บทที่ 2

วิธีการวิเคราะห์

2.1 บทนำ

ในการศึกษานี้จะแบ่งวิธีการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ การวิเคราะห์หน้าตัด (Cross-sectional analysis) ซึ่งพิจารณาถึงพฤติกรรมของหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก–โมเมนต์–ความโค้ง–เวลา และการวิเคราะห์ชิ้นส่วน (Member analysis) โดยพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงในชิ้นส่วนย่อย (Element Forces) กับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacements)

2.2 สมมติฐานในการวิเคาะห์

การวิเคราะห์ใช้สมมติฐานดังต่อไปนี้

1. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดสำหรับคอนกรีต

อาศัยการศึกษาของ Shank (20) ที่ว่ากำลังรับน้ำหนักประลัยที่แท้จริงมีค่าเท่ากับ 85% ของกำลังรับน้ำหนักประลัย การศึกษาของ Troxell, Raphael และ Davis (8) ซึ่งได้เสนอความเครียดคืบในรูปของฟังก์ชั่นลอกาลิธมิกของเวลา และการศึกษาของ Rúsch (19) ซึ่งสรุปว่าหน่วยแรงอัดสูงสุดของคอนกรีต ซึ่งรับน้ำหนักบรรทุกค้างจะลดลง ในขณะที่ความเครียดที่สมนัยกันมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และหน่วยแรงอัดสูงสุดของคอนกรีตเมื่อรับน้ำหนักบรรทุกค้าง จะมีค่าต่ำสุดราว 75% และมีค่าเฉลี่ยราว 80% ของกำลังรับน้ำหนักประลัย ประกอบกับการศึกษาของ Shank (20) Freudenthal และ Roll (22) Distefano (18) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงและความเครียดของคอนกรีตในรูปไม่เป็นเชิงเส้นตรง ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดสำหรับคอนกรีตเมื่อรับน้ำหนักระยะเวลาสั้นของ Hognestad ก็จะถูกดัดแปลงโดยคิดผลของเวลาไปด้วย ดังนั้นจะได้ไดอะแกรมแสดงความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง–ความเครียด–เวลา สำหรับคอนกรีต (รูปที่ 2.1) โดยอธิบายในรูปของ

$$f_{c_{max}}(t) = f_c'[0.85 - 0.02525 \log (t + 1)] \; ; \; t < 25 \text{ ปี}$$

$$= 0.75 f_c' \; ; \; t \geq 25 \text{ ปี}$$

$$\varepsilon_0(t) = 0.002 + 0.00085 \ln (t + 1) \; ; \; t \leq 730 \text{ วัน}$$

$$= 0.0076 + 0.000375 \ln (t - 730) \; ; \; t > 730 \text{ วัน}$$

เมื่อ $f_{c_{max}}(t)$ = หน่วยแรงอัดสูงสุดสำหรับคอนกรีตที่เวลาใด ๆ มีหน่วยเป็น กก.ต่อ ตร.ซม.

f_c' = กำลังรับแรงอัดของแท่งคอนกรีตมาตรฐาน มีหน่วยเป็น กก.ต่อ ตร.ซม.

$\varepsilon_0(t)$ = ความเครียดของคอนกรีตที่สมนัยกับหน่วยแรงอัดสูงสุด

t = ระยะเวลาภายใต้การรับน้ำหนักบรรทุกค้าง มีหน่วยเป็นวัน

2. ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดสำหรับเหล็กเสริม

สมมติให้ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของเหล็กเสริมอยู่ในรูปของอีลาสโตพลาสติก ทั้งการรับแรงดึงและแรงอัด (รูปที่ 2.2) และสมมติว่าไม่เกิดการคืบในเหล็กเสริม

3. ระนาบหน้าตัดก่อนการดัดยังคงเป็นระนาบภายหลังการดัด

4. มีการยึดเหนี่ยวอย่างสมบูรณ์ (ไม่มีการลื่นไถล) ระหว่างคอนกรีตกับเหล็กเสริม

5. ละทิ้งความต้านทานแรงดึงของคอนกรีต

6. ไม่มีการหดตัว (Shrinkage) เกิดขึ้นที่หน้าตัด

7. ความต้านทานทางการดัดแบบเซแคนต์ของชิ้นส่วนได้จากความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา และมีค่าขึ้นกับค่าเฉลี่ยของโมเมนต์ที่ปลายทั้งสองข้างของชิ้นส่วน

