

บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎี

2.1 ทฤษฎีแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์^[5,6,7,8,9]

ในการวิเคราะห์แกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์โดยทั่วไปสามารถแบ่งออกเป็นสองวิธีหลักตามทฤษฎี ได้แก่ การวิเคราะห์นิวตรอนด้วยวิธีส่งถ่าย หรือทฤษฎีทรานสปอร์ตนิวตรอน (Neutron transport theory) และ ทฤษฎีการแพร่ของนิวตรอน (Neutron diffusion theory) ทฤษฎีทั้งสองมีความซับซ้อนต่างกัน สำหรับงานวิจัยนี้จะนำทฤษฎีการแพร่ของนิวตรอนมาอธิบายคุณลักษณะของการกระจายนิวตรอนฟลักซ์ จากนั้นจึงคำนวณหาค่าวิกฤต การกระจายความหนาแน่นกำลังหรือค่าพิคกำลัง และการเผาผลาญเชื้อเพลิงภายในแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์

2.1.1 ทฤษฎีการแพร่ของนิวตรอนในหนึ่งกลุ่มพลังงาน

ในการอธิบายลักษณะการกระจายของนิวตรอนฟลักซ์จะประยุกต์ทฤษฎีของพิค ซึ่งจะพิจารณาว่าการกระจายของนิวตรอนฟลักซ์มีคุณสมบัติเสมือนก๊าซ ฉะนั้นการกระจายของนิวตรอนจึงเปรียบได้กับการแพร่กระจายของก๊าซ หากพิจารณาว่านิวตรอนที่อยู่ในระบบมีพลังงานเดียว (one speed neutron) คือนิวตรอนที่อยู่ในระดับพลังงานความร้อน (thermal neutron : เทอร์มัลนิวตรอน)

สำหรับอัตราการเปลี่ยนแปลงนิวตรอนฟลักซ์หนึ่งกลุ่มพลังงานแล้ว สามารถสร้างสมการอธิบายได้

$$\begin{bmatrix} \text{อัตราการเปลี่ยนแปลง} \\ \text{ความหนาแน่น} \\ \text{นิวตรอนต่อเวลา} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{ปริมาณความหนาแน่น} \\ \text{นิวตรอนที่รั่วไหล} \\ \text{ออกจากระบบ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{ปริมาณความหนาแน่น} \\ \text{นิวตรอนที่ผลิตขึ้นใน} \\ \text{ระบบจากอันตรกิริยา} \\ \text{แตกตัว} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{ปริมาณความหนาแน่น} \\ \text{นิวตรอนที่ถูกดูดกลืน} \\ \text{ในระบบ} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla \Phi + \left(\frac{v \Sigma_f}{k} + \Sigma_a \right) \Phi \quad (2.2)$$

และเมื่อพิจารณาว่าระบบไม่ขึ้นกับเวลา สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\nabla \cdot D \nabla \Phi + \left(\frac{v \Sigma_f}{k} + \Sigma_a \right) \Phi = 0 \quad (2.3)$$

เมื่อ

D	คือ	ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ มีหน่วยเป็นระยะทาง
Φ	คือ	นิวตรอนฟลักซ์ มีหน่วยเป็น จำนวนนิวตรอน ต่อ หน่วยพื้นที่ต่อหน่วยเวลา Φ เป็นฟังก์ชันของ $\phi(x)$, $\phi(y)$, $\phi(z)$ ในพิกัดฉาก
ν	คือ	จำนวนนิวตรอนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นใหม่ต่อทุก ๆ อันตรกิริยาการแตกตัว
Σ_f	คือ	ค่าภาคตัดขวางมหภาคสำหรับอันตรกิริยาการแตกตัว
Σ_a	คือ	ค่าภาคตัดขวางมหภาคสำหรับอันตรกิริยาการดูดกลืน
k	คือ	ค่าวิกฤต

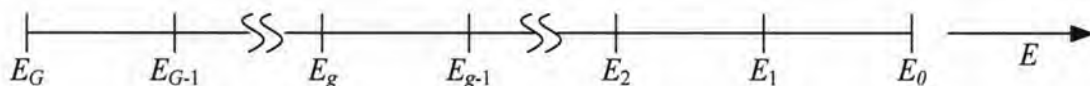
สมการการแพร่ของนิวตรอนหนึ่งกลุ่มพลังงานอาจเพียงพอสำหรับบรรยายลักษณะการกระจายของนิวตรอนฟลักซ์ที่เกิดขึ้นภายใต้สมมติฐานว่านิวตรอนในแกนปฏิกรณ์มีปรากฏที่ระดับพลังงานความร้อนเป็นหลัก อย่างไรก็ตาม แม้ว่าสมมติฐานดังกล่าวจะสามารถใช้บรรยายการกระจายของนิวตรอนฟลักซ์และลักษณะการเกิดอันตรกิริยาโดยส่วนใหญ่ในแกนปฏิกรณ์ได้ แต่ภายใต้สมมติฐานนี้ยังขาดความแม่นยำสำหรับการใช้งานจริงกับทั้งไม่อาจบรรยายผลกระทบของการลดระดับพลังงานของนิวตรอนที่เกิดจากการแตกตัว ซึ่งมีระดับพลังงานสูงถึง 2 เมกะอิเล็กตรอน โวลท์ (MeV) ลงมาสู่ระดับพลังงานความร้อน (ประมาณ 20 meV) ได้

ต้องพิจารณานิวตรอนที่มากกว่าหนึ่งกลุ่มพลังงานนั่นคือการพิจารณาว่านิวตรอนที่เกิดขึ้นในระบบมีระดับพลังงานมากกว่า หนึ่งกลุ่มพลังงานคสมการการแพร่ของนิวตรอนหลายกลุ่มพลังงาน

เพื่อปรับปรุงค่าความแม่นยำของการคำนวณและเพื่อพิจารณาผลกระทบของการลดระดับพลังงานดังกล่าว จึงจำเป็นอย่างยิ่งต้องพิจารณาการลดระดับพลังงานของนิวตรอนอันเนื่องมาจากอันตรกิริยาการกระเจิงด้วย ซึ่งการพิจารณาการลดระดับกำลังในลักษณะต่อเนื่องจะทำให้เกิดความยุ่งยากในทางปฏิบัติ ดังนั้นจึงพิจารณาความเป็นไปได้ที่นิวตรอนในกลุ่มพลังงานหนึ่ง จะเกิดอันตรกิริยาการกระเจิงเป็นผลให้นิวตรอนเปลี่ยนระดับพลังงานเข้าไปอยู่ในกลุ่มพลังงานอื่น ซึ่งความเป็นไปได้ในการลดพลังงานสามารถอธิบายได้ในหัวข้อ 2.1.2

2.1.2 การลดพลังงานของนิวตรอน

ในการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงพลังงานของนิวตรอนด้วยทฤษฎีการแพร่นั้นจะไม่ทำการพิจารณาพลังงาน E แบบต่อเนื่อง แต่จะทำการแบ่งนิวตรอนออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ จำนวน G กลุ่ม โดยนิวตรอนในกลุ่ม G จะมีพลังงานสูงสุดและลดต่ำลงจนถึงพลังงานในกลุ่ม 0



