หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

วรรณคดีที่เกี่ยวข้อง

ในการนำเสนอวรรณคดีที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยเรื่องนี้ ผู้วิจัยได้แบ่งการนำเสนอออกเป็น 3 ตอนดังนี้

1. ทฤษฎีการตอบข้อสอบ (Item Response Theory)
2. วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติก

ทฤษฎีการตอบข้อสอบ (Item Response Theory : IRT)

1. มโนทัศน์เกี่ยวกับทฤษฎีการตอบข้อสอบ

ทฤษฎีการตอบข้อสอบ (Item Response Theory : IRT) มีชื่อเรียกต่าง ๆ กัน เช่น ทฤษฎีคุณลักษณะแฝง (Latent Trait Theory) ทฤษฎีโค้งลักษณะข้อสอบ (Item Characteristic Theory) และทฤษฎีการตอบข้อสอบ แต่ปัจจุบันนักวัดผลทางการศึกษานิยมเรียกทฤษฎีนี้ว่า ทฤษฎีการตอบข้อสอบหรือ IRT (Hambleton and Swaminathan 1985: 4)

1.1 <u>แนวคิดของ IRT</u> IRT มีแนวความคิดว่า ในการทดสอบผลการสอบสามารถทำนายหรืออธิบายได้ด้วยลักษณะของผู้เข้าสอบแต่ละคน ลักษณะของผู้เข้าสอบ หมายถึงคุณลักษณะภายใน (Latent Trait) หรือความสามารถ (Ability) โดยเมื่อนิยามความหมายของความสามารถ และประมาณค่าคะแนนความสามารถของผู้เข้าสอบทุกคนแล้ว จะนำคะแนนความสามารถที่ประมาณค่าได้ ไปใช้ในการทำนาย หรืออธิบายผลการตอบข้อสอบของผู้เข้าสอบแต่ละคน (Lord and Novick 1968: 358) จากแนวความคิดดังกล่าว นักวัดผลทางการศึกษาได้นำมาใช้สร้างโมเดลการตอบข้อสอบ (Item Response Model) โดยที่โมเดลการตอบข้อสอบของ IRT คือแบบจำลองที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลการสอบที่สังเกตได้ (Observable) กับความสามารถที่สังเกตไม่ได้ (Unobservable) ซึ่งอาจแสดงได้ด้วยฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม (Monotonically Increasing Function) โมเดลของ IRT ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายได้แก่ โมเดลปกติสะสม (Normal Ogive Model) โมเดลโลจิสติก (Logistic Model) และราสช์โมเดล (Rasch Model) (Hambleton and Swaminathan 1985: 9-14)

1.2 ความสามารถ (Ability) ตามแนวความคิดของ IRT ความสามารถของผู้เข้าสอบหมายถึง ความถนัด ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถทางด้านจำนวน ความเข้าใจในการอ่าน ความสามารถในการคูณจำนวนเต็ม ฯลฯ และระดับความสามารถเป็นสิ่งที่เปลี่ยนแปลงได้จากการเรียนรู้ (Hambleton and Swaminathan 1985: 54-55)

2. **ข้อตกลงเบื้องต้นของ IRT**

IRT ประกอบด้วยโมเดลต่าง ๆ หลายโมเดล แต่ละโมเดลมีข้อตกลงแตกต่างกันเกี่ยวกับลักษณะของข้อมูล และฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่สังเกตได้กับตัวแปรที่สังเกตไม่ได้ ข้อตกลงเบื้องต้นที่สำคัญ ๆ ของโมเดลของ IRT ได้แก่

2.1 ความเป็นมิติเดียวของแบบสอบ (Unidimensionality) ซึ่งหมายความว่า ข้อสอบทุกข้อในแบบสอบวัดความสามารถเดียวกัน แฮมเบิลตันและสวามินาทาน (Hambleton and Swaminathan 1985: 16-17) ให้ความเห็นเกี่ยวกับความเป็นมิติเดียวของแบบสอบว่า แม้ว่าแบบสอบอาจจะไม่เป็นมิติเดียวอย่างแท้จริง เพราะมีองค์ประกอบอื่น ๆ ที่มีผลกระทบต่อการตอบข้อสอบ เช่น ความรู้เกี่ยวกับการใช้กระดาษคำตอบ บุคลิกภาพ แรงจูงใจ ความวิตกกังวล และความรู้ความจำเรื่องอื่น ๆ นอกเหนือจากความรู้ความเข้าใจที่ต้องการวัดด้วยแบบสอบ แต่อาจถือว่าแบบสอบมีความเป็นมิติเดียวถ้าการวิเคราะห์ตัวประกอบของผลการตอบข้อสอบพบว่า ตัวประกอบสำคัญซึ่งหมายถึงความสามารถของผู้เข้าสอบมีเพียงตัวประกอบเดียวเท่านั้น แบบสอบที่น่าจะมีความเป็นมิติเดียว ได้แก่ แบบสอบการสะกดคำ คำศัพท์ อ่านเอาเรื่อง เหตุผลเชิงคณิตศาสตร์ อุปมาอุปไมย อนุกรมตัวเลข มิติสัมพันธ์ (lord 1980: 20) และแบบสอบที่ข้อสอบแต่ละข้อวัดหน่วยย่อยของความรู้ที่เรียนร่วมกัน เช่น แบบสอบปลายภาคเรียนวิชาชีววิทยาเบื้องต้น ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาวิชาเกี่ยวกับเคมี เซลและพลังงาน (Warm 1978: 102)

2.2 ความเป็นอิสระเฉพาะที่ของการตอบข้อสอบ (Local Independence) ซึ่งหมายความว่า การตอบข้อสอบแต่ละข้อของผู้เข้าสอบ มีความเป็นอิสระต่อกันเชิงสถิติ คือ การตอบข้อสอบข้อใดข้อหนึ่ง ไม่มีผลกระทบต่อการตอบข้อสอบข้ออื่น ๆ เช่น เนื้อหาของข้อสอบข้อนั้นไม่ชี้แนะคำตอบของข้อสอบข้ออื่น ๆ ถ้าการตอบข้อสอบมีความเป็นอิสระเฉพาะที่ ความน่าจะเป็นร่วมของคะแนนรายข้อ คือ ผลคูณความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบทุกข้อ ดังนี้ (Hambleton and Swaminathan 1985:23)

กำหนดให้ U_j ($j = 1,2,\ldots, n$) เป็นตัวแปรที่ใช้แสดงผลการตอบข้อสอบ (ตอบถูก $U_j = 1$ ตอบผิด $U_j = 0$) ของแบบสอบที่มีข้อสอบ n ข้อ ให้ P_j เป็นความ

