGAN					
CHASE & CO	0.4863	0.5910	0.5987	0.4441	0.5750
JOHNSON &					
JOHNSON	0.5324	0.5462	0.5579	0.4649	0.4762
MCDONALDS	0.3288	0.5068	0.4850	0.3843	0.4461
MERCK &					
COMPANY	0.4479	0.5469	0.4751	0.3645	0.4012
MICROSOFT	0.4086	0.4779	0.4552	0.3619	0.4163
NIKE 'B'	0.4077	0.3695	0.4726	0.3782	0.4570
PFIZER	0.5886	0.4702	0.4741	0.3529	0.4723
PROCTER &					
GAMBLE	0.4502	0.5157	0.5039	0.4500	0.4325
TRAVELERS.					
COS	0.4947	0.5589	0.5415	0.4549	0.5460
UNITED					
TECHNOLOGIES	0.4348	0.5443	0.5100	0.4204	0.4718
UNITEDHEALTH					
GROUP	1	0.3642	0.4485	0.3695	0.4226
VERIZON.					
COMMUNI					
CATIONS		1	0.4506	0.4179	0.4388

	UNITEDHEAL TH.GROUP	VERIZON. COMMUNICATIONS	VISA 'A'	WAL.MART. STORES	WALT. DISNEY
VISA 'A'			1	0.3428	0.5040
WAL MART STORES				1	0.3377
WALT DISNEY					1



ตัวอย่างการใช้โปรแกรม R ในการดำเนินงานวิจัย

การจำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ HR

จำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ HR และคำนวณค่า $\hat{R}_{0.975}$ กรณีจำนวนมิติ $k = 10$
 เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0.5$

กำหนดจำนวนรอบ จำนวนมิติ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

```
simround<-300,000;
```

```
dimval<-10;
```

```
muvec<-seq(-1,1,length=dimval);
```

```
sigmamat<-matrix(0.5,dimval,dimval);diag(sigmamat)<-1;
```

```
xvec<- seq(1,10,length=dimval);
```

สร้างฟังก์ชัน HR

```
hr<-function(x0vec,inpmuvec,inpsigmamat){
```

```
  nval<-length(x0vec);
```

```
  dvec<-rnorm(nval);
```

```
  dvec<-dvec/sqrt(sum(dvec^2));
```

```
  lambdabound<-(-x0vec[2:nval]-x0vec[1:(nval-1)])/(dvec[1:(nval-1)]-dvec[2:nval]);
```

```
  supvec<-c(lambdabound[lambdabound>0],Inf);
```

```
  infvec<-c(lambdabound[lambdabound<0],-Inf);
```

```
  lambda1<-min(supvec);
```

```
  lambda2<-max(infvec);
```

```
  mud<-(-t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,inpmuvec-x0vec))/
```

```
  (t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec));
```

```
  sigmad<-sqrt(1/(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec)));
```

```
  lambda<-qnorm(runif(1)*(pnorm(lambda1,mud,sigmad)-
```

```
  pnorm(lambda2,mud,sigmad))
```

```
  +pnorm(lambda2,mud,sigmad),mud,sigmad);
```

```
  x1vec<-x0vec+lambda*dvec;
```

```
  return(x1vec);
```

```

}
xmat<-matrix(rep(NA,dimval*simround),ncol=dimval);
xmat[1,]<-xvec;
for(i in 2:simround){
  xvec<-hr(xmat[i-1,],muvec,sigmamat);
  xmat[i,]<-xvec;
}
xarray<-xvec;
mc<-function(simround,burnin){
  for(i in 2:simround){
    xvec<-hr(xmat[i-1,],muvec,sigmamat);
    xarray<-rbind(xarray,xvec);
  }
  xuse<-xarray[(burnin+1):simround,];
}

# สร้างลูกโซ่ 5 ลูกโซ่ แต่ละลูกโซ่ burn in 50%
burnin<-0.5*simround;
mcmc1<-mcmc(mc(simround,burnin));
mcmc2<-mcmc(mc(simround,burnin));
mcmc3<-mcmc(mc(simround,burnin));
mcmc4<-mcmc(mc(simround,burnin));
mcmc5<-mcmc(mc(simround,burnin));
mcmc<-mcmc.list(list(mcmc1,mcmc2,mcmc3,mcmc4,mcmc5));

# คำนวณค่า  $\hat{R}_{0.975}$  จากฟังก์ชัน gelman.diag() ใน package coda
gr<-gelman.diag(mcmc,confidence = 0.975);

```

การจำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs

จำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ Gibbs และคำนวณค่า $\bar{X}_{(p)}$ กรณีจำนวนมิติ $k = 10$, เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0.5$

```
# กำหนดจำนวนรอบ จำนวนมิติ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
simround<-300,000;
dimval<-10;
muvec<-seq(-1,1,length=dimval);
sigmammat<-matrix(0.5,dimval,dimval);diag(sigmamat)<-1;
xvec<- seq(1,10,length=dimval);

# สร้างฟังก์ชัน Gibbs
gibbs<-function(x0vec,dimval,inpmuvec,inpsigmamat){
  j<-floor(dimval*runif(1))+1;
  dvec<-rep(NA,dimval);
  dvec[j]<-1;
  dvec[-j]<-0;
  mud<-(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,inpmuvec-x0vec))/
  (t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec));
  sigmad<-sqrt(1/(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec)));
  infval<-ifelse(j==1,-Inf,x0vec[j-1]);
  supval<-ifelse(j==dimval,Inf,x0vec[j+1]);
  xvec[j]<-qnorm(runif(1)*(pnorm(supval,mud,sigmad)-pnorm(infval,mud,sigmad))
  +pnorm(infval,mud,sigmad),mud,sigmad);
  xvec<-c(x0vec[-(j:dimval)],xvec[j],x0vec[-(1:j)]);
  return(xvec);
}
xmat<-matrix(rep(NA,dimval*simround),ncol=dimval);
xmat[1,]<-xvec;
for(i in 2:simround){
  xvec<-gibbs(xmat[i-1,],dimval,muvec,sigmamat);
```

```

xmat[i,]<-xvec;
}

# คำนวณค่าเฉลี่ยสะสมของ  $\bar{X}_{(p)}$ 
xp<-xmat[,p];
cumsumvec<-cumsum(xp);
avevec<-cumsumvec/1:simround;

#พล็อตกราฟค่าเฉลี่ยสะสมของ  $\bar{X}_{(p)}$ 
plot(avevec);