รูปที่ 2.1 การแบ่งพลังงานนิวตรอนเป็น G กลุ่มพลังงาน

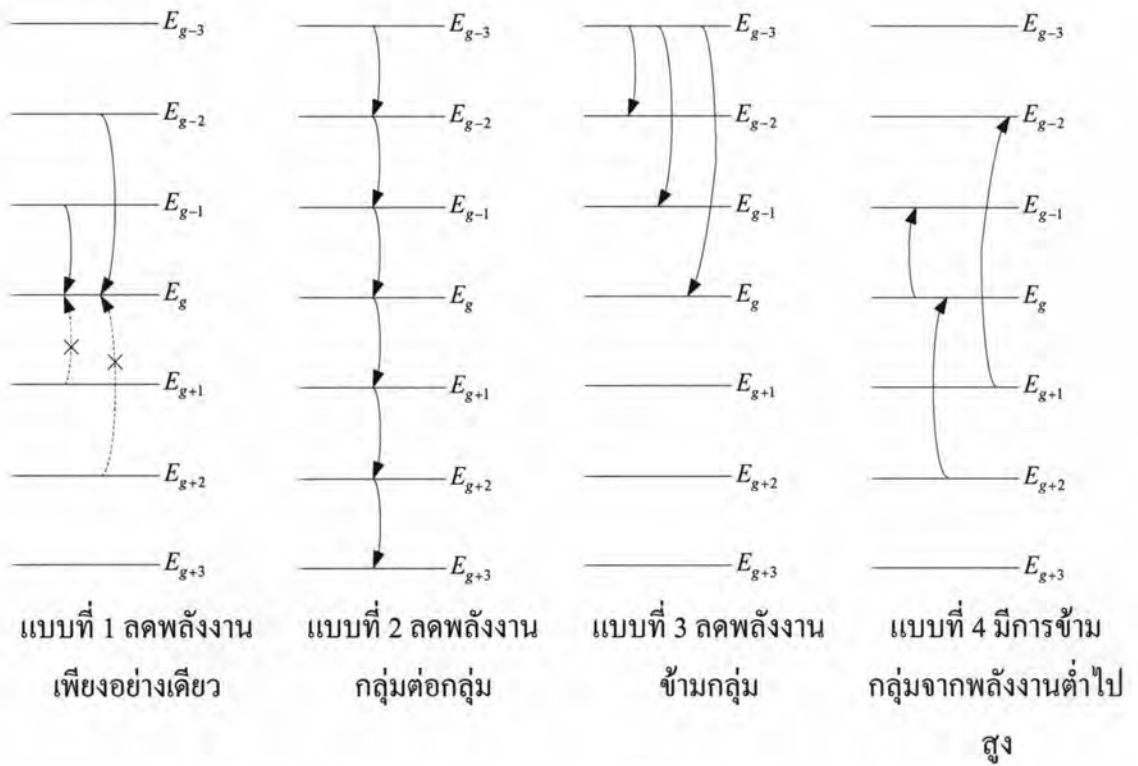
การลดพลังงานของนิวตรอนที่เกิดจากอันตรกิริยาการกระเจิงของนิวตรอนทั้งการกระเจิงแบบยืดหยุ่น (elastic scattering) และการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น โดยการกระเจิงแบบยืดหยุ่นจะเกิดการแลกเปลี่ยนโมเมนตัมระหว่างนิวตรอนกับนิวเคลียส โดยนิวเคลียสที่เกิดอันตรกิริยาจะยังคงอยู่ในสถานะพื้นฐาน (ground state) ส่วนพลังงานรวมของนิวตรอนและนิวเคลียสหลังเกิดอันตรกิริยา จะมีค่าเท่ากับก่อนเกิดอันตรกิริยา ส่วนการกระเจิงแบบไม่ยืดหยุ่น (inelastic scattering) นั้น อันตรกิริยาของนิวตรอนกับนิวเคลียสของอะตอมตัวกลางลักษณะนี้ มีผลให้นิวตรอนรวมเข้ากับนิวเคลียสที่ถูกชนเกิดเป็นนิวเคลียสประกอบ (compound nucleus) ก่อนจะปลดปล่อยนิวตรอนกลับออกมา นิวเคลียสหลังการเกิดอันตรกิริยาจะอยู่ในสถานะถูกกระตุ้น (excited state) ซึ่งจะปลดปล่อยรังสีแกมมาออกมาเพื่อลดระดับพลังงานลงสู่สถานะปกติ อันตรกิริยาลักษณะนี้พลังงานจลน์รวมของนิวเคลียสก่อนและหลังอันตรกิริยาจะมีค่าไม่เท่ากัน โดยที่พลังงานจลน์รวมหลังการเกิดอันตรกิริยามีค่าลดลงเนื่องจากสูญเสียพลังงานจลน์ส่วนหนึ่งไปในรูปการปลดปล่อยรังสีแกมมา

เมื่อนิวตรอนเกิดการกระเจิงขึ้นในระบบ จะทำให้พลังงานภายในเปลี่ยนแปลงไป ดังนั้น จะนิยามองค์ประกอบเพื่ออธิบายการลดพลังงานของนิวตรอน จากกลุ่ม g' ไปเป็นกลุ่ม g โดยแทนค่าภาคตัดขวางมหภาคการกระเจิง $\Sigma_s(E_{g'} \rightarrow E_g)$ หรือเรียกว่าค่าภาคตัดขวางการถ่ายโอนกลุ่มของนิวตรอน (group-transfer cross section) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\Sigma_{s,g'g}$ และความน่าจะเป็นในการเกิดการกระเจิงของนิวตรอนออกจากกลุ่ม g สามารถอธิบายด้วยสมการ

$$\Sigma_{sg} = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sgg'} \quad (2.4)$$

ในการพิจารณาการกระเจิงของนิวตรอนที่มีพลังงานอยู่ระหว่างนั้นสามารถพิจารณาได้เป็น

- การกระเจิงแบบลดพลังงานเพียงอย่างเดียว
- การกระเจิงแบบลดพลังงานกลุ่มต่อกลุ่ม
- การกระเจิงแบบลดพลังงานข้ามกลุ่ม
- การกระเจิงจากกลุ่มพลังงานต่ำกว่าไปยังกลุ่มพลังงานสูงกว่า



รูปที่ 2.2 การกระเจิงของนิวตรอนในรูปแบบต่างๆ

โดยปกติแล้ว การเกิดปฏิกิริยาฟิชชันในแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะเกิดจากนิวตรอนที่อยู่ในพลังงานต่ำ ซึ่งบางครั้งต่ำถึง 1 มิลลิอิเล็กตรอนโวลต์ (meV) ส่วนพลังงานที่เกิดจากปฏิกิริยาฟิชชันจะมีค่าประมาณ 200 MeV และนิวตรอนที่เป็นผลผลิตจากการเกิดปฏิกิริยาฟิชชัน จะมีพลังงานสูงประมาณ 2 MeV อย่างไรก็ตามนิวตรอนที่เป็นผลผลิตจากการเกิดปฏิกิริยาฟิชชันยังสามารถเกิดได้ที่พลังงานอื่นเช่นกัน โอกาสหรือความน่าจะเป็นที่จะเกิดที่พลังงานในกลุ่ม g ใดๆ สามารถแทนได้ด้วยค่า χ_g โดยค่าผลรวมของความน่าจะเป็นในการเกิดนิวตรอนที่พลังงานทุกกลุ่ม จะมีค่าเท่ากับ 1

