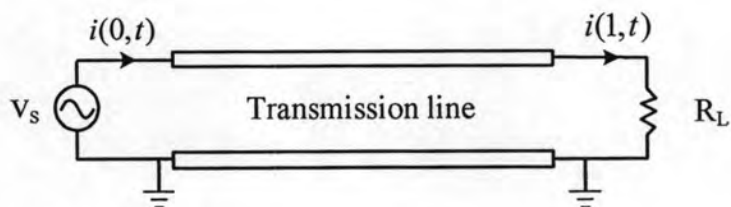


บทที่ 3

การจำลองผลตอบสนองเชิงเวลาของวงจรที่ประกอบด้วยสายส่ง

บทนี้จะกล่าวถึงงานวิจัยที่พัฒนาขึ้นใหม่เพื่อวิเคราะห์วงจรที่ประกอบด้วยสายส่งในทางเวลาที่เรียกว่าวิธี Distribution State Variable (DSV) และการประมาณค่าการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังแบบแบ่งท่อน (Piecewise Exponential Approximation) เพื่อลดความซับซ้อนในการคำนวณตามวิธี DSV รวมถึงวิธีการคำนวณที่ใช้จริงเพื่อเพิ่มความแม่นยำ ความเร็วและเหมาะสมกับการเขียนโปรแกรมโดย Matlab ส่วนสุดท้ายจะกล่าวถึงนำวิธีประมาณอนุพันธ์ทางเวลาด้วย Backward Differential Formula (BDF) อันดีบสูงกับวิธี DSV

3.1 การสร้างแบบจำลองเชิงเวลาของสายส่งตามวิธี Distribution State Variable (DSV)



รูปที่ 3-1 สายส่งสัญญาณสองเส้นรวมเส้นอ้างอิง ($N=1$)

วิธี Distribution State Variable อาศัยหลักการที่ว่าสายส่งดังแสดงในรูปที่ 3-1 นั้นเป็นอุปกรณ์กระจายกล่าวคือ แรงดันและกระแสเป็นฟังก์ชันที่มีความสัมพันธ์กับระยะในสายส่ง ดังแสดงด้วยสมการ Telegrapher ของสายส่ง N เส้นในสมการที่ (3.1) และ (3.2)

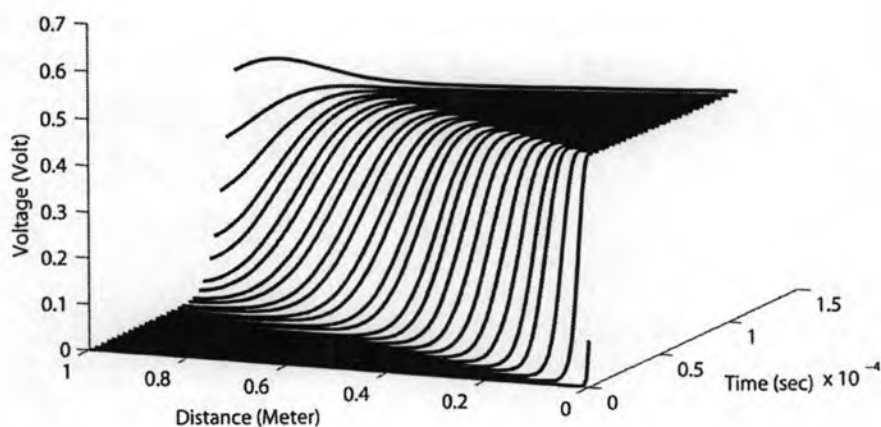
$$\frac{\partial \mathbf{v}(x,t)}{\partial x} = -\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial t} - \mathbf{R} \mathbf{i}(x,t) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}(x,t)}{\partial x} = -\mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(x,t)}{\partial t} - \mathbf{G} \mathbf{v}(x,t) \quad (3.2)$$

เมื่อจัดสมการที่ (3.1) และ (3.2) ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

สมการเหล่านี้ประกอบด้วยอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential) ของระยะทางและเวลา จึงแตกต่างจากอุปกรณ์ทั่วไปในวงจรไฟฟ้าเช่น ตัวเหนี่ยวนำ (L) หรือ ตัวเก็บประจุ (C) ที่เป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างเดียวได้แก่ $v = L \frac{di}{dt}$ และ $i = C \frac{dv}{dt}$ ดังนั้นแรงดันและกระแสในสายส่งที่เวลาต่างๆ จะมีความสัมพันธ์กับการกระจายที่เวลาก่อนหน้า ดังแสดงเป็นรูปตัวอย่างในรูปที่ 3-2



รูปที่ 3-2 การกระจายของแรงดันในสายส่งที่เวลาต่างๆกัน

มีงานวิจัยจำนวนมากที่เสนอวิธีประมาณค่าสมการ Telegrapher ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันทางเวลาเท่านั้นซึ่งได้กล่าวไว้แล้วในบทก่อนหน้านี้ แต่วิธี Distribution State Variable ที่จะนำเสนอนี้เป็นวิธีเดียวที่ยังคงสภาพการกระจายของสายส่งไว้ โดยเรากำหนดให้ใช้การกระจายของแรงดัน $v(x,t)$ และกระแส $i(x,t)$ เป็นตัวแปรแล้วจัดรูปสมการ (3.3) ใหม่จะได้

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \mathbf{v}(x,t) \\ \mathbf{i}(x,t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

เมื่อ $\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ สมการนี้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างเดียวเหมือนกับของตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำ ดังนั้นเมื่อเราแบ่งเวลาเป็นช่วงย่อย โดยให้ $t_n = t_{n-1} + h_n$ เมื่อ h_n เป็นขนาดขั้นเวลา (time step) จากนั้นประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาในสมการที่ (3.3) ด้วยวิธีออยเลอร์แบบกลับหลัง (Backward Euler, BE) [1] ดังสูตร

$$\frac{df(t_n)}{dt} \approx \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{h_n} \quad (3.5)$$

ทำให้ได้สมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(x) \\ \mathbf{i}_{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

โดย $\mathbf{v}_n(x) = \mathbf{v}(x, t_n)$, $\mathbf{i}_n(x) = \mathbf{i}(x, t_n)$, $\mathbf{A}_n = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{L}}{h_n} + \mathbf{R} \\ \frac{\mathbf{C}}{h_n} + \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{L}}{h_n} \\ \frac{\mathbf{C}}{h_n} & 0 \end{bmatrix}$ และ

กำหนดให้ $\mathbf{v}_n(x), \mathbf{i}_n(x) = 0; n \leq 0$

สมการ(3.6) เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งเทียบกับระยะทางในสายส่ง เมื่อแยกองค์ประกอบ \mathbf{A}_n ตามสมการ

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_n & 0 \\ 0 & -\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

โดยการปรับเทียบสายส่งให้มีความยาวเท่ากับ 1 เมตร สมการ(3.6) จะมีผลเฉลยดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n x} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^x \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n(1-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda_n(1-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(\tau) \\ \mathbf{i}_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \end{aligned} \quad (3.8)$$

แทน $x=1$ เพื่อหาความสัมพันธ์ของค่าที่ปลายสายจะได้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n} + e^{-\Lambda_n} & (e^{\Lambda_n} - e^{-\Lambda_n}) \mathbf{Z}_n \\ \mathbf{Z}_n^{-1} (e^{\Lambda_n} - e^{-\Lambda_n}) & e^{\Lambda_n} + e^{-\Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} + \Psi_n(1) \quad (3.9)$$

โดย

$$\Lambda_n = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{L}}{h_n} + \mathbf{R} \right) \left(\frac{\mathbf{C}}{h_n} + \mathbf{G} \right)}, \quad \mathbf{Z}_n = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{L}}{h_n} + \mathbf{R} \right) \left(\frac{\mathbf{C}}{h_n} + \mathbf{G} \right)^{-1}}$$

และ $\Psi_n(1) = \int_0^1 \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n(1-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda_n(1-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_0 \end{bmatrix} \mathbf{B}_n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(\tau) \\ \mathbf{i}_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} d\tau$ นำสมการนี้มา

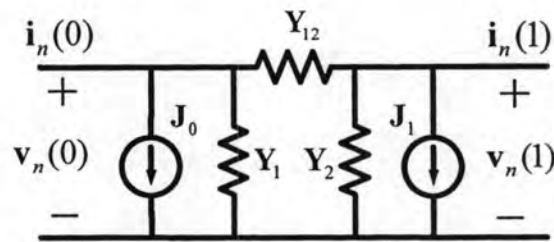
จัดให้อยู่ในรูปสมการโหนดของสายส่งจะได้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_n^{-1} \sinh(\Lambda_n)^{-1} \begin{bmatrix} \cosh(\Lambda_n) & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\cosh(\Lambda_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{v}_n(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

โดย

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_n^{-1} (e^{\Lambda_n} - e^{-\Lambda_n})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{\Lambda_n} & e^{-\Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_n \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_n \end{bmatrix} \Psi_n(1) \quad (3.11)$$

นำสมการที่ (3.10) มาเขียนวงจรสมมูลของแบบจำลองทางเวลาได้ดังรูปที่ 3-3 โดยที่ $\mathbf{Y}_{12} = \mathbf{Z}_n^{-1} \sinh^{-1}(\Lambda_n)$ และ $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \mathbf{Z}_n^{-1} \tanh^{-1}(\Lambda_n) - \mathbf{Y}_{12}$



รูปที่ 3-3 วงจรสมมูลของแบบจำลองทางเวลา

เนื่องจากวิธี DSV ที่นำเสนอไม่นับประมาณค่าการกระจายในสายส่ง ดังนั้นความแม่นยำของแบบจำลองทางเวลาจึงขึ้นกับการประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาอย่างเดียว และเพื่อควบคุมความแม่นยำของการวิเคราะห์ จึงนำวิธีคำนวณหาค่าความผิดพลาดจากการตัดปลาย (Local Truncation Error ,LTE) [1] ซึ่งนิยมนำมาใช้ในการบอกถึงความแม่นยำในการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีทางตัวเลข ค่าความผิดพลาดจากการตัดปลายในที่นี้เป็นการเปรียบเทียบระหว่างผลของ Backward Euler (BE) กับ Forward Euler (FE) [1] ดังสมการ (3.12)

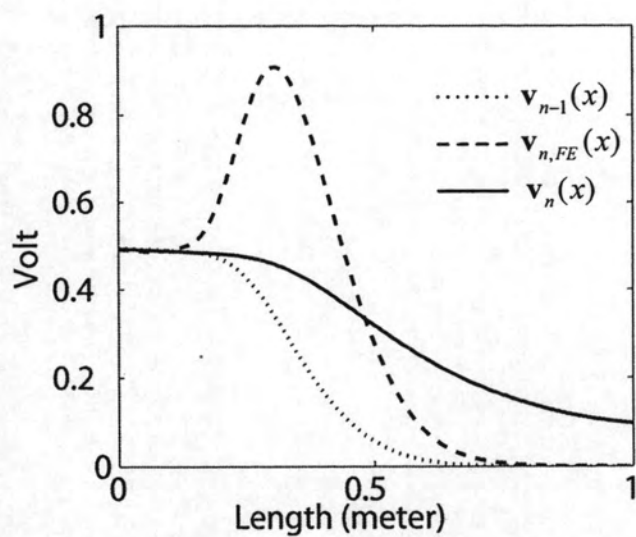
$$LTE_n = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n,FE}(x) \\ \mathbf{i}_{n,FE}(x) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.12)$$

โดย $\mathbf{v}_{n,FE}(x)$ และ $\mathbf{i}_{n,FE}(x)$ คือการกระจายของแรงดันและกระแสที่คำนวณจากวิธี Forward Euler (FE) ตามสูตร

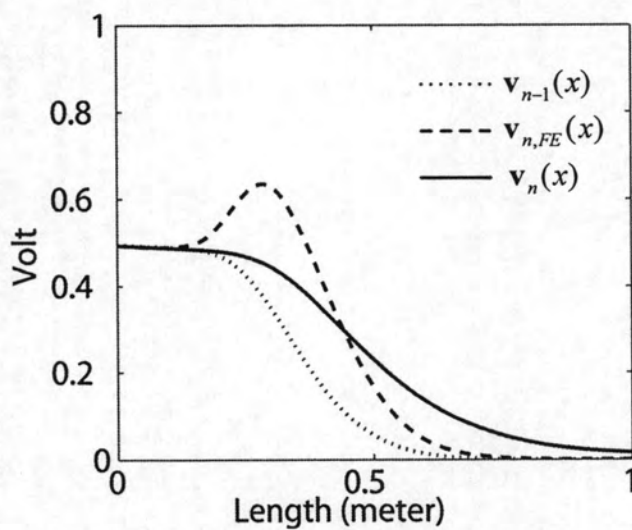
$$f_{n,FE}(x) = f_{n-1}(x) + \frac{h_n}{h_{n-1}} (f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)) \quad (3.13)$$

