สำนักงานวิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษา ค้นคว้าเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้เสนอผลการศึกษาค้นคว้า ตามลำดับต่อไปนี้

1. ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ
    - 1.1 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ
    - 1.2 ความเป็นมาของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ
    - 1.3 ลักษณะของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ
    - 1.4 ประโยชน์ของการใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในการจัดการเรียนรู้
2. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
    - 2.1 ความหมายของมโนทัศน์
    - 2.2 ความสำคัญของมโนทัศน์
    - 2.3 ประเภทของมโนทัศน์
    - 2.4 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
    - 2.5 การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
    - 2.6 การสอนเพื่อให้เกิดการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
    - 2.7 การวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
3. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.2 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.3 ลักษณะของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
    - 3.4 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์
4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
    - 4.1 งานวิจัยต่างประเทศ
    - 4.2 งานวิจัยในประเทศ

มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ

1.1 แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ

ทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์

Jerome Bruner (1966 อ้างถึงใน สุรางค์ โค้วตระกูล, 2543: 203 - 205) เป็นนักจิตวิทยาวิทยาที่สนับสนุนการเรียนรู้ตามแนวปัญญานิยม ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้โดยเชื่อว่า " เด็กทุกระดับชั้นของการพัฒนาสามารถเรียนรู้เนื้อหาวิชาใดก็ได้ ถ้าจัดการสอนให้เหมาะสมกับความสามารถของเด็ก " ความสนใจของบรูเนอร์อยู่ที่การช่วยให้ครูพัฒนาการเรียนรู้และการคิดของผู้เรียนในการทำความเข้าใจ ซึ่งทฤษฎีของบรูเนอร์จำเป็นต้องเข้าใจสาระต่อไปนี้

1. ขั้นการเรียนรู้ (Modes of learning)

Bruner มองเห็นว่าพัฒนาการของความรู้ความเข้าใจของคนเรามีสามขั้นตอนซึ่งแต่ละขั้นตอนจะเรียนรู้วิธีการที่ต่างกันและขั้นต่ำกว่าจะเป็นฐานของขั้นสูงกว่า บรูเนอร์จึงเสนอว่า การที่จะเรียนรู้ในขั้นต่อไปได้ดีนั้นควรจะเรียนในขั้นที่ผ่านมาให้แน่นแฟ้นเสียก่อน ขั้นการเรียนรู้ทั้งสามประกอบด้วย

1.1 ขั้นการกระทำ (Enactive mode) การเรียนรู้ด้วยการกระทำวิธีการเรียนรู้จะผ่านทางการแสดงออก การเลียนแบบ หรือการลงมือทำกับวัตถุ มีประสบการณ์โดยตรงจากการจับต้อง สำรวจสิ่งแวดล้อม เด็ก ๆ ส่วนใหญ่จะเรียนรู้โดยผ่านฐานนี้ หรือผู้ใหญ่ก็จะใช้ฐานนี้เรียนรู้งานที่ต้องใช้ทักษะทางกายที่ซับซ้อน ในการสอนเด็กผู้สอนควรใช้วิธีการสาธิตเท่ากับการใช้อุปกรณ์ต่าง ๆ การสวมบทบาท การใช้ตัวแบบ และการให้พฤติกรรมตัวอย่าง

1.2 ขั้นจินตนาการ (Iconic mode) การเรียนรู้โดยการใช้รูปภาพหรือวาดภาพในใจ เนื่องจากเด็กต้องเรียนความคิดรวบยอด กฎ และหลักการ ซึ่งไม่อาจแสดงให้เห็นได้ง่าย ๆ ดังนั้นผู้สอนจึงต้องจัดหาภาพ แผนภูมิหรือตาราง ซึ่งเชื่อมโยงกับสิ่งที่ต้องเรียนรู้มาให้ผู้เรียนปกติแล้วการเรียนรู้ตามขั้นนี้จะใช้เวลาน้อยกว่าขั้นกระทำ มีสิ่งที่เป็นประเด็นปัญหาในการสอนตามขั้นนี้คือเรื่องของการใช้โสตทัศนูปกรณ์เป็นเครื่องช่วยสอน บรูเนอร์เสนอให้ใช้ภาพนิ่ง โทรทัศน์ ภาพเลื่อน หรืออื่น ๆที่คล้ายกันในการสอน เนื่องจากช่วยให้เด็กเกิดประสบการณ์ แต่ขณะเดียวกันก็มีข้อควรระวัง คือ หากเลือกแบบที่ไม่สอดคล้องกับสิ่งที่จะเรียนรู้ นอกจากจะไม่ช่วยให้เกิดความรู้ความเข้าใจใดแล้วยังเป็นการสิ้นเปลืองมากอีกด้วย

1.3 ขั้นสัญลักษณ์ (Symbolic mode) การเรียนรู้โดยการใช้สัญลักษณ์เป็นขั้นที่เด็กสามารถจะเข้าใจการเรียนรู้สิ่งที่เป็นนามธรรมต่าง ๆ ได้ เป็นขั้นสูงสุดของการพัฒนาทางความรู้ ความเข้าใจ เด็กสามารถคิดหาเหตุผล และในที่สุดจะเข้าใจสิ่งที่เป็นนามธรรมได้

2. หลักการพื้นฐานทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์

Bruner ได้ให้หลักการพื้นฐานของตัวแปรที่สำคัญของการสอนและการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

2.1 บุคคลแต่ละบุคคลมีวัฒนธรรมของตน เพราะตั้งแต่แรกเกิดทุกคนได้รับการถ่ายทอดวัฒนธรรมจากผู้ใหญ่ที่อยู่รอบ ๆ เช่น บิดามารดา เป็นต้น

2.2 ความรู้ ครูจะให้เครื่องมือ (ทักษะ) แก่นักเรียนที่จะใช้แก้ปัญหาหรือหาคำตอบได้ การศึกษาควรจะเน้นความสำคัญของทุกวิชา

2.3 กระบวนการที่ได้มาซึ่งความรู้ บรูเนอร์บ่งว่าการเรียนรู้เพื่อได้มาซึ่งความรู้ประกอบด้วยกระบวนการ 3 อย่าง คือ

1) การเรียนรู้ เกิดจากกระบวนการเปรียบเทียบความรู้ที่ได้มาหรือรับจากข้อมูลข่าวสารหรือสารสนเทศใหม่ ๆ กับสิ่งที่มีอยู่แล้ว และปรับปรุงให้ดีขึ้น

2) การเรียนรู้ เกิดจากกระบวนการเปลี่ยนแปลง (Transform) ข้อมูลข่าวสารที่ได้รับมาให้เข้ากับที่มีอยู่

3) กระบวนการประเมินความสำคัญของความรู้ที่ได้รับใหม่ ว่าเหมาะสมกับงานที่ทำอยู่หรือไม่ การประเมินต้องอาศัยการวินิจฉัยที่ถูกต้อง

3. การเรียนรู้แบบค้นพบ (Discovery learning)

การเรียนรู้แบบค้นพบ เป็นการเรียนรู้ที่มีฐานอยู่บนสิ่งที่เป็นรูปธรรมและการแสดงพฤติกรรมภายนอก เช่น การทดลอง การกระทำกับวัตถุ การใช้สื่ออุปกรณ์ต่าง ๆในการเรียนรู้ เป็นต้น บรูเนอร์ให้ความเห็นว่าผู้เรียนจะเรียนได้ดีที่สุดโดยอาศัยการเรียนรู้แบบค้นพบ นั้นคือ เมื่อเกิดการเข้าใจเรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างทันทีทันใด ดังนั้นครูจึงควรกระตุ้นให้ผู้เรียนค้นพบโครงสร้างของสิ่งที่กำลังเรียนรู้อยู่โดยให้ความสนใจไปยังแนวคิดหรือความสัมพันธ์ระหว่างกันและกัน ผู้เรียนจะเรียนรู้ได้ดีหากสามารถยึดกุมแนวคิดแทนที่จะท่องจำรายละเอียดของสิ่งที่เรียน เพื่อช่วยให้เกิดการเรียนรู้แบบค้นพบครูอาจกระตุ้นผู้เรียนให้ใช้การเดาอย่างฉลาด หมายถึง การเดานั้นต้องมีฐานอยู่บนข้อมูลเชิงประจักษ์ หรือครูอาจใช้เทคนิคการค้นพบแบบแนะแนว คือ สร้างบรรยากาศซึ่งช่วยให้ผู้เรียนได้ค้นพบและหาความสัมพันธ์

4. หลักการสอน

Bruner ได้เสนอหลักการที่เกี่ยวกับการสอนไว้ 4 ประการ ดังนี้

4.1 หลักของการจูงใจ (Motivation) หลักการนี้เน้นว่า การเรียนรู้จะขึ้นอยู่กับความพร้อมและแนวโน้มที่ผู้เรียนมีท่าทีต่อการเรียนรู้ บรูเนอร์ให้ความเห็นว่าธรรมชาติของเด็กมีความอยากรู้อยากเห็นอยู่แล้ว ผู้สอนควรใช้ธรรมชาตินี้ให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน การสอนที่มีประสิทธิภาพจะเกิดได้ก็ต่อเมื่อครูมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีกับนักเรียน ครูจะต้องเป็นต้นแบบ (Model)ที่ดีตั้งแต่ทัศนคติของครูที่มีต่อการสอน การเรียนรู้ และมีความเชื่อว่าผู้เรียนมีแรงจูงใจภายใน (Self - Motivation) และมีความอยากรู้อยากเห็นอยากค้นพบสิ่งที่อยู่รอบ ๆตน ด้วยตนเอง ฉะนั้นครูมีหน้าที่สำคัญที่จะจัดสิ่งแวดล้อมในห้องเรียน เพื่อให้นักเรียนมีโอกาสที่จะสำรวจค้นพบและควรจะหาโอกาสสนับสนุนให้นักเรียนมีความมั่นใจในตนเอง บรูเนอร์กล่าวว่าความสัมพันธ์ระหว่างครูและนักเรียนก็มีอิทธิพลต่อแรงจูงใจและความเต็มใจที่จะเรียนรู้ของนักเรียน

4.2 หลักของโครงสร้าง (Structure) หลักการนี้เน้นว่า การเรียนรู้สามารถเพิ่มพูนได้โดยการเลือกวิธีสอนที่เหมาะสมกับระดับพัฒนาการสติปัญญา และระดับความเข้าใจของเด็ก หลักการนี้ชี้ให้เห็นว่า ค รูควรจะต้องย้ำให้เห็นความสัมพันธ์ที่มีความหมายระหว่างสิ่งที่เด็กจะต้องเรียนกับสิ่งที่เรียนรู้ไปแล้ว การจัดโครงสร้างของบทเรียน จะต้องให้เหมาะสมกับวัยของเด็กและธรรมชาติของบทเรียนแต่ละหน่วย ครูควรแนะแนวให้นักเรียนเห็นหรือค้นคว้าความสัมพันธ์ของสิ่งที่นักเรียนต้องการจะเรียนรู้ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญ นอกจากนี้ครูควรจะสำรวจความรู้พื้นฐานที่นักเรียนจำเป็นต้องมี เพื่อค้นพบความรู้ใหม่ ถ้าปรากฏว่านักเรียนขาดความรู้พื้นฐานที่ควรจะมี ครูควรแนะนำให้นักเรียนเรียนรู้ความรู้พื้นฐานก่อนที่จะเริ่มหน่วยเรียนใหม่

4.3 หลักการเรียงลำดับ (Sequence) หลักการนี้เน้นว่าลำดับของเนื้อหามีอิทธิพลอย่างมากต่อการเรียนรู้ว่าเกิดได้ง่ายหรือยากแค่ไหน การเรียงลำดับในที่นี้หมายถึง การจัดลำดับระหว่างหน่วยย่อยและหน่วยใหญ่ของสิ่งที่ต้องเรียนรู้ภายในเนื้อหาหนึ่ง ๆ ของวิชาเดียวกัน ระหว่างเนื้อหาของวิชาเดียวกันหรือระหว่างเนื้อหาวิชาของวิชาหนึ่งกับอีกวิชาหนึ่ง ซึ่งการเรียงลำดับจะเริ่มจากง่ายไปยาก แม้ว่าการเรียงลำดับที่กล่าวถึงจะเป็นเรื่องที่ทำได้ค่อนข้างยากโดยเฉพาะระหว่างวิชาแต่การพยายามทำในเรื่องนี้จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ตามต้องการ การจัดลำดับความยากง่ายของบทเรียนอย่างมีประสิทธิภาพบรูเนอร์เสนอแนะให้ครูคำนึงถึงพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียน ซึ่งมีลำดับขั้นขึ้นกับสิ่งแวดล้อมวัฒนธรรมของนักเรียนแต่ละคนทั้งนี้อาจจะทำให้ช้าหรือเร็วได้

4.4 หลักของแรงเสริมด้วยตนเอง (Self - reinforcement) บรูเนอร์ถือว่าแรงเสริมด้วยตนเองมีความหมายต่อผู้เรียนมากกว่าแรงเสริมภายนอก ครูควรจะให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียนว่าทำถูกหรือผิด เพื่อว่าผู้เรียนจะได้ทราบถึงผลการทำงานของตนเองแต่ไม่ควรจะเน้นการทำถูกเท่านั้นเพราะการทำผิดก็เป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้

ทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์กับการศึกษาคณิตศาสตร์

ทฤษฎีการสอนของบรูเนอร์มีจุดมุ่งหมายในการพัฒนาความคิดของคน มิใช่สอนเพื่อให้ท่องจำ แต่สอนให้นักเรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผล ช่วยให้นักเรียนเข้าใจ และสามารถประยุกต์สิ่งที่เรียนไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ที่มีประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอน ดังที่ อัมพร ม้าคนอง (2547: 9 – 10) กล่าวว่า แนวคิดของบูรเนอร์ที่นับว่ามีประโยชน์มากต่อการศึกษาคณิตศาสตร์คือ แนวคิดที่กล่าวว่ามนุษย์สามารถคิดเกี่ยวกับมโนทัศน์เฉพาะใด ๆ ได้ใน 3 ขั้น คือขั้นการกระทำ (Enactive mode) ขั้นจินตนาการ (Iconic mode) และขั้นสัญลักษณ์ (Symbolic mode) ซึ่งแนวคิดนี้ถูกแปลความหมายและนำไปใช้อย่างกว้างขวางในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในขั้นของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ขั้นการกระทำ (Enactive mode) กิจกรรมคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับการให้เด็กได้รับประสบการณ์ตรงจากการสัมผัสกับสื่อและวัตถุจริง ในขั้นจินตนาการ (Iconic mode) ครูอาจใช้สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง เช่น ฟิล์ม รูปภาพ แผนภาพ ที่นักเรียนสามารถมองเห็นด้วยตาเปล่า สำหรับขั้นสัญลักษณ์ (Symbolic mode) เป็นระดับที่ผู้เรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรมแทนสิ่งที่เป็นวัตถุจริง จะเห็นว่าแนวคิดของการเรียนรู้ 3 ระดับนั้นเหมาะสมกับการนำไปใช้ ในการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะเป็นนามธรรม แต่ต้องการให้เด็กเข้าใจความหมายและที่มาของสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวอย่างของการสอนในทางคณิตศาสตร์ เช่น ต้องการให้นักเรียนทราบว่า $6 \div 3 = 2$ ในขั้นแรก อาจใช้ทอฟฟี่ 6 เม็ด จัดเป็น 3 กอง กองละ 2 เม็ด ซึ่งเป็นขั้น Enactive จากนั้น ให้นักเรียนเขียนหรือวาดภาพของทอฟฟี่ 3 กอง กองละ 2 เม็ด ซึ่งเป็นขั้น Iconic และขั้นสุดท้ายคือ Symbolic นักเรียนควรต้องเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า $6 \div 3 = 2$ ซึ่งจะทำให้นักเรียนเข้าใจสัญลักษณ์ว่าหมายถึง การแบ่งของ 6 ชิ้น ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆกัน จะได้ส่วนละ 2 ชิ้น อย่างไรก็ตามบูรเนอร์เห็นว่า ความพร้อมที่จะเรียนขึ้นอยู่กับพัฒนาการทางสติปัญญา ซึ่งสอดคล้องกับงานของเพียเจต์ ที่กล่าวว่า สิ่งที่สำคัญที่สุดของการสอนมโนทัศน์พื้นฐานคือการช่วยเหลือให้เด็กสามารถพัฒนาจากการคิดเชิงรูปธรรมไปสู่การคิดที่ต้องใช้ความเข้าใจเชิงมโนทัศน์มากขึ้น บูรเนอร์จึงเสนอแนะว่าความพร้อมขึ้นอยู่กับการผสมผสานของวิธีเรียนทั้ง 3 ขั้นมากกว่าการรอคอยให้เด็กพัฒนาความสามารถที่จะเรียนได้เอง