น่าจะเป็นในการตอบถูก และให้ $Q_j = 1-P_j$ เป็นความน่าจะเป็นในการตอบผิด ความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าสอบที่มีความสามารถเท่ากับ θ สอบได้คะแนน $(u_1, u_2, ..., u_n)$ คือ

$$\text{Prob}\ (U_1 = u_1, U_2 = u_2, ..., U_n = u_n | \theta) = \prod_{j=1}^{n} P_j(\theta)^{u_j}\ Q_j(\theta)^{1-u_j}$$

เนื่องจากความเป็นอิสระเฉพาะที่ในการตอบข้อสอบ มีความสำคัญต่อการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดล การนำโมเดลของ IRT ไปใช้ จึงต้องมีการตรวจสอบความเป็นอิสระเฉพาะที่ของการตอบข้อสอบ เพราะถ้าไม่มีความเป็นอิสระเฉพาะที่ในการตอบข้อสอบ การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดล จะได้ค่าประมาณที่มีความคลาดเคลื่อนมาก แต่ความเป็นอิสระเฉพาะที่ของการตอบข้อสอบ ที่ข้อสอบทุกข้อวัดความสามารถ θ เดียวกัน มีความสัมพันธ์กับความเป็นมิติเดียวของแบบสอบ คือ ถ้าแบบสอบฉบับใดมีความเป็นมิติเดียว แบบสอบฉบับนั้นจะมีความเป็นอิสระเฉพาะที่ในการตอบข้อสอบด้วย (Hambleton and Swaminathan 1985: 23-24; Hulin et al. 1983: 42-43) ดังนั้น การตรวจสอบความเป็นอิสระเฉพาะที่ในการตอบข้อสอบ จึงอาจเพียงแต่ตรวจสอบว่า แบบสอบมีความเป็นมิติเดียวหรือไม่เท่านั้น

2.3 <u>โค้งลักษณะข้อสอบ</u> (Item Characteristic Curve: ICC) โค้งลักษณะข้อสอบ คือ ฟังก์ชันคณิตศาสตร์ที่ใช้แสดงความสัมพันธ์ ระหว่างความน่าจะเป็นในการตอบถูก $P_j(\theta)$ กับความสามารถ (θ) ที่ต้องการวัด ความสัมพันธ์ดังกล่าวอยู่ในรูปการถดถอยของคะแนนรายข้อ (Item Score) ลงบนความสามารถ (θ) สำหรับข้อสอบที่มีการตรวจให้คะแนน 1 (ตอบถูก) หรือ 0 (ตอบผิด) ความน่าจะเป็นในการตอบถูก $P_j(\theta)$ สามารถแสดงได้ด้วยฟังก์ชันปกติสะสม (Normal Ogive Function) หรือฟังก์ชันโลจิสติก (Logistic Function) (Hambleton and Swaminathan 1985: 25; Lord 1980: 12-13)

เนื่องจากโค้งลักษณะข้อสอบ (ICC) บ่งบอกความน่าจะเป็นในการตอบถูกที่ขึ้นอยู่กับระดับความสามารถของผู้เข้าสอบ คือ ผู้เข้าสอบที่มีความสามารถสูงจะมีความน่าจะเป็นในการตอบถูกมากกว่าผู้เข้าสอบที่มีความสามารถน้อยกว่า ดังนั้นโค้งลักษณะข้อสอบจึงเป็นสิ่งสำคัญที่ใช้สำหรับสรุปอ้างอิงเกี่ยวกับระดับความสามารถของผู้เข้าสอบ (Lord and Novick 1968: 360)

3. **โมเดลปกติสะสมแบบสองพารามิเตอร์** (Two-Parameter Normal Ogive Model)

โมเดลปกติสะสม ได้รับการพัฒนาขึ้นตั้งแต่ปี 1944 โดย Lawley (Lord and Novick 1968: 369) ต่อมาลอร์ด (Lord) ได้ศึกษาและพัฒนาวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดล จนสามารถนำไปใช้วิเคราะห์ผลการสอบจากแบบสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และแบบสอบความถนัดได้ (Hambleton and Swaminathan 1985: 4-7) โมเดลปกติสะสมใช้ฟังก์ชันปกติสะสม แสดงโค้งลักษณะข้อสอบ ดังนี้

$$P_j(\theta) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\alpha}^{a_j(\theta-b_j)} \exp(-Z^2/2)\, dZ$$

$P_j(\theta)$ คือความน่าจะเป็นในการตอบ (ข้อ j) ถูกของผู้เข้าสอบที่มีความสามารถ θ a_j (อำนาจจำแนก) และ b_j (ความยาก) คือ ค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบข้อที่ j และ Z คือค่า Z ของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่แปลงมาจากการแจกแจงที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ b_j และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $1/a_j$

ค่าความยาก b_j เป็นพารามิเตอร์ที่แสดงตำแหน่งของโค้งลักษณะข้อสอบบนมาตราความสามารถ (Ability Scale) ค่าความยาก b_j มีค่าเท่ากับค่าความสามารถ (θ) ที่มีความน่าจะเป็นในการตอบถูกเท่ากับ 0.50 ปกติ b_j มีค่าอยู่ในช่วง -2.5 ถึง 2.5 (Warm 1978: 52)

ค่าอำนาจจำแนก a_j มีค่าเป็นสัดส่วนกับค่าความชัน (Slope) ของเส้นโค้งลักษณะข้อสอบที่จุดเปลี่ยนโค้ง (ค่าความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $a_j/\sqrt{2\pi}$ ปกติ a_j มีค่าอยู่ในช่วง 0.2 ถึง 2.0 (lord 1980: 12-14; Warm 1978: 52)

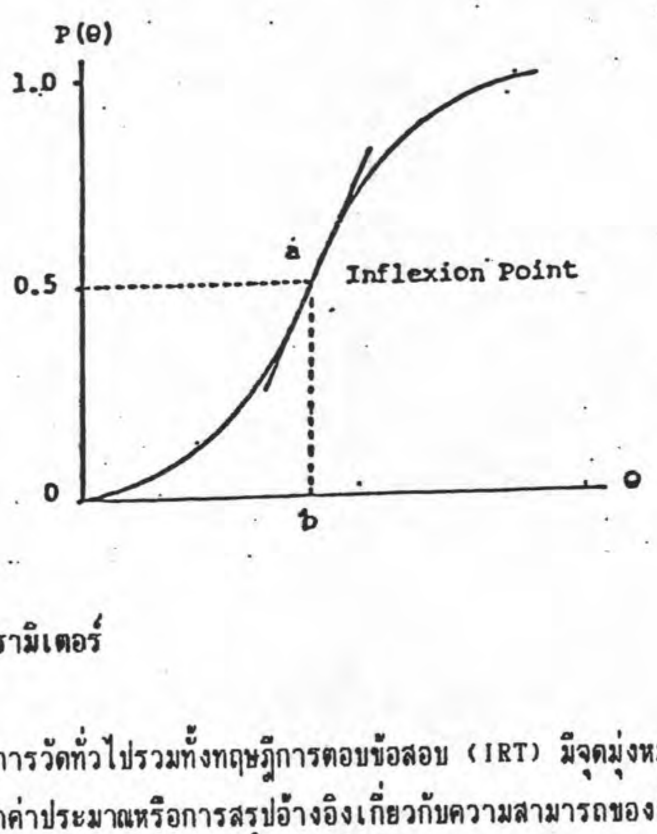
4. **โมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์** (Two-Parameter Logistic Model)