และ $\|\cdot\|$ เป็นนอร์ม(norm)ซึ่งมีนิยามคือ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{F}(x); 0 \leq x \leq 1$ จะได้ว่า

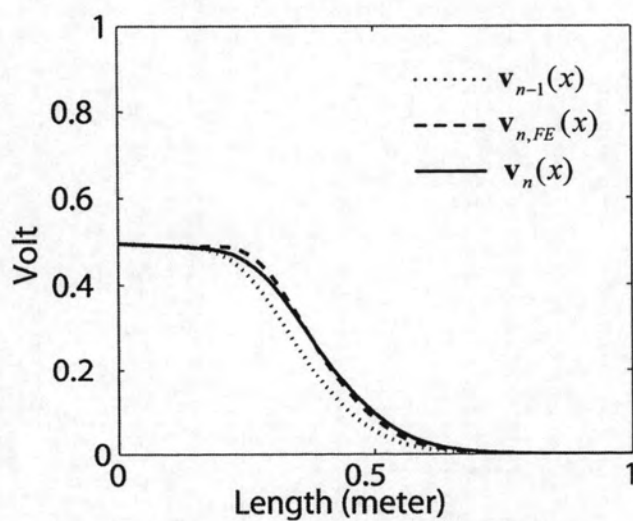
$$\|\mathbf{F}(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \mathbf{F}^T(x) \mathbf{F}(x) dx}$$



ก) $h_n = 3.2 \times 10^{-5}$ และ $LTE_n = 0.1914$



ข) $h_n = 1.6 \times 10^{-5}$ และ $LTE_n = 0.0773$



ค) $h_n = 0.4 \times 10^{-5}$ และ $LTE_n = 0.0083$

รูปที่ 3-4 ความสัมพันธ์ของการกระจายของแรงดันในสายส่ง, LTE_n และ h_n ณ เวลา t_n

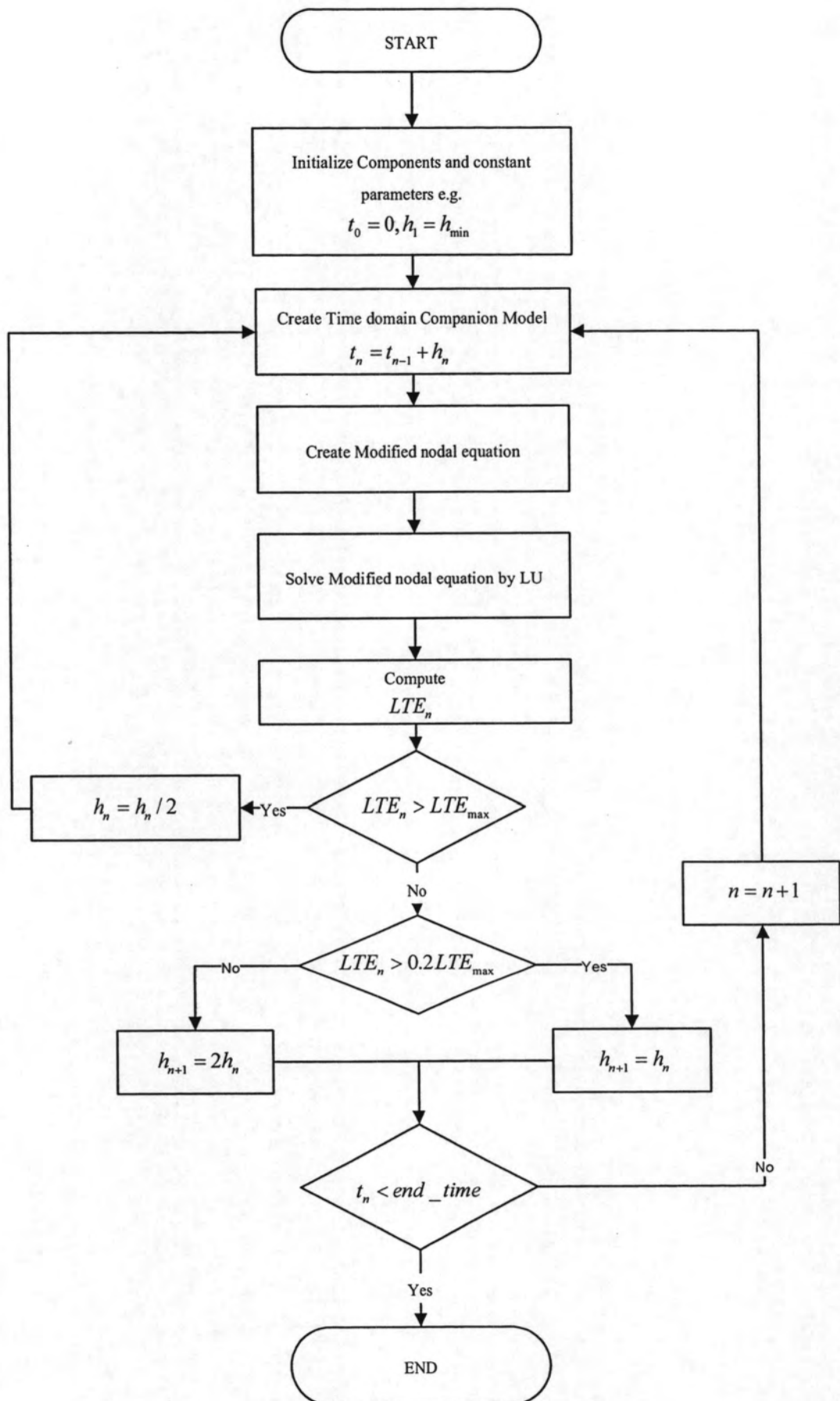
ค่าความผิดพลาดจากการตัดปลายที่เวลาใดๆ (LTE_n) ที่คำนวณได้จะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของการกระจายในสายส่งกับเวลาก่อนหน้าดังแสดงในรูปที่ 3-4 ซึ่งสัมพันธ์กับขนาดขั้นเวลา (h_n) โดยขั้นเวลาที่กว้างจะทำให้ค่า LTE_n ที่คำนวณได้มีค่ามาก ดังนั้นเราจะกำหนดค่าความผิดพลาดจากการตัดปลายสูงสุดที่ยอมรับได้ในการวิเคราะห์ (LTE_{max}) ถ้า LTE_n มีค่ามากกว่า LTE_{max} จะลดขั้นเวลาลงเพื่อให้ผลการวิเคราะห์มีความแม่นยำเพิ่มขึ้น โดยเทียบเคียงกับความสัมพันธ์ของ LTE_n กับ h_n ใน รูปที่ 3-4

จากรูปที่ 3-4 สมมติให้ $LTE_{max} = 0.025V$ โดยที่เวลา t_n ขนาดขั้นเวลาเริ่มต้นคือ $h_n = 3.2 \times 10^{-5} \text{ sec}$ ค่าความผิดพลาดจากการตัดปลายที่คำนวณได้จะเท่ากับ $LTE_n = 0.1914$ ซึ่งมากกว่า LTE_{max} เมื่อเราลดขนาดของ h_n ลงไปจนมีค่าเท่ากับ $0.4 \times 10^{-5} \text{ sec}$ ค่า $LTE_n = 0.0083$ ซึ่งน้อยกว่า LTE_{max} และความแตกต่างระหว่างการกระจายที่ได้จากวิธี BE และ FE มีน้อยมากซึ่งส่งผลต่อความแม่นยำของผลวิเคราะห์ที่ปลายสายด้วย

อย่างไรก็ดีการการปรับลด h_n อย่างเดียวนั้นไม่มีความยืดหยุ่น คือเมื่อการกระจายในสายส่งมีการเปลี่ยนแปลงน้อยค่า LTE_n ก็จะมีค่าน้อยลงตามไปด้วยแต่ขนาดขั้นเวลาไม่เพิ่มขึ้น ทำให้ต้องใช้เวลาในการวิเคราะห์มากเกินไปจนความจำเป็น งานวิจัยนี้จึงเสนอให้ปรับขนาดของ h_n ขึ้นเมื่อ $LTE_n < 0.2LTE_{max}$ เพื่อให้ขนาดขั้นเวลามีการปรับให้เหมาะสมกับการเปลี่ยนแปลงของการกระจายในสายส่งตลอดการวิเคราะห์ โดยสรุปขั้นตอนวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยสายส่งได้เป็นขั้นๆ ดังนี้

- | | |
|--------------|---|
| ขั้นที่หนึ่ง | ตั้งค่าเริ่มต้นต่างๆ เช่น $t_0 = 0$, $h_1 = h_{min}$, LTE_{max} และ $n=1$ และปรับเทียบให้สายส่งทั้งหมดมีความยาวเท่ากับ 1 เมตรเพื่อความสะดวกในการคำนวณ |
| ขั้นที่สอง | ให้ $t_n = t_{n-1} + h_n$ และคำนวณแบบจำลองเชิงเวลาของอุปกรณ์ทั้งหมดในวงจร |
| ขั้นที่สาม | นำแบบจำลองที่คำนวณได้มาสร้างสมการ Modified Nodal Equation (MNE) |
| ขั้นที่สี่ | แก้สมการ MNE เพื่อหาค่าแรงดันและกระแสที่จุดต่างๆ ในวงจร |
| ขั้นที่ห้า | คำนวณ LTE_n ตามสมการ (3.12) ถ้า $LTE_n > LTE_{max}$ กำหนดให้ $h_n = 0.5h_n$ และย้อนไปทำขั้นตอนที่สองใหม่ |
| ขั้นที่หก | ให้ $n = n + 1$ และตรวจสอบเงื่อนไขการเพิ่มขั้นเวลา ถ้า $LTE_n < 0.2LTE_{max}$ ให้ $h_n = 2h_{n-1}$ ถ้าไม่ใช่ให้ $h_n = h_{n-1}$ |
| ขั้นที่เจ็ด | ถ้า t_{n-1} น้อยกว่าช่วงเวลาที่ต้องการวิเคราะห์ ให้กลับไปทำที่ขั้นตอนที่สอง |

รูปที่ 3-5 แสดงแผนภาพของขั้นตอนดังกล่าว



รูปที่ 3-5 แผนภาพการวิเคราะห์ห้วงจรสายส่งตามวิธี DSV

3.2 การประมาณการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังแบบแบ่งท่อน

สมการ (3.6) มีลักษณะเป็นสมการวนกลับ (Recursive) ดังนั้นการกระจายของแรงดันและกระแสที่เวลาใดๆ เป็นผลของเวลาก่อนหน้าทั้งหมดรวมกัน เมื่อนำสมการตั้งแต่เวลาที่ 0 ถึง t_n มาเขียนรวมกันในรูปของเมทริกซ์ จะได้สมการ

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(x) \\ \mathbf{i}_1(x) \\ \mathbf{v}_2(x) \\ \mathbf{i}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} / dx = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(x) \\ \mathbf{i}_1(x) \\ \mathbf{v}_2(x) \\ \mathbf{i}_2(x) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{W}(x) \quad (3.14)$$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{0 \dots 0}^{n-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} e^{\mathbf{M}x} \mathbf{W}(0) \quad (3.15)$$

สมการ (3.15) แสดงว่าการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่ง ณ เวลาใด ๆ จะประกอบด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) จำนวน $2nN$ เทอม ดังนั้นความซับซ้อนในการคำนวณค่าของ $\mathbf{v}_n(x)$ และ $\mathbf{i}_n(x)$ จะเท่ากับ $\sum_1^n 2Ni \approx \Theta[2Nn]^2$ นั่นคือความซับซ้อนของการกระจายของแรงดันและกระแสจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว จึงจำเป็นต้องลดความซับซ้อนโดยการประมาณค่าการกระจายของสายส่งด้วยฟังก์ชันที่ง่ายกว่า โดยงานวิจัยนี้ได้เสนอให้ประมาณการกระจายในสายส่งด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่มีจำนวนเทมมน้อยกว่าคือ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(x) \end{bmatrix} = e^{\tilde{\mathbf{A}}_n x} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

เนื่องจากการกระจายของแรงดันและกระแสที่ได้จากการวิเคราะห์นั้น เป็นฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังหลายเทอมรวมกัน ดังนั้นการใช้ฟังก์ชันเลขชี้กำลังในการประมาณค่าจึงมีความเหมาะสมกว่าการประมาณด้วยฟังก์ชันเส้นตรง แทนสมการ (3.16) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n+1}(x) \\ \mathbf{i}_{n+1}(x) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}_{n+1}x} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n+1}(0) \\ \mathbf{i}_{n+1}(0) \end{bmatrix} + \int_0^x e^{\mathbf{A}_{n+1}(1-\tau)} \mathbf{B}_{n+1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n(\tau) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (3.17)$$