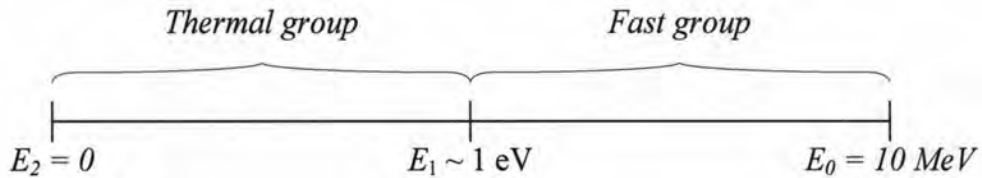
$$\chi_g \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \chi(E) \quad (2.5)$$

และ

$$\sum_{g=1}^G \chi_g = 1 \quad (2.6)$$

พิจารณากลุ่มพลังงานของนิวตรอนในแบบสองกลุ่มพลังงาน คือแบ่งนิวตรอนออกเป็นกลุ่มนิวตรอนกลุ่มพลังงานเร็ว หรือ ฟาสต์นิวตรอน (Fast neutron) และนิวตรอนในกลุ่มพลังงานความร้อน หรือเทอร์มัลนิวตรอน (Thermal Neutron) กล่าวคือนิวตรอนที่มีพลังงานตั้งแต่ 10 MeV ถึง 1 eV จะพิจารณาเป็นนิวตรอนในกลุ่มพลังงานเร็ว และ ตั้งแต่ 1 eV จนถึง 0 eV จะ

พิจารณาว่าเป็นนิวตรอนในกลุ่มพลังงานความร้อน และเรียกพลังงาน ณ จุด E_1 ว่าเป็นจุดตัดออฟของพลังงาน การเลือกจุดตัดออฟของพลังงานจะมีผลต่อการคำนวณการยุบรวมกลุ่มค่าภาคตัดขวางจุลภาคและมหภาค (group collapsing)



รูปที่ 2.3 การแบ่งพลังงานนิวตรอนเป็นสองกลุ่มพลังงาน

จากการแบ่งกลุ่มเป็นสองกลุ่มนี้สามารถกำหนดค่าความน่าจะเป็นในการเกิดของนิวตรอนอันเนื่องมาจากอันตรกิริยาการแตกตัว (χ_g) ได้คือ

$$\chi_1 = \int_{E_1}^{E_0} dE \chi(E) = 1 \quad \text{และ} \quad \chi_2 = \int_{E_1}^{E_2} dE \chi(E) = 0 \quad (2.7)$$

นอกจากนี้จะนิยาม “ค่าคงที่กลุ่ม” (group constant) ต่างๆ ในกลุ่ม g ได้คือ

- D_g คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของการแพร่ในกลุ่ม g
- Φ_g คือ นิวตรอนฟลักซ์ มีหน่วยเป็น จำนวนนิวตรอน ต่อ หน่วยพื้นที่ต่อหน่วยเวลาที่พิจารณาในกลุ่ม g
- ν_g คือ จำนวนนิวตรอนเฉลี่ยที่เกิดขึ้นใหม่ในกลุ่ม g ต่อทุก ๆ อันตรกิริยาการแตกตัว
- Σ_{fg} คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคสำหรับอันตรกิริยาการแตกตัวในกลุ่ม g
- Σ_{og} คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคสำหรับอันตรกิริยาการดูดกลืนในกลุ่ม g
- Σ_{sg} คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการกระเจิงออกจากกลุ่ม g
- $\Sigma_{sg'g}$ คือ ค่าภาคตัดขวางมหภาคการกระเจิงจากกลุ่ม g' ไปยังกลุ่ม g
- χ_g คือ ค่าโอกาสที่นิวตรอนที่ได้จากอันตรกิริยาการแตกตัวจะมีพลังงานอยู่ในกลุ่ม g

2.1.3 สมการการแพร่หลายกลุ่มพลังงาน

การพิจารณาการแพร่ของนิวตรอนแบบหลายกลุ่มพลังงานนั้นสามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกันกับสมการการแพร่ของนิวตรอนแบบพลังงานเดียวสามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{l} \text{อัตราการเปลี่ยนแปลง} \\ \text{นิวตรอนในกลุ่ม } g \\ \text{เทียบกับเวลา} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{การเปลี่ยนแปลง} \\ \text{เนื่องจาก} \\ \text{นิวตรอนรั่วไหล} \\ \text{จากระบบ} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{ปริมาณนิวตรอน} \\ \text{ที่ถูกจับในกลุ่ม } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{ปริมาณนิวตรอน} \\ \text{ที่ผลิตในกลุ่ม } g \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{l} \text{ปริมาณนิวตรอน} \\ \text{ที่กระเจิงออก} \\ \text{จากกลุ่ม } g \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{ปริมาณนิวตรอน} \\ \text{ที่กระเจิงเข้าสู่} \\ \text{กลุ่ม } g \end{array} \right]$$

รูปที่ 2.4 สมดุลของนิวตรอนที่อยู่ในระบบ

จากสมดุลสมการในรูปที่ 2.4 สามารถเขียนเป็นสมการการแพร่ที่ขึ้นอยู่กับพลังงานบนช่วง $E_g < E < E_{g-1}$ โดยสมมติว่านิวตรอนฟลักซ์สามารถอธิบายได้ตามสมการ 2.8

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot D \nabla \phi + \Sigma_t \phi(\mathbf{r}, E, t) &= \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ &+ \chi(E) \int_0^{\infty} dE' v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \\ &+ S_{\text{ext}}(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

และสามารถแยกพิจารณาได้เป็นพจน์เพื่อแปลงตัวแปรที่ขึ้นกับพลังงาน E โดยการอินทิเกรตแต่ละพจน์บนกลุ่มพลังงานที่ g โดย $E_g < E < E_{g-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi - \nabla \cdot \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D \nabla \phi + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t \phi \\ = \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^{\infty} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) + \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE S \end{aligned} \quad (2.9)$$

นิยามฟลักซ์ที่ขึ้นกับพลังงานให้เป็นฟลักซ์ที่ขึ้นกับกลุ่มพลังงาน g โดย

$$\phi_g(\mathbf{r}, t) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.10)$$

นิยามค่าภาคตัดขวางมหภาครวม Σ_t ที่ขึ้นกับพลังงานให้เป็นค่า Σ_{tg} ที่ขึ้นกับกลุ่มพลังงาน g โดย

$$\Sigma_{tg} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \Sigma_t(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.11)$$

นิยามค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ $D(E)$ ที่ขึ้นกับพลังงานให้เป็นค่า D_g ที่ขึ้นกับกลุ่มพลังงาน g โดย

$$D_g \equiv \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE D(E) \nabla_j \phi(\mathbf{r}, E, t)}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \nabla_j \phi(\mathbf{r}, E, t)} \quad (2.12)$$

นิยามค่าความเร็วของนิวตรอนในกลุ่ม g โดย

$$\frac{1}{v_g} \equiv \frac{1}{\phi_g} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E, t) \quad (2.13)$$

สำหรับพจน์การกระเจิงนั้นสามารถนิยามได้ดังนี้

$$\Sigma_{sg'g} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad (2.14)$$

และสามารถนิยามพจน์การเกิดฟิชชันได้

$$v_{g'} \Sigma_{fg'} \equiv \frac{1}{\phi_{g'}} \int_{E_g}^{E_{g'-1}} dE' v(E') \Sigma_f(E') \phi(\mathbf{r}, E', t) \quad (2.15)$$

ซึ่งเมื่อแทนพจน์ต่าง ๆ จากสมการ 2.8 ร่วมกับสมการ 2.10 – 2.15 ที่ได้นิยามไว้จะได้สมการ