8. ไดอะแกรมระหว่างหน่วยแรงกับความเครียดของคอนกรีตที่เวลาใด ๆ ไม่ขึ้นกับการรับน้ำหนักบรรทุกในอดีต

2.3 <u>การวิเคราะห์หน้าตัด</u>

2.3.1 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา

การหาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา สำหรับหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก ใช้วิธีการเช่นเดียวกับที่ Pfrang, Siess และ Sozen(6) ได้กระทำ กล่าวคือ

พิจารณาหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ก โดยมีการเรียงเหล็กเสริมขนานกับขอบรับแรงดึงและแรงอัด ระยะต่าง ๆ คิดถึงจุดศูนย์กลางของกลุ่มเหล็กเสริม โดยเหล็กเสริมรับแรงดึงมีพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด A_s และเหล็กเสริมรับแรงอัดมีพื้นที่หน้าตัดทั้งหมด A_s' การวิเคราะห์นี้จะไม่คิดถึงผลของการที่พื้นที่คอนกรีตถูกแทนที่ด้วยเหล็กเสริม รูปแบบของการกระจายความเครียดบนหน้าตัด แสดงในรูปที่ 2.3 ข โดยที่ $\varepsilon_4(t)$ เป็นความเครียดที่ขอบรับแรงอัดที่เวลา t ใด ๆ และ $\varepsilon_1(t)$ เป็นความเครียดที่ขอบรับแรงดึงของหน้าตัดที่เวลาเดียวกัน t ความเครียดในเหล็กเสริมรับแรงดึงและแรงอัดแทนด้วย $\varepsilon_2(t)$ และ $\varepsilon_3(t)$ตามลำดับ ความโค้งที่เวลาเดียวกันแทนด้วย $\phi(t)$ รูปแบบของการกระจายหน่วยแรงบนหน้าตัดแสดงไว้ในรูปที่ 2.3 ค แรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ทั้งหมดบนหน้าตัดแทนด้วย P และ M C_c เป็นแรงลัพธ์ของหน่วยแรงของคอนกรีต แรงลัพธ์ในเหล็กเสริมรับแรงดึงและแรงอัดเป็น C_s และ C_s' ตามลำดับ

จากสมการสมดุลย์ทางสถิตย์จะได้

$$P = C_c + C_s + C_s' \tag{2.1}$$

และ

$$M = M_c + M_s + M_s' \tag{2.2}$$

โดยที่ M_c = โมเมนต์ลัพธ์ต้านทานโดยคอนกรีต

M_s, M_s' = โมเมนต์ลัพธ์ต้านทานโดยเหล็กเสริมรับแรงดึง และแรงอัดตามลำดับ

เนื่องจากวัสดุคอนกรีตมีคุณสมบัติที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรง ดังนั้นการหาความสัมพันธ์ระหว่าง แรงตามแนวแกน โมเมนต์ดัด และความโค้งสำหรับหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็ก จะกระทำโดยพิจารณาแบ่งการกระจายความเครียดในคอนกรีตออกเป็นช่วง ๆ (Region) ดังแสดงในรูปที่ 2.4 กล่าวคือ

คอนกรีตช่วงที่ 1

เมื่อ $0 \leq \varepsilon_1(t) \leq \varepsilon_0(t)$ และ $0 \leq \varepsilon_4(t) < \varepsilon_0(t)$

คอนกรีตช่วงที่ 2

เมื่อ $\varepsilon_1(t) < 0$ และ $0 \leq \varepsilon_4(t) < \varepsilon_0(t)$

คอนกรีตช่วงที่ 3

เมื่อ $0 \leq \varepsilon_1(t) \leq \varepsilon_0(t)$ และ $\varepsilon_0(t) \leq \varepsilon_4(t) \leq \varepsilon_u(t)$

คอนกรีตช่วงที่ 4

เมื่อ $\varepsilon_1(t) < 0$ และ $\varepsilon_0(t) \leqslant \varepsilon_4(t) \leqslant \varepsilon_u(t)$

จากการแบ่งช่วงของความเครียดในคอนกรีตดังกล่าวข้างต้น ทำให้ทราบตำแหน่งและขนาดของแรงลัพธ์ในคอนกรีต เช่น กรณีที่คอนกรีตอยู่ในช่วงที่ 1 การกระจายของหน่วยแรงในคอนกรีตจะเป็น

$$f_c(t) = f_{c_{max}}(t)\left\{\frac{2\varepsilon_c(t)}{\varepsilon_0(t)} - \left[\frac{\varepsilon_c(t)}{\varepsilon_0(t)}\right]^2\right\} \tag{2.3}$$