เนื่องจากต้องใช้การกระจายย้อนหลังไปอย่างน้อยหนึ่งชั้นเวลา ในการคำนวณจึงกำหนดให้ $\tilde{\mathbf{A}}_n$ มีขนาดเท่ากับ $2N \times 2N$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาดเล็กลที่สุด ดังนั้นความซับซ้อนของการคำนวณแบบจำลองทางเวลาจะลดลงเป็น $\sum_1^2 2Ni \approx \mathcal{O}([2N]^2)$ โดยการหา $\tilde{\mathbf{A}}_n$ จะใช้วิธีการประมาณค่าในช่วง(interpolation)ดังจะกล่าวต่อไป

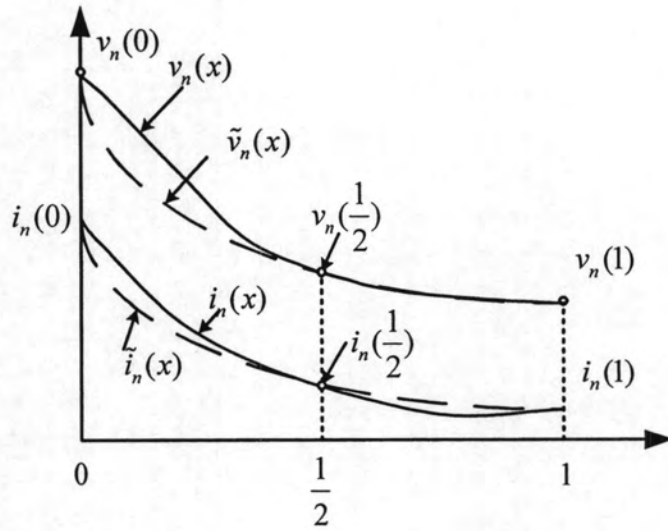
วิธีประมาณค่าในช่วงจะกำหนดให้แรงดันและกระแสที่ปลายของสายส่งมีค่าเท่าเดิม อีกทั้งให้การกระจายภายในสายส่งที่ประมาณแล้วมีค่าเท่าเดิม ณ $2N+1$ ตำแหน่งที่กระจายอย่างสม่ำเสมอในสายส่งดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix}; m = 0, \dots, 2N \quad (3.18)$$

นำสมการที่ (3.16) มารวมกับสมการ (3.18) จะได้สมการดังนี้

$$e^{\frac{m\tilde{\mathbf{A}}_n}{2N}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix}; m = 0, \dots, 2N \quad (3.19)$$

รูปที่ 3-6 แสดงตัวอย่างการประมาณการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งหนึ่งเส้น ($N=1$) ซึ่งแรงดันที่ประมาณจะมีค่าเท่ากับแรงดันและกระแสเดิม ณ ตำแหน่งปลายทั้งสองด้านและตรงกลางสาย



รูปที่ 3-6 การประมาณการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งหนึ่งเส้น

เมื่อเขียนสมการ (3.19) ใหม่ในรูปสมการแบบวนกลับจะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} = e^{\frac{\tilde{\mathbf{A}}_n}{2N}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n\left(\frac{m-1}{2N}\right) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{m-1}{2N}\right) \end{bmatrix}; m = 1, \dots, 2N \quad (3.20)$$

จัดสมการ (3.20) ให้เป็นตัวแปรเดียวจะได้

$$\mathbf{W}_1 = e^{\frac{\tilde{\mathbf{A}}_n}{2N}} \mathbf{W}_0 \quad (3.21)$$

โดยที่

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n\left(\frac{1}{2N}\right) & \cdots & \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{1}{2N}\right) & \cdots & \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) & \cdots & \mathbf{v}_n\left(\frac{2N-1}{2N}\right) \\ \mathbf{i}_n(0) & \cdots & \mathbf{i}_n\left(\frac{2N-1}{2N}\right) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_n &= 2N \ln(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1}) \\ &= -2N \ln(\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_1^{-1}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

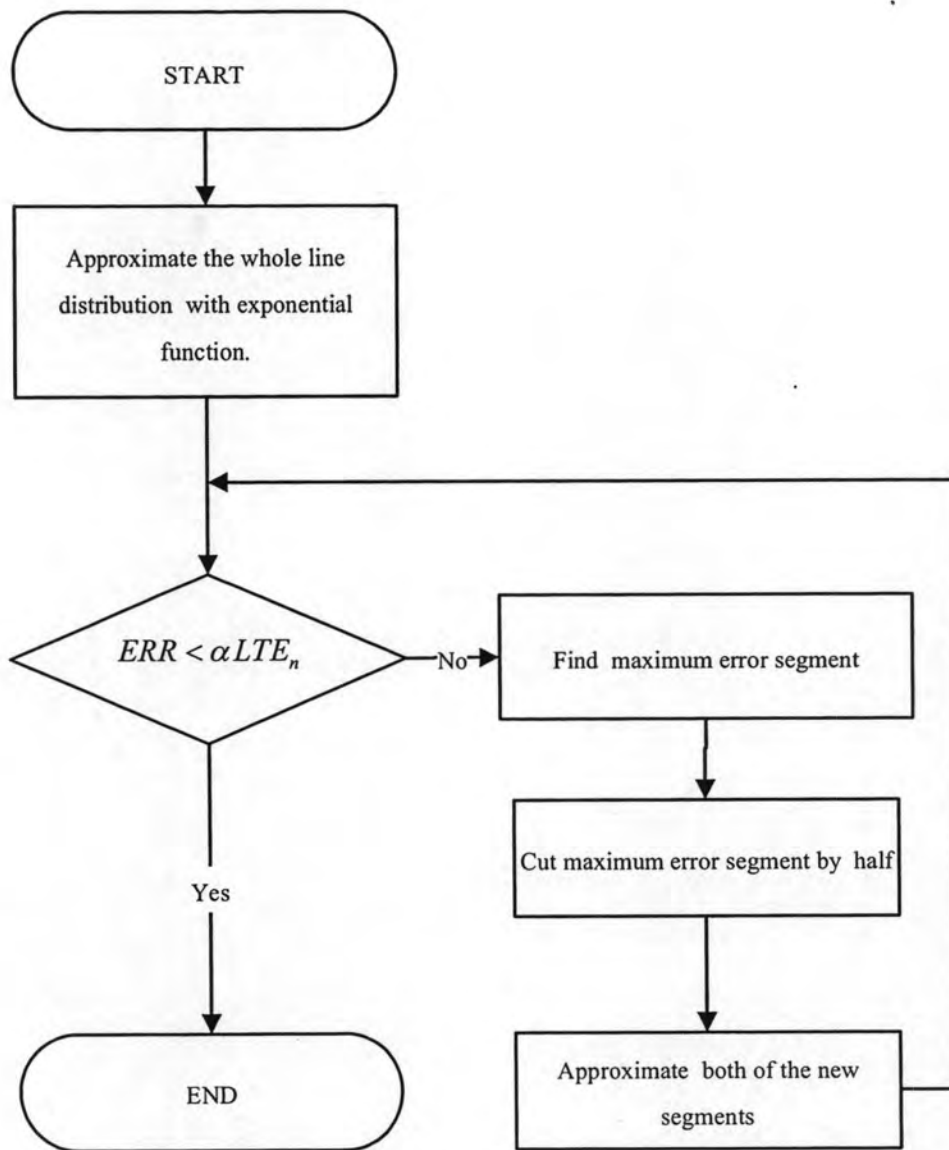
โดยความผิดพลาดจากการประมาณการกระจายในสายส่งหาได้จาก

$$ERR = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(x) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.23)$$

อย่างไรก็ดีการประมาณการกระจายที่มีฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $2nN$ เทอมให้มีแค่ $2N$ เทอม โดยมีความผิดพลาดน้อยนั้นเป็นเรื่องยาก แต่ความผิดพลาดของการประมาณจะลดลงเมื่อสายส่งมีขนาดสั้นลง หากเราแบ่งสายส่งออกเป็นสองท่อนแล้วแยกกันประมาณผลรวมของความผิดพลาดจะลดลง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอวิธีการแบ่งครึ่งท่อน (Bisection algorithm) เพื่อควบคุมความแม่นยำ โดยกำหนดเงื่อนไขให้ค่าความผิดพลาดจากการประมาณการกระจายของทั้งเส้นจะต้องมีค่าน้อยกว่าค่า LTE_n ด้วยอัตราส่วน α เป็นซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ($\alpha < 1$) กล่าวคือการประมาณการกระจายจะเชื่อถือได้ว่าแม่นยำเมื่อ

$$ERR < \alpha LTE_n \quad (3.24)$$

วิธีการแบ่งครึ่งท่อน (Bisection algorithm) ถูกใช้ในกรณีที่ความผิดพลาดจากการประมาณมากกว่าค่าที่กำหนด โดยจะแบ่งครึ่งสายส่ง และประมาณการกระจายในท่อนย่อยใหม่ จากนั้นคำนวณความผิดพลาดรวมจากการประมาณของสายส่งทั้งสองท่อนย่อย ถ้ายังคงมากกว่าที่กำหนดก็จะแบ่งท่อนที่มีค่าความผิดพลาดมากที่สุด และทำเช่นนี้ไปจนกว่าค่าความผิดพลาดจากการประมาณของทั้งสายมีค่าน้อยกว่าที่กำหนด ตามแผนภาพที่แสดงในรูปที่ 3-7

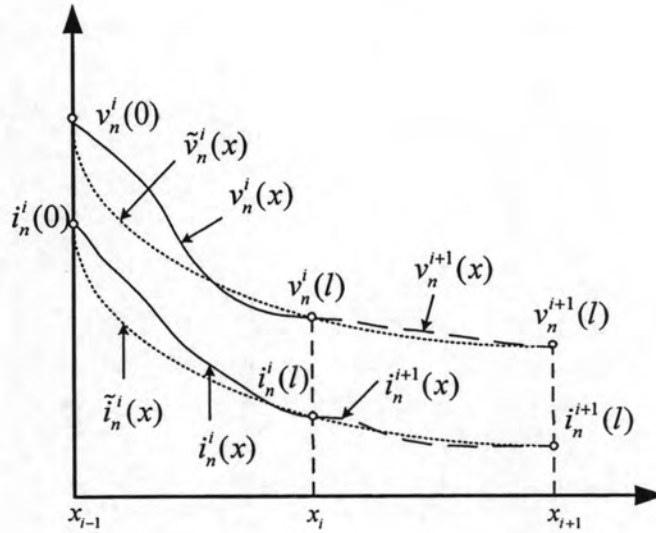


รูปที่ 3-7 แผนภาพการประมาณค่าการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งโดยวิธีแบ่งครึ่ง
ท่อน

อย่างไรก็ดีการแบ่งท่อนเพียงอย่างเดียววันนั้นจำนวนท่อนจะมีแต่เพิ่มขึ้น ซึ่งเป็นการเพิ่มความซับซ้อนในการคำนวณตามไปด้วย ดังนั้นเพื่อควบคุมจำนวนท่อนที่เกิดขึ้นจึงจำเป็นต้องมีการรวมท่อน และด้วยเงื่อนไขของการแบ่งครึ่งท่อนทำให้ท่อนที่เล็กที่สุดจะมีท่อนที่ขนาดเท่ากันอยู่ข้างกันเสมอ ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอวิธีรวมท่อนย่อยโดยประมาณการกระจายในท่อนย่อยสองท่อนที่ขนาดเท่ากันและอยู่ติดกันเป็นท่อนย่อยใหม่หนึ่งท่อน ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายต่อการจัดการขนาดและค่าที่แรงดันและกระแสที่ปลายของท่อนย่อยในกรณีที่ท่อนย่อยที่เกิดจากการรวมมีความผิดพลาดจากการประมาณสูงสุด คือเราสามารถใส่ค่าปลายเดิมโดยไม่ต้องคำนวณใหม่

การคำนวณค่าเมทริกซ์กำลังของการรวมท่อนให้หลักการประมาณค่าในช่วงเช่นเดียวกับการประมาณการกระจายในท่อนเดียว เนื่องจากเรารวมท่อนที่มีขนาดเท่ากันเสมอทำให้ ค่ากลาง

ของท่อนใหม่เป็นค่าปลายของท่อนเดิม ดังแสดงในรูปที่ 3-8 ซึ่งเป็นรูปการรวมท่อนของสายส่งหนึ่งเส้น