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยใช้สื่อรูปธรรมหรือวัตถุรูปธรรมในขั้นที่ 1. เขียนลำดับขั้นตอนสำหรับการดำเนินการกับวัตถุรูปธรรม และขั้นที่ 2. ขยายเส้นทางโดยใช้ขั้นตอนที่เขียนกับปัญหาหรือวัตถุรูปธรรม ซึ่งทั้ง 2 ขั้นนี้สอดคล้องกับขั้นการกระทำ(Enactive mode) และขั้นจินตนาการ (Iconic mode) ของขั้นการเรียนรู้ทฤษฎีของบูรเนอร์ นอกจากนี้ ขั้นที่ 3. เขียนการ

ดำเนินการกับสัญลักษณ์หรือปัญหาเป้าหมาย สำหรับขั้นนี้สอดคล้องกับขั้นสัญลักษณ์ (Symbolic mode) ของขั้นการเรียนรู้ทฤษฎีของบูรเนอร์

1.2 ความเป็นมาของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ

ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory) นี้พัฒนามาจากทฤษฎีการถ่ายโยงการเปรียบเทียบ (A Theory of Analogical Transfer) และสอดคล้องกับทฤษฎีจับคู่ทางโครงสร้างของเจนเนอร์ (Gentner' s Structure – Mapping Theory) ทฤษฎีจุดมุ่งหมายของฮอลโยค (Holoak's Pragmatic Theory) และทฤษฎีตัวอย่าง (Exemplar Theory) ซึ่งแต่ละทฤษฎีมีรายละเอียด ดังนี้

ทฤษฎีการถ่ายโยงการเปรียบเทียบ (A Theory of Analogical Transfer) หากพิจารณาการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ในห้องเรียน จะพบว่า นักเรียนส่วนใหญ่มักใช้การเปรียบเทียบกับตัวอย่างที่ครูสอนก่อนให้ปัญหาใหม่ เพื่อดูตัวอย่างกฎทางคณิตศาสตร์ วิธีคำนวณ หรือขั้นตอนของงาน แล้วนำไปใช้กับปัญหาใหม่ กลวิธีแก้ปัญหานี้เป็นที่รู้จักกันดีในนามของการถ่ายโยงโดยใช้การเปรียบเทียบ (Analogical transfer) ซึ่งหมายถึง การใช้ปัญหาคุ้นเคยหรือตัวเปรียบเทียบที่เป็นฐาน (Base analogue) ในการแก้ปัญหาใหม่ (Target problem)นักการศึกษาบางท่านให้ความเห็นว่า การแก้ปัญหาโดยวิธีนี้เป็นหลักในการแก้ปัญหาใหม่ แต่บางท่านยังโต้แย้งว่าเป็นเพียงวิธีหนึ่งที่มักถูกใช้เท่านั้น อย่างไรก็ตาม การใช้ปัญหาหนึ่งแก้อีกปัญหาหนึ่ง อาจช่วยให้นักเรียนเข้าใจกฎหรือหลักคณิตศาสตร์ที่ตนนำมาใช้มากขึ้น

การแก้ปัญหาโดยใช้การเปรียบเทียบในลักษณะนี้ ยังถูกใช้ในสถานการณ์ทั่วไปในชีวิตจริง เช่น การดูความคล้ายคลึงกันของคนสองคน การดูความเหมือนของสิ่งของสองชนิด การเปรียบเทียบคดีสองคดีที่มีความคล้ายคลึงกัน เป็นต้น การเปรียบเทียบเหล่านี้ต้องอาศัยการให้เหตุผลบนฐานของกรณีเดิม (Case – based reasoning) โดยทั่วไปการถ่ายโยงประกอบด้วย 4 ขั้นตอน คือ 1) การใส่รหัส (Encoding) ให้ฐานที่เป็นตัวแบบและสิ่งเป็นเป้าหมายของการเปรียบเทียบ 2) การดึงข้อมูล (Retrieval) จากฐานที่ใช้การเปรียบเทียบให้อยู่ในรูปที่ปรากฏอยู่ในสิ่งที่เป็นเป้าหมาย ในขั้นนี้ จะมีการวิเคราะห์ฐานเพื่อหาข้อเปรียบเทียบที่หลากหลาย และมีการเลือกใช้ข้อเปรียบเทียบที่เหมาะสมกับเป้าหมาย 3) การจับคู่ (Mapping) หรือการประยุกต์ (Application) ของฐานกับสิ่งที่เป็นเป้าหมาย และ 4) การอุปนัย (Induction) โดยใช้ฐานที่เป็นตัวแบบแก้ปัญหาเป้าหมายได้สำเร็จ

แต่มีประเด็นที่เป็นข้อสงสัยเกี่ยวกับกระบวนการเปรียบเทียบว่าหลักการแก้ปัญหาที่เป็นนามธรรมสามารถได้มาจาก หรือถูกนำเสนออย่างเป็นอิสระจากตัวอย่างที่เป็นฐานจริงหรือและข้อสงสัยอีกประการหนึ่งเกี่ยวข้องกับข้อมูลเฉพาะของตัวฐานที่ยังคงอยู่หลังจากการอุปนัยเกิดขึ้น ซึ่งอาจเป็นไปได้ว่า ข้อมูลทางโครงสร้างเท่านั้นที่ยังคงอยู่ ส่วนรายละเอียดเฉพาะของตัวอย่างจะถูกทิ้งไป (Eliminative induction) แต่ก็มีความเป็นไปได้ที่ข้อมูลแสดงรายละเอียดของตัวอย่างจะยังคงถูกเก็บไว้ ซึ่งอาจเกิดขึ้นจริงจะถือเป็นการอุปนัยที่ยังคงรักษาของเดิมไว้ (Conservative induction) หากทั้งข้อมูลที่เป็นนามธรรมและข้อมูลเฉพาะของตัวอย่างจะคงอยู่ ก็อาจเกิดคำถามขึ้นว่า ข้อมูลใดที่มีอิทธิพลต่อแต่ละขั้นของการถ่ายโยงมากที่สุด นอกจากนี้ ยังมีคำถามที่น่าสนใจเกี่ยวกับกระบวนการถ่ายโยง ดังนี้

1. กระบวนการในการเปรียบเทียบเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติหรือต้องอาศัยกลวิธีในการดำเนินการ

2. รายละเอียดผิวเผิน (Surface details) ของตัวอย่างปัญหาจะยังคงอยู่ภายหลังจากการอุปนัยแล้ว (Conservative induction) หรือถูกทิ้งไป (Eliminative induction)

3. อะไรเป็นสิ่งสำคัญของรายละเอียดผิวเผินและข้อมูลโครงสร้างของปัญหาและปัญหาเป้าหมายในกระบวนการดึงและใช้ข้อมูล

นอกจากนี้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการยังสอดคล้องกับทฤษฎีอื่นๆ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีจับคู่ทางโครงสร้างของเจนเนอร์ (Gentner' s Structure – Mapping Theory) ทฤษฎีนี้เน้นว่าการเชื่อมโยงโดยใช้การเปรียบเทียบต้องใช้การวิเคราะห์โครงสร้างเป็นหลักซึ่งเกี่ยวข้องโดยตรงกับการเลือกและการจับคู่หรือประยุกต์ใช้ฐานที่เป็นตัวเปรียบเทียบกับปัญหาเป้าหมาย หรืออาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า เป็นการจับคู่โครงสร้างที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคุณลักษณะหรือสมบัติของฐานที่ใช้เป็นตัวเปรียบเทียบกับสิ่งที่คล้ายคลึงกันในปัญหาเป้าหมาย

ทฤษฎีจุดมุ่งหมายของฮอลโยค (Holoak's Pragmatic Theory) ทฤษฎีนี้คล้ายคลึงกับทฤษฎีจับคู่ทางโครงสร้างของเจนเนอร์ตรงที่การเลือกและการจับคู่หรือการประยุกต์ใช้ฐานที่เป็นตัวเปรียบเทียบนั้น ขึ้นอยู่กับข้อมูลหรือความสัมพันธ์ระดับสูงที่อาจเป็นนามธรรม แต่สิ่งที่แตกต่างกันคือ ทฤษฎีจุดมุ่งหมายของฮอลโยคเน้นที่ผลสัมฤทธิ์ของการอุปนัย เนื่องจากเป็นสิ่งที่จะช่วยให้การแก้ปัญหาบรรลุจุดประสงค์

ทฤษฎีตัวอย่าง (Exemplar Theory) ทฤษฎีนี้เน้นเรื่องของตัวอย่างซึ่งไม่ได้ถูกเน้นในทฤษฎีจับคู่ทางโครงสร้างของ เจนเนอร์และทฤษฎีจุดมุ่งหมายของฮอลโยค ทฤษฎีตัวอย่างกล่าวว่า หลักการเปรียบเทียบนั้นไม่เพียงสัมพันธ์กับขอบเขตเนื้อหาเท่านั้น แต่ยังสัมพันธ์กับตัวอย่างปัญหาและประสบการณ์เฉพาะในขอบเขตนั้น ๆ ดังนั้น ข้อมูลในระดับต่ำ ๆ หรือตัวอย่างที่เคยเรียนมาก่อนแล้ว จะถูกเก็บไว้และนำมาใช้แก้ปัญหาใหม่ ตัวอย่างที่ใช้เป็นฐานในการเชื่อมโยงโดยใช้การเปรียบเทียบเหล่านี้ จะมีความสำคัญเหนือหลักการที่เป็นนามธรรมในการแก้ปัญหา เนื่องจากตัวอย่างจะเป็นตัวชี้นำการประยุกต์หลักการนามธรรมไปสู่ปัญหาเป้าหมาย (Lauretta M. Reeves and Robert W. Weisberg, 1993a: 381 – 400 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546ข: 33-35)

จากความเป็นมาของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory) ผู้วิจัยสรุปได้ว่า ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory) มีที่มาจากการเรียนการสอนในห้องเรียนที่นักเรียนมักจะมีการเปรียบเทียบตัวอย่างที่ครูเคยสอนมาแล้วกับปัญหาใหม่ เพื่อดูความคล้ายกันของตัวอย่างแล้วนำไปใช้กับปัญหาใหม่ หรือเรียกว่าการใช้ปัญหาคุ้นเคยหรือตัวเปรียบเทียบที่เป็นฐาน (Base analogue) ในการแก้ปัญหาใหม่ (Target problem) ซึ่งแนวคิดนี้สอดคล้องกับ ทฤษฎีการถ่ายโยงการเปรียบเทียบ (A Theory of Analogical Transfer) แต่เมื่อนักการศึกษาได้ทำการศึกษาแล้วมีประเด็นที่เป็นที่สงสัยเกี่ยวกับกระบวนการ เช่น

1. กระบวนการในการเปรียบเทียบเป็นสิ่งที่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติหรือต้องอาศัยกลวิธีในการดำเนินการ

2. รายละเอียดผิวเผิน (Surface details) ของตัวอย่างปัญหาจะยังคงอยู่ภายหลังจากการอุปนัยแล้ว (Conservative induction) หรือถูกทิ้งไป (Eliminative induction)

3. อะไรเป็นสิ่งสำคัญของรายละเอียดผิวเผินและข้อมูลโครงสร้างของปัญหาและปัญหาเป้าหมายในกระบวนการดึงและใช้ข้อมูล

นอกจากนี้ยังมีทฤษฎี หลาย ๆ ทฤษฎีที่พยายามจะอธิบายการเปรียบเทียบเพื่อจะพัฒนาทฤษฎี นี้ให้มีความเหมาะสมสำหรับการเรียนการสอน เช่น ทฤษฎีจับคู่ทางโครงสร้างของเจนเนอร์ (Gentner' s Structure – Mapping Theory) ทฤษฎีจุดมุ่งหมายของฮอลโยค (Holoak's Pragmatic Theory) ทฤษฎีตัวอย่าง (Exemplar Theory) และทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory)

1.3 ลักษณะของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ

ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (Ohlsson and Hall, 1990 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547ข: 35) เป็นแนวคิดทฤษฎีที่มีหลักการการสอนที่เน้นการเปรียบเทียบระหว่างกระบวนการในการกระทำกับวัตถุและกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ อันจะนำมาซึ่งความเข้าใจในกฎหรือขั้นตอนการทำงาน กระบวนการในการเปรียบเทียบมี 6 ขั้น ดังนี้

7. เขียนลำดับขั้นตอนสำหรับการดำเนินการกับวัตถุรูปธรรม
8. ขยายเส้นทางโดยใช้ขั้นตอนที่เขียนกับปัญหา
9. เขียนลำดับขั้นตามสัญลักษณ์หรือปัญหาเป้าหมาย
10. ขยายเส้นทางในแต่ละขั้นตอนที่ได้
11. จับคู่เส้นทางระหว่างขั้นตอนทั้งสองข้าง
6. คำนวณคำตอบ

ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory) เหมาะสมกับการเรียนการสอนที่มีสื่อหลากหลาย และเนื้อหาในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน โดยเฉพาะกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญ เช่น เรื่อง จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ เศษส่วนและทศนิยม นอกจากนี้ยังเป็นทฤษฎีที่ฝึกการคิดเชิงเปรียบเทียบ

จากที่กล่าวมาเกี่ยวกับ ลักษณะของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ ผู้วิจัยสรุปได้ว่า ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ (The Procedural Analogy Theory) มีลักษณะที่เน้นการเรียนการสอนที่เน้นการเปรียบเทียบระหว่างกระบวนการในการกระทำกับวัตถุและกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ ซึ่งมีขั้นตอนในการเรียนการสอนคือ เขียนลำดับ ขั้นตอนสำหรับการดำเนินการกับวัตถุรูปธรรม ขยายเส้นทางโดยใช้ขั้นตอนที่เขียนกับปัญหา เขียนลำดับขั้นตามสัญลักษณ์หรือปัญหาเป้าหมาย ขยายเส้นทางในแต่ละขั้นตอนที่ได้ จับคู่เส้นทางระหว่างขั้นตอนทั้งสองข้าง คำนวณคำตอบ และทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ เหมาะสมกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน เช่น เรื่อง จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ เศษส่วนและทศนิยม

1.4 ประโยชน์ของการใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในการจัดการเรียนรู้

การจัดการเรียนรู้โดยเฉพาะอย่างยิ่งการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ ที่มีเป็นแนวคิดทฤษฎีที่มีหลักการการสอนที่เน้นการเปรียบเทียบระหว่างกระบวนการในกระทำกับวัตถุและกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ โดยมีวัตถุรูปธรรมเป็น

สิ่งเชื่อมโยงการเรียนรู้ไปสู่การดำเนินการ ในรูปของสัญลักษณ์ ซึ่งการที่นักเรียนได้เรียนรู้ในลักษณะนี้มีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนมาก ดังมีนักการศึกษาได้กล่าวไว้ดังต่อไปนี้

Hall (1990: 4) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในการจัดการเรียนรู้ ไว้ดังนี้

1. ครูสามารถใช้วัตถุรูปธรรมในการเพิ่มความสนใจของนักเรียนได้

2. การเปรียบเทียบระหว่างกระบวนการในการกระทำกับวัตถุรูปธรรมและกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ โดยมีวัตถุรูปธรรมเป็นสิ่งเชื่อมโยงการเรียนรู้ไปสู่การดำเนินการในรูปของสัญลักษณ์ ซึ่งการใช้วัตถุรูปธรรมจะช่วยในการเข้าใจเกี่ยวกับการกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์มากขึ้น

3. การใช้วัตถุรูปธรรมจะช่วยให้ผู้เรียนพัฒนาเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และทักษะทางคณิตศาสตร์

Ohlsson and Hall (1990: 48) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในส่วนของการใช้วัตถุรูปธรรม ในขั้นการเขียนลำดับขั้นตอนสำหรับการดำเนินการกับวัตถุรูปธรรมและขั้นตอนการขยายเส้นทางที่เขียนกับปัญหา ว่าการใช้วัตถุรูปธรรมสำหรับการอธิบายการแสดงวิธีทำเกี่ยวสิ่งที่เป็นนามธรรมเข้าใจได้มากกว่าการสอนการดำเนินการทางสัญลักษณ์ และการใช้วัตถุรูปธรรมในการเรียนการสอนจะทำให้นักเรียนเข้าใจกระบวนการดำเนินการที่เกิดจากการอธิบายได้อย่างถูกต้อง นอกจากนี้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ ในส่วนของขั้นตอนกระทำกับวัตถุรูปธรรมและขั้นตอนในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ ยังแสดงให้เห็นถึงการถ่ายโยงไปสู่การได้มาซึ่งการเขียนขั้นตอนในการดำเนินการ