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot D_g \nabla \phi + \Sigma_{tg} \phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_{ext} \quad (2.16)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

นิยามให้ Σ_{Rg} แทนค่าภาคตัดขวางมหภาคการกระเจิงออก (Removal cross section)

$$\Sigma_{Rg} \equiv \Sigma_{tg} - \Sigma_{sgg} \quad (2.17)$$

พิจารณาสมการ 2.16 เมื่อระบบที่พิจารณาไม่ขึ้นกับเวลาแล้ว สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{Rg} \phi_g = \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg'g} \phi_{g'} + \frac{1}{k} \chi_g \sum_{g'=1}^G v_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} + S_{ext} \quad (2.18)$$

2.1.4 การคำนวณค่าวิกฤต (Criticality : k)

ค่าวิกฤตคือสถานะที่บอกถึงอัตราส่วนระหว่างประชากรนิวตรอนในระบบของวงรอบปัจจุบันต่อประชากรนิวตรอนในระบบของวงรอบก่อนหน้า แทนด้วยสัญลักษณ์ k ถ้าค่า k มีค่ามากกว่า 1 เรียกสถานะนี้ว่าสถานะเหนือวิกฤต (Super critical) ณ สถานะนี้อัตราการผลิตนิวตรอนจะมีมากกว่าอัตราที่นิวตรอนถูกดูดกลืนไป ถ้าค่า k มีค่าเท่ากับ 1 เรียกสถานะนี้ว่าสถานะวิกฤต (Critical) และถ้าค่า k มีค่าต่ำกว่า 1 จะเรียกว่าสถานะใต้วิกฤต (Sub-critical) ในการปฏิบัติการเดินเครื่องปฏิกรณ์จะพยายามรักษาให้อยู่ในสถานะวิกฤต

ค่าวิกฤตที่เกิดในแกนปฏิกรณ์สามารถพิจารณาได้จากโอกาสในการเกิดอัตรกิริยาการแตกตัว และ โอกาสในการเกิดอัตรกิริยาจับนิวตรอน รวมถึงการรั่วไหลของนิวตรอนจากระบบ และค่าการยุบตัวเรขาคณิต (Geometry Buckling)

ในการคำนวณหาสถานะวิกฤตสามารถทำได้พิจารณาสมการ 2.18 ว่านิวตรอนที่เกิดขึ้นในระบบประกอบด้วยสองกลุ่มพลังงานคือนิวตรอนกลุ่มพลังงานเร็ว และนิวตรอนกลุ่มพลังงานความร้อน และกำหนดให้ค่า S_{ext} เป็นต้นกำเนิดนิวตรอนภายนอก มีค่าเท่ากับศูนย์ นอกจากนี้การเกิดนิวตรอนอันเนื่องมาจากอัตรกิริยาการแตกตัวจะเกิดขึ้นที่กลุ่มฟาสต์ นั่นคือ $\chi_1 = 1$ และ $\chi_2 = 0$ ทำให้ได้สมการสำหรับสองกลุ่มพลังงานคือ

กลุ่มที่ 1 สำหรับนิวตรอนกลุ่มพลังงานเร็ว

$$-\nabla \cdot D_1 \nabla \phi_1(\mathbf{r}) + \Sigma_{R1} \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} [v_1 \Sigma_{f1} \phi_1(\mathbf{r}) + v_2 \Sigma_{f2} \phi_2(\mathbf{r})] \quad (2.19)$$

กลุ่มที่ 2 สำหรับนิวตรอนกลุ่มพลังงานความร้อน

$$-\nabla \cdot D_2 \nabla \phi_2(\mathbf{r}) + \Sigma_{a2} \phi_2(\mathbf{r}) = \Sigma_{s12} \phi_1(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

หากพิจารณาว่าสำหรับนิวตรอนทั้งสองกลุ่มพลังงานมีลักษณะการเกิดและกระจายนิวตรอนฟลักซ์ในแบบเดียวกัน หรือเรียกว่า มี Spatial shape ($\psi(\mathbf{r})$) เดียวกันแล้ว และพิจารณาระบบที่สถานะคงตัว (steady state) หรือสถานะที่การเปลี่ยนแปลงของนิวตรอนที่ไม่ขึ้นกับเวลา นอกจากนี้ภายนอกกระยะ \mathbf{r} นิวตรอนฟลักซ์มีค่าเป็น ศูนย์ จะได้ว่า

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + B^2\psi(\mathbf{r}) = 0$$

เมื่อ B^2 คือค่าขยุบตัวเรขาคณิต (Geometry buckling) จะอธิบายในรูปของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) (ค่า $\nu_0 = 2.405$) และขึ้นกับ ค่ารัศมี (R) ค่าความสูงของช่วงที่เป็นเชื้อเพลิง (H) มีค่าเท่ากับ

$$B^2 = \left(\frac{\nu_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

แทนค่า $\phi_1(\mathbf{r})$ และ $\phi_2(\mathbf{r})$ ด้วย

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_1\psi(\mathbf{r}) \quad \text{และ} \quad \phi_2(\mathbf{r}) = \phi_2\psi(\mathbf{r})$$

ลงในสมการ 2.19 และ 2.20 จะได้

$$\begin{aligned} \left(D_1B^2 + \Sigma_{R1} - \frac{1}{k}\nu_1\Sigma_{f1}\right)\phi_1 - \frac{1}{k}\nu_2\Sigma_{f2}\phi_2 &= 0 \\ -\Sigma_{s12}\phi_1 + (D_2B^2 + \Sigma_{a2})\phi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

สมการ 2.21 สามารถหาคำตอบได้ ถ้าและเพียงแต่ถ้า

$$\left(D_1B^2 + \Sigma_{R1} - \frac{\nu_1\Sigma_{f1}}{k}\right)(D_2B^2 + \Sigma_{a2}) - \frac{\nu_2\Sigma_{f2}\Sigma_{12}}{k} = 0 \quad (2.22)$$

จะได้ค่าวิกฤต

$$k = \frac{\nu_1\Sigma_{f1}}{\Sigma_{R1} + D_1B^2} + \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{R1} + D_1B^2} \frac{\nu_2\Sigma_{f2}}{(\Sigma_{a2} + D_2B^2)} \quad (2.23)$$

สมการที่ 2.23 เป็นการประมาณค่าวิกฤตทางทฤษฎีสำหรับสมการการแพร่ของนิวตรอนสองกลุ่มพลังงาน

2.1.5 การคำนวณนิวตรอนฟลักซ์

ค่ากำลังที่เกิดขึ้นในแกนปฏิกรณ์จะพิจารณาว่าเป็นกำลังที่เกิดขึ้นในกลุ่มความร้อน ซึ่งเป็นผลจากพลังงานที่เกิดจากอันตรกิริยาการแตกตัวคูณกับอัตราการแตกตัว (fission rate) สามารถหาได้โดยสมการ

$$p(\mathbf{r}) = \omega_f \Sigma_f \phi(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

กำลังรวมที่ผลิตได้ในแกนปฏิกรณ์ต้องอินทิเกรตทั้งปริมาตรและพลังงาน

$$P = \int \int_{E V} d^3 r dE' \omega_f \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \phi(\mathbf{r}, E') \quad (2.25)$$

จะเห็นว่าถ้าทราบค่ากำลัง P ก็จะสามารถหาค่านิวตรอนฟลักซ์ที่เกิดขึ้นในแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์ได้

2.1.6 การวิเคราะห์การหมดไปของเชื้อเพลิง^[2]