แรงที่กระทำบนชิ้นส่วนย่อย ๆ (Differential Element) คือ

$$dc_c = bf_c(t)\,dy$$

และแรงในคอนกรีตทั้งหมดคือ

$$C_c = \int_0^T bf_c(t)dy \tag{2.4}$$

จากรูปแบบการกระจายความเครียดจะได้ว่า

$$d\varepsilon_c(t) = \phi(t)dy$$

$$\text{และ}\ \varepsilon_1(t) = \varepsilon_4(t) - \phi(t)T$$

สำหรับ $y = 0$, $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_1(t)$ และ $y = T$, $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_4(t)$

ซึ่งจะได้ว่า

$$C_c = \int_{\varepsilon_1(t)}^{\varepsilon_4(t)} \frac{bf_c(t)d\varepsilon_c(t)}{\phi(t)} \tag{2.5}$$

ลดรูป C_c อยู่ในรูปที่ไม่มีหน่วย ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\frac{C_c}{bTf_{c_{max}}(t)} = \frac{2\varepsilon_4(t) - \phi(t)T}{\varepsilon_0(t)} - \frac{3\varepsilon_4^2(t) - 3\varepsilon_4(t)\,\phi(t)T + (\phi(t)T)^2}{3\varepsilon_0^2(t)} \tag{2.6}$$

ตำแหน่งของแรงลัพธ์ในคอนกรีต $\bar{y}$ คือ

$$\bar{y} = \frac{\int_0^T bf_c(t)ydy}{C_c} \tag{2.7}$$

เมื่อ y เป็นระยะทางจากผิวรับแรงดึงไปถึงปริมาตรชิ้นส่วนย่อย ๆ (Differential Volume Element) จากเรขาคณิตของความเครียดที่ว่า

$$y = \frac{\varepsilon_c(t) - \varepsilon_1(t)}{\phi(t)} \tag{2.8}$$

จะได้ว่า

$$\bar{y} = \frac{\int_{\varepsilon_1(t)}^{\varepsilon_4(t)} b f_c(t) \left(\frac{\varepsilon_c(t) - \varepsilon_1(t)}{\phi(t)} \right) \frac{d\varepsilon_c(t)}{\phi(t)}}{C_c} \tag{2.9}$$

โดยการแทนค่าและทำให้เป็นรูปสมการอย่างง่ายจะได้

$$\frac{\bar{y}}{bT^2 f_{c_{max}}(t)} = \frac{1}{(\phi(t)T)^2 C_c}\left[\frac{2(\varepsilon_4^3(t) - \varepsilon_1^3(t))}{3\,\varepsilon_0(t)} - \frac{\varepsilon_4^4(t) - \varepsilon_1^4(t)}{4\,\varepsilon_0^2(t)}\right]$$

$$- \frac{\varepsilon_1(t)}{\phi(t)\, bT^2 f_{c_{max}}(t)} \tag{2.10}$$

ค่าโมเมนต์ลัพธ์ของคอนกรีตซึ่งคิดรอบจุดศูนย์ถ่วงพลาสติก (Plastic Centroid)

$$M_c = C_c(\bar{y} - \bar{h}) \tag{2.11}$$

เมื่อ $\bar{h}$ เป็นระยะทางจากผิวรับแรงดึงไปยังจุดศูนย์ถ่วงพลาสติกของหน้าตัด สำหรับหน้าตัดไม่สมมาตร

$$\bar{h} = \frac{DC_s + d'C_s' + \bar{y}C_c}{C_s + C_s' + C_c} \tag{2.12}$$

สำหรับหน้าตัดที่สมมาตร $\bar{h} = \frac{T}{2}$

ในขณะที่ $\varepsilon_1(t)$ และ $\varepsilon_4(t)$ เปลี่ยนแปลงภายในคอนกรีตช่วงหนึ่ง ๆ ค่าความเครียดของเหล็กเสริม $\varepsilon_2(t)$ และ $\varepsilon_3(t)$ ก็เปลี่ยนแปลงตามไปด้วย ค่าความเครียดของเหล็กเสริมที่เป็นไปได้สามารถแบ่งออกได้เป็น 4 ช่วงคือ