รูปที่ 3-8 การรวมท่อนย่อยของสายส่งหนึ่งเส้น

ค่าของการกระจายในสายส่งหลังการรวมท่อนจะเท่ากับการกระจายเดิมจากสองท่อน โดยกรณีรวมท่อนย่อยที่ i และยาว l จะเป็นดังสมการ (3.25) โดยกำหนดให้ $v_n^i(x)$ และ $i_n^i(x)$ เป็นค่าการกระจายของแรงดันและกระแสในท่อนที่ i

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_n^i\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \tilde{i}_n^i\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} v_n^i\left(\frac{m}{N}\right) \\ i_n^i\left(\frac{m}{N}\right) \end{bmatrix} & m \leq N \\ \begin{bmatrix} v_n^{i+1}\left(\frac{m-N}{N}\right) \\ i_n^{i+1}\left(\frac{m-N}{N}\right) \end{bmatrix} & m > N \end{cases} \quad (3.25)$$

โดยความสัมพันธ์ของค่าแรงดันและกระแสแต่ละจุดที่อยู่ติดกันหลังการรวมท่อนจะเป็นดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_n^i\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \tilde{i}_n^i\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} = e^{\tilde{A}_n^i \frac{m}{2N}} \begin{bmatrix} \tilde{v}_n^i\left(\frac{m-1}{2N}\right) \\ \tilde{i}_n^i\left(\frac{m-1}{2N}\right) \end{bmatrix}; m = 1, \dots, 2N \quad (3.26)$$

เมื่อ \tilde{A}_n^i เป็นเมทริกซ์กำลังของท่อนที่ i หลังรวมท่อน เมื่อเขียนสมการ(3.26) ให้อยู่ในรูปตัวแปรเดียวจะได้

$$\mathbf{W}_1 = e^{\frac{\tilde{\Lambda}_n}{2N}} \mathbf{W}_0 \quad (3.27)$$

เมื่อ

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(\frac{1}{2N}) & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_n^i(1) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(\frac{1}{2N}) & \cdots & \tilde{\mathbf{i}}_n^i(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^i(\frac{1}{N}) & \cdots & \mathbf{v}_n^i(1) & \cdots & \mathbf{v}_n^{i+1}(1) \\ \mathbf{i}_n^i(\frac{1}{N}) & \cdots & \mathbf{i}_n^i(1) & \cdots & \mathbf{i}_n^{i+1}(1) \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(0) & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_n^i(\frac{2N-1}{2N}) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(0) & \cdots & \tilde{\mathbf{i}}_n^i(\frac{2N-1}{2N}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^i(0) & \cdots & \mathbf{v}_n^i(1) & \cdots & \mathbf{v}_n^{i+1}(\frac{N-1}{N}) \\ \mathbf{i}_n^i(0) & \cdots & \mathbf{i}_n^i(1) & \cdots & \mathbf{i}_n^{i+1}(\frac{N-1}{N}) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_n^i &= 2N \ln(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1}) \\ &= -2N \ln(\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_1^{-1}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

และความยาวของท่อนย่อยย่อยใหม่จะมีค่าเท่ากับ $2l$ โดยค่าความผิดพลาดของการประมาณการกระจายในสายส่งจากการรวมท่อนหาได้จาก

$$ERR_i^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^i(x) \\ \mathbf{i}_n^i(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(x) \end{bmatrix} \right\|_{0 \leq x \leq l}^2 + \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^{i+1}(l-x) \\ \mathbf{i}_n^{i+1}(l-x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(x) \end{bmatrix} \right\|_{l \leq x \leq 2l}^2 \quad (3.29)$$

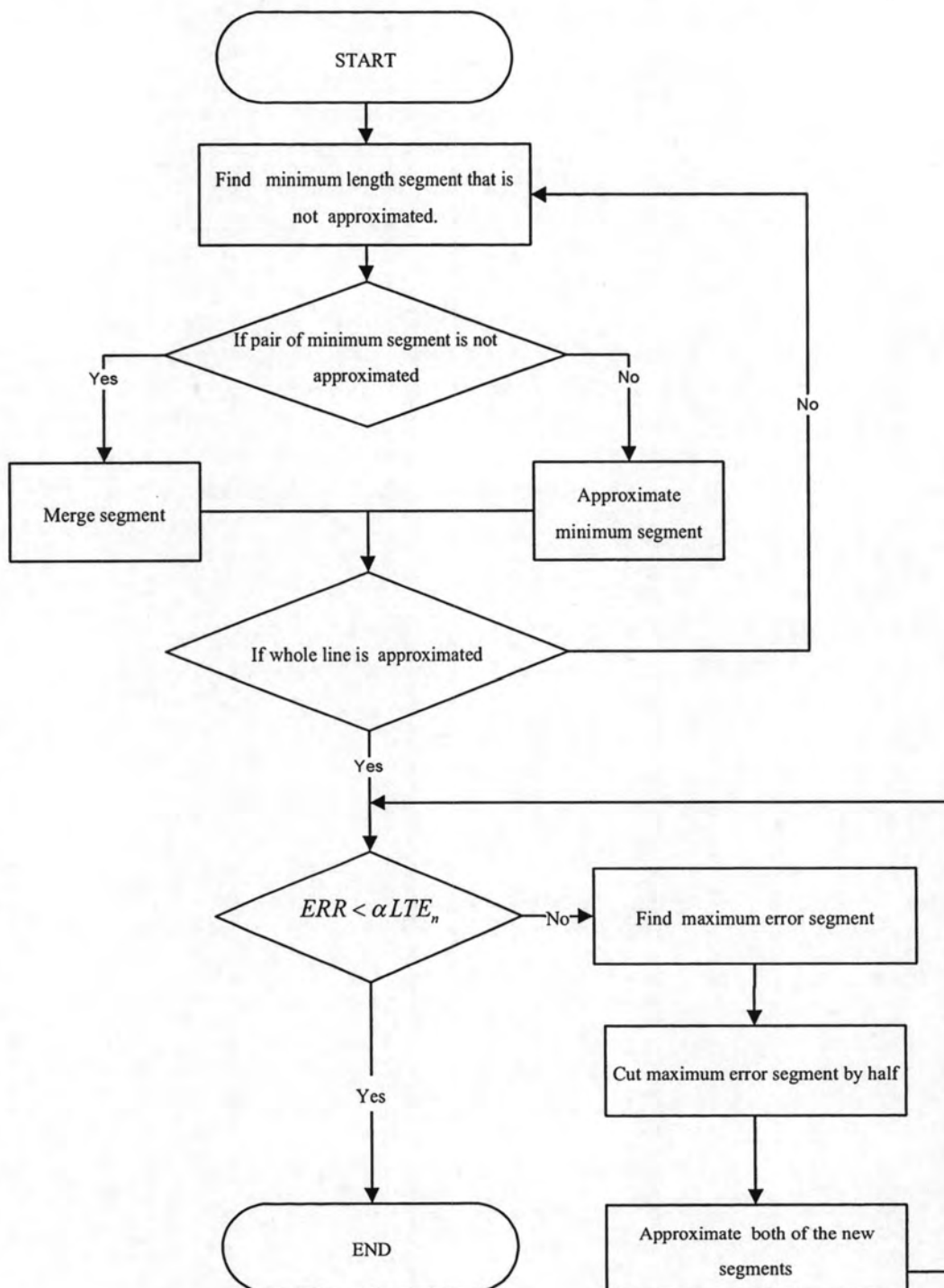
โดย ERR_i เป็นค่าความผิดพลาดจากการประมาณการกระจายในท่อนย่อยที่ i และเมื่อแทนสมการ(3.16) ลงในสมการ (3.29) จะได้

$$ERR_i^2 = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^i(x) \\ \mathbf{i}_n^i(x) \end{bmatrix} - e^{\frac{\tilde{\Lambda}_n^i x}{2}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(0) \end{bmatrix} \right\|^2 + \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^{i+1}(x) \\ \mathbf{i}_n^{i+1}(x) \end{bmatrix} - e^{\frac{\tilde{\Lambda}_n^i x}{2}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_n^i(l) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n^i(l) \end{bmatrix} \right\|^2 ; 0 \leq x \leq l \quad (3.30)$$

งานวิจัยนี้ได้เสนอขั้นตอนของการรวมท่อนไว้ดังนี้ เริ่มต้นด้วยการหาท่อนที่เล็กที่สุดที่ยังไม่ถูกประมาณค่าการกระจาย เพื่อป้องกันปัญหาการไม่สามารถรวมท่อนย่อยที่เกิดขึ้นทั้งหมดกลับเป็นหนึ่งท่อนได้ เมื่อได้ท่อนที่เล็กที่สุดแล้วจะตรวจสอบท่อนขนาดเท่ากันที่อยู่ด้านข้างถ้ายังไม่ถูกประมาณค่าการกระจายให้ทำการรวมท่อนย่อย กรณีที่ถูกประมาณค่าไปแล้วให้ทำการประมาณค่าการกระจายเฉพาะท่อนย่อยนั้น แล้วย้อนกลับไปหาท่อนย่อยที่เล็กที่สุดที่ยังไม่ได้

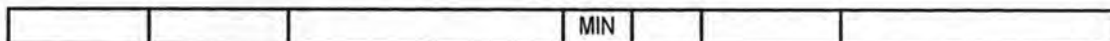
ประมาณค่าใหม่ และจะทำซ้ำเช่นนี้จนกว่าที่น้อยที่สุดทั้งหมดจะถูกประมาณ ดังนั้นแผนภาพการประมาณการกระจายในสายส่งในรูปที่ 3-7 เขียนได้ใหม่ดัง

รูปที่ 3-9 และแสดงตัวอย่างการรวมท่อนไว้ในรูปที่ 3-10 โดยกำหนดให้ก่อนเริ่มต้น สายส่งถูกแบ่งเป็น 7 ท่อน และความผิดพลาดจากการประมาณไม่เกิน 0.01 volt



รูปที่ 3-9 แผนภาพการประมาณค่าการกระจายของแรงดันและกระแสในสายส่งที่รวมการรวมท่อนย่อยแล้ว

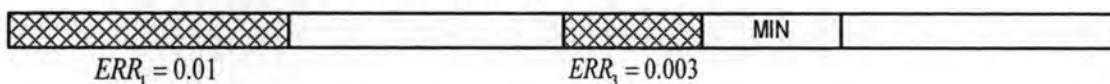
STEP : 1 Segment =7 , minimum length segment = 4



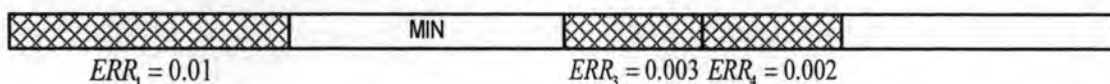
STEP : 2 Segment =6 , minimum length segment = 1



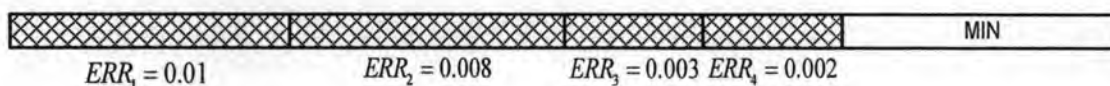
STEP : 3 Segment =5 , minimum length segment = 4



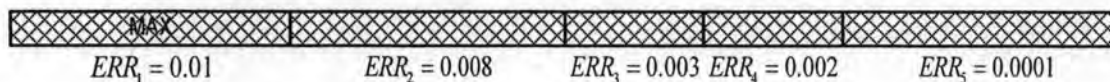
STEP : 4 Segment =5 , minimum length segment = 2



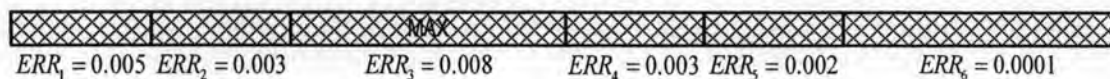
STEP : 5 Segment =5 , minimum length segment = 5



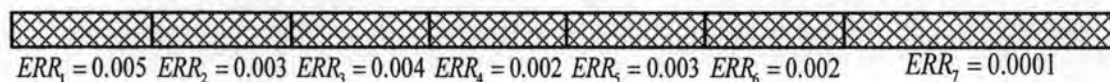
STEP : 6 Segment =5 , maximum error segment = 1 $ERR = 0.0133$



STEP : 7 Segment =6 , maximum error segment = 2 $ERR = 0.0105$



STEP : 8 Segment =7 , maximum error segment = 4 $ERR = 0.0085$



รูปที่ 3-10 ลักษณะของท่อนย่อยในสายส่งที่เปลี่ยนแปลงไปในระหว่างการประมาณค่าการกระจาย