การวิเคราะห์การหมดไปของเชื้อเพลิงจะเป็นการพยากรณ์ระยะเวลาที่แกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์สามารถปฏิบัติการเดินเครื่องได้จนกว่าจะมีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งการหมดไปของเชื้อเพลิงนี้มีผลอย่างยิ่งต่อความปลอดภัยในการควบคุมเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ โดยเฉพาะเมื่อเชื้อเพลิงมีการเผาผลาญไป ค่าการกระจายความหนาแน่นกำลังจะไม่ได้อยู่ที่ตำแหน่งเดิม จะเลื่อนไปในตำแหน่งใหม่ ซึ่งต้องมั่นใจว่า ที่ตำแหน่งนี้จะไม่ทำให้เกิดจุดความร้อนสูงขึ้นจนเกินขีดจำกัดความปลอดภัย (Safety limit) นอกจากนี้นิวไคลด์ที่สามารถเกิดอันตรกิริยาแตกตัวได้ (fissile) จะหมดไปแล้ว ยังต้องคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของวัสดุจากวัสดุที่ไม่สามารถเกิดอันตรกิริยาแตกตัวไปเป็นไอโซโทปที่สามารถเกิดอันตรกิริยาแตกตัวได้ (fertile) ด้วยเช่นกัน

2.1.7 การเปลี่ยนแปลงนิวเคลียสและการเกิดอันตรกิริยาของนิวตรอนภายในแกนปฏิกรณ์

อัตราการเกิดอันตรกิริยาภายในแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์จะใช้สำหรับการอธิบายค่าความหนาแน่นของนิวไคลด์ภายในแกน โดยสามารถแสดงด้วยสมการพื้นฐานในการเปลี่ยนแปลงนิวเคลียสไอโซโทป สามารถเขียนเป็นรูปแบบการสลายตัวได้ดังสมการ 2.26

$$\frac{dN^i}{dt} = \overbrace{\lambda^j N^j + \sigma_c^k \phi N^k + \gamma^l \Sigma_f \phi}^{\text{Production modes}} - \overbrace{\lambda^i N^i + \sigma_a^i \phi N^i}^{\text{Loss modes}} \quad (2.26)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลาของความหนาแน่นของไอโซโทป i ในสมการที่ 2.26 สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

1. เทอมแรกด้านขวามือของสมการแทนการผลิตโดยการสลายตัวของนิวเคลียส N^j ด้วยค่าการสลายตัว λ^j การผลิตนี้ สามารถมาจากการสลายตัวของนิวเคลียสมากกว่าหนึ่งชนิด เช่น ^{238}Pu สามารถผลิตได้จากการสลายตัวแบบอัลฟาของ ^{242}Cm หรือ การสลายเบตาของ ^{238}Np

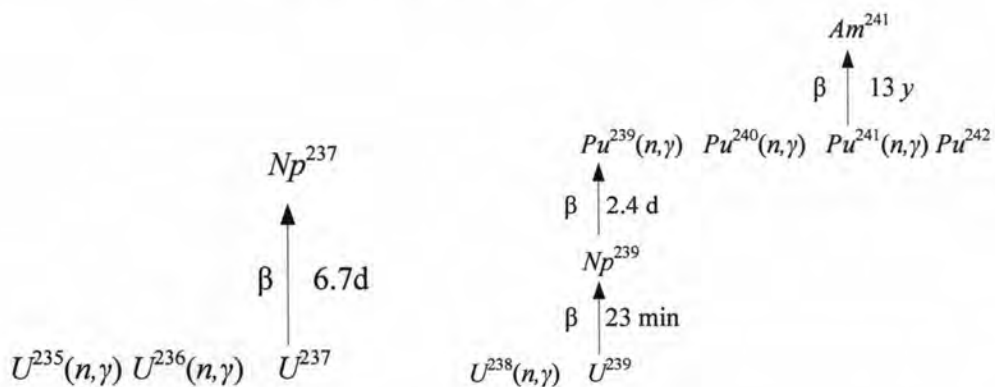
2. เทอมที่สองแทนการผลิตโดยการเกิดอันตรกิริยากับนิวตรอนของนิวเคลียส N^k โดยอันตรกิริยาการจับนิวตรอนด้วยค่าภาคตัดขวางการจับนิวตรอน σ_c^k การผลิตในลักษณะนี้อาจเกิดได้จากนิวเคลียสก่อนหน้ามากกว่าหนึ่งชนิด เช่น ^{237}U สามารถได้มาจากอันตรกิริยา (n,γ) ของ ^{236}U และ อันตรกิริยา $(n,2n)$ ของ ^{238}U

3. เทอมที่สามแทนการผลิตเนื่องจากอันตรกิริยาการแตกตัว โดยที่สัดส่วนของการผลิตเนื่องจากการแตกตัว (fission yield) y^i ขึ้นกับทั้งไอโซโทปที่แตกตัวและพลังงานของนิวตรอนที่ทำให้เกิดการแตกตัว

4. เทอมที่สี่แทนการสลายตัวของไอโซโทป i จากค่าการสลายตัว

5. เทอมสุดท้ายแทนการสูญเสียนิวเคลียส i เนื่องจากอันตรกิริยาการดูดกลืนนิวตรอนโดยมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืน σ_a^i

และสำหรับแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์ที่มียูเรเนียมเป็นเชื้อเพลิงนั้น สามารถพิจารณาการหมดไปของเชื้อเพลิงโดยพิจารณาจากไอโซโทปหลัก 2 ไอโซโทป นั่นคือ การหมดไปของ ^{235}U และการเปลี่ยนแปลงของ ^{238}U ดังห่วงโซ่ไอโซโทป (Isotope chains) ในรูปที่ 2.5

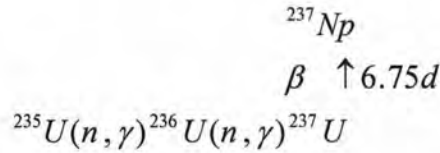


รูปที่ 2.5 Isotope chains การหมดไปของเชื้อเพลิงในแกนปฏิกรณ์ที่ใช้ยูเรเนียมเป็นเชื้อเพลิง

2.1.7.1 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ ^{235}U

สำหรับการดูดกลืนนิวตรอนใน ^{235}U มีน้อยกว่า 20 เปอร์เซ็นต์ที่เปลี่ยนเป็น ^{236}U และเนื่องจาก ^{236}U เป็นไอโซโทปที่เสถียรมากคือมีค่าครึ่งชีวิต 2.4×10^7 ปี และมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนต่ำ การเกิดขึ้นของ ^{236}U จึงแทบไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของ

ค่ารีแอกติวิตี การเปลี่ยนแปลงในลักษณะนี้ของ ^{235}U ดังแสดงในรูป 2.6 มีผลน้อยมาก จึงไม่นำมาพิจารณา



รูปที่ 2.6 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ ^{235}U

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ 2.25 สามารถเขียนเป็นสมการของ ^{235}U ได้ว่า

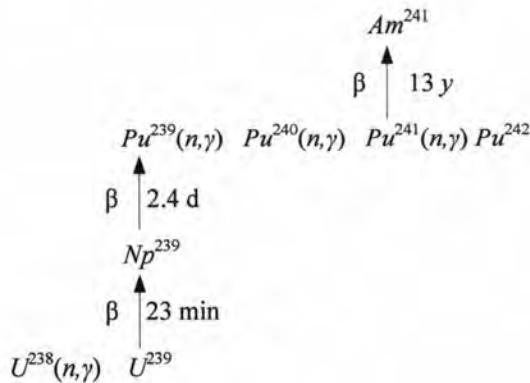
$$\frac{dN^{U235}}{dt} = -\sigma_a^{U235} \phi N^{U235} \tag{2.27}$$

สามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ได้ว่า

$$N^{U235} = N_0^{U235} e^{-\sigma_a^{U235} \phi t} \tag{2.28}$$

2.1.7.2 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ ^{238}U

การดูดกลืนนิวตรอนของ ^{238}U มีอนุกรมการเปลี่ยนธาตุของ ^{238}U ดังแสดงในรูป 2.7



รูปที่ 2.7 อนุกรมการเปลี่ยนแปลงของ ^{238}U

จากอนุกรมดังกล่าวสามารถเขียนออกมาเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{dN^{U238}}{dt} = -\sigma_a^{U238} \phi N^{U238} \tag{2.29}$$

$$\frac{dN^{U239}}{dt} = \sigma_c^{U238} \phi N^{U238} - \lambda^{U239} N^{U239} \tag{2.30}$$

$$\frac{dN^{Np\ 239}}{dt} = \lambda^{U\ 239} N^{U\ 239} - \lambda^{Np\ 239} N^{Np\ 239} \quad (2.31)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 239}}{dt} = \lambda^{Np\ 239} N^{Np\ 239} - \sigma_a^{Pu\ 239} \phi N^{Pu\ 239} \quad (2.32)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 240}}{dt} = \sigma_c^{Pu\ 239} \phi N^{Pu\ 239} - \sigma_a^{Pu\ 240} \phi N^{Pu\ 240} \quad (2.33)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 241}}{dt} = \sigma_c^{Pu\ 240} \phi N^{Pu\ 240} - (\sigma_a^{Pu\ 241} \phi + \lambda^{Pu\ 241}) N^{Pu\ 241} \quad (2.34)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 242}}{dt} = \sigma_c^{Pu\ 241} \phi N^{Pu\ 241} - \sigma_a^{Pu\ 242} \phi N^{Pu\ 242} \quad (2.35)$$

เมื่อพิจารณาสมการ 2.29 ถึง 2.35 สมการ 2.30 และ 2.31 นั้นสามารถพิจารณาได้ว่าการดูดกลืนนิวตรอนโดย ^{239}U และ ^{239}Np สามารถละไว้ได้โดยไม่ต้องคำนวณ เนื่องจากค่าครึ่งชีวิตสั้นและมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนต่ำ ดังนั้นจะประมาณว่า ^{239}Pu ถูกผลิตขึ้นมาโดยตรงจากการจับนิวตรอนของ ^{238}U ซึ่งจะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dN^{Pu\ 239}}{dt} = \sigma_c^{U\ 238} \phi N^{U\ 238} - \sigma_a^{Pu\ 239} \phi N^{Pu\ 239} \quad (2.36)$$

เมื่อกำหนดให้

$$\theta = \int_0^t \phi(t) dt \quad (2.37)$$

จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dN^{U\ 238}}{d\theta} = -\sigma_a^{U\ 238} N^{U\ 238} \quad (2.38)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 239}}{d\theta} = \sigma_c^{U\ 238} N^{U\ 238} - \sigma_a^{Pu\ 239} N^{Pu\ 239} \quad (2.39)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 240}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu\ 239} N^{Pu\ 239} - \sigma_a^{Pu\ 240} N^{Pu\ 240} \quad (2.40)$$

$$\frac{dN^{Pu\ 241}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu\ 240} N^{Pu\ 240} - \sigma_a^{Pu\ 241} N^{Pu\ 241} - \frac{\lambda^{Pu\ 241}}{\phi} N^{Pu\ 241} \quad (2.41)$$

$$\frac{dN^{Pu242}}{d\theta} = \sigma_c^{Pu241} N^{Pu241} - \sigma_a^{Pu242} N^{Pu242} \quad (2.42)$$

2.1.8 การเปลี่ยนแปลงอันเนื่องมาจากสารพิษที่มีคาร์แอคติวิตีเป็นลบ

นอกจากการเปลี่ยนแปลงของเชื้อเพลิงที่เป็นยูเรเนียมแล้วยังมีนิวเคลียสผลผลิตที่ได้จากอันตรกิริยาการแตกตัวที่มีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนสูง ซึ่งเป็นผลอย่างมากต่อการปฏิบัติการของเครื่องปฏิกรณ์โดยนิวเคลียสผลผลิตเหล่านี้จะดูดกลืนนิวตรอนที่เกิดขึ้นในระบบโดยปกติจะมีค่าภาคตัดขวางการดูดกลืนสูงกว่าเชื้อเพลิงหลายเท่า

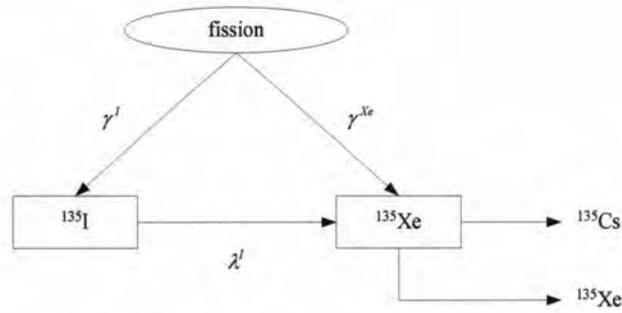
นิวเคลียสผลผลิตจากอันตรกิริยาการแตกตัวที่มีผลอย่างมากต่อการปฏิบัติการของเครื่องปฏิกรณ์คือ ซีโนน-135 (^{135}Xe) และ ซามาเรียม-149 (^{149}Sm) เนื่องจากนิวเคลียสของไอโซโทปทั้งสองมีค่าภาคตัดขวางจุลภาคการดูดกลืนสูงมาก (^{135}Xe และ ^{149}Sm มีค่าภาคตัดขวางจุลภาคการดูดกลืนประมาณ 2.7×10^6 บาร์น และ 58,500 บาร์น ตามลำดับ) สัดส่วนในการเกิดผลผลิตจากอันตรกิริยาแตกตัวสามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 สัดส่วนในการแตกตัวและค่าคงที่การสลายตัว

Fission Product Yields	^{235}U	^{239}U	^{241}Pu	Decay Constant (hr^{-1})
γI	6.386	6.100	7.694	0.1035
γXe	0.228	1.087	0.255	0.752
γPm	1.130	1.900	0	0.0128

2.1.8.1 การเปลี่ยนแปลงของซีโนน-135

^{135}Xe เป็นผลผลิตจากการแตกตัวที่มีความสำคัญมากที่สุดการเกิด ^{135}Xe ในแกนปฏิกรณ์ขณะปฏิบัติการเดินเครื่องนั้น ไม่ได้เกิดจากการแตกตัวโดยตรงเพียงอย่างเดียวแต่สามารถเกิดได้จากการสลายตัวแบบเบตาของ ^{135}I ซึ่งสามารถแสดงเป็นแผนผังแสดงการเกิดของ ^{135}Xe ได้ดังรูป 2.8 และจะสามารถเขียนสมการการเปลี่ยนแปลงของ ^{135}I และ ^{135}Xe ได้ดังสมการ 2.43 และ 2.44