เหล็กเสริมช่วงที่ 1

เหล็กเสริมทั้งหมดไม่คลาก

เหล็กเสริมช่วงที่ 2

เหล็กเสริมรับแรงอัดคลากแต่เหล็กเสริมรับแรงดึงไม่คลาก

เหล็กเสริมช่วงที่ 3

เหล็กเสริมรับแรงอัดไม่คลาก แต่เหล็กเสริมรับแรงดึงคลาก

เหล็กเสริมช่วงที่ 4

เหล็กเสริมคลากทั้งหมด

โดยการใช้ประโยชน์จากการแบ่งเหล็กเสริมออกเป็นหลายช่วง ทำให้สามารถหาแรงลัพธ์ของเหล็กเสริม P_s ได้ (ดูรูปที่ 2.3ค) คือ

$$P_s = C_s + C_s'$$

แรงในเหล็กเสริมรับแรงอัดที่เป็นไปได้คือ

สำหรับ $\varepsilon_3(t) < \varepsilon_y \; : \; C_s' = A_s'E_s\,\varepsilon_3(t) = A_s'E_s(\,\varepsilon_4(t) - \phi(t)D')$

สำหรับ $\varepsilon_3(t) \geq \varepsilon_y \; : \; C_s' = A_s'E_s\varepsilon_y$

แรงในเหล็กเสริมรับแรงดึงที่เป็นไปได้คือ

สำหรับ $\varepsilon_2(t) < \varepsilon_y \; : \; C_s = A_sE_s\,\varepsilon_2(t) = A_sE_s(\,\varepsilon_4(t) - \phi(t)d\,)$

สำหรับ $\varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_y \; : \; C_s = A_sE_s\varepsilon_y$

พิจารณาเหล็กเสริมในช่วงที่ 1 จะได้แรงลัพธ์ของเหล็กเสริมคือ

$$P_s = A_sE_s(\,\varepsilon_4(t) - \phi(t)d) + A_s'E_s(\,\varepsilon_4(t) - \phi(t)D') \qquad (2.13)$$

โมเมนต์ดัดที่ได้จากการคิดโมเมนต์ของแรงในเหล็กเสริมรอบจุดศูนย์ถ่วงพลาสติก คือ

$$M_s + M_s' = C_s(\bar{h} - D) + C_s'(d' - \bar{h}) \qquad (2.14)$$

สำหรับกรณีอื่น ๆ จะหาได้เช่นเดียวกัน ซึ่งสรุปรวมไว้ในตารางที่ 2.1 และ 2.2 ตารางที่ 2.1 แสดงความสัมพันธ์สำหรับคอนกรีตช่วงต่าง ๆ คล้ายกับในสมการ(2.6) และ (2.10) ตารางที่ 2.2 แสดงความสัมพันธ์สำหรับเหล็กเสริมช่วงต่าง ๆ คล้ายกับในสมการ (2.13)

ภายหลังจากที่ได้แรงลัพธ์ในคอนกรีตและเหล็กเสริมสำหรับแต่ละช่วงแล้ว แทนค่า C_s ,C_s' และ C_c ที่เหมาะสมลงในสมการที่ (2.1) และ (2.2) จะได้สมการสมดุลย์ซึ่งสมนัยกับความเครียดในช่วงที่สมมติ จากนั้นจะทำการหาค่าโมเมนต์กับความโค้งที่สมนัยกัน จากการกระจายของความเครียดตลอดหน้าตัดและความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยแรง และความเครียดทำให้สามารถอธิบายแรงให้อยู่ในรูปของตัวไม่รู้ค่า เริ่มแรกคือ $\varepsilon_4(t)$ กับ $\phi(t)$ และขนาดหน้าตัดกับคุณสมบัติของวัสดุที่รู้ค่าได้ ดังนั้นสามารถเขียนสมการสมดุลย์ (2.1) และ (2.2) ได้เป็น

$$f(P,\ \varepsilon_4(t),\ \phi(t)\ ) = 0 \qquad (2.15)$$

และ
$$f(M,\ \varepsilon_4(t),\ \phi(t)\ ) = 0 \qquad (2.16)$$

ในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ระหว่าง น้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา นี้จะกำหนดให้ทราบค่า แรงตามแนวแกนทั้งหมด P ที่กระทำต่อหน้าตัด และช่วงเวลาของการรับน้ำหนัก t ที่ P และ t ที่กำหนดให้ใด ๆ เมื่อเลือก $\varepsilon_4(t)$ ที่เหมาะสมมาค่าหนึ่ง จะสามารถหาค่าความโค้ง $\phi(t)$ จากสมการของแรง (2.15) เมื่อแทนค่า $\phi(t)$ และ $\varepsilon_4(t)$ลงในสมการโมเมนต์ (2.16) จะให้ค่าโมเมนต์ที่สมนัยกันออกมา โดยการเพิ่มค่า $\varepsilon_4(t)$ขึ้นไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึง $\varepsilon_u(t)$ ก็จะได้เส้นสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์-ความโค้ง-เวลา ที่แรงตามแนวแกนคงที่ P ดังแสดงในรูปที่ 2.5