เบิร์นบอม (Birnbaum 1968: 399-400) ได้เสนอให้ใช้ฟังก์ชันโลจิสติก ซึ่งนำไปใช้ได้ง่ายกว่าฟังก์ชันปกติสะสม แสดงโค้งลักษณะข้อสอบ ดังนี้

$$P_j(\theta) = [1 + \exp\{-Da_j(\theta - b_j)\}]^{-1}$$

$P_j(\theta)$, a_j และ b_j มีความหมายเช่นเดียวกันกับของโมเดลปกติสะสม D เป็นค่าคงที่ (Constant) ที่ใช้ปรับลักษณะการแจกแจง เมื่อ D มีค่าเท่ากับ 1.7 ค่า $P_j(\theta)$ ของโมเดลปกติสะสมและโมเดลโลจิสติก มีค่าแตกต่างกันน้อยกว่า 0.01 สำหรับทุกค่าของค่าความสามารถ (Birnbaum 1968: 399; Hambleton and Swaminathan 1985: 53)

แผนภาพแสดงลักษณะของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์



วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์

ทฤษฎีการวัดทั่วไปรวมทั้งทฤษฎีการตอบข้อสอบ (IRT) มีจุดมุ่งหมายเพื่อเป็นแนวทางพื้นฐาน ในการหาค่าประมาณหรือการสรุปอ้างอิงเกี่ยวกับความสามารถของผู้เข้าสอบ แนวทางดังกล่าวประกอบด้วย การเก็บรวบรวมข้อมูลผลการสอบ การเลือกโมเดลการตอบข้อสอบ (Item Response Model) ที่เหมาะสม และการนำผลการสอบไปวิเคราะห์หาค่าความสามารถและค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบตามโมเดลการตอบข้อสอบที่เลือกไว้ (Hambleton and Swaminathan 1985: 53)

วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่น่าสนใจได้แก่ วิธี Heuristic วิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด และวิธีของเบส์ วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสามวิธีนี้ใช้แนวคิดแตกต่างกัน แต่อาจนำไปใช้ประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลการตอบข้อสอบแบบ หนึ่ง สอง หรือสามพารามิเตอร์ได้ สำหรับการวิจัย

016857

ในครั้งนี้ จะกล่าวถึงการใช้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสามวิธีดังกล่าว ประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์เท่านั้น

โมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ ที่ใช้แสดงความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบข้อที่ j ของผู้เข้าสอบคนที่ i คือ (Birnbaum 1968: 399-400 ; Hambleton and Swaminathan 1985: 37)

$$P_{ij} = P(U_{ij}|\theta_i,a_j,b_j) = [1+\exp\{-1.7a_j(\theta_i - b_j)\}]^{-1} \quad ; i=1,2,\ldots,N \quad ; j=1,2,\ldots,n$$

เมื่อ

P_{ij} = ความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบข้อที่ j ถูก ของผู้เข้าสอบคนที่ i

θ_i = ค่าความสามารถของผู้เข้าสอบคนที่ i

U_{ij} = ผลการตอบข้อสอบข้อที่ j ของผู้เข้าสอบคนที่ i (ตอบถูก U_{ij} = 1 ตอบผิด U_{ij} = 0)

a_j = ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบข้อที่ j

b_j = ค่าความยากของข้อสอบข้อที่ j

N = จำนวนผู้เข้าสอบ

n = จำนวนข้อสอบ

1. วิธี Heuristic

ยูริ (Urry 1974: 253-260) ได้พัฒนาวิธี Heuristic เพื่อใช้หาค่าประมาณ (Approximate) ของค่าอำนาจจำแนก (a) และค่าความยาก (b) ของโมเดลโลจิสติก โดยอาศัยค่าอำนาจจำแนก (ค่าสหสัมพันธ์ไบซีเรียล r_{bis} หรือค่าสหสัมพันธ์พอยท์ไบซีเรียล r_{pbis}) และค่าความยาก (สัดส่วนการตอบถูก P) ของทฤษฎีคลาสสิคอล และเพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกด้วยวิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด ต่อมา ชมิดท์ (Schmidt 1977: 613-620) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี Heuristic พบว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี Heuristic มีความคลาดเคลื่อนอย่างเป็นระบบ คือการประมาณค่าอำนาจจำแนกได้ค่าประมาณต่ำกว่าค่าจริงเสมอ และการประมาณค่าความยากได้ค่าประมาณสูงกว่าค่าจริงเสมอ ชมิดท์จึงได้เสนอแนะให้ใช้ค่าความเที่ยงของแบบสอบ (KR-20) ปรับสมการของวิธี Heuristic

ที่ใช้ในการหาค่าประมาณ เพื่อทำให้การหาค่าประมาณได้ค่าประมาณที่มีความถูกต้องมากขึ้น

สมการของวิธี Heuristic ที่ใช้ในการหาค่าประมาณได้แก่ (Schmidt 1977: 613-619; Urry 1974: 256-259; Warm 1978: 51)

$$a_j = [R_j(P_jQ_j)^{1/2}]/[(KR\text{-}20)Y_j^2 - R_j^2P_jQ_j]^{1/2}$$

$$b_j = [Y_jZ_j(KR\text{-}20)^{1/2}]/[R_j(P_jQ_j)^{1/2}]$$

เมื่อ

a_j = ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบข้อที่ j

b_j = ค่าความยากของข้อสอบข้อที่ j

R_j = ค่าสหสัมพันธ์พอยท์ไบซีเรียลของข้อสอบข้อที่ j

P_j = ค่าสัดส่วนการตอบถูกของข้อสอบข้อที่ j

Q_j = $1 - P_j$

KR-20 = ค่าความเที่ยงของแบบสอบ (Reliability)

Z_j = ค่า Z ของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่พื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานด้านขวามือมีค่าเท่ากับ P_j

Y_j = ค่าความสูงของโค้งปกติมาตรฐานที่ตรงจุด Z_j

2. วิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด (Maximum Likelihood: ML)