จากรูปที่ 3-10 ในรอบที่หนึ่งท่อนที่เล็กที่สุดคือท่อนย่อยที่ 4 และท่อนย่อยที่ 5 ที่มีขนาดเท่ากันโดยทั้งสองท่อนยังไม่ถูกประมาณค่าการกระจาย ระบบจึงทำการรวมท่อนย่อยทั้งสอง ทำให้จำนวนท่อนย่อยทั้งหมดเหลือ 6 จากนั้นจะไปสู่อรอบต่อไป ซึ่งท่อนที่เล็กที่สุดและยังไม่ถูกประมาณคือท่อนที่ 1 และท่อนที่สองที่อยู่ติดกันนั้นยังไม่ถูกประมาณจึงทำการรวมท่อนย่อยที่หนึ่ง

และสองเข้าด้วยกัน ทำให้ท่อนย่อยทั้งหมดเป็น 5 ท่อน ในรอบที่สามท่อนที่เล็กที่สุดที่ยังไม่ได้ประมาณคือท่อนที่ 4 แต่เนื่องจากท่อนที่ 3 ที่อยู่ติดกันถูกประมาณด้วยการรวมท่อนไปแล้วจึงประมาณค่าการกระจายเฉพาะในท่อนย่อยที่ 4 เท่านั้น และจะทำซ้ำเช่นนี้ไปจนทุกท่อนได้รับการประมาณในรอบที่ 6 จากนั้นทำการตรวจสอบค่าความผิดพลาดจากการประมาณการกระจายของทั้งเส้นพบว่ายังสูงกว่าค่าที่กำหนด คือ 0.01 จึงเลือกท่อนที่ 1 ที่มีค่าความผิดพลาดมากที่สุด มาทำการแบ่งครึ่งท่อน และตรวจสอบค่าความผิดพลาดรวมใหม่ และจะทำซ้ำเช่นนี้จนค่าความผิดพลาดรวมน้อยกว่าค่าที่กำหนดในรอบที่ 8 เป็นอันเสร็จสิ้นขั้นตอนการประมาณค่าสายส่งทั้งเส้น

การใช้วิธีประมาณค่าการกระจายในสายส่งด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ร่วมกับการจัดการท่อนย่อยที่ได้นำเสนอไป ทำให้เราสามารถควบคุมความแม่นยำของการประมาณค่ารวมถึงจำนวนท่อนย่อยที่เกิดขึ้นจากการประมาณให้มีความเหมาะสมและ สัมพันธ์กับความแม่นยำของการวิเคราะห์ เนื่องจากการใช้ αLTE_n เป็นตัวกำหนด

อย่างไรก็ดีวิธีการที่กล่าวมาเป็นเพียงหลักการเบื้องต้นเท่านั้น ในการคำนวณจริงต้องมีการคำนึงถึงปัญหาทางการคำนวณต่างๆ เช่น การปัดเศษ และเวลาในการคำนวณ เป็นต้น ซึ่งวิธีการคำนวณทั้งหมดจะถูกนำมากล่าวรวมกันไว้ในส่วนต่อไป

3.3 การสร้างแบบจำลองเชิงเวลาในการใช้งานจริง

การสร้างแบบจำลองเชิงเวลาเพื่อใช้งานจริงนั้นต้องคำนึงถึงผลของความผิดพลาดจากการการปัดเศษ (round off error) ของคอมพิวเตอร์ด้วย เพราะคอมพิวเตอร์จะเก็บตัวเลขจำนวนจริง (Real number) ในรูปข้อมูลดิจิทัลแบบ floating-point unit เช่น IEEE 754 เป็นต้น ซึ่งมาตรฐาน IEEE 754 จะใช้เลขขนาด 64 บิต แทนค่าจำนวนจริง (Real value) ตามสูตรต่อไปนี้

$$real_value = s \times 2^E \times F \quad (3.31)$$

E คือ เลขชี้กำลัง มีขนาด 11 บิต

F คือ Fraction หรือเลขเศษส่วน เป็นค่าของตัวเลขที่ต้องการเก็บ มีขนาด 52 บิต

S คือ เครื่องหมายมีขนาด 1 บิต

เลขเศษส่วนที่ใช้เก็บค่าตัวเลขนั้นมีขนาด 52 บิต ดังนั้นค่าที่เก็บได้คือ 2^0 ถึง $2^{52} - 1$ หรือประมาณ 10^{16} ดังนั้นหลักที่เกินมาจะถูกปัดทิ้ง เช่น 5×10^{17} หลักหน่วยจะถูกตัดทิ้งไป ซึ่งการคำนวณแบบจำลองทางเวลาด้วยวิธี DSV ต้องใช้ e^A ในการคำนวณ $v_n(x)$ และ $i_n(x)$ ตาม

สมการ (3.8) โดยที่ A_n เป็นฟังก์ชันของ $\frac{1}{h_n}$ เมื่อเราลดขนาดขั้นเวลา (h_n) เพื่อเพิ่มความแม่นยำของการวิเคราะห์ ค่าของ e^{A_n} จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และความผิดพลาดจากการปัดเศษ (round off error) จะส่งผลถึงความผิดพลาดของการวิเคราะห์ด้วย

วิธีแก้ปัญหานี้ที่ง่ายที่สุดคือแบ่งสายส่งออกเป็นท่อนย่อยเพื่อลดค่าของ A_n แต่วิธีการแบ่งท่อนอย่างเดียวนั้นจะทำให้ความซับซ้อนของการคำนวณสูงขึ้นด้วย ดังนั้นงานวิจัยจึงเสนอให้ปรับการคำนวณเพื่อลดผลของการปัดเศษ โดยแยกองค์ประกอบเมทริกซ์ด้วยวิธี เมทริกซ์คล้ายกล่าวคือ เมทริกซ์ A ที่ใช้ในการวิเคราะห์เป็นเมทริกซ์ซึ่งไม่ใช่เอกฐาน (Non-singular matrix) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ.

$$A = T^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{bmatrix} T \quad (3.32)$$

เมื่อ T เป็นเมทริกซ์ทรานฟอร์ม (Transformation matrix) Λ^+ และ Λ^- เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะจำเพาะ (Eigen value) บวกและลบตามลำดับ โดยเราสามารถจัดให้เมทริกซ์ Λ^- (Λ^+) ทั้งหมดมีค่าลักษณะจำเพาะเป็นลบ (บวก) ทั้งหมดเพื่อลดผลกระทบจากการตัดปลายลง ดังนั้นเมื่อนำ A_n และ \tilde{A}_{n-1} มาแยกองค์ประกอบจะได้

$$A_n = \begin{bmatrix} I & Z_n \\ I & -Z_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_n & 0 \\ 0 & -\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Z_n \\ I & -Z_n \end{bmatrix} = T_n^{-1} \bar{\Lambda}_n T_n \quad (3.33)$$

และ

$$\tilde{A}_{n-1} = T_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda_{n-1}^+ & 0 \\ 0 & \Lambda_{n-1}^- \end{bmatrix} T_{n-1} \quad (3.34)$$

ดังนั้นสมการ (3.8) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n x} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^+(0) \\ \mathbf{w}_n^-(0) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^x \begin{bmatrix} e^{\Lambda_n(x-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda_n(x-\tau)} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_n \begin{bmatrix} e^{\Lambda_{n-1}^+ \tau} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \end{bmatrix} d\tau \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{n-1}^+(0) \\ \mathbf{w}_{n-1}^-(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\text{โดยที่ } \begin{bmatrix} \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix} = T_n \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{และ } \tilde{\mathbf{B}}_n = T_n \mathbf{B}_n T_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_{11} & \tilde{\mathbf{b}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{b}}_{21} & \tilde{\mathbf{b}}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{เราสามารถแบ่ง}$$

สมการที่ (3.35) เป็นสองสมการย่อยตามสมการที่ (3.36) และ (3.37) ได้ดังนี้

$$\mathbf{w}_n^-(x) = e^{-\Lambda_n x} \mathbf{w}_n^-(0) + \int_0^x e^{-\Lambda_n(x-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{21} e^{\Lambda_{n-1}^+ \tau} \mathbf{w}_{n-1}^+(0) d\tau + \int_0^x e^{-\Lambda_n(x-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{22} e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(0) d\tau \quad (3.36)$$

$$\mathbf{w}_n^+(x) = e^{\Lambda_n x} \mathbf{w}_n^+(0) + \int_0^x e^{\Lambda_n(x-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{11} e^{\Lambda_{n-1}^+ \tau} \mathbf{w}_{n-1}^+(0) d\tau + \int_0^x e^{\Lambda_n(x-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{12} e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(0) d\tau \quad (3.37)$$

นำ $e^{-\Lambda_n x}$ คูณในสมการ (3.37) จะได้

$$e^{-\Lambda_n x} \mathbf{w}_n^+(x) = \mathbf{w}_n^+(0) + \int_0^x e^{-\Lambda_n(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{11} e^{\Lambda_{n-1}^+ \tau} \mathbf{w}_{n-1}^+(0) d\tau + \int_0^x e^{-\Lambda_n(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{12} e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(0) d\tau \quad (3.38)$$

แทน $x=1$ ลงในสมการที่(3.36) และ(3.38) และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} e^{-\Lambda_n} & e^{-\Lambda_n} \mathbf{Z}_n \\ \mathbf{I} & -\mathbf{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Z}_n \\ e^{-\Lambda_n} & -e^{-\Lambda_n} \mathbf{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_0(1) \\ \mathbf{J}'_1(1) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

โดย

$$\mathbf{J}'_0 = \int_0^1 e^{-\Lambda_n(\tau)} \tilde{\mathbf{d}}_{11} e^{-\Lambda_{n-1}^+(1-\tau)} \mathbf{W}_0^+(1) d\tau + \int_0^1 e^{-\Lambda_n(\tau)} \tilde{\mathbf{d}}_{12} e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \mathbf{W}_0^-(0) d\tau \quad (3.40)$$

$$\mathbf{J}'_1 = \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-\tau)} \tilde{\mathbf{d}}_{21} e^{-\Lambda_{n-1}^+(1-\tau)} \mathbf{W}_0^+(1) d\tau + \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-\tau)} \tilde{\mathbf{d}}_{22} e^{\Lambda_{n-1}^- \tau} \mathbf{W}_0^-(0) d\tau \quad (3.41)$$

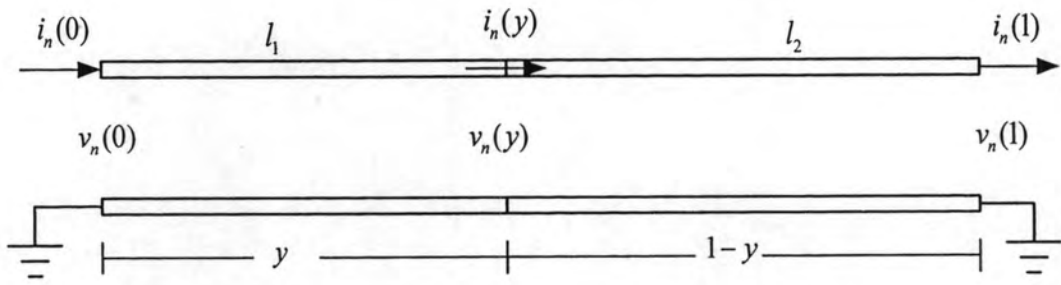
เมื่อเราย้ายตัวแปรของกระแสและแรงดันให้อยู่คนละด้านของสมการจะได้

$$\begin{bmatrix} e^{-\Lambda_n} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & e^{-\Lambda_n} \end{bmatrix} \mathbf{Z}_n \begin{bmatrix} \mathbf{i}_n(1) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-\Lambda_n} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & e^{-\Lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{v}_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}'_0(1) \\ \mathbf{J}'_1(1) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

สังเกตได้ว่าสมการ (3.42) และ (3.10) นั้นเป็นสมการเดียวกันเพียงแต่จัดรูปใหม่ให้ใช้เมทริกซ์ที่กำลังในสมการที่มีค่าลักษณะเฉพาะ(eigen value)เป็นลบทั้งหมด

3.4 การคำนวณค่าแรงดันและกระแสที่จุดต่างๆในสายส่ง

การแก้ปัญหาคำนวณค่าแรงดันและกระแสที่จุดต่างๆในสายส่งโดยการแก้ปัญหาคำนวณค่าแรงดันและกระแสที่ตำแหน่ง y ใดๆในสายส่ง กำหนดให้สายส่งมีความยาว 1 หน่วย เราจะแบ่งสายส่งออกเป็นสองท่อนยาว y และ $1-y$ ดังรูปที่ 3-11