รูปที่ 2.8 แผนผังการสลายตัวอย่างง่ายของ ^{135}Xe

สำหรับการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นนิวเคลียสของไอโอดีนที่เกิดจากปฏิกิริยาฟิชชัน

$$\frac{\partial N^I}{\partial t} = \gamma^I \Sigma_f \phi - \lambda^I N^I \quad (2.43)$$

และการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นนิวเคลียสของซีนอน

$$\frac{\partial N^X}{\partial t} = \gamma^X \Sigma_f \phi + \lambda^I N^I - \lambda^X N^X - \sigma_a^X \phi N^X \quad (2.44)$$

ถ้าเริ่มการเดินเครื่องปฏิกรณ์จากระบบที่ไม่มีผลผลิตจากการแตกตัวอยู่เลยจะสามารถหาระดับความเข้มข้นของ ^{135}I และ ^{135}Xe ได้ตามสมการต่อไปนี้

$$N^I = \frac{\gamma^I \Sigma_f \phi_0}{\lambda^I} \quad (2.45)$$

$$N^X = \frac{(\gamma^I + \gamma^X) \Sigma_f \phi_0}{\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0} \left[1 - e^{-(\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0)t} \right] + \frac{(\gamma^I \Sigma_f \phi_0)}{\lambda^X - \lambda^I + \sigma_a^X \phi_0} \left[e^{-(\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0)t} - e^{(-\lambda^I)t} \right] \quad (2.46)$$

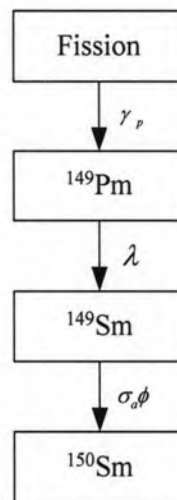
สมการข้างต้นสามารถใช้ได้ในกรณีเริ่มต้นเดินเครื่องปฏิกรณ์จากการที่ไม่มีผลผลิตจากการแตกตัวอยู่ในระบบ แล้วหลังจากนั้นระดับความเข้มข้นของ ^{135}I และ ^{135}Xe จะเคลื่อนเข้าสู่ระดับสภาวะสมดุลเมื่อเวลาผ่านไปและจะบรรยายได้ด้วยสมการต่อไปนี้

$$N^I_\infty = \frac{\gamma^I \Sigma_f \phi_0}{\lambda^I} \quad (2.47)$$

$$N_{\infty}^X = \frac{(\gamma^I + \gamma^X) \Sigma_f \phi_0}{\lambda^X + \sigma_a^X \phi_0} \quad (2.48)$$

2.1.8.2 การเปลี่ยนแปลงของซามาเรียม-149

^{149}Sm เกิดจากการสลายตัวของโพรมาเทียม (^{149}Pm) ซึ่งเป็นนิวไคลด์ผลผลิตการแตกตัว แขนงการเกิด ^{149}Sm แสดงให้เห็นดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 แผนผังแสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงอย่างง่ายของ ^{149}Sm

สำหรับการเกิดโพรมาเทียมจากการแตกตัว สามารถเขียนเป็นสมการ

$$\frac{\partial N^P}{\partial t} = \gamma^P \Sigma_f \phi - \lambda^P N^P \quad (2.49)$$

และการเปลี่ยนแปลงซามาเรียม

$$\frac{\partial N^S}{\partial t} = \lambda^P N^P - \sigma_a^S \phi N^S \quad (2.50)$$

ระดับความเข้มข้นที่สถานะสมดุลคือ $\partial N^P / \partial t = 0 = \partial N^S / \partial t$ จะได้

$$N_{\infty}^P = \frac{\gamma^P \Sigma_f \phi_0}{\lambda^P} \quad (2.51)$$

$$N_\infty^S = \frac{\gamma^p \Sigma_f}{\sigma_a^S} \quad (2.52)$$

2.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข^{9,10}

2.2.1 กระบวนการวิธีผลต่างสี่บเนื่อง

การแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความซับซ้อนและขึ้นกับตัวแปรหรือสัมประสิทธิ์จำนวนมาก หรือสัมประสิทธิ์ที่มีค่าไม่คงที่อาจใช้กระบวนการวิธีเชิงตัวเลขในการหาคำตอบโดยกระบวนการวิธีที่ใช้นี้เรียกว่ากระบวนการประมาณผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างสี่บเนื่อง (Finite difference method) ซึ่งกระบวนการวิธีนี้จะอาศัยอนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series) เพื่อประมาณหาค่าฟังก์ชัน

ให้ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการประมาณค่าด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ จะได้ว่า

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.53)$$

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (2.54)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (2.55)$$

โดย $O(h)$ แสดงถึงค่าความผิดพลาดอันดับ h (error of order h) ที่เกิดขึ้น สมการ 2.55 บางครั้งเรียกว่าเป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยไปข้างหน้าอันดับที่ 1 (first forward divided-difference) ที่เรียกว่าเป็นผลต่างแบบไปข้างหน้าก็เพราะว่าเราใช้ข้อมูลของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} ในทำนองเดียวกันกับสมการ 2.53 เราสามารถเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้งเพื่อหาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i-1} ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (2.56)$$

$$f'(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (2.57)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + O(h) \quad (2.58)$$

นำสมการที่ 2.56 ลบ สมการ 2.53

$$f(x_{i-1}) - f(x_{i+1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (2.59)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (2.60)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.61)$$

ในลักษณะนี้ สามารถหาความสัมพันธ์ของสมการอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไป เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสอง สามารถทำได้ โดยเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์เพื่อคำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i+1} และนำไปสู่ผลเฉลยโดย

$$f''(x) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2) \quad (2.62)$$

สมการที่ 2.62 เรียกว่าเป็นสมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (Central divided-difference) ที่ให้ความผิดพลาดอันดับ h^2 จะเห็นว่ากระบวนการวิธีดังกล่าวสามารถประยุกต์ได้กับสมการการแพร่ โดยแทน $f''(x)$ ด้วย $\nabla^2 \phi(\mathbf{r})$ ในพิกัดฉาก $\nabla^2 \phi(\mathbf{r})$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, z)}{\partial z^2} \quad (2.63)$$

2.2.2 การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีเกาส์-ไซเดล

ระเบียบวิธีแบบ เกาส์-ไซเดล ภาพรวมนั้นเป็นระเบียบวิธีการทำซ้ำ โดยจะคำนวณค่าของตัวแปรที่ 1 จากสมการแรก และนำมูลค่าที่ได้ไปแทนในสมการที่สอง เพื่อหามูลค่าของตัวแปรที่สอง และทำเช่นนี้จนกระทั่งได้คำตอบของตัวแปรในวงรอบการดำเนินการแรก ซึ่งทำงานกว่ามูลค่าของตัวแปร ณ วงรอบการดำเนินการปัจจุบัน มีค่าต่างจากมูลค่าของตัวแปรในวงรอบ

ดำเนินการก่อนหน้า โดยผลต่างสัมบูรณ์อยู่ภายใต้เงื่อนไขความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ที่ยอมรับได้ (relative error) จึงถือว่า มุลค่าที่นำ้ ้ลู่เข้าสู่ค่าผลเฉลยประมาณ ของสมการ เช่น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\phi_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} [y_1 - a_{12}\phi_2^k - a_{13}\phi_3^k] \quad (2.65)$$

$$\phi_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} [y_2 - a_{21}\phi_1^{k+1} - a_{23}\phi_3^k] \quad (2.66)$$

$$\phi_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}} [y_3 - a_{31}\phi_1^{k+1} - a_{32}\phi_2^{k+1}] \quad (2.67)$$