กำหนดให้ U_{ij} เป็นตัวแปรแสดงผลการตอบข้อสอบข้อที่ j (j = 1,2,...,n) ของผู้เข้าสอบคนที่ i (i = 1,2,..., N) (ตอบถูก $U_{ij} = 1$ ตอบผิด $U_{ij} = 0$) $P_{ij} = P_j(\theta_i) = P(U_{ij} = 1|\theta)$ แสดงความน่าจะเป็นในการตอบถูก $Q_{ij} = 1-P_{ij}$ แสดงความน่าจะเป็นในการตอบผิด และความน่าจะเป็นในการตอบถูก P_{ij} แสดงได้ด้วยฟังก์ชันโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ ถ้าแบบสอบมีความเป็นมิติเดียว (Unidimension) และมีความเป็นอิสระเฉพาะที่ (Local Independence) ความน่าจะเป็นร่วมในการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน คือ

$$P(U|\theta, a, b) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{U_{ij}} Q_{ij}^{1-U_{ij}}$$

เมื่อ

$P(U|\theta, a, b)$ = ความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

U = เวคเตอร์ (Vector) ของตัวแปรที่แสดงผลการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

θ = เวคเตอร์ (Vector) ความสามารถของผู้เข้าสอบ N คน

a = เวคเตอร์ (Vector) ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ n ข้อ

b = เวคเตอร์ (Vector) ค่าความยากของข้อสอบ n ข้อ

หลังจากการสอบได้ทราบค่าสังเกต $U_{ij} = u_{ij}$ จะเรียก $P(U|\theta,a,b)$ ว่าฟังก์ชันไลค์ลิฮูด (Likelihood Function) ดังนี้

$$L(u|\theta, a, b) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$$

เมื่อ

$L(u|\theta, a, b)$ = ฟังก์ชันไลค์ลิฮูดของผลการสอบ

u = เวคเตอร์ผลการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด คือ การหาค่าประมาณ θ_i $(i = 1,2,\ldots,N)$ และ a_j, b_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด ปกติจะหาค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ $\ln L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด (ln = Natural Logarithm) เพราะค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ $L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด เป็นค่าเดียวกันกับค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ $\ln L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด แต่การหาค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ $\ln L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุดทำได้ง่ายกว่า ถ้า $\ln L(u|\theta,a,b)$ เป็นฟังก์ชันที่หา

อนุพันธ์ได้ (Derivative : d) และกำหนดให้อนุพันธ์ของ $\ln L(u|\theta,a,b)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$L(u|\theta,a,b) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$$

$$\ln L(u|\theta,a,b) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} [u_{ij} \ln P_{ij} + (1-u_{ij}) \ln Q_{ij}]$$

$$\frac{d \ln L(u|\theta,a,b)}{d\theta_i} = 0 \qquad ; i=1,2,\ldots,N$$

$$\frac{d \ln L(u|\theta,a,b)}{d a_j} = 0 \qquad ; j=1,2,\ldots,n$$

$$\frac{d \ln L(u|\theta,a,b)}{d b_j} = 0 \qquad ; j=1,2,\ldots,n$$

การหาค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ $\ln L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด ไม่สามารถหาได้ด้วยการใช้วิธีอย่างง่ายหาค่ารากของสมการจากอนุพันธ์ของ $\ln L(u|\theta,a,b)$ เพราะอนุพันธ์ของ $\ln L(u|\theta,a,b)$ เป็นสมการที่มีความซับซ้อน แต่อาจหาได้โดยใช้เทคนิค Newton Raphson (Lord 1980: 179-191)

การประมาณค่าความสามารถ θ_i และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j ด้วยเทคนิค Newton-Raphson ซึ่งเป็นการหาค่าประมาณโดยการหาค่าซ้ำ (Iterative) มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าความสามารถ θ_i และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j

ค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าความสามารถ θ_i

$$\theta_i^{(o)} = \ln [(x_i)/(n-x_i)]$$

เมื่อ

ln = Natural Logarithm

x_i = คะแนนสอบของคนที่ i

n = จำนวนข้อสอบ

การหาค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j อาจใช้ค่าประมาณที่ได้จากวิธี Heuristic หรือค่าอื่น ๆ ที่เหมาะสม

<u>ขั้นที่ 2</u> ประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบแต่ละคน θ_i โดยกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ประมาณค่าได้ในครั้งก่อนเป็นค่าคงที่ ดังนี้

$$\theta_i^{(m+1)} = \theta_i^{(m)} + [g(\theta_i^{(m)})]/[I(\theta_i^{(m)})]$$

เมื่อ

$\theta_i^{(m+1)}, \theta_i^{(m)}$ = ค่าประมาณความสามารถของคนที่ i ครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m

$g(\theta_i^{(m)})$ = $d \ln L(u|\theta,a,b)/d\theta_i$

$I(\theta_i^{(m)})$ = Information Function

ประมาณค่าซ้ำ (Iterative) จนกว่าค่าประมาณความสามารถ θ_i จะคอนเวอร์เจน (Convergen) คือ ค่าประมาณครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m มีค่าแตกต่างกันน้อยกว่าค่าคงที่ที่กำหนดไว้ เช่น 0.01

ขั้นที่ 3 ประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบแต่ละข้อ a_j และ b_j โดยกำหนดให้ค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ประมาณค่าได้ในครั้งก่อนเป็นค่าคงที่ดังนี้

$$X_j^{(m+1)} = X_j^{(m)} + [g(X_j^{(m)})]/[I(X_j^{(m)})]$$

เมื่อ

X_j = เวคเตอร์ของค่า a และ b ของข้อสอบข้อที่ j

$X_j^{(m+1)}, X_j^{(m)}$ = ค่าประมาณพารามิเตอร์ของข้อสอบข้อที่ j ครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m

$g(X_j^{(m)})$ = $d \ln L(u|\theta,a,b)/d\ X_j$

$I(X_j^{(m)})$ = เมตริกซ์ (Matrix) ของ Information Function

ประมาณค่าซ้ำ (Iterative) จนกว่าค่าประมาณจะคอนเวอร์เจน (Convergence)

ขั้นที่ 4 ประมาณค่าซ้ำ ขั้นที่ 2 และ ขั้นที่ 3 จนกว่าค่าประมาณ θ_i, a_j และ b_j จะมีค่าคงที่และมีความถูกต้องเพียงพอ หรือทำให้ $L(u|\theta,a,b)$ มีค่าสูงที่สุด

ตารางที่ 1 อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ $\ln L(u|\theta,a,b)$ และ Information Function

