

การคลุมกราฟปะติดด้วยคลิก



นายวรรณพล พิมพะสาตี

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2551
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CLIQUE COVERINGS OF GLUED GRAPHS

Mr. Wannapol Pimpasalee

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics

Faculty of Science

Chulalongkorn University


Academic Year 2008

Copyright of Chulalongkorn University

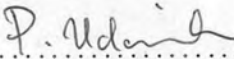
510663

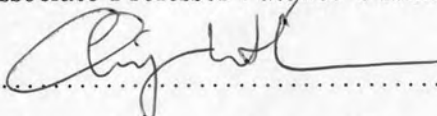
Thesis Title CLIQUE COVERINGS OF GLUED GRAPHS
By Mr. Wannapol Pimpasalee
Field of Study Mathematics
Thesis Principal Advisor Assistant Professor Chariya Uiyyasathian, Ph.D.
Thesis Co-advisor Associate Professor Wanida Hemakul, Ph.D.

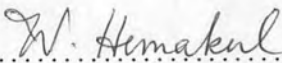
Accepted by the Faculty of Science, Chulalongkorn University in Partial
Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree

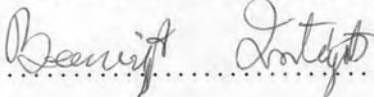

..... Dean of the Faculty of Science
(Professor Supot Hannongbua, Dr.rer.nat.)

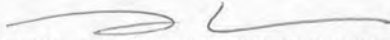
THESIS COMMITTEE


..... Chairman
(Associate Professor Patanee Udomkavanich, Ph.D.)


..... Thesis Principal Advisor
(Assistant Professor Chariya Uiyyasathian, Ph.D.)


..... Thesis Co-advisor
(Associate Professor Wanida Hemakul, Ph.D.)


..... Member
(Boonyarit Intiyot, Ph.D.)


..... External Member
(Assistant Professor Varaporn Saenpholphat, Ph.D.)

วรรณพล พิมพะสาตี : การคลุมกราฟปะติดด้วยคลิก. (CLIQUE COVERINGS OF GLUED GRAPHS) อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก : ผศ. ดร. จริยา อู่ยะเสถียร, อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม : รศ. ดร. วนิดา เหมะกุล, 64 หน้า.

ให้ G เป็นกราฟ การคลุมกราฟ G ด้วยคลิก คือ เซตของคลิกของ G ซึ่งเส้นเชื่อมแต่ละเส้นของ G เป็นเส้นเชื่อมของคลิกอย่างน้อยหนึ่งคลิก จำนวนคลิกคลุมกราฟ G คือ จำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดของการคลุมกราฟ G ด้วยคลิก กราฟปะติด คือ กราฟที่ได้จากการรวมกราฟสองกราฟที่ไม่มีจุดยอดร่วมกัน โดยการปะติดจุดยอด และ เส้นเชื่อมของกราฟย่อยเชื่อมโยงที่มีเส้นเชื่อมอย่างน้อยหนึ่งเส้นของทั้งสองกราฟนั้น ซึ่งเรียกรายย่อยที่กล่าวมาว่า กราฟโคลน และเรียกรายย่อยที่ไม่มีจุดยอดร่วมกันว่า กราฟต้นฉบับ

เราศึกษาหาขอบเขตของจำนวนคลิกคลุมกราฟของกราฟปะติดในพจน์ของจำนวนคลิกคลุมกราฟของกราฟต้นฉบับ นอกจากนี้ เราหาค่าหรือขอบเขตของจำนวนคลิกคลุมกราฟของกราฟปะติด โดยกำหนดกราฟโคลนของกราฟปะติด คือ กราฟบริบูรณ์ K_2 กราฟบริบูรณ์ K_n และกราฟย่อยชักนำของกราฟต้นฉบับทั้งสอง

ภาควิชา.....คณิตศาสตร์.....
สาขาวิชา.....คณิตศาสตร์.....
ปีการศึกษา.....2551.....