2.3.2 <u>การพิจารณาความต้านทานทางการดัด</u>

ในการพิจารณาความต้านทานทางการดัด (Flexural Rigidity) ของหน้าตัดอาศัยสมมติฐานว่า ความต้านทานทางการดัด คือ อัตราส่วนระหว่างโมเมนต์กับความโค้ง ดังนั้นจากความสัมพันธ์ระหว่าง น้ำหนักบรรทุก-โมเมนต์-ความโค้ง-เวลา สำหรับหน้าตัดคอนกรีตเสริมเหล็กหนึ่ง ๆ ที่สมนัยกันจะได้ความต้านทานทางการดัดแบบเซแคนต์ (Secant Flexural Rigidity) ดังสมการ

$$EI(t) = \frac{M}{\phi(t)} \tag{2.17}$$

ในเมื่อ M เป็นโมเมนต์

$\phi(t)$ เป็นความโค้งที่สมนัยกับโมเมนต์ภายหลังการรับน้ำหนักเป็นเวลาใด ๆ t

2.4 การวิเคราะห์ชิ้นส่วน

2.4.1 บทนำ

ในการศึกษานี้จะวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้วิธีการไฟไนท์เอลลิเมนต์ แบบวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งหรือแบบวิธีสติฟเนส (Displacement or Stiffness Method) สำหรับแบบวิธีการเปลี่ยนตำแหน่งคิดว่าโครงสร้างประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อย (Element) ที่แยกจากกัน (Discrete) โดยมีการเปลี่ยนตำแหน่งอยู่ในรูปแบบที่สมมติขึ้น คุณสมบัติของแต่ละชิ้นส่วนย่อยจะหาได้จากทฤษฎีอีลาสติก คำตอบที่สมบูรณ์หาได้จากการรวมการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยแต่ละชิ้นในลักษณะที่สอดคล้องกับเงื่อนไขการสมดุลย์ของแรง (Force-Equilibrium) และความเข้ากันได้ของการเปลี่ยนตำแหน่ง (Displacement Compatibility) ที่ข้อต่อ (Joint) ของชิ้นส่วนย่อย

ในหัวข้อนี้จะหาสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยก่อน และจะหาเมตริกซ์สติฟเนส(Stiffness Matrix) ของชิ้นส่วนทั้งหมด โดยการรวมเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยที่ขอบเขตร่วม (Common Boundry) ในที่นี้พิจารณาว่าชิ้นส่วนคอนกรีตเสริมเหล็กประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสา(Beam-column element) ที่เป็นเส้นตรงซึ่งแยกจากกัน โดยมีความยาวของชิ้นส่วนย่อย L_i โดยทำการต่อเข้าด้วยกันที่จุดต่อ (Nodal Point) แต่ละชิ้นส่วนย่อยมีคุณสมบัติของหน้าตัดคงที่ โดยมีชิ้นส่วนย่อยทุกชิ้น แรงที่กระทำและการเปลี่ยนตำแหน่งที่อยู่ในระนาบเดียวกัน สำหรับทิศทางบวกของแรงและการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสาได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.6

2.4.2 ข้อจำกัดของการวิเคราะห์

ในการวิเคราะห์นี้จะใช้ข้อจำกัดดังต่อไปนี้คือ

(1) แรงที่กระทำเป็นจุดจะกระทำเฉพาะที่จุดต่อของชิ้นส่วนย่อยเท่านั้น

(2) จะต้องทราบคุณสมบัติของหน้าตัด

(3) ความต้านทานทางการดัด (Flexural Rigidity) ของชิ้นส่วนย่อยขึ้นกับค่าเฉลี่ยของขนาดของโมเมนต์ที่ปลายทั้งสองข้าง

2.4.3 <u>การหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย</u> (Element Sliffness Matrix)