พารามิเตอร์ (Parameter)	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Derivative)	Information Function
θ_i	$D \sum_{j=1}^{n} a_j(u_{ij} - P_{ij})$	$D^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 P_{ij}(1-P_{ij})$
a_i	$D \sum_{i=1}^{N} (\theta_i-b_j)(u_{ij} - P_{ij})$	$D^2 \sum_{i=1}^{N} (\theta_i-b_j)^2 P_{ij}(1-P_{ij})$

พารามิเตอร์ (Parameter)	อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Derivative)	Information Function
b_i	$- D \sum_{i=1}^{N} a_j(u_{ij} - P_{ij})$	$D^2 \sum_{i=1}^{N} a_j^2 P_{ij} (1-P_{ij})$

$$P_{ij} = [1 + \exp\{-Da_j (\theta_i - b_j)\}]^{-1}$$

$$I(a_j,b_j) = -D^2 a_j \sum_{i=1}^{N} (\theta_i - b_j) P_{ij}(1-P_{ij})$$

3. **วิธีของเบส์** (Bayesian)

กำหนดให้ U_{ij} เป็นตัวแปรแสดงผลการตอบข้อสอบข้อที่ j ($j = 1,2,\ldots,n$) ของผู้เข้าสอบคนที่ i ($i=1,2,\ldots,N$) (ตอบถูก $U_{ij} = 1$ ตอบผิด $U_{ij} = 0$) $P_{ij} = P_j(\theta_i) = P(U_{ij} = 1|\theta)$ แสดงความน่าจะเป็นในการตอบถูก $Q_{ij} = 1-P_{ij}$ แสดงความน่าจะเป็นในการตอบผิด และความน่าจะเป็นในการตอบถูก P_{ij} แสดงได้ด้วยฟังก์ชันโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ ถ้าแบบสอบมีความเป็นมิติเดียว (Unidimension) และมีความเป็นอิสระเฉพาะที่ (Local Independence) ความน่าจะเป็นร่วมในการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน คือ

$$P(U|\theta,a,b) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{U_{ij}} Q_{ij}^{1-U_{ij}}$$

เมื่อ

$P(U|\theta,a,b)$ = ความน่าจะเป็นในการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

U = เวคเตอร์ของตัวแปรที่แสดงผลการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

θ = เวคเตอร์ความสามารถของผู้เข้าสอบ N คน

a = เวคเตอร์ค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ n ข้อ

b = เวคเตอร์ค่าความยากของข้อสอบ n ข้อ

หลังจากทราบผลการสอบ $U_{ij} = u_{ij}$ จะเรียก $P(U|\theta,a,b)$ ว่า ฟังก์ชันไลค์ลิฮูด (Likelihood Function)

$$L(u|\theta,a,b) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{n} P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}}$$

เมื่อ

$L(u|\theta,a,b)$ = ฟังก์ชันไลค์ลิฮูดของผลการสอบ

u = เวคเตอร์ผลการตอบข้อสอบ n ข้อของผู้เข้าสอบ N คน

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์ มีแนวความคิดว่า (1) ค่าความสามารถ θ และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a และ b เป็นตัวแปรสุ่ม (Random Variable) จากการแจกแจงที่แสดงได้ด้วยฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (Density Function) $f(\theta,a,b)$ ฟังก์ชัน $f(\theta,a,b)$ คือ การแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) ของค่า θ, a และ b (2) การใช้ $L(u|\theta,a,b)$ เพียงอย่างเดียวในการประมาณค่า θ, a และ b เป็นการใช้ข้อมูลที่มีอยู่อย่างไม่ครบถ้วน ยังมีการแจกแจงร่วม $f(\theta,a,b)$ ที่ควรนำมาใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย คือถ้าพิจารณาความน่าจะเป็นร่วมของการตอบข้อสอบ $P(U|\theta,a,b)$ จะเห็นว่าการแจกแจงของตัวแปร U ขึ้นอยู่กับค่าความสามารถ θ และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a และ b ถ้าค่า θ, a และ b เปลี่ยนไป โอกาสที่ตัวแปร U มีค่าเท่ากับ u จะเปลี่ยนไปด้วย ดังนั้น

การทราบผลการตอบข้อสอบ u จึงน่าจะช่วยทำให้ทราบค่า θ, a และ b ได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งอาจแสดงได้ด้วยการแจกแจงอย่างมีเงื่อนไขของค่า θ, a และ b เมื่อทราบผลการตอบข้อสอบ f(θ,a,b|u) ที่เรียกว่า การแจกแจงโพสทีเรีย (Posterior Distribution)

การแจกแจงโพสทีเรียร่วมของค่าความสามารถ θ และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a และ b เมื่อทราบผลการตอบข้อสอบ u คือ

$$f(\theta,a,b|u) = \frac{L(u|\theta,a,b)\ f(\theta,a,b)}{f(u)}$$

เมื่อ

f(u) = การแจกแจงมาร์จินัล (Marginal) ของผลการตอบข้อสอบ

f(θ,a,b) = การแจกแจงเริ่มแรกของค่า θ, a และ b

L(u|θ,a,b) = ฟังก์ชันไลค์ลิฮูด

f(θ,a,b|u) = การแจกแจงโพสทีเรียของค่า θ, a และ b เมื่อทราบผลการตอบข้อสอบ u

การแจกแจงโพสทีเรียเป็นฟังก์ชันที่ใช้ในการประมาณค่า θ, a และ b ด้วยวิธีของเบส์ มีส่วนที่แตกต่างจากการประมาณค่า θ, a และ b ด้วยวิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด คือ การแจกแจงมาร์จินัล (Marginal Distribution) f(u) และการแจกแจงเริ่มแรก f (θ,a,b)

การแจกแจงมาร์จินัล f(u) เป็นการแจกแจงที่ไม่ขึ้นอยู่กับค่า θ, a และ b จึงถือว่าเป็นค่าคงที่ในการประมาณค่า θ, a และ b

สำหรับการแจกแจงเริ่มแรก f(θ,a,b) มีการกำหนดลักษณะของการแจกแจง 2 ขั้น คือ (Swaminathan and Gifford 1985, 351-356)

(1) กำหนดให้การแจกแจงเริ่มแรกของค่าความสามารถ θ ค่าอำนาจจำแนก a และค่าความยาก b เป็นอิสระต่อกัน

$$f(\theta,a,b) = f(\theta)\cdot f(a)\cdot f(b)$$

และกำหนดลักษณะของการแจกแจงของ f(θ), f(a) และ f(b) มีดังนี้

การแจกแจงเริ่มแรกของค่าความสามารถ f(θ) มีข้อตกลงว่า การแจกแจงเริ่มแรกของค่าความสามารถของผู้เข้าสอบแต่ละคนไม่แตกต่างกัน สามารถใช้แทนกันได้ (Exchangeable) และการแจกแจงของค่าความสามารถเป็นการแจกแจงปกติ (Normal Distribution)

$$f(\theta_i, \mu_\theta, \Phi_\theta^2) = N(\mu_\theta, \Phi_\theta^2)$$

เมื่อ

$N(\mu_\theta, \Phi_\theta^2)$ = การแจกแจงปกติ (Normal Distribution) ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_θ และค่าความแปรปรวนเท่ากับ Φ_θ^2