Boulton - Lewis (1992: 34) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการไว้ว่า ในส่วนของการใช้วัตถุรูปธรรมจะมีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนก็ต่อเมื่อ ครูผู้สอนออกแบบการใช้วัตถุรูปธรรมให้สอดคล้องกับเนื้อหาที่จะสอน ถ้าหากวัตถุรูปธรรมกับเนื้อหาหรือความรู้เกี่ยวกับกระบวนการไม่มีความคล้ายกันหรือไม่สอดคล้องกัน จะส่งผลให้การเรียนรู้ไม่มีประสิทธิภาพ

จากประโยชน์ของการใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในการจัดการเรียนรู้ที่นักการศึกษาได้กล่าวไว้ ผู้วิจัยสรุปได้ว่า การจัดการเรียนรู้โดยใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ ซึ่งมีเป็นแนวคิดทฤษฎีที่มีหลักการการสอนที่เน้นการเปรียบเทียบระหว่างกระบวนการในกระทำกับวัตถุและกระบวนการในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ นั้นมีประโยชน์ต่อนักเรียน โดยทำให้นักเรียนมีความรู้ที่ชัดเจนจนมีทักษะและมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และการใช้วัตถุรูปธรรมที่สอดคล้องกับทฤษฎีจะช่วยให้นักเรียนมีความสนใจในการเรียนมากขึ้น

2. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2.1 ความหมายของมโนทัศน์

มโนทัศน์ เป็นคำที่แปลมาจากคำว่า concept ซึ่งมีผู้ให้คำแปลภาษาไทยไว้หลายคำ เช่น ความคิดรวบยอด แนวคิด ความหมายมโนภาพ มโนมติ หรือ สังกัป และได้มีให้ความหมายของคำว่า "มโนทัศน์" ไว้ ดังต่อไปนี้

Good (1973: 124) เป็นผู้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ 3 ลักษณะ คือ

1. ความคิดหรือลักษณะร่วมกันที่สามารถจำแนกออกเป็นกลุ่มเป็นพวกได้
2. ความคิดทั่วไปหรือเชิงนามธรรมเกี่ยวกับสถานการณ์ กิจการหรือวัตถุ
3. ความรู้สึกนึกคิด ความเห็น ความคิด หรือภาพความคิด

Feldman (1990: 259) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ คือ การจัดกลุ่มวัตถุ เหตุการณ์ หรือบุคคลที่มีสมบัติคล้ายคลึงกันเข้าด้วยกัน ซึ่งจะทำให้เกิดความเข้าใจในสิ่งต่าง ๆ ได้ง่าย และมโนทัศน์จะทำให้เราจำแนกสิ่งใหม่ ๆ ที่พบเห็นให้อยู่ในรูปที่เราสามารถเข้าใจตามพื้นฐาน

Goodwin and Klausmeier (1995: 246) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ คือ ความสามารถที่จะบอกให้เราเข้าใจถึงคุณลักษณะของสิ่งต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นวัตถุ เหตุการณ์หรือ กระบวนการ ซึ่งให้เราแยกสิ่งต่างๆ นั้น ออกจากสิ่งอื่นได้และในขณะเดียวกันก็สามารถเชื่อมโยงเข้ากับกลุ่มสิ่งของประเภทเดียวกันได้

หอสมุดกลาง สำนักงานวิทยทรัพยากร
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Rothenberg (1985: 500) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ในเชิงปรัชญาและจิตวิทยา ดังนี้ มโนทัศน์ในเชิงปรัชญา หมายถึง ความคิดที่ประกอบด้วยแนวคิดต่างๆซึ่งมีลักษณะพิเศษและมีความสัมพันธ์กันอย่างเป็นเหตุเป็นผล ส่วนมโนทัศน์ในความหมายทางจิตวิทยานั้น มโนทัศน์ไม่ได้เป็นเพียงการรู้ แต่เป็นผลสรุปที่ได้จากการกลั่นกรองการรับรู้นั้น

Arends (1994: 299) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความเข้าใจ ความคิดของบุคคลที่มีต่อสิ่งต่างๆ รอบตัวเรา และสามารถบอกความเหมือนหรือความต่างของสิ่งนั้นๆ

ธีรชัย ปูรณโชติ (2537: 41) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ คือ ความเข้าใจโดยสรุปเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่เกิดจากการสังเกตหรือได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งนั้น แล้วนำคุณลักษณะต่าง ๆของสิ่งนั้นมาประมวลกันเข้าด้วยกันเป็นความคิดโดยสรุปของสิ่ง ๆนั้น

นวลจิตต์ เชาวกรีติพงศ์ (2537: 55) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์ คือ ความเข้าใจทั้งหมดที่มีต่อสิ่งของหรือสถานการณ์อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งเป็นผลมาจากการได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งของหรือสถานการณ์ใด ๆ แล้วสรุปผลการรับรู้ลักษณะของสิ่งนั้น ๆ ออกมา ดังนั้น บุคคลที่มีประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งนั้น ๆ ต่างกัน ย่อมจะมีมโนทัศน์ในสิ่งเดียวกันแตกต่างกัน

พรรณี ชูทัย เจนจิต (2538: 423) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความสามารถที่ผู้เรียนจะมองเห็นความเหมือนของสิ่งเร้าและสามารถจัดกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีลักษณะเหมือนกันรวมกันไว้เป็นพวกเดียวกันได้

อาภรณ์ ใจเที่ยง (2540 : 62) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ว่า มโนทัศน์ คือ การจัดลักษณะที่เหมือนกันจากประสบการณ์หรือสิ่งของเข้าด้วยกันอย่างมีระเบียบ ทำให้เกิดความคิดหรือประสบการณ์ มโนทัศน์เป็นความคิดหรือความเข้าใจขั้นสุดท้ายที่มีต่อสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งในช่วงเวลาหนึ่งมโนทัศน์เปลี่ยนแปลงได้ เมื่อผู้เรียนมีประสบการณ์มากขึ้นหรือมีวุฒิภาวะเพิ่มขึ้น

จากความหมายของ "มโนทัศน์" ตามที่นักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้ให้ความหมายไว้ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปความหมายของมโนทัศน์ ได้ว่า หมายถึง ความคิดและความเข้าใจที่

เกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่งหรือสิ่งใดสิ่งหนึ่ง อันเกิดจากการสังเกตหรือได้ประสบการณ์ โดยสรุปเป็นความเข้าใจและเป็นแนวคิดที่สามารถรวมลักษณะเหมือนหรือแยกแยะลักษณะที่แตกต่าง ของสิ่งของหรือเหตุการณ์ออกจากกันได้

2.2 ความสำคัญของมโนทัศน์

การที่บุคคลจะเรียนรู้สิ่งใด ๆ จะต้องมีมโนทัศน์ในสิ่งนั้นก่อนจึงจะสามารถจดจำและนำไปใช้ประโยชน์ได้ดังที่ De Cecco (1968: 402-416) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้สรุปได้ว่า

1. มโนทัศน์ช่วยลดความซับซ้อนของธรรมชาติ และสิ่งแวดล้อมหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่มีอยู่มากมาย การที่เราจะตอบสนองสิ่งเร้าทีละอย่างเป็นเรื่องยาก ดังนั้นจึงใช้มโนทัศน์ในการจัดแบ่งสิ่งต่าง ๆเป็นกลุ่มทำให้การตอบสนองหรือสื่อความหมายได้ง่ายขึ้น

2. มโนทัศน์ช่วยให้รู้จักสิ่งต่าง ๆ การรู้จักเป็นการจัดสิ่งเร้าให้อยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่ง เช่น การแยกได้ว่าเสียงที่ได้ยินเป็นเสียงอะไร อยู่ในพวกไหน แล้วใช้มโนทัศน์นี้เป็นพื้นฐานต่อไป

3. มโนทัศน์ช่วยในการเรียนรู้ได้มากขึ้น เช่น เมื่อมีการเรียนรู้เรื่องหนึ่ง ๆ เราสามารถนำไปใช้ได้เลยโดยไม่ต้องเรียนซ้ำ เช่น รู้จักสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม จากนั้นเมื่อเราพบสัตว์ประเภทเดียวกันก็จะแยกแยะได้

4. มโนทัศน์ช่วยในการแก้ปัญหา ทำให้รู้จักว่าวัตถุนั้นอยู่กลุ่มใด เหตุการณ์ใหม่อยู่ในกลุ่มใดแล้วทำให้เกิดการตัดสินใจต่อไป ดังการมีมโนทัศน์ที่ถูกต้องและกว้างขวางก็เท่ากับรู้จักการแก้ปัญหา

5. มโนทัศน์ช่วยในการเรียนการสอน เพราะในการเรียนการสอนจะต้องอาศัยการสื่อสารกันในรูปการฟัง การพูด การอ่าน และการเขียน

Ausubel (1968: 505) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ว่า มโนทัศน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการดำเนินชีวิตในสังคม เนื่องจากพฤติกรรมของมนุษย์ไม่ว่าจะเป็นด้านความคิด การสื่อความหมายระหว่างกัน การแก้ปัญหา การตัดสินใจ ล้วนต้องผ่านเครื่องกรองที่เป็นมโนทัศน์มาก่อนทั้งสิ้น

อาคม จันทสุนทร (2522: 47-50) ได้กล่าวถึง ความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ดังต่อไปนี้

1. ทำให้เกิดการเรียนรู้ที่มีระบบไม่สับสน เรียนรู้ง่ายไม่ยุ่งยาก

2. ทำให้ประหยัดเวลาไม่ต้องเรียนเรื่องใดเรื่องหนึ่งมากจนเกินจำเป็น

3. ทำให้สามารถนำความรู้ไปใช้ได้กว้างขวาง เสริมความรู้ต่อไปและเร็วขึ้น

บุญเสริม ฤทธาภิรมย์ (2523: 10) ได้กล่าวถึง ความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นพื้นฐานสำคัญในการเรียนรู้และการดำรงชีวิตของคน คนจะต้องสร้างมโนทัศน์อยู่เสมอถ้ามีสิ่งเร้าเข้ามาปะทะประสาทสัมผัส จะทำให้เกิดการเรียนรู้ ประโยชน์ของมโนทัศน์ มีดังต่อไปนี้

1. ช่วยลดความซับซ้อนของสิ่งแวดล้อมที่มีอยู่จัดเป็นพวกเป็นกลุ่มได้ เช่น จะเรียกสัตว์ที่อยู่บนบก ว่าสัตว์บก เป็นต้น

2. มโนทัศน์ช่วยแบ่งแยกประเภท ทำให้รู้ว่าอะไรเป็นอะไร เช่น เราสามารถแยกเสียงรถออกจากเสียงม้าวิ่งได้ เป็นต้น

3. เชื่อมโยงความรู้หรือความคิดเดิมกับมโนทัศน์ใหม่ได้เร็ว

4. เป็นตัวกำหนดความยากง่ายของเนื้อหาแก่ผู้เรียน คือ ผู้เรียนวัยหนึ่งระดับหนึ่งควรจะรับรู้ในรายละเอียดหรือปลีกย่อย ซึ่งบางอย่างไม่จำเป็นก็อาจข้ามหรือไม่ต้องสอนก็ได้ หรือ สิ่งที่เรียนมาก่อนแล้วรู้แล้วก็ไม่จำเป็นต้องกลับมาเรียนซ้ำให้เสียเวลา

5. มโนทัศน์ช่วยให้คนรู้จักกำหนดวิธีการที่จะแก้ไขปัญหาต่าง ๆได้ เพราะสามารถแบ่งแยกวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ แล้วพิจารณาหาวิธีการแก้ปัญหาที่เหมาะสม

นาตยา ภัทรแสงไทย (2524: 25) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า ในการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะต้องเกิดมโนทัศน์จากการเรียน เนื่องจากมโนทัศน์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถจัดประเภท สรุปและมองสิ่งหนึ่งสิ่งใดในลักษณะร่วมกันมากกว่าที่จะมองแยกออกจากกัน จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถตีความได้โดยกระบวนการคิด เมื่อผู้เรียนสามารถหาข้อสรุปได้แล้ว จะสามารถนำไปใช้และเชื่อมโยงกับสิ่งอื่น ๆ ได้

พวงเพ็ญ อินทราประวัติ (2532:14) กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นเนื้อหาความรู้ที่มีประโยชน์มาก หากผู้เรียนสร้างมโนทัศน์ของสิ่งใดได้แล้ว เขาก็สามารถนำเอามโนทัศน์นั้นไปประยุกต์ใช้ในโอกาสอื่น ๆ ได้อีกเรื่อยไป คนพยายามสร้างมโนทัศน์ของสิ่งต่าง ๆ และของเหตุการณ์ต่าง ๆอยู่เสมอ เพราะการสรุปลักษณะเฉพาะของสิ่งต่าง ๆ ในรูปของมโนทัศน์จะช่วยลดภาระของสมองให้จดจำน้อยลง แทนที่จะจดจำลักษณะปลีกย่อยของทุกสิ่งทุกอย่างที่

อยู่รอบ ๆ ตัว เขาเพียงแต่จำไว้ในลักษณะที่เป็นหมวดหมู่ ซึ่งจะทำให้เขาสามารถขยายขอบข่ายความรอบรู้ของตัวของเขาเองให้กว้างขวางออกไป

นวลจิตต์ เชาวกรีติพงศ์ (2537: 57) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า การเรียนรู้มโนทัศน์จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาการเรียนรู้ในเรื่องนั้นถึงระดับสูงสุดได้ และนอกจากนั้นยังช่วยให้เรียนรู้สิ่งที่เกี่ยวข้องได้รวดเร็วขึ้น เพราะเกิดการจัดระบบระเบียบของข้อมูลไว้เรียบร้อยแล้วในสมอง เมื่อได้ปะทะกับสิ่งเร้าใหม่ก็สามารถจำแนกจัดหมวดหมู่และเชื่อมโยงกับมโนทัศน์

สุรางค์ โค้วตระกูล (2543: 302) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นรากฐานของความคิด มนุษย์จะคิดไม่ได้ถ้าไม่มีมโนทัศน์ที่เป็นพื้นฐาน เพราะมโนทัศน์จะช่วยในการตั้งกฎเกณฑ์ หลักการต่าง ๆ และสามารถที่จะแก้ปัญหาที่เผชิญ นอกจากนี้มโนทัศน์ยังเป็นเครื่องมือ ที่ช่วยในการสื่อความหมายที่จะทำให้คนเรามีปฏิสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน

จากทัศนะเกี่ยวกับ "ความสำคัญของมโนทัศน์" ตามที่นักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้ให้ความหมายไว้ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปความสำคัญของมโนทัศน์ ได้ว่า มโนทัศน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการดำเนินชีวิต เพราะมโนทัศน์เป็นรากฐานของความคิดในการเรียนรู้ในเรื่องใด ๆ ซึ่งจะช่วยให้เรียนรู้สิ่งที่เกี่ยวข้องได้รวดเร็วและมากขึ้น เมื่อมีการจัดระบบระเบียบของข้อมูลโดยการนำไปตั้งเป็นกฎเกณฑ์ หลักการ แล้ว เมื่อได้ปะทะกับสิ่งเร้าใหม่ ทำให้สามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

2.3 ประเภทของมโนทัศน์

นักการศึกษาและนักจิตวิทยา ทั้งในและต่างประเทศได้จำแนกประเภทของมโนทัศน์โดยมีเกณฑ์ในการจำแนกที่แตกต่างกัน ดังต่อไปนี้

Russell (1956: 124 -125) ได้แบ่งมโนทัศน์ ออกเป็น 8 ประเภท ดังนี้คือ

1. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical concepts) คือ มโนทัศน์ที่เกี่ยวกับจำนวนตัวเลข การวัด ซึ่งเกิดขึ้นอยู่เสมอในชีวิตประจำวัน

2. มโนทัศน์ในเรื่องเวลา (Concepts of time) เช่น เช้า สาย บ่าย เย็น กลางคืน กลางวัน และฤดูกาลต่าง ๆ

3. มโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์ (Scientific concepts) เป็นมโนทัศน์ที่ประกอบด้วยมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ มโนทัศน์ในเรื่องเวลาและมิติ เพราะวิทยาศาสตร์ขึ้นอยู่กับการวัดที่แน่นอนของเวลา มิติ น้ำหนัก และปรากฏการณ์อื่น ๆ

4. มโนทัศน์เกี่ยวกับตนเอง (Concepts of the self) คือ การที่บุคคลมีความคิดว่าตัวเขาเป็นอะไร เป็นใคร เป็นอย่างไร

5. มโนทัศน์ทางสังคม (Social concepts) เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล ชุมชน ประชาธิปไตย ศีลธรรม และพฤติกรรมต่าง ๆ ที่แสดงออกมา

6. มโนทัศน์ทางสุนทรียภาพ (Aesthetic concepts) มีความสัมพันธ์กับมโนทัศน์ที่เกี่ยวกับความสวยงามและขึ้นกับมโนทัศน์ทางสังคม เช่น สุนทรียภาพในการเขียน ดนตรี