รูปที่ 3-11 การคำนวณแรงดันและกระแสที่ตำแหน่งใดๆ ของสายส่ง

เมื่อใช้สมการ (3.36) และ (3.38) หาค่าการกระจาย ของท่อนย่อย l_1 จะได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n^-(y) = & e^{-\Lambda_n y} \mathbf{w}_n^-(0) + \int_0^1 e^{-\Lambda_n y(1-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{21} e^{-\Lambda_{\bar{0}}^+ y(1-\tau)} \mathbf{w}_{n-1}^+(y) d\tau \\ & + \int_0^1 e^{-\Lambda_n y(1-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{22} e^{\Lambda_{\bar{0}} y \tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(0) d\tau \end{aligned} \quad (3.43)$$

และ

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda_n y} \mathbf{w}_n^+(y) = & \mathbf{w}_n^+(0) + \int_0^1 e^{-\Lambda_n y(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{11} e^{-\Lambda_{\bar{0}}^+ y(1-\tau)} \mathbf{w}_{n-1}^+(0) d\tau \\ & + \int_0^1 e^{-\Lambda_n y(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{12} e^{\Lambda_{\bar{0}} y \tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(0) d\tau \end{aligned} \quad (3.44)$$

ส่วนท่อนย่อย l_2 จะได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} e^{-\Lambda_n(1-y)} \mathbf{w}_n^-(y) = & \mathbf{w}_n^-(1) - \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-y)(1-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{21} e^{-\Lambda_{\bar{0}}^+(1-y)(1-\tau)} \mathbf{w}_{n-1}^+(y) d\tau \\ & - \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-y)(1-\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{22} e^{\Lambda_{\bar{0}}(1-y)\tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(y) d\tau \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n^+(y) = & e^{-\Lambda_n(1-y)} \mathbf{w}_n^+(1) - \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-y)(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{11} e^{-\Lambda_{\bar{0}}^+(1-y)(1-\tau)} \mathbf{w}_{n-1}^+(1) d\tau \\ & - \int_0^1 e^{-\Lambda_n(1-y)(\tau)} \tilde{\mathbf{b}}_{12} e^{\Lambda_{\bar{0}}(1-y)\tau} \mathbf{w}_{n-1}^-(y) d\tau \end{aligned} \quad (3.46)$$

เพื่อป้องกันปัญหาการปิดเศษจึงเลือกสมการ (3.43) และ (3.46) มาใช้ในการคำนวณการกระจายในสายส่งที่ตำแหน่ง y เนื่องจากเมทริกซ์เลขชี้กำลังในสมการมีค่าลักษณะเป็นลบทั้งหมด

3.5 การคำนวณค่าความผิดพลาดการตัดปลาย (Local Truncation Error, LTE)

ความผิดพลาดจากการตัดปลายในงานวิจัยนี้เกิดจากการประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีทางตัวเลขซึ่งในความจริงควรเทียบระหว่างค่าจริงกับค่าที่คำนวณได้จากการประมาณ แต่เนื่องจากเราไม่ทราบคำตอบที่ถูกต้องของการวิเคราะห์ ดังนั้นจึงเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่คำนวณได้จากการประมาณด้วยวิธีทางตัวเลขสองวิธี ในกรณีเปรียบเทียบระหว่างวิธีประมาณค่าแบบถอยหลัง (Backward Euler, BE) และ วิธีการประมาณค่าแบบเดินหน้า (Forward Euler, FE) จะเป็นไปตามสมการ

$$LTE_n = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n,FE}(x) \\ \mathbf{i}_{n,FE}(x) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.47)$$

โดย $\mathbf{v}_{n,FE}$ และ $\mathbf{i}_{n,FE}$ คือการกระจายของแรงดันและกระแสที่คำนวณจากวิธี Forward Euler (FE) ซึ่งเป็นตามสูตร

$$f_{n,FE}(x) = f_{n-1}(x) + h_n \frac{df_{n-1}(x)}{dt} \quad (3.48)$$

เมื่อ $\|\cdot\|$ เป็นนอร์ม(norm)ซึ่งมีนิยามคือ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{F}(x); 0 \leq x \leq 1$ จะได้ว่า $\|\mathbf{F}(x)\| = \sqrt{\int_0^1 \mathbf{F}^T(x)\mathbf{F}(x)} dx$ และ $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \sqrt{\mathbf{LC}} \\ \mathbf{I} & -\sqrt{\mathbf{LC}} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักระหว่างผลของแรงดันและกระแส เนื่องจากงานวิจัยนี้กำหนดให้ประมาณค่าการกระจายในสายส่งเพียงหนึ่งชั้นเวลาย้อนหลัง เราจำเป็นต้องเขียน $\mathbf{v}_{n,FE}$ และ $\mathbf{i}_{n,FE}$ ในรูปฟังก์ชันของ $\mathbf{v}_n(x)$, $\mathbf{i}_n(x)$, $\tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x)$ และ $\tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x)$ เมื่อนำฟังก์ชันเลขชี้กำลังในสมการ(3.16) มาหาอนุพันธ์เทียบกับ x และเทียบกับสมการ telegrapher ในสมการ(3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{A}}_{n-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.49)$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{n-1} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

เมื่อใช้สมการ (3.48) กับ (3.50) แทนลงในสมการ(3.47) จะได้

$$LTE_n = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{T} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} - \left[\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{L} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \right]^{-1} \left(\tilde{\mathbf{A}}_{n-1} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \end{bmatrix} \right\} \right\| \quad (3.51)$$

การคำนวณหาค่าของ LTE_n ในทางปฏิบัตินั้น เริ่มจากเขียนสมการ (3.17) ที่เวลา t_n ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(x) \\ \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} x} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(0) \\ \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

และจากนิยามของนอร์มทำให้

$$LTE_n^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(0) \\ \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix}^T \int_0^1 e^{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} x} \mathbf{K}^T \mathbf{K} e^{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} x} dx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(0) \\ \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

เพื่อลดปัญหาการบิดเบือน เราจะแยกองค์ประกอบ(decomposition) เมทริกซ์ด้วยวิธีเมทริกซ์คล้ายตามสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{n-1} & 0 \\ \mathbf{B}_n & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (3.54)$$

เมื่อ Λ^+ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะจำเพาะ(Eigen value) มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ Λ^- เป็นเมทริกซ์ที่มีของค่าลักษณะจำเพาะ(Eigen value) น้อยกว่า 0 \mathbf{T} เป็นเมทริกซ์ของเวกเตอร์ลักษณะจำเพาะ(Eigen vector) แทนค่าสมการ (3.54) ลงใน (3.52) จะได้

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^+(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^-(x) \\ \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{bmatrix} x} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-1}(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-1}(0) \\ \mathbf{v}_n(0) \\ \mathbf{i}_n(0) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} \Lambda^+ & 0 \\ 0 & \Lambda^- \end{bmatrix} x} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^+(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^-(x) \\ \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

ดังนั้นสมการ (3.53) เขียนใหม่ได้เป็น

$$LTE_n^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^+(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^-(x) \\ \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix}^T \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-\Lambda^+(1-x)} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda^-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{11} & \tilde{\mathbf{k}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{21} & \tilde{\mathbf{k}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\Lambda^+(1-x)} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda^-x} \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^+(x) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{n-1}^-(x) \\ \mathbf{w}_n^+(x) \\ \mathbf{w}_n^-(x) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

โดย $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_{11} & \tilde{\mathbf{k}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{k}}_{21} & \tilde{\mathbf{k}}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{T}^{-1}$ เมื่อเราแบ่งสมการ (3.56) ออกเป็น 4 สมการย่อยคือ

$$LTE_{n,11} = \mathbf{w}^{+T}(1) \int_0^1 e^{-\Lambda^+(1-x)} \tilde{\mathbf{k}}_{11} e^{-\Lambda^+(1-x)} dx \mathbf{w}^+(1) \quad (3.57)$$

$$LTE_{n,12} = \mathbf{w}^{+T}(1) \int_0^1 e^{-\Lambda^+(1-x)} \tilde{\mathbf{k}}_{12} e^{\Lambda^-x} dx \mathbf{w}^-(0) \quad (3.58)$$

$$LTE_{n,21} = \mathbf{w}^{-T}(0) \int_0^1 e^{\Lambda^-x} \tilde{\mathbf{k}}_{21} e^{-\Lambda^+(1-x)} dx \mathbf{w}^+(1) \quad (3.59)$$

$$LTE_{n,22} = \mathbf{w}^{-T}(0) \int_0^1 e^{\Lambda^-x} \tilde{\mathbf{k}}_{22} e^{\Lambda^-x} dx \mathbf{w}^-(0) \quad (3.60)$$

จะได้ว่า

$$LTE_n^2 = LTE_{n,11}^2 + LTE_{n,12}^2 + LTE_{n,21}^2 + LTE_{n,22}^2 \quad (3.61)$$

สมการ (3.57) ถึง (3.60) จะใช้ฟังก์ชันเลขชี้กำลังของเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะเป็นลบทั้งหมด ซึ่งจะทำให้การคำนวณค่า LTE_n มีความแม่นยำมากขึ้น

3.6 วิธีอินทิเกรตทางอ้อม

การคำนวณค่าของ \mathbf{J}'_0 และ \mathbf{J}'_1 ในแบบจำลองเชิงเวลาตามสมการที่ (3.40) และ (3.41) และค่า LTE_n ในสมการ (3.61) นั้นติดอยู่ในรูปอินทิเกรต ซึ่งสามารถหาคำตอบได้หลายวิธีเช่น การอินทิเกรตเชิงสัญลักษณ์ (symbolic) หรือใช้วิธีทางตัวเลขเช่นวิธีสามเหลี่ยมคางหมู (trapezoidal) แต่วิธีอินทิเกรตเชิงสัญลักษณ์ไม่เหมาะเนื่องจากขนาดของเมทริกซ์ที่ใช้เปลี่ยนแปลงตามจำนวนของสายส่งในวงจร และวิธีอินทิเกรตทางตัวเลขนั้นใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมากเมื่อต้องการความแม่นยำที่สูง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอวิธีการอินทิเกรตทางอ้อมซึ่งมีอยู่สองลักษณะตามรูปแบบของสมการที่ใช้กล่าวคือ

3.6.1 วิธีอินทิเกรต $\int_0^1 e^{M_1(1-\tau)} d e^{M_2(\tau)} d\tau$

กำหนดให้ $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ และ $d \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ตามลำดับ ผลของการอินทิเกรตของฟังก์ชันดังกล่าวจะเป็นตามสมการ

$$\int_0^1 e^{M_1(1-\tau)} d e^{M_2(\tau)} d\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} e^{\begin{bmatrix} M_2 & \mathbf{0} \\ d & M_1 \end{bmatrix} \tau} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m \times m} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

เมื่อ $\mathbf{I}_{n \times n}$ และ $\mathbf{I}_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาดเท่ากับ M_1 และ M_2 ตามลำดับ พิสูจน์ ให้

$$\mathbf{F}(\tau) = e^{\begin{bmatrix} M_2 & \mathbf{0} \\ d & M_1 \end{bmatrix} \tau} \begin{bmatrix} e^{M_2 \tau} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(\tau) & e^{M_1 \tau} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{F}(\tau) = \begin{bmatrix} M_2 & \mathbf{0} \\ d & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{M_2 \tau} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(\tau) & e^{M_1 \tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 e^{M_2 \tau} & \mathbf{0} \\ \frac{d}{dx} \mathbf{Q}(\tau) & M_1 e^{M_1 \tau} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

เทียบพจน์ที่มุมล่างซ้ายของสมการเมทริกซ์ข้างบนนี้จะได้ว่า

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{Q}(\tau) = d e^{M_2 \tau} + M_1 \mathbf{Q}(\tau) \quad (3.65)$$

เมื่อ $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0}$ โดยคำตอบของสมการอนุพันธ์ที่ $\tau = 1$ คือ

$$\mathbf{Q}(1) = \int_0^1 e^{M_1(1-\tau)} d e^{M_2(\tau)} d\tau \quad (3.66)$$

เมื่อแทนที่ $\mathbf{Q}(1)$ ด้วยคำจำกัดความของ $\mathbf{F}(\tau)$ การพิสูจน์ก็จะเสร็จสิ้น