การแจกแจงเริ่มแรกของค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ f(a) มีข้อตกลงว่า f(a) มีการแจกแจงแบบไคว์ (Chi Distribution)

$$f(a_j|v_j,w_j) = [w_j^{(v/2)}\, 2^{(v/2-1)}\, \Gamma(v_j/2)]^{-1}\, a_j^{v-1} \exp(-a_j^2/2w_j)$$

เมื่อ

v_j = Degree of Freedom

w_j = Scale Parameter

$\Gamma(\ )$ = Gamma Function

การแจกแจงเริ่มแรกของค่าความยากของข้อสอบ f(b) อาจจะกำหนดข้อตกลงว่า f(b) มีการแจกแจงเป็นการแจกแจงปกติ (Normal Distribution) หรือจะไม่กำหนดการแจกแจงเริ่มแรกไว้ก็ได้ (Swaminathan and Gifford 1985: 35)

(2) กำหนดลักษณะการแจกแจง หรือ ค่าที่เป็นตัวเลขของพารามิเตอร์ของการแจกแจงเริ่มแรก

พารามิเตอร์ของการแจกแจงเริ่มแรกของค่าความสามารถ θ ได้แก่ μ_θ และ Φ_θ^2 อาจจะกำหนดให้ $\mu_\theta = 0$ และ $\Phi_\theta^2 = 1$ ซึ่งจะทำให้การประมาณค่าความสามารถ θ มีความสะดวกและประมาณค่าได้รวดเร็วขึ้น (Swaminathan and Gifford 1985: 351-353)

พารามิเตอร์ของการแจกแจงเริ่มแรกของค่าอำนาจจำแนก a ได้แก่ v_j และ w_j การกำหนดค่าของ v_j และ w_j ที่เหมาะสม อาจจะหาได้จากการกำหนดพิสัย (Range) ของค่า a คือ ถ้าให้ H เป็นขีดจำกัดบนของพิสัยและให้ L เป็นขีดจำกัดล่างของพิสัย จะหาค่า v_j และ w_j ได้จากสูตร

$$v_j = 1/2\ [1 + Z^2_{1/2\alpha}\{(H+L)/(H-L)\}^2]$$

$$w_j = 1/2\ [(H-L)/Z_{1/2\alpha}]^2$$

เมื่อ

$Z_{1/2\alpha}$ = ค่า Z ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) ที่ระดับนัยสำคัญ α

v_j = Degree of Freedom (ควรทำให้เป็นจำนวนเต็มบวก เพื่อให้หาค่าของ Gamma Function ได้ง่ายขึ้น)

นอกจากวิธีดังกล่าว อาจจะกำหนดให้ $v_j = 10$ และ $w_j = 0.1$ ของการแจกแจงเริ่มแรก f(a) ของข้อสอบทุกข้อเท่ากัน ซึ่งจะทำให้มีความสะดวกในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a_j (Swaminathan and Gifford 1985: 356-357)

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบด้วยวิธีของเบส์ คือ การหาค่าประมาณ θ_i (i = 1,2,...,N) และ a_j, b_j (j = 1,2,...,n) ที่ทำให้ฟังก์ชันโพสทีเรีย f(θ,a,b|u) มีค่าสูงที่สุด ปกติจะหาค่า θ_i, a_j และ b_j ที่ทำให้ ln f(θ,a,b|u) มีค่าสูงที่สุด ถ้า ln f(θ,a,b|u) เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (Derivative : d) การหาค่า θ_i, a_j และ b_j จะหาได้จากการหาอนุพันธ์ของ ln f(θ,a,b|u) และกำหนดให้อนุพันธ์ของ ln f(θ,a,b|u) มีค่าเท่ากับศูนย์ แล้วหาค่ารากของอนุพันธ์ของ ln f(θ,a,b|u) สำหรับการหาอนุพันธ์ของ ln f(θ,a,b|u) และกำหนดให้อนุพันธ์ของ ln f(θ,a,b|u) = 0 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$f(\theta,a,b|u) = L(u|\theta,a,b) \cdot f(\theta) \cdot f(a)\ /\ f(u)$$

$$\ln f(\theta,a,b|u) = \ln L(u|\theta,a,b)+\ln f(\theta)+\ln f(a)+\text{constant}$$

$$\frac{d \ln f(\theta,a,b|u)}{d \theta_i} = 0$$

$$\frac{d \ln f(\theta,a,b|u)}{d a_j} = 0$$

$$\frac{d \ln f(\theta,a,b|u)}{d b_j} = 0$$

สมการอนุพันธ์ของ $\ln f(\theta,a,b|u) = 0$ เรียกว่า สมการโมดัล (Modal Equation) ค่ารากของสมการโมดัล คือ ค่าความสามารถ θ และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a, b ที่ทำให้ฟังก์ชันโพสทีเรียมีค่าสูงที่สุด อาจจะหาได้โดยใช้เทคนิค Newton-Raphson

การประมาณค่าความสามารถ θ_i และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j ด้วยเทคนิค Newton-Raphson ซึ่งเป็นการหาค่าประมาณโดยการหาค่าซ้ำ (Iterative) มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> กำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าความสามารถ θ_i และค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j

ค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าความสามารถ θ_i

$$\theta_i^{(0)} = \ln [x_i/(n-x_i)]$$

เมื่อ

$\ln$ = Natural Logarithm

x_i = คะแนนสอบของคนที่ i

n = จำนวนข้อสอบ

ค่าเริ่มต้นสำหรับใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ a_j และ b_j

$$a_j^{(o)} = R_j/(1 - R_j^2)^{1/2}$$

$$b_j^{(o)} = Z_j/R_j$$

เมื่อ

R_j = Point-biserial Correlation

Z_j = ค่า Z ของการแจกแจงปกติมาตรฐานที่พื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานด้านขวามือมีค่าเท่ากับ P_j

$$(P_j = \sum_{i=1}^{N} u_{ij}/N)$$

<u>ขั้นที่ 2</u> ประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบแต่ละคน θ_i โดยกำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ประมาณค่าได้ในครั้งก่อนเป็นค่าคงที่

$$\theta_i^{(m+1)} = \theta_i^{(m)} - [g(\theta_i^{(m)})]/[h(\theta_i^{(m)})]$$

เมื่อ

$\theta_i^{(m+1)}, \theta_i^{(m)}$ = ค่าประมาณความสามารถของคนที่ i ครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m