7. มโนทัศน์เกี่ยวกับความขบขัน (Concepts of humor) มีพัฒนาการอยู่ในขอบเขตของสังคม บางสิ่งเป็นเรื่องที่ขบขันของสังคมหนึ่ง แต่อาจไม่ขบขันในอีกสังคมหนึ่งก็ได้

8. มโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องอื่น ๆ (Miscellaneous concepts) เช่น เกี่ยวกับความตาย เพศ สงคราม เป็นต้น

De Cecco (1968: 390-391 อ้างถึงใน ชูชีพ อ่อนโคกสูง, 2522: 102-103) ได้จำแนกมโนทัศน์ออกเป็น 3 ประเภท สรุป ได้ดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน (Conjunction concepts) มโนทัศน์ที่เกิดจากการมีส่วนร่วมกันของลักษณะเฉพาะ ตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป เช่น สมุดสีเขียว ดอกไม้สีแดง สุนัขขนยาวสีขาว หรือสิ่งเร้าที่เราพบเห็นโดยทั่วไป มีลักษณะร่วมกัน ได้แก่ รูปร่าง ขนาด สี เป็นต้น มโนทัศน์ต่าง ๆ ที่เราคุ้นเคยในชีวิตประจำวัน มักเป็นมโนทัศน์แบบร่วมลักษณะ

2. มโนทัศน์แยกลักษณะ (Disjunctive concepts) หมายถึง มโนทัศน์ที่เป็นโอกาสให้ตัดสินใจเลือกเอาอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างร่วมกัน เช่น คำว่า "กา"อาจเป็นนกหรือกาต้มน้ำ หรือเครื่องหมายกากบาท (X) สัญลักษณ์ "0" อาจเป็นจำนวนศูนย์ (Zero) วงกลม ตัวโอในภาษาอังกฤษ หรือไข่ฟองหนึ่งก็ได้

3. มโนทัศน์เชิงสัมพันธ์ (Relation concepts) หมายถึง มโนทัศน์ที่เกิดจากความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ สภาวะหรือสิ่งเร้า ตั้งแต่สองอย่างขึ้นไป เช่น การนำไม้ขีดไฟไปสัมพันธ์กับบุหรี่ เพราะว่าเราใช้ไม้ขีดไฟจุดบุหรี่ หรือภาษีเงินได้สัมพันธ์กับระดับของรายได้

Gibson (1980: 276) ได้แบ่งมโนทัศน์ออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. มโนทัศน์เชิงรูปธรรม (Concrete concepts) คือ ความคิดที่สามารถเชื่อมโยงไปสู่กลุ่มของวัตถุที่สามารถสังเกตได้อาทิ บ้าน หนังสือ สุนัข หรือ คุณภาพของวัตถุ เช่น สี ขนาด รูปร่าง เป็นต้น

2. มโนทัศน์เชิงนามธรรม (Abstract concepts) คือ ความคิดที่ไม่สามารถเชื่อมโยงไปสู่วัตถุที่สังเกตได้หรือคุณภาพของวัตถุได้โดยตรง อีกนัยหนึ่งก็คือ คำนิยามของมโนทัศน์

บุญเสริม ฤทธาภิรมย์ (2523: 9 -10) ได้แบ่งมโนทัศน์เป็น 3 ประเภท ดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกันเป็นมโนทัศน์ที่มีอยู่เป็นส่วนใหญ่เรียนรู้ได้ง่าย มีคุณลักษณะร่วมกันหลายอย่าง เช่น สุนัข แม้จะมีอยู่หลายพันธุ์ เช่น อัลเซเชียน โดเบอร์แมน จิ้งจอก หมาใน เป็นต้น แม้คุณค่าจะผิดแผกแตกต่างกัน แต่ก็มีคุณลักษณะหลายอย่างร่วมกัน สามารถบอกได้ว่าเป็นสุนัข ซึ่งจะแตกต่างไปจาก วัว ควาย ลิง ม้า เป็นต้น

2. มโนทัศน์ที่เป็นเชิงสัมพันธ์ เป็นมโนทัศน์ที่ต้องอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกหรือกลุ่ม พิจารณาคุณลักษณะ คุณค่าที่แตกต่างกัน แต่สมาชิกหรือส่วนประกอบมีความสัมพันธ์กันในบางลักษณะ เช่น การจัดกลุ่มคน อายุ เพศ วัย ต่างกันเข้าด้วยกัน เพราะบุคคลเหล่านี้ปฏิบัติกิจกรรมอย่างใดอย่างหนึ่งร่วมกัน

3. มโนทัศน์ที่เป็นเชิงวิเคราะห์ เป็นมโนทัศน์ที่อยู่บนพื้นฐานของคุณลักษณะที่สังเกตได้จากส่วนของวัตถุ สิ่งของ เรื่องราวแต่ละอย่างภายในกลุ่ม จะซับซ้อนกว่ามโนทัศน์ 2 ประเภทที่กล่าวมา เช่น จัดกลุ่มสัตว์สี่เท้าเข้าด้วยกัน เพราะดูคุณลักษณะของจำนวนขาหรือเท้าทั้ง ๆ ที่เป็นสัตว์ต่างชนิดกัน

ประสาร มาลากุล ณ อยุธยา (2531: 3 - 4) ได้ใช้เกณฑ์ในการจำแนกมโนทัศน์ออกเป็น 3 ประเภท คือ 1. จำแนกตามลักษณะมโนทัศน์ 2. จำแนกตามการตีความหมาย และ 3. จำแนกตามลำดับความซับซ้อนของมโนทัศน์ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

1. จำแนกตามลักษณะมโนทัศน์ได้ 3 ลักษณะ คือ

1.1 มโนทัศน์เน้นลักษณะร่วมกัน (Conjunctive concepts) คือ มโนทัศน์ที่อาศัยลักษณะต่างๆ ที่เหมาะสมมารวมกันอยู่ครบถ้วน ทั้งในรูปของจำนวนและค่าของมันนับเป็นมโนทัศน์พื้นฐานที่ใช้กันทั่วไป เช่น แว่นตา ปากกา สุนัข เป็นต้น และลักษณะรวมกันเป็นมโนทัศน์อย่างใดอย่างหนึ่งนี้ทำให้มโนทัศน์ของอย่างหนึ่งแตกต่างจากอีกอย่างหนึ่ง

1.2 มโนทัศน์เน้นลักษณะประกอบกัน (Disjunctive concepts) ได้แก่ มโนทัศน์ที่มีลักษณะสำคัญ ๆ ประกอบกัน เช่น วงกลมสีแดง หรือ / และสีเขียว ซึ่งแสดงว่าต้องมีลักษณะรูปวงกลมเป็นพื้นฐานอยู่ ส่วนสีนั้นอาจเป็นสีใดสีหนึ่งหรือทั้งสองสีก็ได้

1.3 มโนทัศน์แบบเน้นลักษณะสัมพันธ์ (Relational concepts) คือ มโนทัศน์ที่ไม่เน้นลักษณะร่วมกันหรือประกอบกัน แต่เน้นความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะต่าง ๆ เช่น ระยะทาง ทิศทาง ความเร็ว เวลา เป็นต้น

2. จำแนกมโนทัศน์ตามแบบการตีความหมาย การตีความหมายอาจเกิดขึ้นได้จากทั้งประสบการณ์ส่วนตัวบุคคลหรือจากการใช้เกณฑ์กลาง คือ ความคิดเห็นของคนจำนวนมาก ที่ประเมินไว้ร่วมกัน โดยการตีความหมายอาจจำแนกได้ 3 ลักษณะ คือ

2.1 มโนทัศน์เน้นลักษณะรวมกัน (Conjunctive concepts) คือ ตามบทบาทหน้าที่ของมโนทัศน์ (Functional concepts)

2.2 ตามโครงสร้างของมโนทัศน์ (Structural concepts) เช่น รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คือ รูปที่มีเส้นตรง 3 เส้นที่มีความยาวเท่ากันทั้งสามด้าน มาประกบกันจนเกิดรูปปิด ก็คือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านั้นเอง

2.3 ตามลักษณะหรือพฤติกรรมของมโนทัศน์ (Descriptive or behavioral concepts) เช่น ช่างกล คือ ผู้ที่ทำงานด้านเครื่องยนต์กลไก เป็นต้น

3. จำแนกตามระดับความซับซ้อนของมโนทัศน์ (Degree of complexity) โดยพิจารณาจากลักษณะที่เป็นรูปธรรมหรือนามธรรมของมโนทัศน์ต่าง ๆ

ประยูร อาษานาม (2537: 21) ได้แยกมโนทัศน์ออกเป็น 2 ประเภทดังนี้

1. มโนทัศน์เกี่ยวกับคุณสมบัติ (Qualitative concept) เป็นการจำแนกสิ่งต่าง ๆ ตามขนาด รูปร่างและสี โดยคนเราสามารถรับรู้ สัมผัสได้

2. มโนทัศน์ที่เกี่ยวกับปริมาณ (Quantitative concept) เป็นเรื่องของนามธรรม เช่น จำนวนและการนับ เป็นต้น

สุวัฒนา เอี่ยมอรพรรณ (2549: 33) ได้จำแนกประเภทมโนทัศน์ไว้เป็น 2 ประเภท ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่เกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ ซึ่งมีทั้งนามธรรมและรูปธรรม เช่น ทะเล ลม พืช สัตว์ เป็นต้น

2. มโนทัศน์ที่มนุษย์กำหนดหรือประดิษฐ์ขึ้น เช่น ความดี ความชั่ว ความสวย โต๊ะ เก้าอี้ เป็นต้น

จากแนวคิดเกี่ยวกับประเภทของมโนทัศน์ของนักการศึกษา ดังที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยสรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถจำแนกเป็นประเภทต่างๆได้ โดยพิจารณา

จากลักษณะทั่วไปและลักษณะเฉพาะที่เป็นส่วนประกอบ ลักษณะ หรือความสัมพันธ์ที่ร่วมกันของสิ่งที่ต้องการจำแนก ซึ่งการจำแนกมโนทัศน์นั้นเกิดขึ้นได้จากประสบการณ์ของบุคคลแต่ละบุคคลที่จะใช้เป็นเกณฑ์ในการจำแนก

2.4 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

Good (1956: 118) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า หมายถึง ความคิดสำคัญ ความเข้าใจที่เกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ในด้านการคิดคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน รวมไปถึงการให้เหตุผลอย่างมีระบบหรือรูปร่างลักษณะภายนอกของสิ่งของอันเกิดจาการสังเกตหรือการได้รับประสบการณ์แล้วนำลักษณะนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันให้เป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์

Cooney, Davis and Henderson (1975: 85) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความเข้าใจของนักเรียนที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้ โดยนักเรียนสามารถสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้น เช่น การมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชัน คือ นักเรียนสามารถบอกบทนิยามของฟังก์ชันได้

Eggen and Kauchak (1995: 108) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดความเข้าใจของบุคคลที่มีต่อสิ่งเร้า ซึ่งบุคคลสามารถจัดประเภทหรือกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีคุณสมบัติบางประการร่วมกัน โดยผ่านกระบวนการเรียนรู้ เช่น มโนทัศน์ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า คือ รูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดของมุมทั้งสี่เท่ากัน และเท่ากับ 90 องศา มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน เป็นต้น

Toumasis (1995: 98) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดขั้นสุดท้ายเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ที่เกิดจากการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีต่อสิ่งเร้า โดยนักเรียนสามารถแยกประเภทของสิ่งเร้าที่มีความสัมพันธ์กันและไม่สัมพันธ์กันได้

Schwarz and Hershkowiz (1999: 363) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ไว้ว่า เป็นความเข้าใจของบุคคลที่เป็นผลมาจากกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์ ซึ่งสามารถสรุปออกมาเป็นบทนิยามทางคณิตศาสตร์

โสภณ บำรุงสงฆ์และสมหวัง ไตรต้นวงค์ (2520: 222) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดในเชิงนามธรรม คือ เป็นความเข้าใจเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ ขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์

อัจฉราพรรณ เกิดแก้ว (2524: 10) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ ความเข้าใจ การนำไปใช้ รวมทั้งความสามารถในการสรุปและจำแนกสิ่งต่าง ๆที่เป็นพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

เมธี ลิมอักษร (2524: 4) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาแล้ว โดยสามารถสรุปรวบรวมคุณสมบัติที่เป็นองค์ประกอบร่วมของสิ่งที่เราประสบพบเห็น แล้วสามารถกำหนดสัญลักษณ์หรือความหมายแทนคุณสมบัติดังกล่าวได้ เช่น เราให้ความหมายของรูปสามเหลี่ยม ว่าหมายถึงรูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้านสามด้านและเขียนสัญลักษณ์ "Δ" แทนรูปสามเหลี่ยม เป็นต้น

อัมพร ม้าคนอง (2547ข: 5) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดนามธรรมที่ทำให้นักเรียนสามารถจำแนกวัตถุหรือเหตุการณ์ที่มีลักษณะตามความคิดนามธรรมนั้น ๆ และสามารถระบุได้ว่าวัตถุและเหตุการณ์ที่กำหนดให้เป็นตัวอย่างหรือไม่ใช่ตัวอย่างของความคิดนามธรรมนั้น เช่น มโนทัศน์เกี่ยวสับเซต มโนทัศน์เกี่ยวกับรูปของสามเหลี่ยม เป็นต้น

จากความหมายของ "มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์" ตามที่นักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้ให้ความหมายไว้ข้างต้น ผู้วิจัยสามารถสรุปความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญและความเข้าใจที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นความคิดด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน กฎเกณฑ์ ขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้ โดยสามารถสรุปเป็นความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยาม ทฤษฎีบท และสมบัติต่าง ๆ ของวิชาคณิตศาสตร์

2.5 การเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ระดับสติปัญญาของเด็กแต่ละคนมีความแตกต่างกัน (วรินทรา วัชรสิงห์, 2537: 72) ดังนั้นครูควรทราบเกี่ยวกับการเรียนรู้มโนทัศน์เพื่อเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจนักเรียนแต่ละคนว่ามีการเรียนรู้มโนทัศน์อย่างไร ควรช่วยนักเรียนให้เรียนรู้มโนทัศน์ได้อย่างไร ซึ่งนักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้กล่าวถึงการเรียนรู้มโนทัศน์ไว้หลายท่านดังต่อไปนี้

Ausubel (1968: 509) ได้กล่าวถึงการเรียนรู้มโนทัศน์สรุปได้ว่า การเรียนรู้มโนทัศน์เกิดขึ้นได้ 2 วิธี คือ

1. การสร้างมโนทัศน์ (Concept formation) หมายถึง กระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์จากประสบการณ์ การสังเกต เป็นการเรียนรู้โดยค้นพบ หรือ ใช้วิธีอุปมาน (Inductive process)

2. การแตกย่อยมโนทัศน์ (Concept assimilation) หมายถึงกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์แบบอนุมาน (Deductive process) โดยทราบคำจำกัดความของมโนทัศน์พร้อมกับตัวอย่างของมโนทัศน์ และคุณลักษณะวิกฤติ (Critical attributes) ของมโนทัศน์นั้น ซึ่งเด็กโตจนถึงผู้ใหญ่จะใช้กระบวนการแตกย่อยมโนทัศน์นี้

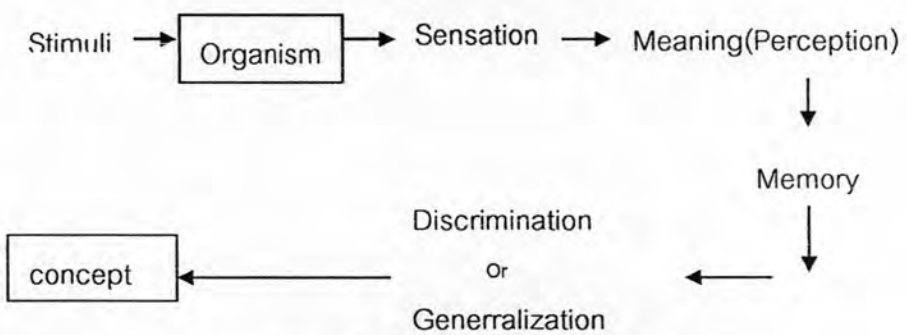
Frayer, Fredrick and Klausmeier (1969 อ้างถึงใน สุรางค์ โค้วตระกูล, 2537: 208-210) ได้ศึกษาการเรียนรู้มโนทัศน์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งในโรงเรียนและได้ติดตามผลระยะยาว (Longitudinal study) พบว่า การเรียนรู้มโนทัศน์ผู้เริ่มเรียนตามขั้นพัฒนาของสติปัญญาและได้แบ่งขั้นกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์ออกเป็น 4 ขั้น คือ