3.6.2 วิธีอินทิเกรต $\int_0^1 e^{M_1(\tau)} d e^{M_2(\tau)} d\tau$

กำหนดให้ $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ และ $d \in \mathbb{R}^{n \times m}$ โดยที่การหาผลอินทิเกรตของฟังก์ชันในลักษณะนี้มีลักษณะสมการตรงกับที่ใช้กันทั่วไปในทางวิศวกรรมควบคุม ซึ่งสามารถเลี่ยงการอินทิเกรตด้วยวิธีเลียปูนอฟอินทิเกรต (Lyapunov Integral) [19] คือ ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ โดย

$$Q = \int_0^1 e^{M_1 \tau} d e^{M_2 \tau} d\tau \quad (3.67)$$

จะได้ว่า

$$QM_2 + M_1 Q = e^{M_1} d e^{M_2} - d \quad (3.68)$$

พิสูจน์ สมมติให้ M_1 และ M_2 เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) เมื่อใช้วิธีอินทิเกรตทีละส่วน (by part) กับสมการที่ (3.67) โดยที่ $\tau \in \mathbb{R}; [0,1]$ จะได้ผลดังนี้

$$Q = e^{M_1 \tau} d e^{M_2 \tau} M_2^{-1} \Big|_0^1 - \int_0^1 M_1 e^{M_1 \tau} d e^{M_2 \tau} M_2^{-1} d\tau \quad (3.69)$$

$$Q = (e^{M_1} d e^{M_2} - d) M_2^{-1} - M_1 \int_0^1 e^{M_1 \tau} d e^{M_2 \tau} d\tau M_2^{-1} \quad (3.70)$$

$$QM_2 = (e^{M_1} d e^{M_2} - d) - M_1 Q \quad (3.71)$$

ดังนั้น

$$QM_2 + M_1 Q = e^{M_1} d e^{M_2} - d \quad (3.72)$$

วิธีแก้สมการเลียปูนอฟ (Lyapunov equation) เพื่อหาค่า Q ต้องใช้ผลประกอบการของคลอนเนคเคอ (Kronecker product) เพื่อแผ่ขยายเมทริกซ์ให้อยู่ในลักษณะของเวคเตอร์ในแก้สมการ โดยอาศัยคุณสมบัติดังต่อไปนี้

$$col(QM_2) = [M_2 \otimes I_{m \times m}] col(Q) \quad (3.73)$$

$$col(M_1 Q) = [I_{n \times n} \otimes M_1] col(Q) \quad (3.74)$$

เมื่อ $I_{n \times n}$ และ $I_{m \times m}$ เป็นเมทริกซ์อัตลักษณ์ (identity matrix) และ \otimes เป็นตัวปฏิบัติการคลอนเนคเคอ (Kronecker operator) ส่วนเมทริกซ์ Q ที่ต้องการทราบค่าที่ถูกเรียงเป็นแบบคอลัมน์เดียว โดยแทนด้วยสัญลักษณ์ $col(Q)$ ทำให้เขียนสมการที่ (3.72) ใหม่ได้เป็น

$$\{[M_2 \otimes I_{m \times m}] + [I_{n \times n} \otimes M_1]\} col(Q) = col(e^{M_1} d e^{M_2} - d) \quad (3.75)$$

ดังนั้น

$$\text{col}(\mathbf{Q}) = \{[\mathbf{M}_2 \otimes \mathbf{I}_{m \times m}] + [\mathbf{I}_{m \times n} \otimes \mathbf{M}_1]\}^{-1} \text{col}(e^{\mathbf{M}_1} \mathbf{d} e^{\mathbf{M}_2} - \mathbf{d}) \quad (3.76)$$

สองวิธีการที่กล่าวมาเราสามารถหาผลอินทิเกรตที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้แน่นอน เมื่อ \mathbf{M}_1 และ \mathbf{M}_2 ค่าลักษณะจำเพาะเป็นเครื่องหมายเดียวกัน ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้จัดเมทริกซ์ทั้งหมดให้มีค่าลักษณะจำเพาะเป็นลบไว้แล้ว

3.7 การแก้ปัญหาเมทริกซ์เอกฐาน (Singular)

การหาเมทริกซ์ที่ก้ำกั้ว ($\tilde{\mathbf{A}}_n$) ด้วยวิธีประมาณค่าในช่วงตามสมการ (3.22) จะทำได้ต่อเมื่อ \mathbf{W}_1 หรือ \mathbf{W}_0 เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular) แต่มีบางกรณีที่ \mathbf{W}_1 และ \mathbf{W}_0 เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular) เช่นกรณีการกระจายเป็นเส้นตรงเป็นต้น ทำให้ไม่สามารถหาค่าของ $\tilde{\mathbf{A}}_n$ ตามสมการที่ (3.22) ได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าวจึงเสนอให้ประมาณค่าการกระจายของกระแสและแรงดันแต่ละเส้นด้วยฟังก์ชันเส้นตรงในรูปแบบของสมการเลขชี้กำลัง และเพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจจึงเริ่มที่สายส่งหนึ่งเส้น ($N=1$) นำสมการเลขชี้กำลังที่ใช้ในการประมาณค่าการกระจายของสายส่งในสมการ (3.16) มาเขียนอยู่ในลักษณะของอนุกรมกำลัง (Power series) จะได้

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_n(x) \\ \tilde{i}_n(x) \end{bmatrix} = e^{\tilde{\mathbf{A}}_n x} \begin{bmatrix} \tilde{v}_n(0) \\ \tilde{i}_n(0) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{\mathbf{A}}_n^k x^k \begin{bmatrix} \tilde{v}_n(0) \\ \tilde{i}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

ถ้ากำหนดให้ $\tilde{\mathbf{A}}_n^2 = 0$ สมการ (3.77) จะเป็นสมการเส้นตรงดังสมการ (3.78)

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_n(x) \\ \tilde{i}_n(x) \end{bmatrix} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{A}}_n x) \begin{bmatrix} \tilde{v}_n(0) \\ \tilde{i}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

เรากำหนดให้ค่าแรงดันและกระแสที่ปลายสายหลังประมาณเท่ากับค่าแรงดันและกระแสเดิม สมการ (3.78) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\tilde{\mathbf{A}}_n \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n(1) \\ i_n(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

และจากเงื่อนไข $\tilde{\mathbf{A}}_n^2 = 0$ จะได้

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^2 \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}}_n \left(\begin{bmatrix} v_n(1) \\ i_n(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (3.80)$$

จากสมการที่ (3.79) และ (3.80) เราสามารถหาค่าของ \tilde{A}_n ได้จากสมการ

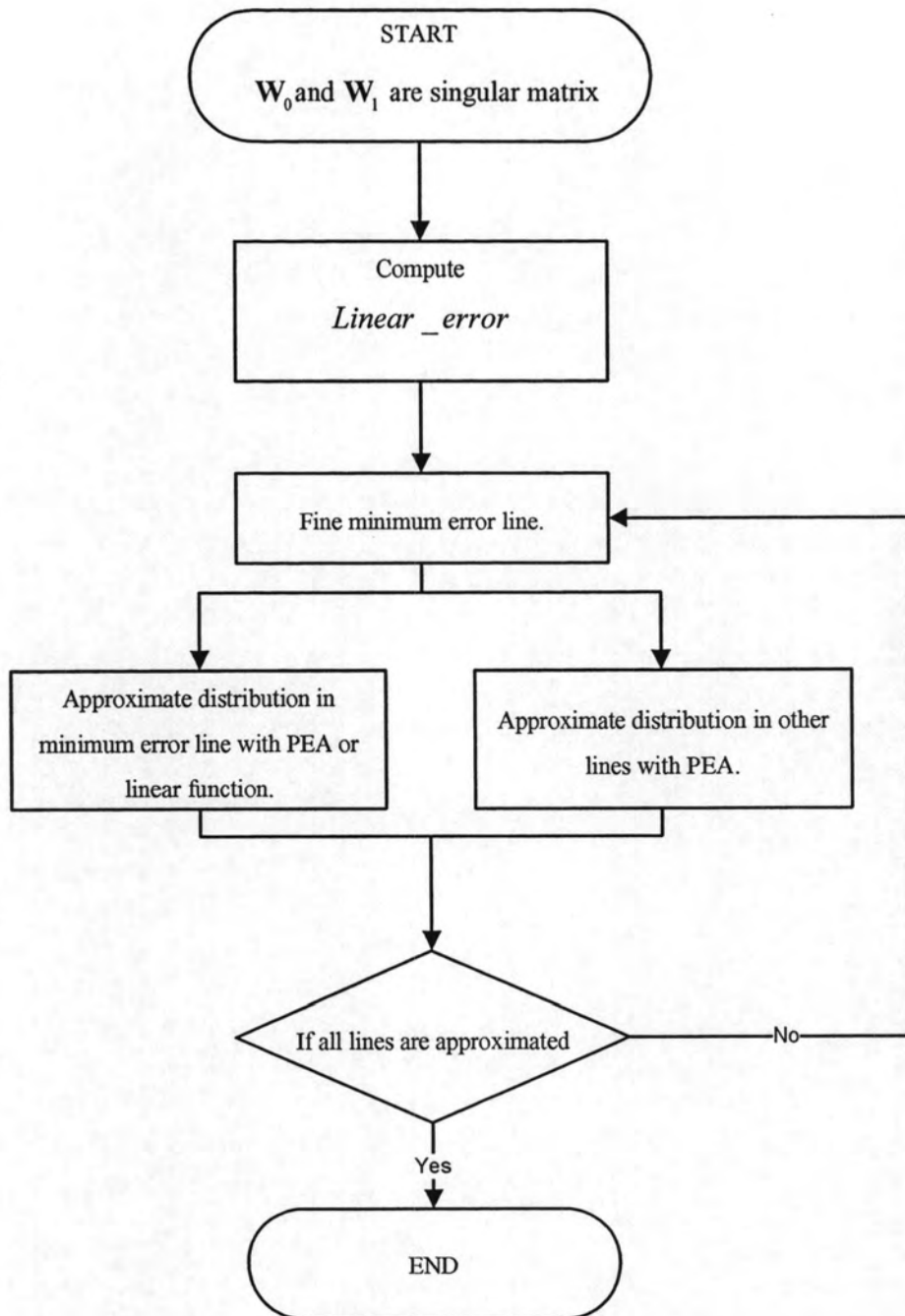
$$\tilde{A}_n = \left[\begin{bmatrix} v_n(1) \\ i_n(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix}, 0 \right] \left[\begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_n(1) \\ i_n(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix} \right]^{-1} \quad (3.81)$$

สมการ (3.81) พบว่ากรณีที่ $\begin{bmatrix} v_n(1) \\ i_n(1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_n(0) \\ i_n(0) \end{bmatrix}$ เป็น 0 เมทริกซ์จะไม่สามารถแปลงกลับได้จึงกำหนดให้ใช้ $\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ด้วยวิธีที่นำเสนอนี้เราสามารถเขียนสมการเส้นตรงในลักษณะของสมการเลขชี้กำลังได้ และยังสามารถหาเมทริกซ์ชี้กำลังที่มีฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นไปตามเงื่อนไขที่ว่าแรงดันและกระแสที่ปลายแต่ละด้านต้องเท่ากันทั้งก่อนและหลังการประมาณค่ากรณีสายส่งหลายเส้นที่มีการเชื่อมโยงกัน ($N > 1$) การประมาณโดยเส้นตรงพร้อมกันทุกเส้นจะทำให้เกิดการแบ่งท่อนมากเกินไปจนความจำเป็น ดังนั้นจึงเสนอวิธีการจัดการในกรณีนี้โดยแยกเส้นที่การกระจายภายในสายส่งมีการเปลี่ยนแปลงน้อยหรือใกล้เคียงเส้นตรงมาแยกคิดต่างหาก ดังแสดงในแผนภาพในรูปที่ 3-12 ซึ่งมีการทำงานดังนี้

กำหนดให้เมทริกซ์ W_1 และ W_0 เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular) โปรแกรมจะเปรียบเทียบผลต่างระหว่างฟังก์ชันเส้นตรงของแรงดัน ($\hat{v}_{n,p}(x)$) และกระแส ($\hat{i}_{n,p}(x)$) ในสายส่งเส้นที่ p กับการกระจายของแรงดัน ($v_{n,p}(x)$) และกระแส ($i_{n,p}(x)$) เดิมในสายส่งเส้นที่ p เป็นจำนวน $2N$ จุดตามสมการ

$$Linear_error(p) = \left\| \begin{bmatrix} v_{n,p}\left(\frac{m}{2N}\right) \\ i_{n,p}\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{v}_{n,p}\left(\frac{m}{2N}\right) \\ \hat{i}_{n,p}\left(\frac{m}{2N}\right) \end{bmatrix} \right\|; m = 0, \dots, 2N \quad (3.82)$$