$g(\theta_i^{(m)})$ = $d \ln f(\theta,a,b|u)/d\,\theta_i$ (อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง First Derivative)

$h(\theta_i^{(m)})$ = $d^2 \ln f(\theta,a,b|u)/d\,\theta_i^2$ (อนุพันธ์อันดับที่สอง Second Derivative)

ประมาณค่าซ้ำ (Iterative) จนกว่าค่าประมาณความสามารถ θ_i จะคอนเวอร์เจน (Convergence) คือค่าประมาณครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m มีค่าแตกต่างกันน้อยกว่าค่าคงที่ที่กำหนดไว้ เช่น 0.01

<u>ขั้นที่</u> 3 ประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบแต่ละข้อ a_j และ b_j โดยกำหนดให้ค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ประมาณค่าได้ในครั้งก่อนเป็นค่าคงที่

$$a_j^{(m+1)} = a_j^{(m)} - [g(a_j^{(m)})]/[h(a_j^{(m)})]$$

$$b_j^{(m+1)} = b_j^{(m)} - [g(b_j^{(m)})]/[h(b_j^{(m)})]$$

เมื่อ

$a_j^{(m+1)}, a_j^{(m)}$ = ค่าประมาณอำนาจจำแนกของข้อสอบข้อที่ j ครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m

$b_j^{(m+1)}, b_j^{(m)}$ = ค่าประมาณความยากของข้อสอบข้อที่ j ครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m

$g(a_j^{(m)})$ = $d \ln f(\theta,a,b|u)/d\, a_j$ (อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง First Derivative)

$h(a_j^{(m)})$ = $d^2 \ln f(\theta,a,b|u)/d\, a_j^2$ (อนุพันธ์อันดับที่สอง Second Derivative)

$g(b_j^{(m)})$ = $d \ln f(\theta,a,b|u)/d\, b_j$ (อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง First Derivative)

$h(b_j^{(m)})$ = $d^2 \ln f(\theta,a,b|u)/d\, b_j^2$ (อนุพันธ์อันดับที่สอง Second Derivative)

ประมาณค่าซ้ำ (Iterative) จนกว่าค่าประมาณจะคอนเวอร์เจน (Convergence)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง g( ) และอนุพันธ์อันดับที่สอง h ( ) มีส่วนประกอบสองส่วน คือ (1) ส่วนที่ได้จากฟังก์ชันไลค์ลิฮูด (Likelihood Function) และ (2) ส่วนที่ได้จากการแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) ส่วนประกอบทั้งสองส่วนนี้แสดงไว้ในตารางที่ 2

<u>ขั้นที่ 4</u> ประมาณค่าซ้ำ ขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 จนกว่าค่าประมาณ θ_i, a_j และ b_j จะมีค่าคงที่และมีความถูกต้องเพียงพอ หรือทำให้ $f(\theta,a,b|u)$ มีค่าสูงที่สุด

<u>ตารางที่ 2</u> อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์อันดับที่สองของ $f(\theta,a,b|u)$

พารามิเตอร์ (Parameter)		อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Derivative)	อนุพันธ์อันดับที่สอง Second Derivative
θ_i	Likelihood	$D \sum_{j=1}^{n} a_j(u_{ij} - P_{ij})$	$-D^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 P_{ij}(1-P_{ij})$
	Prior	$-\theta_i$	-1
a_i	Likelihood	$D \sum_{i=1}^{N} (\theta_i-b_j)(u_{ij} - P_{ij})$	$-D^2 \sum_{i=1}^{N} (\theta_i-b_j)^2 P_{ij}(1-P_{ij})$
	Prior	$(v_j - 1)/a_j - a_j / w_j$	$- (v_j - 1)/ a_j^2 - 1/w_j$
b_i	Likelihood	$- D \sum_{i=1}^{N} a_j(u_{ij} - P_{ij})$	$- D^2 \sum_{i=1}^{N} a_j^2 P_{ij} (1-P_{ij})$

$$P_{ij} = [1 + \exp\{-Da_j (\theta_i - b_j)\}]^{-1}$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติก

รายงานการวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกด้วยวิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูดและวิธีของเบส์ มีดังต่อไปนี้

1. **วิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด** (Maximun Likelihood : ML)

ลอร์ด (Lord 1968: 989-1020) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสามพารามิเตอร์ด้วยวิธี ML โดยใช้ผลการสอบจากแบบสอบ SAT (Scholastic Aptitude Test) ฉบับภาษา (Verbal) ฟอร์ม MSA 33 ของผู้เข้าสอบ 2,862 คน พบว่า (1) การประมาณค่าความสามารถและค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบ ต้องคัดผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบถูกทุกข้อหรือผู้เข้าสอบที่ตอบผิดทุกข้อ และข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบถูกหรือข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบผิด ออกจากการประมาณค่าฯ เพราะการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี ML ไม่สามารถประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ได้คะแนนเต็มหรือได้ศูนย์คะแนน และไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบถูกหรือทุกคนตอบผิด (2) การประมาณค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบบางข้อ ได้ค่าประมาณที่ไม่คอนเวอร์เจน (ไม่สามารถประมาณค่าที่ทำให้ค่าประมาณครั้งที่ m+1 และครั้งที่ m มีค่าแตกต่างกันน้อยกว่าค่าคงที่ที่กำหนดไว้) (3) การประมาณค่าการเดา (Guessing Parameter: c) ของข้อสอบบางข้อได้ค่าประมาณที่ไม่ถูกต้อง เช่น ค่า c มีค่าเป็นลบหรือมีค่ามากผิดปกติ เนื่องจากการประมาณค่าอำนาจจำแนก (a) ที่ได้ค่าประมาณไม่คอนเวอร์เจน หรือการประมาณค่าการเดา (c) ที่ได้ค่าประมาณที่ไม่ถูกต้อง อาจมีผลทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบข้ออื่น ๆ แปรปรวนไปด้วย ลอร์ดจึงแก้ปัญหาโดย (1) กำหนดขีดจำกัดบน (Upper Limit) ของค่าอำนาจจำแนก (a) ไว้ที่ 2.0 และ (2) กำหนดพิสัย (Range) ให้ค่า c มีค่าอยู่ในช่วง 0.0 ถึง 0.2 จากการกำหนดพิสัยของค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังกล่าว ลอร์ดพบว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ ได้ค่าประมาณที่มีความเหมาะสมและถูกต้องมากขึ้น ซึ่งเมื่อลอร์ดศึกษาซ้ำก็ปรากฏผลเหมือนเดิม คือในปี ค.ศ. 1975 ลอร์ด (cite by Hambleton et al. 1978: 480) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสามพารามิเตอร์ด้วยวิธี ML โดยใช้วิธีจำลองสถานการณ์ (Simulation) จำลองผลการตอบข้อสอบ 90 ข้อ ของผู้เข้าสอบ 2,995 คน พบว่าการประมาณค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ 3 ข้อ ได้ค่าประมาณที่ไม่คอนเวอร์เจน (Convergence) แต่เมื่อกำหนดขีดจำกัดบนของค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบทั้ง 3 ข้อดังกล่าวไว้ที่ 1.75 การ