ลายมือชื่อนิสิต.....*วรรณพล พิมพะสาตี*.....
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก.....*Charj Hol*.....
ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม.....*W. Hemakul*.....

4972466623 : MAJOR MATHEMATICS

KEY WORDS : CLIQUE COVERINGS / GLUED GRAPHS

WANNAPOL PIMPASALEE : CLIQUE COVERINGS OF GLUED

GRAPHS. THESIS PRINCIPAL ADVISOR : ASST. PROF.

CHARIYA UIYYASATHIAN, Ph.D., THESIS CO-ADVISOR :

ASSO. PROF. WANIDA HEMAKUL, Ph.D., 64 pp.

Let G be a graph. A *clique covering* of a graph G is a set of cliques of G in which each edge of G is contained in at least one clique. The *clique covering number* of G is the smallest cardinality of clique coverings of G . A *glued graph* results from combining two vertex-disjoint graphs by identifying nontrivial connected isomorphic subgraphs of both graphs. Such subgraphs are referred to as the *clones*. The two vertex-disjoint graphs are referred to the *original graphs*.

We study bounds of clique covering numbers of glued graphs in terms of clique covering numbers of their original graphs. Also, we investigate values or bounds of clique covering numbers of glued graphs with specified clones such as a complete graph K_2 , a complete graph K_n and an induced subgraph of both original graphs.

Department :Mathematics....

Student's Signature : Wannapol Pimpasalee

Field of Study :Mathematics....

Principal Advisor's Signature : Chariya Uiyyasathian

Academic Year :2008.....

Co-advisor's Signature : Wanida Hemakul

ACKNOWLEDGEMENTS

I am very grateful to Assistant Professor Dr. Chariya Uiyasathian, my thesis supervisor, for her kind and helpful suggestions and guidance. Without her constructive suggestions and knowledgeable guidance in this study, this research would never have successfully been completed. I am very thankful to my co-advisor, Associate Professor Dr. Wanida Hemakul, for her many suggestions and constant support during this research. I am also sincerely grateful to Associate Professor Dr. Patanee Udomkavanich, Dr. Boonyarit Intiyot and Assistant Professor Dr. Varaporn Saenpholphat, my thesis committee, for their suggestions on this thesis. Moreover, I would like to thank all of my teachers and all lecturers during my study.

In particular, thank to my dear friends for giving me good experience at Chulalongkorn University.

Finally, I feel very grateful to my beloved father, mother and family for their kind and untired encouragement throughout my study.

CONTENTS

| | page |
|---|------|
| ABSTRACT IN THAI | iv |
| ABSTRACT IN ENGLISH | v |
| ACKNOWLEDGEMENTS | vi |
| CONTENTS | vii |
| LIST OF FIGURES | ix |
| CHAPTER | |
| I INTRODUCTION | 1 |
| 1.1 Introduction | 1 |
| 1.2 Definitions and terminologies | 3 |
| II PRELIMINARIES | 19 |
| 2.1 A trivial bound of clique covering numbers of glued graphs | 19 |
| 2.2 New cliques of glued graphs | 21 |
| III GLUED GRAPHS WITHOUT NEW CLIQUES | 25 |
| 3.1 Clique coverings of glued graphs without new cliques | 25 |
| 3.2 Clique coverings of glued graphs at induced clone | 32 |
| IV GLUED GRAPHS AT CLONE K_n | 35 |
| 4.1 Clique coverings of glued graphs at clone K_n | 35 |
| 4.1.1 Properties of $\mathcal{C}[G_1]$ and $\mathcal{C}[G_2]$ for a minimum clique covering \mathcal{C} in glued graphs at clone K_n | 38 |
| 4.1.2 Characterization of clique covering numbers of glued graphs at clone K_n | 46 |
| 4.2 Clique coverings of glued graphs at clone K_2 | 56 |

| | |
|--------------------------------------|----|
| V CONCLUSION AND OPEN PROBLEMS | 59 |
| 5.1 Conclusion | 59 |
| 5.2 Open problems | 62 |
| REFERENCES | 63 |
| VITA | 64 |