จากนั้นแบ่งการประมาณเป็นสองกลุ่มคือสายส่งเส้นที่มีการกระจายใกล้เคียงเส้นตรงที่สุดกับเส้นที่เหลือ โดยสายส่งเส้นที่มีการกระจายใกล้เคียงเส้นตรงจะถูกนำมาประมาณค่าด้วยวิธี PEA ถ้าไม่สำเร็จจะเปลี่ยนมาประมาณด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นตามลำดับ และสายส่งที่เหลือทั้งหมดจะถูกประมาณด้วยวิธี PEA อีกครั้ง ในกรณีที่ยังคงประมาณไม่สำเร็จจะย้อนกลับไปตรวจสอบหาเส้นที่มีความใกล้เคียงกับเส้นตรงมากที่สุดอีกครั้งและทำเช่นนี้ไปจนกว่าจะประมาณการกระจายครบทุกเส้นเป็นอันเสร็จสิ้นขบวนการ



รูปที่ 3-12 แผนภาพการประมาณการกระจายในสายส่งด้วยฟังก์ชันเชิงเส้นร่วมกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

วิธีการที่นำเสนอในหัวข้อนี้จะสามารถแก้ปัญหาในกรณีเมทริกซ์ W_1 และ W_0 เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular) โดยการใชฟังก์ชันเชิงเส้นร่วมกับฟังก์ชันเลขชี้กำลังเพื่อควบคุมปริมาณของท่อนย่อยให้มีความเหมาะสมได้ W_0 and W_1 are singular matrix

3.8 การประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาด้วย Backward Differentiation Formula (BDF) อันดับที่ p^{th}

หลักการของ DSV สามารถใช้ร่วมกับ Backward Differentiation Formula (BDF) ลำดับอื่น ๆ ในการประมาณค่าของอนุพันธ์ทางเวลาของสมการ Telegrapher ได้ โดยสูตรของ p^{th} BDF เป็นดังนี้

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^p a_k f_{n-k}(x) \quad (3.83)$$

เมื่อประมาณอนุพันธ์ทางเวลาในสมการที่ (3.3) จะเขียนได้ว่า

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = - \sum_{k=0}^p a_k \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-k}(x) \\ \mathbf{i}_{n-k}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

โดยที่ให้ $\mathbf{v}_n(x) = 0$ และ $\mathbf{i}_n(x) = 0$ เมื่อ $n \leq 0$ เป็นค่าการกระจายในสายก่อนการวิเคราะห์ จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n0} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^p \mathbf{A}_{nk} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-k}(x) \\ \mathbf{i}_{n-k}(x) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

โดย $\mathbf{A}_{n0} = - \left(a_0 \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix} \right)$ และ $\mathbf{A}_{nk} = -a_k \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}; k=1, \dots, p$ เพื่อง่ายต่อการทำความเข้าใจจะยกตัวอย่างกรณีให้ 2^{sc} BDF โดย 2^{nd} BDF ที่ขนาดขั้นเวลา (h_n) มีค่าเท่ากันตลอดการวิเคราะห์วงจรจะเป็นดังนี้

$$f'_n(x) = \frac{3}{2h_n} f_n(x) - \frac{2}{h_n} f_{n-1}(x) + \frac{1}{2h_n} f_{n-2}(x) \quad (3.86)$$

จากสมการ (3.86) กับสมการ (3.85) จะได้ว่าสมการ Telegrapher หลังจากประมาณอนุพันธ์ทางเวลาด้วย 2^{sc} BDF เป็นตามสมการ

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n0} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(x) \\ \mathbf{i}_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{n1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(x) \\ \mathbf{i}_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{n2} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-2}(x) \\ \mathbf{i}_{n-2}(x) \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

โดย

$$A_{n0} = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2h_n} \mathbf{L} + \mathbf{R} \\ \frac{3}{2h_n} \mathbf{C} + \mathbf{G} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{n1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{h_n} \mathbf{L} \\ \frac{2}{h_n} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ}$$

$$A_{n2} = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2h_n} \mathbf{L} \\ \frac{1}{2h_n} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ตามลำดับ ดังนั้นคำตอบของสมการ (3.87) จึงเป็น}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = e^{A_{n0}x} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} + \int_0^x e^{A_n(x-\tau)} [A_{n2} \quad A_{n1}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-2}(\tau) \\ \mathbf{i}_{n-2}(\tau) \\ \mathbf{v}_{n-1}(\tau) \\ \mathbf{i}_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (3.88)$$

ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{v}_{n-k}(x) = 0$ และ $\mathbf{i}_{n-k}(x) = 0$ เมื่อ $k \geq 3$ เราสามารถเขียนสมการ(3.88)ได้ใหม่เป็น

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} = e^{A_{n0}x} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} + \int_0^x e^{A_n(x-\tau)} [A_{n2} \quad A_{n1}] e^{\begin{bmatrix} A_{(n-2)0} & 0 \\ A_{(n-1)1} & A_{(n-1)0} \end{bmatrix} \tau} d\tau \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-2}(0) \\ \mathbf{i}_{n-2}(0) \\ \mathbf{v}_{n-1}(0) \\ \mathbf{i}_{n-1}(0) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

เราจึงสามารถใช้วิธีคำนวณหาผลเฉลยได้เช่นเดียวกับกับ 1^{st} BDF ดังที่แสดงไว้ในหัวข้อ 3.1 เห็นได้ว่าวิธี DSV สะดวกต่อการเปลี่ยนอันดับของ BDF ที่ใช้ประมาณค่าทางเวลาเนื่องจากสามารถใช้โปรแกรมย่อยเดิมได้ทั้งหมด ซึ่งจะกล่าวถึงการประมาณค่าการกระจายในกรณีที่ใช้การประมาณค่าด้วย BDF อันดับอื่นๆ ในหัวข้อ 3.9

3.9 การประมาณค่าการกระจายในสายส่งกรณีประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาด้วย p^{th} BDF

ส่วนนี้จะกล่าวถึงการประมาณค่าในกรณีที่ใช้ p^{th} BDF ในการประมาณค่าอนุพันธ์ทางเวลาของสมการ Telegrapher ตามที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 3.8 จากสมการ(3.85) จะได้ว่า การประมาณค่าด้วย p^{th} BDF จะต้องใช้ค่าการกระจายย้อนหลังไปถึง $n-p$ เช่นกรณี $p=2$ ต้องใช้การกระจายที่ $n-2$ ในการคำนวณ ดังนั้นจึงต้องประมาณการกระจายของแรงดันและกระแสในอดีตย้อนหลังให้เหลืออย่างน้อย $n-p$ ชั้นก่อนก่อนขยับไปวิเคราะห์ในชั้นเวลาถัดไปหรือ t_{n+1} ทำให้ฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่ใช้ประมาณค่าเป็นดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-p+1}(x) \\ \mathbf{i}_{n-p+1}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}(x) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(x) \end{bmatrix} = e^{\tilde{\mathbf{A}}_{n,p}x} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}(0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n(0) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

เมื่อให้ $\tilde{\mathbf{A}}_{n,p}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากับ $2pN \times 2pN$ และกำหนดให้ความสัมพันธ์ของแรงดันและกระแส ณ จุดต่างๆ ที่ได้จากการวิเคราะห์ห้กับค่าที่ได้จากฟังก์ชันประมาณเป็นตามสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \end{bmatrix}; m = 0, \dots, 2pN \quad (3.91)$$

จากสมการที่ (3.90) เมื่อรวมกับสมการที่ (3.91) และเขียนให้อยู่ในลักษณะวนกลับตามสมการ

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n\left(\frac{m}{2pN}\right) \end{bmatrix} = e^{\frac{\tilde{\mathbf{A}}_{n,p}}{2pN}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \end{bmatrix}; m = 1, \dots, 2pN \quad (3.92)$$

เมื่อจัดสมการ (3.20) ให้เป็นตัวแปรเดียวจะได้

$$\mathbf{W}_1 = e^{\frac{\tilde{\mathbf{A}}_n}{2N}} \mathbf{W}_0 \quad (3.93)$$

โดยที่

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-p-1}\left(\frac{1}{2pN}\right) & \dots & \mathbf{v}_{n-p-1}(1) \\ \mathbf{i}_{n-p-1}\left(\frac{1}{2pN}\right) & & \mathbf{i}_{n-p-1}(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n\left(\frac{1}{2pN}\right) & \dots & \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{1}{2pN}\right) & & \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-p-1}(0) & \dots & \mathbf{v}_{n-p-1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_{n-p-1}(0) & & \mathbf{i}_{n-p-1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n(0) & \dots & \mathbf{v}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_n(0) & & \mathbf{i}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{n,p} &= 2pN \ln(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_0^{-1}) \\ &= -2pN \ln(\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_1^{-1}) \end{aligned} \quad (3.94)$$

โดยกรณี $p=2$ \mathbf{W}_1 และ \mathbf{W}_0 จะเป็น

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}\left(\frac{1}{2pN}\right) & \dots & \mathbf{v}_{n-1}(1) \\ \mathbf{i}_{n-1}\left(\frac{1}{2pN}\right) & & \mathbf{i}_{n-1}(1) \\ \mathbf{v}_n\left(\frac{1}{2pN}\right) & \dots & \mathbf{v}_n(1) \\ \mathbf{i}_n\left(\frac{1}{2pN}\right) & & \mathbf{i}_n(1) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

และ

$$W_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-1}(0) & \dots & \mathbf{v}_{n-1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_{n-1}(0) & \dots & \mathbf{i}_{n-1}\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \mathbf{v}_n(0) & \dots & \mathbf{v}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \\ \mathbf{i}_n(0) & \dots & \mathbf{i}_n\left(\frac{m-1}{2pN}\right) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

การประมาณการกระจายให้เหลือ $n-p$ เทอมย้อนหลังในการคำนวณความผิดพลาดของการประมาณเราจึงต้องเปรียบเทียบย้อนกลับไป $n-p$ เช่นเดียวกันดังนั้นความผิดพลาดจากการประมาณจึงหาได้จาก

$$ERR = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n-p+1}(x) \\ \mathbf{i}_{n-p+1}(x) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n(x) \\ \mathbf{i}_n(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{n-p+1}(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_{n-p+1}(x) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_n(x) \\ \tilde{\mathbf{i}}_n(x) \end{bmatrix} \right\| \quad (3.97)$$

โดยการควบคุมความผิดพลาดจากการประมาณนั้นจะใช้วิธีการแบ่งครึ่งท่อน (Bisection algorithm) ควบคุมเช่นเดียวกับที่ทำใน Backward Euler (BE) หรือ 1st BDF ในหัวข้อที่ 3.2 จากที่กล่าวมาเกี่ยวกับการใช้วิธี DSV ร่วมกับ BDF อันดับอื่นๆนั้น จะเห็นว่าวิธีที่นำเสนอนี้มีความสะดวกในการปรับเปลี่ยนมาก เนื่องจากสามารถใช้โปรแกรมเดียวกันกับ BDF ทุกอันดับ

ที่กล่าวมาในบทนี้แสดงถึงวิธีการวิเคราะห์ห้วงจรมที่มีสายส่งเป็นส่วนประกอบ ด้วยแบบจำลองตามวิธี Distribution State Variable (DSV) ซึ่งสามารถควบคุมความแม่นยำในการวิเคราะห์โดยตรวจสอบจากค่าความผิดพลาดจากการตัดปลาย (Local Truncation Error, LTE) ตามวิธีที่ได้นำเสนอ และใช้การประมาณค่าการกระจายในสายส่งด้วยฟังก์ชันเลขชี้กำลังแบบแบ่งท่อนเพื่อลดความซับซ้อนของการวิเคราะห์ห้วงจรม รวมทั้งเสนอวิธีการแบ่งครึ่งท่อน (Bisection Algorithm) เพื่อจัดการจำนวนท่อนย่อยให้เหมาะสมกับค่าการกระจายในสายส่ง วิธีการทั้งหมดที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ได้ปรับปรุงวิธีคำนวณให้มีความแม่นยำและลดปัญหาการบิดเคาะในการคำนวณ โดยใช้วิธีเมทริกซ์คล้ายในการแยกองค์ประกอบเมทริกซ์และจัดสมการให้เมทริกซ์ทั้งหมดมีค่าลักษณะจำเพาะ (eigenvalue) เป็นลบทั้งหมด และวิธีการปรับปรุงวิธี DSV ให้สามารถใช้ร่วมกับวิธี Backward Differential Formula (BDF) อันดับอื่น โดยสามารถใช้โครงสร้างและวิธีคำนวณแบบเดียวกับที่ใช้กับวิธี BDF อันดับ 1 หรือ Backward Euler (BE) โดยจะแสดงตัวอย่างการนำวิธีที่ได้นำเสนองานวิจัยนี้ไปใช้วิเคราะห์ห้วงจรมในบทต่อไป