1. กระบวนการเรียนรู้ขั้นรูปธรรม (Concrete level process)
2. กระบวนการเรียนรู้ขั้นเหมือน (Identity level process)
3. กระบวนการเรียนรู้ขั้นที่จะสามารถแบ่งสิ่งต่าง ๆ เป็นจำพวกที่มีคุณลักษณะวิกฤติเหมือนกัน (Beginning classificatory level)
4. กระบวนการเรียนรู้ขั้นสูงสุด (Formal level process)

ปราณี รามสูต (2528: 138) มโนทัศน์ของคนเราเกิดจากการได้รับประสบการณ์ และกระบวนการเรียนรู้มโนทัศน์นั้น เกิดขึ้นเมื่อได้ปะทะกับสิ่งเร้า บุคคลจะเกิดการรับรู้ (Perception) เมื่อรับรู้แล้วก็จะเก็บเอาเป็นความจำ (Memory) เมื่อได้รับรู้กลุ่มของสิ่งเร้าใดมากเข้าความจำเกี่ยวกับกลุ่มของสิ่งเร้านั้นมีมากขึ้น ก็เกิดการคิดหาเหตุผล มีการประสมประสาน (Integration) กันระหว่าง

การรับรู้ ความจำ และความคิดเกี่ยวกับสิ่งนั้น การมองเห็นความแตกต่างของกลุ่มสิ่งเร้านั้น ๆ ว่าต่างไปจากกลุ่มสิ่งเร้าอื่นอย่างไร (Discrimination) และการสรุปรวบยอด (Generation) ลักษณะของสิ่งเร้านั้นว่าคล้ายคลึงกับสิ่งเร้าประเภทเดียวกันในแง่ใดบ้าง

นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ (2537: 55-56) กล่าวว่า คนเราจะเรียนรู้มโนทัศน์ไม่ได้เลยถ้าไม่มีประสบการณ์ ดังนั้นบุคคลที่มีประสบการณ์ต่างกันย่อมจะมีมโนทัศน์ของสิ่งเดียวกันแตกต่างกัน โดยการเรียนรู้มโนทัศน์จะเริ่มขึ้นเมื่ออินทรีย์ (Organism) ได้รับการกระตุ้นจากสิ่งเร้า (Stimuli) ก็จะเกิดการรับรู้ (Sensation) และการตีความ (Meaning) ในตอนนี้นักเรียนจะเกิดการรับรู้อย่างมีความหมาย (Perception) แล้วเก็บความรู้นี้ไว้ในความทรงจำ (Memory) ต่อมาเมื่อได้รับสิ่งเร้าใหม่ ก็จะเกิดการรับรู้ เปรียบเทียบภาพของสิ่งเร้าใหม่กับสิ่งเร้าเดิม ซึ่งนักเรียนอาจจะแยกแยะไม่ออกในระยะแรก แต่ถ้าครูบอกว่าสิ่งเร้าใหม่นี้คืออะไร ในที่สุดนักเรียนก็จะสามารถแยกแยะความแตกต่าง (Discrimination) ระหว่างสิ่งเร้าเดิมกับสิ่งเร้าใหม่ทันที และยังได้รับเก็บการรับรู้ที่มีความหมายเกี่ยวกับสิ่งเร้าใหม่ไว้ในความทรงจำอีกด้วย ต่อมาเมื่อนักเรียนได้รับสิ่งเร้าอีกสิ่งหนึ่งที่เป็นชนิดเดียวกับสิ่งเร้าแรก แต่มีลักษณะแตกต่างออกไป เช่น อาจจะมีสี หรือขนาดรูปร่างต่างกัน เมื่อครูบอกว่าสิ่งเร้านี้เป็นชนิดเดียวกับสิ่งเร้าแรก นักเรียนก็จะสามารถสรุปมโนทัศน์ของสิ่งเร้าแรกได้ ซึ่งสรุปขั้นตอนการเรียนรู้มโนทัศน์ได้ดังแผนภาพที่ 1 ดังต่อไปนี้



แผนภาพที่ 1 ขั้นตอนการเรียนรู้มโนทัศน์

ที่มา: นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ (2537: 55 - 56)

จากการเรียนรู้มโนทัศน์ที่นักการศึกษาและนักจิตวิทยาได้กล่าวไว้ข้างต้น ผู้วิจัยสรุปเกี่ยวกับการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ว่า ในการเรียนรู้มโนทัศน์ของแต่ละบุคคลครูควรคำนึงถึงระดับสติปัญญาและความแตกต่างของแต่ละบุคคล เนื่องจากมโนทัศน์ของคนเราเกิดจากการได้รับประสบการณ์จากสิ่งเร้าที่มาปะทะ แล้วเกิดการรับรู้ และเก็บเป็นความจำ มีการประสมประสานกัน

ระหว่างการรับรู้ ความจำที่มีอยู่ และความคิดเกี่ยวกับสิ่งนั้น แล้วจะเกิดการสรุปรวบยอดเป็นความคิดของแต่ละบุคคล ดังนั้นนักเรียนจะเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้นั้น นักเรียนต้องมีประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานสำหรับในการเรียนรู้มโนทัศน์ต่อ ๆ ไป

2.6 การสอนเพื่อให้เกิดการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

มโนทัศน์เป็นเนื้อหาความรู้ที่มีประโยชน์มาก ถ้าเรียนรู้มโนทัศน์ใดแล้ว ย่อมสามารถนำความรู้นั้นไปประยุกต์ใช้ในโอกาสอื่น ๆ ได้เรื่อย ๆ (สุวิทย์ มูลคำ, 2547: 10) ดังนั้นจึงควรสอนนักเรียนให้เกิดมโนทัศน์ เพื่อจะได้นำไปใช้ประโยชน์ได้ทั้งในการเรียนขั้นสูงขึ้น และในการดำเนินชีวิตประจำวัน ซึ่งนักการศึกษาได้เสนอแนวทางการสอนให้เกิดมโนทัศน์และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

De Cecco (1968: 416-418 อ้างถึงใน ชูชีพ อ่อนโคกสูง, 2522: 104) ได้เสนอว่าการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์นั้น ควรจะปฏิบัติเป็นขั้น ๆ ดังนี้

1. คาดหวังการกระทำ (พฤติกรรม) คือ ตั้งจุดหมายเชิงพฤติกรรมเพื่อทราบว่านักเรียนมีพฤติกรรมอย่างไรหลังจากเรียนมโนทัศน์ไปแล้ว

2. เลือกลักษณะเฉพาะที่เด่น ๆ (Dominance of attribute) ของมโนทัศน์มาสอนหรือแสดงต่อนักเรียน เพื่อลดความสับสนวุ่นวาย

3. แสดงภาษาซึ่งใช้แทนมโนทัศน์ที่ต้องการสอน โดยเขียนบนกระดานดำหรือบอร์ดก็ได้

4. ยกตัวอย่างมโนทัศน์ที่สอดคล้องและไม่สอดคล้อง (Positive and negative) กับมโนทัศน์ที่จะสอน

5. แสดงตัวอย่างที่ใช่ และไม่ใช่มโนทัศน์ที่สอนให้นักเรียนมองเห็น แล้วให้นักเรียนตอบว่าตัวอย่างใดที่ใช่ ตัวอย่างใดที่ไม่ใช่

6. แสดงตัวอย่างอื่นที่เป็นมโนทัศน์ที่สอน ถาม และให้นักเรียนตอบว่าใช่หรือไม่ใช่มโนทัศน์ที่เรียน

7. แสดงทั้งตัวอย่างที่ใช่ และไม่ใช่มโนทัศน์ที่สอน ให้นักเรียนเลือกเฉพาะตัวอย่างที่เป็นมโนทัศน์ที่สอน

8. ให้นักเรียนเขียนอธิบายความหมายของมโนทัศน์ที่เรียนแล้ว

9. เปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามและตรวจงานนักเรียน เพื่อรายงานผลให้เขาทราบและให้การเสริมแรงอื่น ๆ

Klausmeier and Ripple (1971: 422-423) ได้แนะนำวิธีการสอนเพื่อให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ไว้ ดังนี้

1. การเน้นคุณลักษณะของมโนทัศน์ (Emphasize the attributes of the concept) ผู้สอนควรชี้ให้ผู้เรียนเห็นถึงลักษณะแต่ละลักษณะของสิ่งเร้านั้น

2. การใช้ถ้อยคำที่เหมาะสม (Establish the correct terminology for concepts, attribute and instances) ให้ผู้เรียนรู้จักใช้ถ้อยคำแทนมโนทัศน์นั้นอย่างถูกต้อง

3. การชี้ให้เห็นธรรมชาติของมโนทัศน์ที่เรียน (Indicate the nature of the concepts to be learned)

4. การพิจาณาจัดลำดับของการเสนอตัวย่าง (Provide for proper sequencing of instances of concepts)

5. ส่งเสริม และแนะนำเด็กให้รู้จักเรียน ต้องการค้นคว้า (Encourage and guide student discovery) ซึ่งเป็นสิ่งยั่วยุให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยตนเอง

6. จัดให้มีการเรียนการใช้ประโยชน์ จากการเรียนมโนทัศน์นั้น (Provide for use of the concept) โดยมีครูเป็นผู้ให้ความช่วยเหลือ

7. ให้ผู้เรียนรู้จักประเมินตนเองว่าเข้าใจในความรู้นั้นหรือไม่ (Encourage independent evaluation of the attained concept)หากยังไม่เข้าใจก็จะได้เริ่มต้นใหม่

Klausmeier (1985: 278 - 279) ได้ศึกษาวิจัยแล้วพบว่า การเรียนมโนทัศน์ขึ้นอยู่กับ พัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียนและอิทธิพลจากสภาพแวดล้อมในรูปของการเรียนการสอน โดยที่ลำดับขั้นการสร้างมโนทัศน์พอสรุปได้เป็น 4 ระดับ ดังนี้

1. ระดับรูปธรรม (Concrete level) ซึ่งผู้เรียนจำวัตถุสิ่งต่าง ๆ ได้และนึกถึงชื่อของสิ่งนั้น ๆ ได้ เช่น เด็กเล็ก ๆ เรียนรู้ คำว่า "สุนัข" เป็นต้น

2. ระดับรวมกลุ่ม (Identity level) เป็นระดับที่ผู้เรียนจำสิ่งใดสิ่งหนึ่งในสภาพการณ์และเวลาที่แตกต่างกันได้ ลักษณะสำคัญของการเรียนรู้นี้คือความสามารถสรุปความคล้ายคลึงและแผ่ขยายมโนทัศน์ได้ (Generalization) เช่น สุนัขก็ย่อมเป็นสุนัขเสมอ ไม่ว่าจะอยู่ในสถานที่เวลา หรือมุมมองที่แตกต่างกันอย่างไรก็ตาม

3. ระดับจัดจำพวก (Classification level) คือ ความสามารถในการจัดประเภทสิ่งที่มีลักษณะร่วมกันเข้าด้วยกัน เช่น สุนัข ไม่ว่าจะมีรูปร่าง ขนาด สี หรือ พันธุ์แตกต่างกันอย่างไรก็เรียกว่า สุนัข ทั้งนั้น

4. ระดับนามธรรม (Formal level) เป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนสามารถใช้สื่อมโนทัศน์อธิบายความหมาย จำแนกความแตกต่างกับมโนทัศน์อื่น ๆ ได้ถือเป็นระดับที่เรียนรู้มโนทัศน์ได้สมบูรณ์

ชัยพร วิชชาวุธ (2521: 6-7) ได้เสนอขั้นตอนของการเรียนรู้หรือการเกิดมโนทัศน์ไว้ดังนี้

1. การเรียนรู้เริ่มจากที่ผู้เรียนได้มีประสบการณ์ เช่น การได้เห็น ได้ฟัง เป็นต้น

2. เมื่อเกิดประสบการณ์แล้วผู้เรียนรู้ต้องสังเกตในรายละเอียดปลีกย่อยของประสบการณ์และคิดเปรียบเทียบ เช่น รูปที่เห็นนั้นเป็นสีอะไร รูปร่างเป็นอย่างไร อะไรที่เหมือนกันและอะไรที่ต่างกัน เป็นต้น

3. ผลจากการสังเกตในข้อ 2 ผู้เรียนจะต้องตั้งสมมติฐานว่ามโนทัศน์ของสิ่งเหล่านั้นคืออะไร

4. ผู้เรียนทดสอบสมมติฐาน หากผลปรากฏว่าถูกก็คงสมมติฐานไว้ ถ้าผิดก็จะกลับไปสังเกตและตั้งสมมติฐานใหม่จนถูกจึงสรุปเป็นมโนทัศน์

วิไลวรรณ ตรีศรี ชะนะมา (2537: 49) ได้กล่าวว่า หากต้องการให้นักเรียนมีมโนทัศน์ครูต้องสอนให้นักเรียนได้เกิดการฝึกทักษะต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1. รู้จักสังเกต พิจารณา
2. รู้จักเปรียบเทียบความต่าง และความคล้าย
3. รู้จักคัดเลือกเฉพาะสิ่งที่สำคัญ และประโยชน์
4. รู้จักจัด รวบรวมสิ่งที่คัดเลือกได้เป็นประเภท หมวดหมู่
5. ความสามารถในการสร้างความหมายเพื่อให้เกิดความเข้าใจ และประโยชน์ที่จะนำไปใช้

อัมพร ม้าคะนอง (2545: 15 - 16) ได้กล่าวถึงการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยแนวคิดทฤษฎีการเรียนคณิตศาสตร์ของดีนส์ (Dienes's Theory of Mathematics Leaming) ซึ่งมีแนวคิดที่สำคัญของทฤษฎีดังนี้

1. ความเข้าใจที่แท้จริงในมโนทัศน์ใหม่นั้น เกิดขึ้นเป็นลำดับขั้น 3 ขั้น คือ ขั้นแรกเป็นขั้นพื้นฐานที่ผู้เรียนประสบกับมโนทัศน์ในรูปแบบที่เป็นธรรมชาติที่ไม่มีโครงสร้างใด ๆ เช่นการที่เด็กเรียนรู้จากของเล่นชิ้นใหม่โดยการเล่นนั้น ขั้นที่สอง เป็นขั้นที่ผู้เรียนได้ทำกิจกรรมที่มีโครงสร้างมากขึ้น ซึ่งเป็นโครงสร้างที่คล้ายคลึง (Isomorphic) กับโครงสร้างของมโนทัศน์ที่ผู้เรียนได้เรียน ซึ่งเป็นขั้นสุดท้าย เป็นขั้นที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ เข้าใจ และมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยอาจจะเห็นถึงการใช้งานได้จริงของมโนทัศน์เหล่านั้น ดีนส์เรียกกระบวนการที่เกิดตามลำดับขั้นทั้งสามว่า วัฏจักรการเรียนรู้ (Leaming cycle) ซึ่งเป็นสิ่งที่เด็กจะต้องประสบในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

2. การเรียนรู้มโนทัศน์จะมีประสิทธิภาพเมื่อผู้เรียนมีโอกาสพัฒนามโนทัศน์เดียวกันในหลากหลายรูปแบบผ่านบริบททางกายภาพ หรือสิ่งที่ผู้เรียนสัมผัสหรือสังเกตได้ นั้นคือ การจัดสิ่งที่เป็นรูปธรรมที่หลากหลายให้ผู้เรียนเพื่อให้เข้าใจโครงสร้างทางมโนทัศน์เดียวกัน จะช่วยในการได้มาซึ่งมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical abstraction) และจะทำให้ผู้เรียนสามารถนำมโนทัศน์นั้นไปใช้ด้วยความเข้าใจ

3. การนำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไปใช้จะมีประสิทธิภาพมากขึ้นถ้าตัวแปรที่ไม่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้นเปลี่ยนไปอย่างเป็นระบบ ในขณะที่คงไว้ซึ่งตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์นั้น ๆ เช่น การสอนมโนทัศน์ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ตัวแปรที่ควรเปลี่ยนไปคือ ขนาดของมุม ความยาวของด้าน แต่สิ่งที่ควรคงไว้คือลักษณะของสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ต้องมีด้านสี่ด้าน และด้านตรงข้ามขนานกัน การเปลี่ยนตัวแปรอย่างไม่เป็นระบบ อาจทำให้ผู้เรียนสับสนและไม่แน่ใจว่าจะใช้มโนทัศน์ที่มีอยู่อย่างไร จึงอาจทำให้ประสิทธิภาพในการใช้มโนทัศน์ลดลง

4. ผู้เรียนควรได้พัฒนามโนทัศน์จากประสบการณ์ในการสร้างความรู้เพื่อก่อให้เกิดความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและมั่นคง และจากพื้นฐานที่มั่นคงเหล่านั้น จะนำไปสู่การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ต่อไป ดีนส์ (Dienes and Golding,1971) ให้ความเห็นว่า การสร้างความรู้ควรมาก่อนการวิเคราะห์เสมอ เพราะเป็นไปไม่ได้ที่มนุษย์จะวิเคราะห์ในสิ่งที่ตนยังไม่รู้ กฎข้อนี้เสนอแนะให้ผู้สอนจัดสิ่งแวดล้อมการเรียนรู้ที่เป็นรูปธรรม เพื่อให้ผู้เรียนสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์จากสิ่งที่เป็นรูปธรรมนั้น และสามารถวิเคราะห์สิ่งที่สร้างนั้นต่อไปได้ อันจะเป็นพื้นฐานที่มั่นคงสำหรับการใช้งานอื่น ๆ