LIST OF FIGURES

| | |
|---|----|
| 1.2.1 Example of complete graphs | 3 |
| 1.2.2 Some cliques of a graph | 4 |
| 1.2.1.1 A clique covering of $K_4 - e$ | 5 |
| 1.2.1.2 A clique-independent set of G in Example 1.2.1.4 | 6 |
| 1.2.1.3 A clique covering of G in Example 1.2.1.7 | 7 |
| 1.2.1.4 Graphs G_1 and G_2 in Example 1.2.1.8 | 7 |
| 1.2.1.5 The cocktail party graph of order 8 | 8 |
| 1.2.1.6 e_1 and e_2 in Theorem 1.2.1.15 | 10 |
| 1.2.1.7 e_1, e_2, e_3 and e_4 in Case 1 | 11 |
| 1.2.1.8 A graph G with 5 blocks | 12 |
| 1.2.2.1 Original graphs of a glued graph | 14 |
| 1.2.2.2 A glued graph between G_1 and G_2 with respect to f | 15 |
| 1.2.2.3 A glued graph between G_1 and G_2 at clone H | 15 |
| 1.2.2.4 Original graphs illustrating isomorphisms between clones | 16 |
| 1.2.2.5 Glued graphs with different isomorphisms | 16 |
| 1.2.3.1 A minimum clique covering of a glued graph | 17 |
| | |
| 2.1.1 The sharpness of the lower bound in Remark 2.1.1 | 20 |
| 2.1.2 The sharpness of the upper bound in Remark 2.1.1 | 20 |
| 2.2.1 A glued graph containing new cliques | 21 |
| 2.2.2 New cliques in a glued graph in Example 2.2.2 | 22 |
| 2.2.3 A glued graph containing new cliques with the clique covering number $cc(G_1) + cc(G_2)$ | 23 |

| | |
|--|----|
| 2.2.4 A new clique for G_2 in a glued graph in Example 2.2.4 | 23 |
| 2.2.5 A clique-independent set of a glued graph in Example 2.2.4 | 24 |
| 3.1.1 A counter example of the converse of Corollary 3.1.2 | 26 |
| 3.1.2 $\mathcal{C}[G_1]$, $\mathcal{C}[G_2]$ and $\mathcal{C}[H]$ of a glued graph | 27 |
| 3.1.3 A glued graph without new cliques | 28 |
| 3.1.4 \mathcal{C} , $\mathcal{C}[G_1]$ and $\mathcal{C}[G_2]$ of a glued graph without new cliques | 29 |
| 3.2.1 A glued graph at clone H which is an induced subgraph of G_1 but not an induced subgraph of G_2 | 33 |
| 3.2.2 A glued graph at induced clone | 34 |
| 4.1.1 The sharpness of the lower bound in Theorem 4.1.2 | 37 |
| 4.1.2 The sharpness of the lower bound in Theorem 4.1.2 with $n = 4$ | 37 |
| 4.1.1.1 A glued graph in Example 4.1.1.4 | 41 |
| 4.1.1.2 \mathcal{C} , $\mathcal{C}[G_1]$ and $\mathcal{C}[G_2]$ of a glued graph in Example 4.1.1.4 | 42 |
| 4.1.1.3 A counter example of the converse of Proposition 4.1.1.3 | 43 |
| 4.1.1.4 A glued graph in Example 4.1.1.6 | 44 |
| 4.1.1.5 \mathcal{C} , $\mathcal{C}[G_1]$ and $\mathcal{C}[G_2]$ of a glued graph in Example 4.1.1.6 | 45 |
| 4.1.2.1 A counter example of the converse of Lemma 4.1.2.1 | 47 |
| 4.1.2.2 A counter example of the converse of Lemma 4.1.2.3 | 49 |
| 4.1.2.3 A counter example of the converse of Lemma 4.1.2.5 | 51 |
| 4.1.2.4 A glued graph in Example 4.1.2.11 | 55 |
| 4.1.2.5 Minimum clique coverings of G_1 and G_2 do not contain the clone H ... | 55 |
| 4.1.2.6 $\mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2$ deleting the clone H | 56 |