ซึ่งจะกระทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งมุลค่า $\frac{|\phi_n^{k+1} - \phi_n^k|}{\phi_n^{k+1}} < \varepsilon_{r\phi}$ เป็นจริง จึงหยุดกระทำซ้ำ

การทำซ้ำนี้จะได้ผลเฉลยของสมการ โดยเมตริกซ์จะถูกสร้างจึ้นจากผลการตั้งสมการในระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง ซึ่งในการคำนวณจะเรียกการทำซ้ำแบบเกาส์-ไซเดลว่าการคำนวณวงรอบใน (inner loop) และเรียก ε_{ϕ} ว่าเป็นค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์วงรอบใน

สำหรับการคำนวณค่าวิกฤตด้วยกระบวนการวิธีเชิงตัวเลขจะใช้นิยามของค่าวิกฤตคือ อัตราส่วนระหว่างประชากรนิวตรอนในระบบของวงรอบปัจจุบันต่อประชากรนิวตรอนในระบบของวงรอบก่อนหน้าสามารถแสดงได้ดังสมการ 2.67

$$k^{(n)} = \frac{\int d^3r \Phi^{(n)}(\mathbf{r})}{\frac{1}{k^{(n-1)}} \int d^3r \Phi^{(n-1)}(\mathbf{r})} \quad (2.68)$$

เกณฑ์การลู่เข้าของค่า k เป็นไปตามสมการ 2.68

$$|k^{(n+1)} - k^n| < \varepsilon_{kr} \quad (2.69)$$

ในการคำนวณค่าวิกฤตนี้จะเรียกว่าเป็นการคำนวณวงรอบนอก (outer loop) และเรียกค่า ε_{kr} ว่าเป็นค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์วงรอบนอก

2.3 องค์ประกอบที่ใช้พิจารณาในการคำนวณแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์

2.3.1 สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการบรรจุเชื้อเพลิงภายในแกนปฏิกรณ์นิวเคลียร์

- เลข “0” เป็นสัญลักษณ์แทนบริเวณขอบที่ต้องการบังคับให้มีค่าฟลักซ์เป็น 0
- เลข “1” เป็นสัญลักษณ์แทนเชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 2.1%
- เลข “2” เป็นสัญลักษณ์แทนเชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 2.6%
- เลข “3” เป็นสัญลักษณ์แทนเชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 3.2%

เชื้อเพลิงทั้งสามชนิดจะถูกกำหนดค่าความหนาแน่นอะตอมเริ่มต้นแล้วทำการคำนวณค่าภาคตัดขวางมหภาคโดยโปรแกรมย่อย PIU¹ ซึ่งเป็นโมดูลหนึ่งในโปรแกรม SRAC² สามารถกำหนดค่าพลังงานคัตออฟของกลุ่มต่าง ๆ ได้ โดยปกติแล้วจะแบ่งออกเป็นนิวตรอนกลุ่มก่อนพลังงานความร้อน และนิวตรอนกลุ่มพลังงานความร้อน นอกจากนี้ภายในทั้งสองกลุ่มสามารถเลือกพลังงานคัตออฟได้

2.3.2 ค่าคงที่กลุ่ม

ในการคำนวณโปรแกรมย่อย PIU จะให้ค่าคงที่ภาคตัดขวางมหภาค คือ $\nu \Sigma_f$, Σ_f , Σ_c , Σ_a , Σ_t , χ_g และค่า Diffusion Coefficient และในแต่ละวงรอบของการเผาผลาญเชื้อเพลิงค่าคงที่ดังกล่าวก็จะเปลี่ยนไป โดยค่าเหล่านี้จะถูกคำนวณไว้ล่วงหน้าและเก็บไว้ในรูปแบบตาราง

เมื่อคำนวณได้ค่าการกระจายของนิวตรอนในแต่ละโหนดที่ทำการคำนวณ ก็จะสามารถหาได้ว่าในโหนดนั้น ๆ มีการกระจายความหนาแน่นกำลังเท่าใด และสามารถคำนวณได้ว่าเชื้อเพลิงในเซลล์นั้นมีการกระจายความหนาแน่นกำลังเฉลี่ยทั้งหมดเป็นเท่าใด ซึ่งจะทำให้สามารถคำนวณได้ที่ขั้นเวลา (Time Step) นั้น ๆ มีการเผาผลาญเชื้อเพลิงไปเท่าไร ซึ่งจะนำไปหาค่าคงที่ภาคตัดขวางมหภาคและค่าพารามิเตอร์ที่บรรจุไว้ในตารางด้วยการประมาณค่าในช่วงต่อไป

¹ PIU เป็น โมดูลหนึ่งที่ทำคำนวณค่าคงที่กลุ่ม (Group constant) โดยรวบรวมกลุ่มด้วยวิธีการ Collision

² SRAC เป็น โปรแกรมที่ประกอบด้วย โมดูลต่าง ๆ ที่สามารถนำมาคำนวณแกนปฏิกรณ์ในรูปแบบต่าง ๆ

2.4 รูปแบบการบรรจุเชื้อเพลิง

1. การบรรจุเชื้อเพลิงแบบเนื้อเดียวทั้งแกน (Uniform Loading)

0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

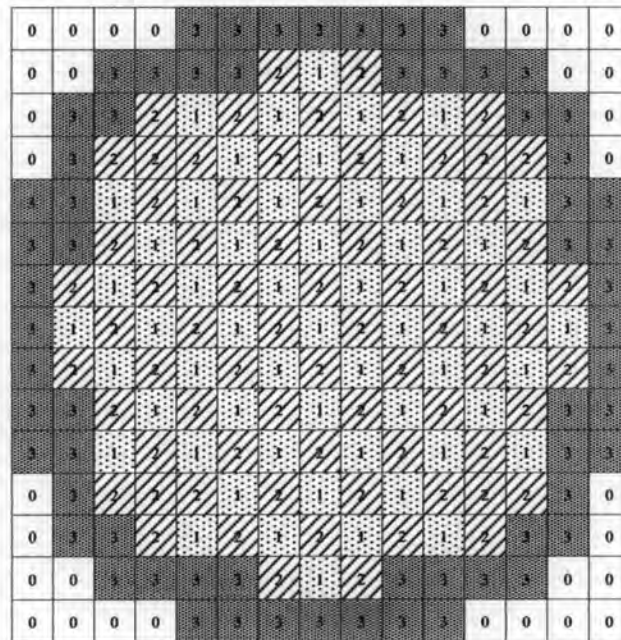
รูปที่ 2.10 การบรรจุเชื้อเพลิงชนิด 2.1% รูปแบบเนื้อเดียว (Uniform Loading)

2. การบรรจุเชื้อเพลิงแบบให้เชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะสูงกว่า อยู่วงนอกและให้เชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะต่ำสุดอยู่ส่วนในสุด (Out-In Loading)

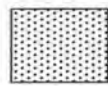
0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0
0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0
0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0
0	0	0	0	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0	0	0

รูปที่ 2.11 การบรรจุเชื้อเพลิงรูปแบบ Out-In Loading

3. การบรรจุเชื้อเพลิงแบบกระจายทั่วแกน (In-Scatter Loading)



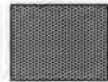
รูปที่ 2.12 การบรรจุเชื้อเพลิงรูปแบบ In-Scatter Loading



เชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 2.1 %



เชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 2.6 %



เชื้อเพลิงเสริมสมรรถนะ 3.2 %