จากแนวคิดเกี่ยวกับการสอนเพื่อให้เกิดการพัฒนามโนทัศน์ที่นักการศึกษาได้เสนอไว้ดังกล่าวข้างต้นแสดงให้เห็นว่าการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นอาจทำได้หลายวิธี ซึ่งจะมีประสิทธิผลมากน้อยเพียงใดนั้น ขึ้นอยู่กับหลายปัจจัย เช่น วิธีการสอน การจัดสภาพแวดล้อมทางการเรียน การจัดหาสื่อการเรียนการสอน การออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสม นอกจากนี้ครูต้องสอนให้นักเรียนได้เกิดการฝึกทักษะต่าง ๆ เช่น การสังเกต การเปรียบเทียบความต่าง ความคล้าย และที่สำคัญควรมีการประเมินผลหลังจากผู้เรียนได้เรียนรู้ไปแล้ว เพื่อจะทำให้การสอนมโนทัศน์มีประสิทธิภาพ

2.7 การวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

หลังจากการจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์แล้ว หากต้องการทราบว่านักเรียนเรียนรู้มโนทัศน์มากน้อยเพียงใดนั้นจำเป็นต้องมีการวัดมโนทัศน์ ซึ่งจะวัดอย่างไรนั้นได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงการวัดมโนทัศน์ไว้ดังต่อไปนี้

I23411698

Wilson (1971: 645 - 670) ได้กล่าวถึงการวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า การวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ถือเป็นการวัดพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยในระดับความเข้าใจ โดยที่ความรู้ในเชิงมโนทัศน์นั้น หมายถึง ความสามารถในการสรุปความหมายของสิ่งที่ได้รับจากการเรียนการสอนตามความเข้าใจของตนเอง รู้จักนำข้อเท็จจริงของเนื้อหาที่ได้เรียนแล้วมาสัมพันธ์กัน

โสภณ บำรุงสงฆ์ และสมหวัง ไตรต้นวงศ์ (2520: 222) ได้กล่าวถึงการวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นการวัดความคิดในเชิงนามธรรม คือ เป็นการวัดความเข้าใจเกี่ยวกับกฎเกณฑ์ขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์ เพื่อจะได้ทราบว่าเด็กมีความเข้าใจและมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพียงใด ดังนั้นข้อสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจึงมีข้อคำถามที่ถามเกี่ยวกับข้อเท็จจริง หรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ และไม่ต้องการคำตอบที่เป็นผลลัพธ์ของปัญหา

จากแนวคิดเกี่ยวกับการวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังกล่าวข้างต้น สรุปได้ว่า การวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นเป็นการวัดพฤติกรรมด้านพุทธพิสัยในระดับความเข้าใจ ดังนั้นจึงเป็นการวัดความเข้าใจข้อเท็จจริง กฎเกณฑ์ และขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์ โดยลักษณะคำถามต้องมิใช่การให้หาผลลัพธ์ แต่เป็นการถามถึงข้อเท็จจริง กฎเกณฑ์ และขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์

3. การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนรู้ด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งการจัดการเรียนรู้ให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญ การให้เหตุผลเป็นการฝึกผู้เรียนให้รู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผล ดังนั้นการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์จึงเกิดจากการให้เหตุผลของผู้เรียนนั้นเอง

3.1 ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์กับการให้เหตุผลนั้นมีความสัมพันธ์กัน สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 56) ได้กำหนดให้ การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นมาตรฐานหนึ่งในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ และกล่าวว่า การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจะเป็นแนวทางในการพัฒนาให้เกิดการแสดงออกถึงความเข้าใจอันลึกซึ้งเกี่ยวกับปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้ ซึ่งกำหนดมาตรฐานของการให้เหตุผลและการพิสูจน์สำหรับนักเรียนในระดับอนุบาลถึงเกรด 12 ดังนี้

1. ตระหนักถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ในคณิตศาสตร์
2. สร้างและตรวจสอบข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้
3. พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

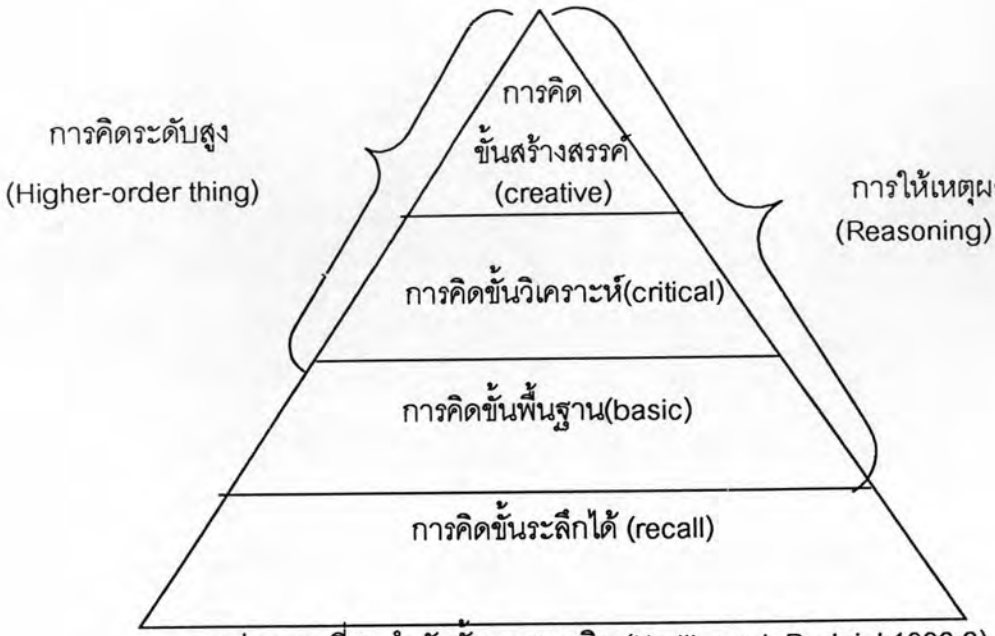
การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มีคำนิยามเช่นเดียวกันกับ การใช้เหตุผล การคิดทางคณิตศาสตร์ และการคิดอย่างมีเหตุผล ซึ่งได้มีนักการศึกษาได้ให้ความหมายของการให้เหตุผล การใช้เหตุผล การคิดและการคิดอย่างมีเหตุผลทางคณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

O'Daffer (1990: 378) ได้ให้ทัศนะเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ทำนองเดียวกันกับ ครูลิคและรุดนิค คือมองว่าการให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์เช่นกัน และเป็นการคิดที่เกี่ยวกับการสร้างหลักการ การสรุปแนวคิดที่สมเหตุสมผล และการหาความสัมพันธ์ของแนวคิด

Greenwood (1993: 144) ได้กล่าวถึงการคิดทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้ และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงผลลัพธ์หรือคำตอบ กรีนวูดยังกล่าวย้ำว่าถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหานั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

Krulik and Rudnick (1993: 3 – 5) ได้กล่าวว่าการคิด หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนด โดยนักเรียนต้องสร้างข้อคาดการณ์หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ในสถานการณ์ปัญหา แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น ซึ่งข้อสรุปก็คือแนวคิดหรือความรู้ใหม่ที่ได้รับ

Krulik and Rudnick ได้แบ่งการคิดออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ การคิดขั้นระลึกได้ (recall) การคิดขั้นพื้นฐาน (basic) การคิดขั้นวิเคราะห์ (critical) และการคิดขั้นสร้างสรรค์ (creative) ส่วนการให้เหตุผล Krulik and Rudnick (1993: 3) มองว่าเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่เหนือไปจากการคิดขั้นระลึกได้ ดังแผนภาพต่อไปนี้



ภาพประกอบที่ 2 ลำดับขั้นของการคิด (Krulik and Rudnick1993:3)

ที่มา: Krulik and Rudnick.1993.An Introduction to Higher – Order Thinking Skills and Problem Solving. Reasoning and Problem Solving. p. 3

Krulik and Rudnick อธิบายว่า การคิดเป็นกระบวนการที่ซับซ้อน แต่ละขั้นตอนที่แสดงในภาพมิได้แยกขาดจากกันเลยทีเดียว แต่ละขั้นตอนอาจจะคาบเกี่ยวกันบ้าง จากแผนภาพดังกล่าวจะเห็นว่าการให้เหตุผลจะรวมถึงการคิดขั้นพื้นฐาน การคิดขั้นวิเคราะห์ และการคิดขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิเคราะห์และการคิดขั้นสร้างสรรค์ ครูลิคและรุดนิค เรียกว่าเป็นการคิดระดับสูง (Higher - oder thinking)

O'Daffer and Thornquist (1993: 43) ได้ให้ความหมายเกี่ยวกับความคิดทางคณิตศาสตร์ ว่าหมายถึง การใช้ทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่อย่างหลากหลายในการทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น

ชัชชัย คุ้มทวีพร (2534: 121) ได้ให้ความหมายของการใช้เหตุผลว่า หมายถึง ลักษณะหนึ่งของการคิดที่พยายามอธิบายเหตุการณ์บางอย่าง ไม่ว่าจะเป็นการใช้หลักฐานการสังเกตหรือข้อความต่าง ๆ ที่ได้รับการยอมรับ

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 37) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ว่า หมายถึง การแสดงแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างหลักการ หาความสัมพันธ์ของแนวคิด และการสรุปที่สมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้น ๆ ซึ่งประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุป
3. ความสามารถในการแสดงข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปของแนวคิดอย่างสมเหตุสมผล

ทิศนา แขมมณี (2542: 144) ได้ให้ความหมายของการคิดอย่างมีเหตุผลว่า เป็นการคิดที่มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเข้าใจความคิดที่สามารถอธิบายได้ด้วยหลักเหตุผล โดยสามารถจำแนกข้อมูลที่เป็นข้อเท็จจริง และพิจารณาเรื่องที่คิดบนพื้นฐานของข้อเท็จจริงโดยใช้หลักเหตุผลแบบนิรนัยและอุปนัย ซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อย ๆ ดังนี้

1. สามารถแยกข้อเท็จจริงและความคิดเห็นออกจากกันได้
2. สามารถใช้เหตุผลแบบนิรนัยหรืออุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้
3. สามารถใช้เหตุผลทั้งแบบนิรนัยและอุปนัย พิจารณาข้อเท็จจริงได้

ศิรินธร วิทยะสิรินันท์ (2542: 131) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผลว่า หมายถึง ความสามารถย่อย ๆ ในการคิดลักษณะต่าง ๆซึ่งประกอบด้วยทักษะย่อย ๆ ดังนี้

1. การพิจารณาและระบุให้ชัดเจน ผลที่เกิดขึ้นคืออะไร
2. การพิจารณาเหตุการณ์หรือสิ่งที่เกิดขึ้นก่อนผลนั้นและระบุว่ามีเหตุการณ์ใดมีความสัมพันธ์กับผล โดยเกิดก่อนเสมอ
3. การพิจารณาแต่ละเหตุการณ์ หรือสิ่งที่เกิดขึ้นก่อนและมีความสัมพันธ์อย่างสม่ำเสมอนั้น และตัดสินว่า เป็นผลมาจากสิ่งใดสิ่งหนึ่งรวมกัน หรือเป็นสิ่งที่ทำให้เกิดผลโดยการสรุปอ้างอิงจากความรู้หรือประสบการณ์เดิมประกอบ
4. การเลือกระบุเหตุการณ์หรือสิ่งที่พิจารณาและตัดสินแล้วว่าเป็นสิ่งที่ทำให้เกิดผลที่กำหนดไว้

กรมวิชาการ (2544: 24) ได้ให้ความหมายของความสามารถในการให้เหตุผล โดยแบ่งตามระดับช่วงชั้น ดังนี้

ระดับ ป.1 - ป. 3 ความสามารถของการให้เหตุผลหมายถึง การให้เหตุผลประกอบด้วยการตัดสินใจและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ระดับ ป.4 - ป. 6 ความสามารถของการให้เหตุผลหมายถึง การให้เหตุผลและสรุปผลได้อย่างเหมาะสม สามารถแสดงเหตุผล

ระดับ ม.1 - ม. 3 ความสามารถของการให้เหตุผลหมายถึง การให้เหตุผลโดยการอ้างอิงความรู้ข้อมูลหรือข้อเท็จจริง หรือสร้างแผนภาพ

ระดับ ม.4 - ม. 6 ความสามารถของการให้เหตุผลหมายถึง การนำวิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยมาช่วยในการค้นหาความหรือข้อสรุป และช่วยในการตัดสินใจบางอย่างได้

กฤษณะ โสขุมา (2546: 5) ได้ให้ความหมายของการให้เหตุผล หมายถึง การแสดงแนวคิดเพื่อให้ได้มาซึ่งข้อคาดการณ์ ข้อสรุป หรือคำตอบที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ประกอบด้วย การระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล การหาข้อคาดการณ์ข้อสรุปหรือคำตอบ และการยืนยัน ข้อคาดการณ์ ข้อสรุปหรือคำตอบ

จากคำกล่าวของ นักการศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสรุปได้ว่า ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงแนวคิดหรือการอ้างอิงที่เกิดจากการนำความรู้ข้อเท็จจริง หรือการสร้างแผนภาพอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูลหรือแนวคิด เพื่อสร้างหลักการ หาข้อสรุปหรือคำตอบ และสรุปได้อย่างสมเหตุสมผลตามแนวคิดนั้นๆ ซึ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย

1. ความสามารถในการวิเคราะห์ และระบุถึงความสัมพันธ์ของข้อมูล
2. ความสามารถในการหาข้อสรุปหรือข้อคาดการณ์
3. ความสามารถในการยืนยันหรือคัดค้าน ข้อสรุปหรือข้อความคาดการณ์อย่างสมเหตุสมผล

3.2 ประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

สำหรับการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักการศึกษาได้แบ่งประเภทของการให้เหตุผลไว้ดังนี้

Heller et al (1989: 209 - 211) ได้แบ่งประเภทการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็น 2 ประเภท

1. การให้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบบอกทิศทาง (Qualitative direction) เป็นลักษณะคำถามเชิงคุณภาพ เป็นปัญหาที่ใช้เหตุผลเชิงคุณภาพแบบนี้ เรียกว่า คำถามเชิงทิศทาง

(Direction question) โดยคำถามจะเกี่ยวกับค่าของอัตราส่วนว่ามีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร อาจจะเพิ่ม ลดลง หรือเท่าเดิม เมื่อกำหนดให้เศษและส่วนมีค่าเพิ่มขึ้น ลดลง หรือเท่าเดิม โดยแบ่งลักษณะค่าของอัตราส่วนที่เปลี่ยนไปได้ทั้งหมด 9 ลักษณะ มีดังนี้

1. เศษเท่าเดิมและส่วนเท่าเดิม ค่าของเศษส่วนเท่าเดิม
2. เศษเท่าเดิมและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของเศษส่วนลดลง
3. เศษเท่าเดิมและส่วนลดลง ค่าของเศษส่วนเพิ่มขึ้น
4. เศษเพิ่มและส่วนเท่าเดิม ค่าของเศษส่วนเพิ่มขึ้น
5. เศษเพิ่มและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของเศษส่วนไม่สามารถบอกการเปลี่ยนแปลงได้
6. เศษเพิ่มขึ้นและส่วนลดลง ค่าของเศษส่วนเพิ่มขึ้น
7. เศษลดลงและส่วนเท่าเดิม ค่าของเศษส่วนลดลง
8. เศษลดลงและส่วนเพิ่มขึ้น ค่าของเศษส่วนลดลง
9. เศษลดลงและส่วนลดลง ค่าของเศษส่วนไม่สามารถบอกการเปลี่ยนแปลงได้

2. การให้เหตุผลเชิงตัวเลข (Numerical direction reason problems) คือ เป็นลักษณะคำถามเชิงตัวเลข โดยคำถามจะถามหาค่าตัวแปร การเปรียบเทียบเชิงตัวเลข เช่น เศษส่วน $A=\frac{8}{24}$ เท่ากับเศษส่วน $B=\frac{X}{3}$ แล้วให้หาค่า X สามารถทำได้โดยให้ค่า X ซึ่งในการหาค่า X สามารถทำได้โดยให้ $\frac{8}{24}=\frac{X}{3}$ จะได้ $X=1$

Eysenck et al (1972: 214) ได้แบ่งประเภทการคิดหาเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ออกเป็น 2 วิธี ดังนี้

1. การคิดหาเหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นการคิดหาเหตุผลจากการประโยคอ้าง (Premise) ไปยังข้อสรุป (Conclusion) โดยข้อสรุปนั้นมีความสมเหตุสมผล ถ้าการสรุปนั้นไม่สมกับเหตุผลที่กำหนดเรียกว่าไม่สมเหตุสมผล

2. การคิดหาเหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นการคิดที่เริ่มจากข้อเท็จจริงย่อย ๆ แล้วพยายามหากฎหรือหลักทั่วไปเพื่อรวมส่วนย่อยเข้าด้วยกันเป็นส่วนรวม

O'Daffer (1990: 378) กล่าวว่า การให้เหตุผลที่มีความสำคัญต่อความสำเร็จทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนอยู่ 2 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อมูลที่เกี่ยวกับสมาชิกบางสมาชิกในขอบเขตหนึ่ง ๆเพื่อนำไปสู่กรณีทั่วไป หรือนำไปสู่สมาชิกทุกตัวในขอบเขตนั้น

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นกระบวนการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการใช้ข้อความหรือแบบรูปที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลอยู่แล้ว เพื่อนำไปสู่ข้อสรุป

Baroody (1993: 2- 59) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับคณิตศาสตร์ และการดำเนินชีวิตประจำวันของมนุษย์และแบ่งการให้เหตุผลเป็น 3 ประเภท คือการให้เหตุผลแบบใช้การรู้สึกนึกคิด (Intuitive reasoning) ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลที่เกิดจากการหยั่งรู้ (Insight) หรือเกิดจากลางสังหรณ์ ไม่ได้มีข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดในการตัดสินใจ หรือตัดสินใจจากสิ่งที่เห็นได้ชัดเจน หรือจากความรู้สึกภายใน ส่วนอีก 2 ประเภท คือ การให้เหตุผลแบบอุปนัยและการให้เหตุผลแบบนิรนัยเช่นเดียวกับของ โอดาฟเฟอร์ เมื่อพิจารณาถึงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการให้เหตุผลทั้ง 3 ประเภท บารูดี้ กล่าวว่า ในกระบวนการสืบค้นทางคณิตสาสตร์มักเริ่มต้นด้วยการสรุปจากการให้เหตุผลแบบใช้การรู้สึกนึกคิดหรือแบบอุปนัยที่เรียกว่า การสร้างข้อความคาดการณ์ (Conjecture) แล้วตรวจสอบข้อความคาดการณ์โดยการพิสูจน์ ซึ่งก็คือการให้เหตุผลแบบนินัยนั่นเอง

สมัย เหล่าวานิชย์ (2525: 4) แบ่งการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ได้ 3 ลักษณะ คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยมีเหตุผลย่อย หลายๆ เหตุ เหตุย่อยแต่ละเหตุจะเป็นอิสระต่อกัน และเหตุย่อยทั้งหลายนี้จะรวมเป็นสรุปที่เป็นเหตุการณ์ทั่ว ๆ ไป ในวงกว้าง

2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning) เป็นวิธีการให้เหตุผลโดยมีเหตุใหญ่ (Major premise) และตามด้วยเหตุย่อย (Minor premise) ลดหลั่นกันตามลำดับความสัมพันธ์ระหว่างเหตุใหญ่และเหตุย่อยจะทำให้เกิดผลสรุป

3. การให้เหตุผลแบบใช้การรู้สึกนึกคิด (Intuitive reasoning) เป็นการให้เหตุผลซึ่งเกิดจากความคิดที่เกิดขึ้นมาในขณะใดขณะหนึ่ง ความคิดที่เกิดขึ้นในลักษณะเช่นนี้ ของแต่ละบุคคลจะแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความรู้พื้นฐาน ประสบการณ์ และจิตใต้สำนึก ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์หลาย ๆทฤษฎีเกิดจากการให้เหตุผลที่เกิดจากความคิดแบบนี้มาก่อน หลังจากนั้นจึงพยายามพิสูจน์ให้เป็นจริง โดยกำหนด อนิยาม นิยาม และสัจพจน์และใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย

จากแนวคิดเกี่ยวกับประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักการศึกษา ดังที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยสรุปได้ว่า การแบ่งประเภทของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ สามารถแบ่งได้หลายลักษณะ ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์และลักษณะของการนำไปใช้และเกณฑ์ที่ใช้ในการจำแนก

3.3 ลักษณะของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

การให้เหตุผลเป็นธรรมชาติของคณิตศาสตร์ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล

ดวงเดือน อ่อนน่วม (2547: 23 - 24) กล่าวไว้ว่า เด็กสามารถให้เหตุผลได้เหมาะสมตามวัย ความรู้และประสบการณ์ การให้เหตุผลของเด็กเล็กมักเป็นไปตามสิ่งที่ตาเห็นหรือเป็นไปตามการรับรู้ต่อมาจึงพัฒนาให้เป็นเหตุผลที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเรื่อย ๆ การให้เหตุผลของเด็กในระดับชั้นประถมศึกษา มักเป็นเรื่องเกี่ยวกับแบบรูป การจำแนก ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการดำเนินการ การใช้สมบัติของจำนวน เป็นต้น เด็กควรต้องเรียนรู้การให้เหตุผลเพื่อนำไปสู่การสรุปเป็นนัยทั่วไปของกรณีต่าง ๆบางครั้งตัวอย่างหลาย ๆกรณีก็ยังไม่เพียงพอต่อการสรุปเป็นทั่วไปได้ ครูจึงต้องยกตัวอย่างที่เป็นทั้งกรณีสนับสนุนและกรณีคัดค้านเพื่อให้เด็กไม่ด่วนสรุปจนเร็วเกินไป เด็กต้องเรียนรู้การพิจารณาสิ่งต่าง ๆบนพื้นฐานของข้อมูล

อัมพร ม้าคนอง (2547: 97- 98) กล่าวไว้ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ (Mathematics reasoning) เป็นการโยงความสัมพันธ์เชิงตรรก (Logical interconnection) ในทางคณิตศาสตร์ (Raimi, 2002) การให้เหตุผลมีความสำคัญมาก เนื่องจากในกระบวนการให้เหตุผลผู้เรียนรู้ต้องใช้การคิดหลายทักษะ เช่น การวิเคราะห์ สังเคราะห์ คิดไตร่ตรอง คิดอย่างมีวิจารณญาณ เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง นอกจากนี้ข้อมูลการให้เหตุผลของผู้เรียนยังมีความสำคัญ โดยอาจทำให้ผู้สอนสามารถดำเนินการในสิ่งต่อไปนี้

1. อธิบายระดับพัฒนาการของผู้เรียนในการเรียนมโนทัศน์
2. ระบุความเข้าใจที่คลาดเคลื่อนหรืออุปสรรคต่อการเรียนรู้ของผู้เรียนพร้อมทั้งเหตุผล
3. วิเคราะห์แนวคิดใหม่ ๆ (Emerging ideas)ที่เกิดจากการให้เหตุผลของผู้เรียนเพื่อที่จะขยายความและอภิปรายร่วมกับผู้เรียนคนอื่น ๆ
4. ระบุโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematics structure) หรือประเภทของปัญหาที่จำเป็นสำหรับการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายของผู้เรียน
5. จัดหาสถานการณ์ที่เหมาะสมสำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน

6. ตรวจสอบผลของสิ่งแวดล้อมและวัฒนธรรมในห้องเรียนที่มีต่อความคิดและความเข้าใจของผู้เรียน

การฝึกให้ผู้เรียนใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ควรทำในบริบททางคณิตศาสตร์ (Mathematical contexts) เช่นในขณะเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์มากกว่าจะเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนเห็นความสำคัญหรือให้ผู้เรียนรู้การให้เหตุผลเดี่ยว ๆแยกจากสิ่งอื่น โดยอาจทำในการสอนเนื้อหา มโนทัศน์ หรือการแก้ปัญหา หากเป็นการแก้ปัญหาผู้สอนไม่ควรคำนึงถึงคำตอบสุดท้ายที่ถูกต้องเท่านั้น แต่ควรให้ความสำคัญกับเหตุผลว่าทำไมผู้เรียนจึงได้คำตอบเหล่านั้น และคำตอบเหล่านั้นน่าจะถูกต้องหรือผิดเพราะเหตุใด การให้ผู้เรียนอธิบาย หรือชี้แจงเหตุผลจะช่วยให้ผู้เรียนได้ทบทวนการทำงานเพื่อสะท้อนความคิดของตน และที่สำคัญคือ ผู้เรียนจะได้ข้อสรุป หรือตัดสินความถูกต้องของสิ่งต่าง ๆด้วยตนเองมากกว่าที่จะเชื่อตามที่ผู้สอนบอกหรือตามที่หนังสือเขียนไว้ (NCTM,1991) นักการศึกษาคณิตศาสตร์ หลายท่านได้ให้แนวคิดไว้ว่า การที่ผู้เรียนได้คำตอบถูกต้อง แต่ใช้เหตุผลผิด เป็นอันตรายอย่างยิ่งต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากเมื่อผู้เรียนได้คำตอบถูกต้องแล้วผู้สอนอาจไม่ได้ให้โอกาสให้ผู้เรียนแสดงเหตุผลซึ่งทำให้ทั้งผู้สอนและผู้เรียนไม่ทราบว่าที่ผิดนั้นเพราะเหตุใด ดังนั้น สิ่งที่ดีกว่าการให้คำตอบถูกแต่เหตุผลผิด คือ การได้คำตอบที่ผิดและสามารถค้นพบอย่างเป็นเหตุเป็นผลว่าอะไรผิดและผิดเพราะเหตุใด

จากแนวคิดเกี่ยวกับลักษณะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้ การให้เหตุผลจะเป็นไปตามวัย ซึ่งการให้เหตุผลของเด็กเล็กจะเป็นไปตามสิ่งที่ตาเห็นและจะพัฒนาเป็นการให้เหตุผลที่เป็นนามธรรม ซึ่งกระบวนการให้เหตุผลต้องใช้การคิดหลายลักษณะ เช่น การวิเคราะห์ สังเคราะห์ คิดไตร่ตรอง คิดอย่างมีวิจารณญาณ เพื่อให้ได้ข้อสรุปที่ถูกต้อง และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรทำในบริบททางคณิตศาสตร์

3.4 แนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

Lappan and Schram (1989: 18-19) ได้กล่าวไว้ว่า ความสามารถในการคิดและการให้เหตุผล เป็นทักษะที่ต้องใช้การฝึก และฝึกจากประสบการที่หลากหลาย และควรได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่อง จากบรรยากาศของชั้นเรียนที่สนับสนุนให้มีการอธิบายแลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผลและแก้ปัญหาร่วมกัน ดังนั้น ในการพัฒนาทักษะในการคิดและการให้เหตุผล ควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและแสดงพฤติกรรมในการสืบค้น คาดการณ์ ค้นหา วิธีการพิสูจน์ สังเกตแบบรูป ชี้แจงเหตุผลของแนวคิดโดยการอธิบายแบบรูป แสดงด้วยภาพหรือแบบจำลองและ

ตอบคำถามต่าง ๆการสร้างข้อความคาดการณ์ การกำหนดแบบจำลอง และการอธิบาย ซึ่งเป็นลักษณะของการให้เหตุผลเกี่ยวกับสถานการณ์

Guiford and Hoepfner (1971: 28 - 32) ได้กล่าวไว้ว่าการพัฒนาบุคคลให้มีความสามารถในการให้เหตุผลนั้น ต้องเริ่มจากการส่งเสริมให้บุคคลได้คิดอย่างมีเหตุผล ความสามารถในการให้เหตุผลเป็นสิ่งจำเป็นที่โรงเรียนควรจัดทำ และเป็นสิ่งที่สามารถฝึกได้โดยสอนควบคู่กับวิชาปกติ หรือสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เหมาะสม

Rowan and Morrow (1993: 16-18) ได้กล่าวไว้ว่าบรรยากาศในชั้นเรียนเป็นสิ่งสำคัญมาก ครูต้องจัดบรรยากาศที่แสดงให้นักเรียนเห็นว่า การให้เหตุผลเป็นสิ่งสำคัญกว่าการได้เพียงคำตอบที่ถูกต้อง ซึ่งบรรยากาศในชั้นเรียนต้องไม่ทำให้นักเรียนรู้สึกหวาดกลัว เป็นบรรยากาศที่สนับสนุนและส่งเสริมให้นักเรียนได้พูดอธิบายและแสดงเหตุผลของแนวคิด ได้กระทำและสรุป พร้อมทั้งแสดงการยืนยันข้อสรุปของแนวคิดนั้น ๆ

กรมวิชาการ (2545: 198 - 199) ที่กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลว่า การฝึกให้ผู้เรียนรู้จักคิดและให้เหตุผลอย่างสมเหตุสมผลนั้นสามารถสอดแทรกได้ในการเรียนรู้ทุกเนื้อหาวิชาของคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆด้วย นอกจากนี้ยังได้เสนอองค์ประกอบหลักที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถคิดอย่างมีเหตุผลและรู้จักการให้เหตุผลดังนี้

1. ควรให้ผู้เรียนได้พบกับโจทย์หรือปัญหาที่ผู้เรียนสนใจ เป็นปัญหาที่ไม่ยากเกินความสามารถของผู้เรียนที่จะคิดและให้เหตุผล

2. ให้ผู้เรียนมีโอกาสและเป็นอิสระที่จะแสดงออกถึงความคิดเห็นในการให้เหตุผลของตัวเอง

3. ผู้สอนช่วยสรุปและชี้แจงให้ผู้เรียนเข้าใจว่า เหตุผลของผู้เรียนถูกต้องตามหลักเกณฑ์หรือไม่ขาดตกบกพร่องอย่างไร

การเริ่มต้นที่จะส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนรู้ และเกิดทักษะในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรจัดสถานการณ์หรือปัญหาที่น่าสนใจให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติ ผู้สอนสังเกตพฤติกรรมของผู้เรียนและคอยช่วยเหลือโดยกระตุ้นหรือชี้แนะอย่างกว้าง ๆ โดยใช้คำถามกระตุ้นด้วยคำว่า "ทำไม" "อย่างไร" "เพราะเหตุใด" เป็น พร้อมทั้งให้ข้อคิดเพิ่มเติมอีก เช่น "ถ้า.....แล้ว ผู้เรียนคิดว่า...จะเป็นอย่างไร" ผู้เรียนที่ให้เหตุผลได้ไม่สมบูรณ์ ผู้สอนจะต้องไม่ตัดสินด้วยคำว่า ไม่ถูกต้อง แต่อาจใช้คำพูดเสริมแรงและให้กำลังใจว่าคำตอบที่ผู้เรียนตอบมามี

บางอย่างถูกต้อง ผู้เรียนคนใดจะให้คำอธิบายหรือให้เหตุผลเพิ่มเติมของเพื่อนได้อีกบ้าง เพื่อให้ผู้เรียนมีการเรียนรู้ร่วมกันมากยิ่งขึ้น ในการจัดการเรียนรู้ผู้สอนควรเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้คิดอย่างหลากหลาย โจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดควรเป็นปัญหาปลายเปิด ที่ผู้เรียนสามารถแสดงความคิดเห็นหรือให้เหตุผลที่แตกต่างกันได้

สมเดช บุญประจักษ์ (2540: 39; อ้างอิงมาจาก Brandt. 1984) ได้กล่าวไว้ว่า การคิดกับการให้เหตุผลมีส่วนสัมพันธ์กันอย่างใกล้ชิด และเป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้และการแก้ปัญหา ด้วยเหตุนี้ นักการศึกษาจึงให้ความสำคัญเกี่ยวกับการสอนเพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการคิดอย่างมีเหตุผลมากขึ้น โดยได้พยายามศึกษาทดลอง เพื่อหาว่าทักษะการคิดอะไรที่จำเป็น และเป็นพื้นฐานของการคิดอย่างมีเหตุผล สอนอย่างไรจึงจะทำให้เกิดทักษะที่ต้องการเหล่านั้น ได้มีการกล่าวถึงแนวการสอนไว้ 3 แนวทาง คือ แนวทางการสอนเพื่อให้คิด (Teaching for thinking) แนวทางการสอนการคิด (Teaching of thinking) และแนวทางการสอนที่เกี่ยวกับการคิด (Teaching about thinking)

1. การสอนเพื่อให้คิด การสอนตามแนวทางนี้เน้นในด้านการสอนเนื้อหาวิชา โดยมีการปรับเปลี่ยนกระบวนการสอนเพื่อเพิ่มความสามารถในด้านการคิดของผู้เรียน