ประมาณค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบทุกข้อ ได้ค่าประมาณที่มีความสอดคล้องกับค่าอำนาจจำแนกจริงที่ได้จำลองไว้ ($r_{a\hat{a}}$ = 0.92)

ฮูลินและคณะ (Hulin et al. 1983: 101-103) ได้ใช้วิธีจำลองสถานการณ์ (Simulation) ศึกษาเกี่ยวกับความถูกต้องในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกด้วยวิธี ML พบว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์จะมีความถูกต้องเพียงพอ ถ้าแบบสอบมีข้อสอบอย่างน้อย 30 ข้อ และขนาดของกลุ่มตัวอย่างไม่น้อยกว่า 200 คน เพราะ (1) รากที่สองของค่าเฉลี่ยของค่ายกกำลังสองของความแตกต่างระหว่างโค้งลักษณะข้อสอบของค่าพารามิเตอร์จริงกับโค้งลักษณะข้อสอบของค่าประมาณ (Root Mean Squared Error: RMSE) มีค่าน้อย (RMSE = 0.07) (2) ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างค่าความสามารถจริง (θ) กับค่าประมาณความสามารถ ($\hat{\theta}$) มีค่าสูง ($r_{\theta\hat{\theta}}$ = 0.90) ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของ Tsutakawa (1984: 263-264) ที่ใช้วิธีจำลองสถานการณ์ (Simulation) จำลองผลการตอบข้อสอบ 50 ข้อ ของผู้เข้าสอบ 200 คน แล้วประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ด้วยวิธี ML โดยพบว่าค่าเฉลี่ยของค่ายกกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าพารามิเตอร์จริงกับค่าประมาณ (Mean Squared Difference: MSD) มีค่าน้อย (MSD ของ a = 0.0324 และ MSD ของ b = 0.0552)

2. **วิธีของเบส์** (Bayesian Method: Bayes)

สวามินาทานและกิฟฟอร์ด (Swaminathan and Gifford 1982: 175-191) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบหนึ่งพารามิเตอร์ หรือราสช์โมเดล (Rasch Model) ด้วยวิธีของเบส์โดยการจำลองสถานการณ์ พบว่า (1) วิธีของเบส์สามารถประมาณค่าได้อย่างถูกต้อง (2) วิธีของเบส์สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบถูกหรือข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบผิด (3) วิธีของเบส์สามารถประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบถูกหมดทุกข้อหรือผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบผิดหมดทุกข้อ

ต่อมาในปี ค.ศ. 1985 สวามินาทานและกิฟฟอร์ด (Swaminathan and Gifford 1985: 349-364) ได้พัฒนาวิธีของเบส์เพิ่มเติม และนำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ โดยการจำลองสถานการณ์ จำลองผลการตอบข้อสอบ 15 ข้อ 25 ข้อและ 35 ข้อ ของผู้เข้าสอบ 50 คน 100 คน 200 คน และ 500 คน พบว่า (1) ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ความยาก (b) กับค่าประมาณความยาก ($\hat{b}$) ($r_{b\hat{b}}$) มีค่าสูง คือมีค่าตั้งแต่ 0.990 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 15 ข้อผู้เข้าสอบ 50 คน ถึง 0.996 สำหรับ

แบบสอบที่มีข้อสอบ 35 ข้อ ผู้เข้าสอบ 500 คน (2) ค่า $r_{a\hat{a}}$ มีค่าค่อนข้างสูง คือมีค่าตั้งแต่ 0.706 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 15 ข้อผู้เข้าสอบ 50 คน ถึง 0.935 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 35 ข้อ ผู้เข้าสอบ 500 คน โดยทั่วไปถ้ากลุ่มตัวอย่างและจำนวนข้อสอบมีขนาดและจำนวนมากขึ้น ค่า $r_{a\hat{a}}$ จะมีค่ามากขึ้นด้วย ยกเว้นบางกลุ่มตัวอย่างมีค่าลดลงเล็กน้อย (3) ค่า MSD (Mean Squared Difference) ของค่าประมาณความยาก (b) มีค่าต่ำ คือมีค่าจาก 0.041 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 15 ข้อผู้เข้าสอบ 50 คน ถึง 0.009 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 35 ข้อผู้เข้าสอบ 500 คน (4) ค่า MSD ของค่าประมาณอำนาจจำแนก (a) มีค่าต่ำ คือ มีค่าจาก 0.041 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 15 ข้อผู้เข้าสอบ 50 คน ถึง 0.012 สำหรับแบบสอบที่มีข้อสอบ 35 ข้อผู้เข้าสอบ 500 คน

จากรายงานงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังกล่าวข้างต้นสรุปได้ดังนี้

1. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกด้วยวิธีแมกซิมัมไลค์ลิฮูด (ML)

1.1 การประมาณค่าอำนาจจำแนก (a) ของข้อสอบบางข้อ อาจได้ค่าประมาณที่ไม่คอนเวอร์เจน (Convergence)

1.2 ไม่สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบถูก หรือข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบผิด

1.3 ไม่สามารถประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบถูกทุกข้อหรือผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบผิดทุกข้อ

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกด้วยวิธีของเบส์ (Bayes)

2.1 การประมาณค่าอำนาจจำแนก (a) ของข้อสอบทุกข้อ ได้ค่าประมาณที่คอนเวอร์เจน (Convergence) โดยใช้การแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) ควบคุมพิสัย (Range) ของค่าประมาณอำนาจจำแนก ($\hat{a}$)

2.2 สามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบถูก หรือข้อสอบที่ผู้เข้าสอบทุกคนตอบผิด

2.3 สามารถประมาณค่าความสามารถของผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบถูกทุกข้อ หรือผู้เข้าสอบที่ตอบข้อสอบผิดทุกข้อ

3. ขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่ควรใช้ในการศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของโมเดลโลจิสติกแบบสองพารามิเตอร์ ควรมีจำนวนผู้เข้าสอบไม่น้อยกว่า 200 คน และจำนวนข้อสอบไม่น้อยกว่า 30 ข้อ เพราะจะทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์มีความถูกต้องเพียงพอ คือ ค่าสหสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์กับค่าประมาณมีค่าสูงกว่า 0.90 และค่า RMSE มีค่าต่ำกว่า 0.07