```

การจำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N

จำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-N กรณีจำนวนมิติ $k = 10$, เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0.5$

```

# กำหนดจำนวนรอบ จำนวนมิติ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
simround<-300,000;
dimval<-10;
muvec<-seq(-1,1,length=dimval);
sigmammat<-matrix(0.5,dimval,dimval);diag(sigmamat)<-1;
xvec<- seq(1,10,length=dimval);

# สร้างฟังก์ชัน PMHR-N
pmhr_n<-function(x0vec,inpmuvec,inpsigmamat){
  nval<-length(x0vec);
  r0<-sqrt(sum(x0vec^2));
  if(runif(1)<0.5){
    #L-move
    dvec<-x0vec/r0;
    mud<-(-t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,inpmuvec-x0vec))
      /(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec));
    sigmad<-sqrt(1/(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec)));
  }
}

```

```

prep<-runif(1)*(1-pnorm(-r0,mud,sigmad))+pnorm(-r0,mud,sigmad);
lambda<-qnorm(prepare,mud,sigmad);
x1vec<-x0vec+lambda*dvec;
r1<-sqrt(sum(x1vec^2));
alphaprob<-min(1,(r1/r0)^(dimval-1));
if(runif(1)<alphaprob){
    xnewvec<-x1vec;
}
else{
    xnewvec<-x0vec;
}
}
else{
    #5-move
    dvec<-rnorm(nval);
    dvec<-r0*dvec/sqrt(sum(dvec^2));
    svec<-sort(dvec)
    alphaprob<-min(1,dmnorm(svec,inpmuvec,inpsigmamat)/
    dmnorm(x0vec,inpmuvec,inpsigmamat));
    if(runif(1)<alphaprob){
        xnewvec<-svec;
    }
    else{
        xnewvec<-x0vec;
    }
}
}
return(xnewvec);
}
xmat<-matrix(rep(NA,dimval*simround),ncol=dimval);
xmat[1,]<-xvec;
for(i in 2:simround){
    xvec<-pmhr_n(xmat[i-1,],muvec,sigmamat);
    xmat[i,]<-xvec;
}
}

```

การจำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G

จำลองข้อมูลด้วยการสุ่มตัวอย่างแบบ PMHR-G กรณีจำนวนมิติ $k = 10$, เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = [-1, \dots, 1]_{1 \times k}^T$ และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho = 0.5$

```
# กำหนดจำนวนรอบ จำนวนมิติ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
simround<-300,000;
dimval<-10;
muvec<-seq(-1,1,length=dimval);
sigmammat<-matrix(0.5,dimval,dimval);diag(sigmamat)<-1;
xvec<- seq(1,10,length=dimval);

# สร้างฟังก์ชัน PMHR-G
pmhr_g<-function(x0vec,inpmuvec,inpsigmamat){
  nval<-length(x0vec);
  r0<-sqrt(sum(x0vec^2));
  if(runif(1)<0.5){
    #L-move
    dvec<-x0vec/r0;
    mud<-(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,inpmuvec))
      /(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec));
    sigmad<-sqrt(1/(t(dvec)%*%solve(inpsigmamat,dvec)));
    lambda<-rgamma(1,shape=nval/2,rate=1/(2*sigmad^2));

    x1vec<-sqrt(lambda)*dvec;
    r1<-sqrt(lambda);
    alphaprob<-min(1,exp((mud/(sigmad^2))*(r1-r0)));
    if(runif(1)<alphaprob){
      xnewvec<-x1vec;
    }else{
      xnewvec<-x0vec;
    }
  }
}
```

```

}else{
  #S-move
  dvec<-rnorm(nval);
  dvec<-r0*dvec/sqrt(sum(dvec^2));
  svec<-sort(dvec)
  alphaprob<-min(1,dmvnorm(svec,inpmuvec,inpsigmamat)/
  dmvnorm(x0vec,inpmuvec,inpsigmamat));
  if(runif(1)<alphaprob){
    xnewvec<-svec;
  }else{
    xnewvec<-x0vec;
  }
}
return(xnewvec);
}
xmat<-matrix(rep(NA,dimval*simround),ncol=dimval);
xmat[1,]<-xvec;
for(i in 2:simround){
  xvec<- pmhr_g(xmat[i-1,],muvec,sigmamat);
  xmat[i,]<-xvec;
}

```


ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวณภัชฉนันท์ อุทธโยธา สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาบัณฑิต หลักสูตร
วิทยาศาสตร์บัณฑิต (วท.บ.) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2556 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโทบัณฑิต หลักสูตรสถิติศาสตรมหาบัณฑิต
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ปีการศึกษา 2557

