บทที่ 2

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานเรย์ลี

2.1 แบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานเรย์ลี

พิจารณาคานแบบอ่อนตัวปลายยึดความยาว L^* พื้นที่หน้าตัด A^* ความหนาแน่น ρ^* มีโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดคานเป็น I^* และค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นของยังส์เป็น E^* ดังรูปที่ 2.1 สมมติว่าคานนี้สอดคล้องตามสมมติฐานของเรย์ลี ดังนี้

- พิจารณาผลของการสั่นเพียงหนึ่งมิติ
- พารามิเตอร์ต่าง ๆ ของคานมีค่าคงที่ตลอดความยาวคาน
- ไม่พิจารณาผลของการเปลี่ยนรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือน

ให้ $w^*(x^*, t)$ แทนการกระจัดตามขวาง (transverse displacement) ของคานที่ตำแหน่ง x^* เวลา t ใด ๆ จากหลักการของแฮมิลตัน (Hamilton's principle) จะสามารถแสดงได้ว่าสมการพลวัตของระบบคือ [1]

$$\rho A w_{tt}(x,t) + w_{xxxx}(x,t) - \rho I w_{xxtt}(x,t) = 0 \qquad x \in [0,1] \tag{2.1}$$

และจากเงื่อนไขขอบแบบปลายยึด จะได้ว่า

$$w(0,t) = w_x(0,t) = 0 \tag{2.2}$$

โดยตัวแปรทั้งหมดในสมการพลวัตเป็นตัวแปรไร้มิติ (dimensionless) ดังนี้

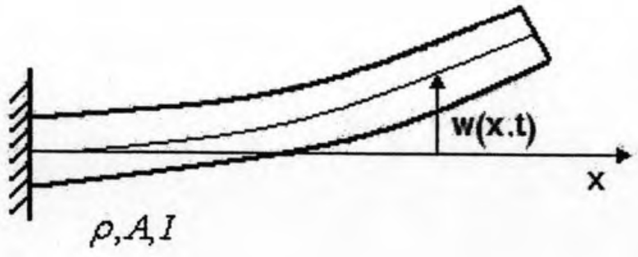
x แทนตำแหน่งไร้มิติตามแนวความยาวคาน $(x = x^*/L^*)$

$w(x,t)$ แทนการกระจัดตามขวางไร้มิติของคานที่ตำแหน่ง x เวลา t $(w(x,t) = w^*(x^*,t)/L^*)$

A แทนพื้นที่หน้าตัดไร้มิติของคาน $(A = A^*/L^{*2})$

ρ แทนความหนาแน่นไร้มิติของคาน $(\rho = \rho^* L^{*6}/E^* I^*)$

I แทนโมเมนต์ความเฉื่อยไร้มิติของพื้นที่หน้าตัดคาน $(I = I^*/L^{*4})$



รูปที่ 2.1: คานเรย์ลีปลายยึด

2.2 แบบจำลองที่ถูกแปลงของคานเรย์ลี

จากหัวข้อที่แล้ว จะเห็นได้ว่าสมการพลวัต (2.1)-(2.2) ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของระบบอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่ในตัวแปรตำแหน่ง และอันดับสองในตัวแปรเวลา ในหัวข้อนี้เราจะแปลงสมการดังกล่าวให้กลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยอันดับสองในตัวแปรตำแหน่งและเวลา ดังต่อไปนี้

ให้

$$u(x,t) = \rho I w_{xx}(x,t) - \rho A w(x,t) \tag{2.3}$$

หาอนุพันธ์เทียบตัวแปรเวลาสองครั้ง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x,t) &= \rho I w_{xxtt}(x,t) - \rho A w_{tt}(x,t) \\
&= w_{xxxx}(x,t) \\
&= \frac{1}{\rho I}\Big(u_{xx}(x,t) + \rho A w_{xx}(x,t)\Big) \\
&= \frac{1}{\rho I}\Big(u_{xx}(x,t) + \frac{A}{I}\Big(u(x,t) + \rho A w(x,t)\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{\rho I}u_{xx}(x,t) + \frac{A}{\rho I^2}u(x,t) + \frac{A^2}{I^2}w(x,t) \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

โดยการพิจารณา (2.3) เสมือนเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในตัวแปร $w(x,t)$ และ $u(x,t)$ เสมือนเป็นพจน์คงที่ซึ่งทราบค่าอยู่แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= w(0,t)\cosh\sqrt{\frac{A}{I}}x + w_x(0,t)\sqrt{\frac{I}{A}}\sinh\sqrt{\frac{A}{I}}x + \frac{1}{\rho\sqrt{AI}}\int_0^x \sinh\Big(\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\Big)u(y,t)dy \\
&= \frac{1}{\rho\sqrt{AI}}\int_0^x \sinh\Big(\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\Big)u(y,t)dy \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

แทน (2.5) ลงใน (2.4) จะได้แบบจำลองที่ถูกแปลง (transformed model) ของคานเรย์ลีปลายยึด คือ

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{\rho I}u_{xx}(x,t) + \frac{A}{\rho I^2}u(x,t) + \frac{A^{3/2}}{\rho I^{5/2}}\int_0^x \sinh\left(\sqrt{\frac{A}{I}}(x-y)\right)u(y,t)dy \qquad (2.6)$$

แทน $x = 0$ ใน (2.3) และจากเงื่อนไขขอบแบบปลายยึด จะได้เงื่อนไขขอบของแบบจำลองที่ถูกแปลงดังนี้

$$u(0,t) = \rho I w_{xx}(0,t) \qquad (2.7)$$

จากเทคนิคการแยกตัวแปร (seperation of variables technique) จะสามารถเห็นได้ชัดว่า หากปราศจากการควบคุม ระบบ (2.1)-(2.2) จะไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นในหัวข้อต่อไปเราจะออกแบบตัวควบคุมที่ขอบที่ทำให้เสถียรสำหรับระบบ (2.1)-(2.2) ทว่าเราจะพิจารณาปัญหาดังกล่าวกับแบบจำลองที่ถูกแปลง (2.6)-(2.7) แทนการพิจารณาโดยตรงกับระบบ (2.1)-(2.2)

2.3 สรุป

ในบทนี้ได้เสนอแบบจำลองคณิตศาสตร์ของคานเรย์ลีซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสี่ในตัวแปรตำแหน่ง และอันดับสองในตัวแปรเวลา จากนั้นได้นิยามตัวแปรเพื่อแปลงสมการดังกล่าวให้กลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์-ปริพันธ์ย่อยอันดับสองในตัวแปรตำแหน่งและเวลา ซึ่งเราจะใช้แบบจำลองที่ถูกแปลงนี้ในการพิจารณาปัญหาต่าง ๆ ต่อไป