2. การสอนการคิด การสอนตามแนวทางนี้มีจุดเน้นเกี่ยวกับกระบวนการทางสมองที่นำมาใช้ในการคิดโดยเฉพาะ โดยเน้นไปที่ทักษะการคิดหรือเป็นแนวทางที่สอนทักษะการคิดโดยตรง แนวทางในการสอนนั้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันหลายแนวทาง ตามความเชื่อพื้นฐานของผู้ที่จัดสร้างแนวทางการสอน

3. การสอนเกี่ยวกับการคิด การสอนตามแนวทางนี้เป็นแนวทางที่ใช้การคิดเป็นเนื้อหาสาระของการสอนโดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ถึงสิ่งที่เป็นความคิดของตัวเอง โดยรู้ว่าตนกำลังคิดอะไรต้องการรู้อะไร และในขณะที่กำลังคิดอยู่นั้นตนเองรู้อะไรและไม่รู้อะไร ซึ่งสิ่งดังกล่าวนี้จะช่วยให้ผู้เรียนได้เข้าใจถึงกระบวนการคิดของตนเองอันก่อให้เกิดทักษะที่เรียกว่า การสังเคราะห์ความคิดของตนเอง แนวทางการสอนเกี่ยวกับการคิดนี้เริ่มเป็นที่สนใจของนักการศึกษาทั่วไปเพิ่มขึ้น โดยเชื่อว่าเป็นแนวทางที่ทำให้ผู้เรียนสามารถควบคุมและตรวจสอบการคิดของตนเองได้ในขณะที่ทำการคิด ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถค้นหาข้อบกพร่องของตนเองได้ ทั้งนี้เพื่อหาแนวทางแก้ไขได้ตรงจุด

จากแนวทางการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้แนวทางในการพัฒนาทักษะการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ควรเริ่มจากการส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิดอย่างมีเหตุผล โดยการสอนการให้เหตุผลควรสอดแทรกอยู่ในเนื้อหา และควรเป็นบรรยากาศที่สนับสนุนให้มีการ

อธิบาย แลกเปลี่ยนความคิด ชี้แจงเหตุผลและแก้ปัญหาร่วมกัน และควรฝึกจากประสบการณ์ที่หลากหลาย และควรได้รับการฝึกอย่างต่อเนื่อง การคิดอย่างมีเหตุผลสามารถพัฒนาได้โดยใช้กิจกรรมที่เป็นการผสมผสานการฝึกการคิดและให้เหตุผลควบคู่ไปกับการสอนเนื้อหาวิชาปกติ

4. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในต่างประเทศมีการวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการโดยตรง และยังมีงานวิจัยที่มีลักษณะกิจกรรมที่สอดคล้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ ดังนี้

4.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Fuson and Briars (1990) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้ MABs ในการบวกและการลบของจำนวน 4 หลัก กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 โดยมีแนวดำเนินการในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่มีการเชื่อมโยงระหว่างการกระทำกับบล้อคและเขียนเป็นสัญลักษณ์ โดยที่การดำเนินการกับบล้อคและการเขียนดำเนินการกับสัญลักษณ์ได้กระทำไปพร้อมๆ กัน ผลปรากฏว่านักเรียนมีทักษะในการคำนวณอยู่ในระดับดีขึ้น นอกจากนี้ Fuson and Briars ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการเกี่ยวกับเลขคณิต ที่มีต่อความเข้าใจโดยเริ่มจากการแสดงให้เห็นด้วยภาพโดยศึกษาเกี่ยวกับกฎพื้นฐานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ต่อมาได้พัฒนาเป็นการจับคู่ระหว่างการสอนที่ใช้วัตถุรูปธรรม ในลักษณะของบล้อค และการเขียนเป็นสัญลักษณ์ โดยมีการสอนอย่างเป็นลำดับขั้นตอน กลุ่มตัวอย่าง คือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 จำนวน 80 คน นำเสนอเกี่ยวกับโครงสร้างของตัวเลข การบวกและการลบ หลังจากสอนเสร็จแล้วทำการทดสอบหลังการสอน ผลปรากฏว่า การเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มไม่แตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

VanLehn and Brown (1980)ได้ศึกษาเกี่ยวกับบล้อคเลขคณิตหลายหลัก (Mulitibased arithmetic blocks) สำหรับการดำเนินการของการบวก โดยที่กลุ่มแรกไม่ใช้สิ่งที่เป็นวัตถุรูปธรรมในการดำเนินการบวก แต่บวกตามค่าที่แสดงตามโจทย์ ผลออกมาไม่ดีเท่าที่ควร กลุ่มที่ 2 ใช้ กองไม้มาช่วยในการหาผลบวก ผลออกมาเป็นที่น่าพอใจ ต่อมาจึงพัฒนามา ใช้

สำนักงานวิทยทรัพยากร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดีนส์บล้อค (Dienes block) ช่วยในการบวกโดยแบ่งเป็น 2 ขั้น ขั้นแรกใช้ บวกตาม ขั้นตอนของดีนส์บล้อค (Dienes block) ผลของการบวกยังช้า จึงดำเนินตามขั้นตอนที่ 2 คือ ให้มีการจดบันทึกรายละเอียดของการบวก โดยเสนออยู่ในรูปของ ผังงาน (Flowchart) และ แผนผังตาข่าย (Planning nets) ซึ่ง การนำเสนออยู่ในรูป ผังงาน(Flowchart) และ แผนผังตาข่าย(Planning nets) ในการเขียนการดำเนินการเกี่ยวกับการบวก ในแต่ละขั้นตอนทำให้เกิดการต่อเนื่องของการดำเนินการ และทำให้เกิดการคิดอย่างมีเหตุผล

Ohlsson and Hall (1990) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบระหว่างขั้นตอนของการกระทำกับวัตถุรูปธรรม (Concrete material) และขั้นตอนที่เขียนเป็นสัญลักษณ์ โดยใช้ MABs กับการลบ โดยที่ Ohlsson and Hall กล่าวว่า การเปรียบเทียบระหว่างขั้นตอนของการกระทำกับวัตถุรูปธรรม (Concrete material) และขั้นตอนที่เขียนเป็นสัญลักษณ์ จะส่งผลให้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเพิ่มขึ้น ซึ่งความรู้ทางคณิตศาสตร์แบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ คือ ความรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ และความรู้เกี่ยวกับขั้นตอนและวิธีการ นอกจากนี้ Ohlsson and Hall ศึกษาการเปรียบเทียบระหว่างขั้นตอนของการกระทำกับสี่เหลี่ยมมุมฉากในการบวกเศษส่วน และขั้นตอนที่ดำเนินการกับสัญลักษณ์ในการบวกเศษส่วน เพื่อให้เกิดมโนทัศน์ ในการบวกเศษส่วน ซึ่งจากการศึกษาเกี่ยวกับการเปรียบเทียบระหว่างการกระทำกับวัตถุรูปธรรมและขั้นตอนที่ดำเนินการกับสัญลักษณ์ผลปรากฏว่า การใช้วัตถุรูปธรรมทำให้นักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และทักษะทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น เนื่องจากการอธิบายจากวัตถุรูปธรรมจะง่ายกว่าการอธิบายจากการดำเนินการทางสัญลักษณ์เพียงอย่างเดียว

Drickey (2000) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบความเหมือนกันของการสอนสิ่งที่เป็นกายภาพกับสิ่งที่เสมือนจริงในการสอนเรื่องการมองเห็นและการให้เหตุผลเชิงปริภูมิของนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมต้น โดยจัดนักเรียนเป็นกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม ที่มีการจัดสิ่งแวดล้อมทางกายภาพ เปรียบเทียบกับนักเรียนกลุ่มควบคุมโดยใช้ครูอธิบายไม่ใช้การจับต้องหรือการสัมผัส สิ่งที่สนใจศึกษาคือ ผลของการจับต้องหรือการสัมผัสมีผลต่อการมองและทักษะการให้เหตุผลเกี่ยวกับระยะและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีครู 3 คน ในโรงเรียนระดับกลางเดียวกันสอนเรขาคณิต 4 – 5 สัปดาห์ให้นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 219 คน โดยใช้สิ่งที่จับต้องได้ทางกายภาพ สิ่งที่จับต้องได้เชิงปริภูมิ หรือจับต้องไม่ได้ในระหว่างสอน ครูแต่ละคนใช้แต่การปฏิบัติทั้ง 3 แบบ ไปถึงในแบบใดแบบหนึ่งหรือมากกว่านั้นในห้องเรียน ด้วยจัดให้กลุ่มทดลองเรียนใช้การทดสอบหลังเรียนกึ่งทดลอง และไม่เหมือนกับกลุ่มควบคุม ข้อสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

รวมถึงการมองและทักษะการให้เหตุผลและเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบทดสอบของครู การสังเกตในชั้นเรียน การสำรวจนักเรียน และเก็บรวบรวมข้อมูล ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มทดลองทั้ง 3 กลุ่มมีคะแนนหลังการเรียนไม่แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

Hail (2000) ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลของการใช้การนำเสนอหลาย ๆแบบที่มีต่อความรู้ของนักเรียนและมโนทัศน์พีชคณิตขั้นพื้นฐาน ซึ่งการนำเสนอหลาย ๆแบบประกอบด้วย การเขียนบนพื้นฐานประสบการณ์ ภาษาพูด การใช้สื่อจริงสัมผัสได้ กราฟ ตาราง และสัญลักษณ์ทางการเขียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่เรียนวิชาเตรียมพีชคณิตจำนวน 29 คน ซึ่งผู้ทดลองได้ใช้การนำเสนอหลาย ๆแบบ เพื่อให้นักเรียนเข้าใจตัวแปร สมการและการแก้สมการ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนใช้กราฟและสื่อจริงที่สัมผัสได้ในการได้มาซึ่งความรู้เกี่ยวกับการดำเนินการทางสัญลักษณ์ นักเรียนดังกล่าวได้ใช้กราฟและสื่อจริงที่สัมผัสได้ในการอธิบายการดำเนินทางสัญลักษณ์และจุดที่ดำเนินการผิด นอกจากนี้การใช้สื่อดังกล่าวยังช่วยให้นักเรียนแก้สมการได้

Butler et al (2003)ได้ศึกษาการเปรียบเทียบมโนทัศน์เรื่องเศษส่วนของนักเรียนนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความบกพร่องทางการเรียนโดยใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม (Concrete) สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง (Representational) และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม (Abstract) หรือที่เรียกโดยใช้อักษร CRA ตามลำดับ และใช้สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง (Representational) และสัญลักษณ์ที่เป็นนามธรรม (Abstract)) หรือที่เรียกโดยใช้อักษร RA ตามลำดับ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่มีความบกพร่องทางการเรียน อายุระหว่าง 11 - 15 ปี จำนวน 50 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ CRA จำนวน 26 คน และกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ RA จำนวน 24 คน กลุ่มทดลองทั้งสองกลุ่มได้รับการสอนเนื้อหาเรื่องเศษส่วนทั้งหมด 10 บท โดยทั้งสองกลุ่มมีการจัดการเรียนการสอนแตกต่างกันในเนื้อหาบทที่ 1 - 3 กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ CRA ใช้วัตถุจริงหรือสื่อเสมือนจริงในการเรียนการสอน ส่วนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ RA ใช้การวาดรูปภาพในการแสดงความหมาย ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองทั้งสองกลุ่มทำคะแนนหลังการทดลองสูงกว่าก่อนการทดลอง และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดย

ใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ CRA มีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อหรือสัญลักษณ์แบบ RA อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ.05

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยสามารถสรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาที่เป็นนามธรรม หรือที่มีการดำเนินเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เมื่อมีการนำวัตถุรูปธรรม (Concrete material) หรือสื่อจริง เช่น การใช้ MAB materials ในการบวกและลบของจำนวน 4 หลัก การใช้สื่อที่เป็นตัวแทนวัตถุจริง (Representational) กราฟมาช่วยในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และมีการเรียนรู้อย่างเป็นลำดับค่อยเป็นค่อยไป จะส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ดีขึ้น มีทักษะในการคำนวณดีขึ้น ตลอดจนมีมโนทัศน์ทางคณิตสาสตร์เพิ่มขึ้น ซึ่งการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้วัตถุรูปธรรมหรือสื่อจริงในเนื้อหาที่เป็นนามธรรมหรือเนื้อหาที่เกี่ยวกับการดำเนินการทางสัญลักษณ์จะสอดคล้องกับทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการ

4.2 งานวิจัยในประเทศ

สำหรับในเทศไทยยังไม่มีการวิจัยที่เกี่ยวกับทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยตรง แต่มีงานวิจัยที่มีลักษณะกิจกรรมที่สอดคล้องกับทฤษฎีการเปรียบเทียบกระบวนการเพียงบางส่วน และเป็นการนำเสนอเกี่ยวกับงานวิจัยเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

วีระเกียรติ ภู่ศิริ (2535) ได้ทำการเปรียบเทียบผลการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องรูปทรงและปริมาตรจากภาพแบบสมบูรณ์กับแบบต่อเนื่อง โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เพื่อเปรียบเทียบผลการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง รูปทรงและปริมาตรจากภาพแบบสมบูรณ์กับแบบต่อเนื่อง โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนประถมสาธิต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2533 จำนวน 60 คน โดยการสุ่มอย่างง่าย แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่ 1 จำนวน 30 คน เรียนจากโปรแกรม คอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบสมบูรณ์ และกลุ่มทดลองที่ 2 จำนวน 30 คน เรียนจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบต่อเนื่อง ก่อนการสอนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วย ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลก่อนการเรียน ทั้ง 2 กลุ่ม แล้วจึงให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วย หลังจากเรียนจบบทเรียนแล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลการ

เรียนรู้ทันที ผลการวิจัยพบว่าผลการเรียนรู้กลุ่มที่ 1 สูงกว่ากลุ่มทดลองที่ 2 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ณัชชา กมล (2542) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟิกที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย ซึ่งเครื่องคำนวณนั้นเป็นสื่อการเรียนการสอนที่แสดงรูปภาพต่าง ๆ และแสดงภาพทางเรขาคณิตให้นักเรียนเห็นได้ทันที ผลการวิจัยพบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟิกประกอบการเรียนคณิตศาสตร์มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟิกประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ อย่างมีนัยสำคัญสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ขอบใจ สาสิทธิ์ (2545) ได้ทำการศึกษาเรื่องผลของการเรียนการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีความสามารถในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังการสอนสูงกว่าก่อนการทดลองอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยเน้นการคิดแบบฮิวริสติกส์มีความสามารถในการใช้เหตุผลทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรนารี อำเภอเมือง จังหวัดนครราชสีมา จำนวน 60 คน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ปานกลาง และต่ำ ใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 5 สัปดาห์ ซึ่งกลุ่มตัวอย่างได้เรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการสร้างรูปในเนื้อหาเรื่อง วงกลม ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผ่านเกณฑ์ ร้อยละ 50 และนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังการเรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เอมอร สุมามาลย์ (2548) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีการเปลี่ยนมุมมองที่มีต่อความสามารถในการเชื่อมโยง และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษา โรงเรียนศรีสวัสดิ์วิทยาคาร จังหวัดน่าน ปีการศึกษา 2548 จำนวน 32 คน โดยการเลือกแบบเจาะจง ผลการวิจัยพบว่า การจัดกิจกรรมการแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีการเปลี่ยนมุมมองให้กับนักเรียน ในระยะแรกนักเรียนยังไม่สามารถนำความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์มาเชื่อมโยงและการให้เหตุผลในการหาคำตอบได้ ต้องได้รับการกระตุ้นด้วยใบประเด็นคำถามทำให้ในระยะต่อมานักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลายวิธี มีมุมมองการแก้ปัญหาที่แปลกใหม่ ความสามารถในการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจัดกิจกรรมสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับนัยสำคัญ .01 และมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังจัดกิจกรรมสูงกว่าก่อนจัดกิจกรรมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ธีรนาถ ธงงาม (2548) ได้ทำการวิจัยเรื่อง ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซ ที่มีต่อมโนทัศน์และความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 68 คน เป็นนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 34 คน โดย นักเรียนกลุ่มทดลองได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซ และกลุ่มควบคุมได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบปกติ เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลคือ แบบทดสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โมเดลการแปลงของเลซมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่าเกณฑ์ขั้นต่ำที่กำหนดโดยกรมวิชาการ คือ สูงกว่าร้อยละ 50 ของคะแนนสอบทั้งฉบับ และ มีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยสรุปได้ว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้เกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นมีแนวในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ในหลายรูปแบบ แต่จากการศึกษาพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้ สื่อจริง วัตถุรูปธรรม โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ประกอบด้วยรูปภาพ เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟิกซึ่งเป็นเครื่องคำนวณที่แสดงรูปภาพ เป็นส่วนหนึ่งในกิจกรรม จะส่งผลให้นักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์สูงขึ้น