ในการหาสติฟเนสของโครงสร้าง จะต้องทราบค่าสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยแต่ละส่วนเสียก่อนในการหาสติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยมีหลายวิธี ซึ่งจะเลือกวิธีไหนนั้น ขึ้นกับชนิดของชิ้นส่วนย่อยเป็นหลัก สำหรับชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสา นั้นจะหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อยโดยใช้พลังงานความเครียด(Strain energy) และทฤษฎีของ Castigliano

พิจารณาชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสาในพิกัดเฉพาะที่ (Local coordinates)x, y ดังแสดงในรูปที่ 2.6 การเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง x และ y ที่ปลาย "i" เป็น u_1, u_2 และ u_3 ในขณะที่ปลาย"i+1" เป็น u_4, u_5 และ u_6 พื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วนย่อยเป็น A_i ความยาวเป็น L_i และโมดูลัสยืดหยุ่นเป็น E_i จะไม่เขียนตัวห้อยข้างล่าง (Subscript) "i" ในการหาเมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย การวิเคราะห์นี้จะเกี่ยวข้องกับพฤติกรรมที่เกิดขึ้นระหว่างการเปลี่ยนแปลงแต่ละขั้น (Incremental Step) ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดกับการเปลี่ยนตำแหน่ง (Strain-displacement relation)สำหรับทฤษฎีอีลาสติกที่ไม่เป็นเชิงเส้นตรง(Non-linear theory of elasticily) ในทิศทาง xx และทิศทาง xy (27) คือ

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] + \varepsilon^0_{xx} = \varepsilon^a_{xx} + \varepsilon^0_{xx}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon^0_{xy} = \varepsilon^a_{xy} + \varepsilon^0_{xy}$$

เมื่อ u,v เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งในทิศทาง xx และ yy ตามลำดับ

ε^0_{xx}, ε^0_{xy} เป็นความเครียดเริ่มแรก(Initial Strain) ในทิศทาง xx และ xy ตามลำดับ

ε^a_{xx} ,ε^a_{xy} เป็นความเครียดที่ได้รับเพิ่มขึ้นในทิศทาง xx และ xy ตามลำดับ

สำหรับชิ้นส่วนย่อยชนิดคานเสาเทอม $\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ และ $\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ มีผลน้อยเมื่อเทียบกับตัวอื่นจึงตัดออกเพื่อความสะดวกในการพิจารณา (28) จะได้

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + \varepsilon^0_{xx} = \varepsilon^a_{xx} + \varepsilon^0_{xx} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon^0_{xy} = \varepsilon^a_{xy} + \varepsilon^0_{xy} \quad (2.19)$$

ในการหาฟังก์ชั่นการเปลี่ยนตำแหน่ง(Displacement function) ของชิ้นส่วนย่อยนั้น นั้นหาได้จากฟังก์ชั่นการกะประมาณ (Interpolation functionซึ่งขึ้นกับชนิดของชนิดส่วนย่อย สำหรับชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสา ซึ่งมีดีกรีแห่งความอิสระ (Degree of freedrom) ที่แต่ละปลายเป็น 3 จะใช้โพลีโนเมียลดีกรี 3 ในการแทนการเปลี่ยนตำแหน่งที่ในทิศทาง y (28) คือ

$$v(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (2.20)$$

ส่วน u(x,y) นั้นขึ้นกับระยะทางจากแกนสะเทิน (Neutral axis) ของหน้าตัด, y และการหมุนของหน้าตัด (Rotation)$\frac{\partial v}{\partial x}$ (ดูรูปที่ 2.7)

$$u(x,y) = a_o + a_1x - y\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= a_o + a_1x - (b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2)\,y \quad (2.21)$$

เมื่อ a_o, a_1, b_o, b_1, b_2, b_3 เป็นสัมประสิทธิ์ของการเปลี่ยนตำแหน่ง(Displacement coefficients)

ในที่นี้จะสมมติว่าโครงสร้างตอบสนองเชิงเส้นตรงในการเปลี่ยนแปลงแต่ละขั้น พลังงานความเครียด U ซึ่งสะสมในชิ้นส่วนโดยกฎของความเค้น และความเครียดเชิงเส้นตรง (Linear stress-strain law) ซึ่งพิจารณาได้จากการรวมของพลังงานความเครียดในทิศทาง xx, U_{xx} และในทิศทาง xy, U_{xy}

$$U = U_{xx} + U_{xy}$$

หรือ

$$U = \frac{1}{2}\int_V E(\varepsilon^a_{xx})^2 dv + \int_V E\,\varepsilon^0_{xx}\,\varepsilon^a_{xx}\,dv + \frac{1}{2}\int_V G(\varepsilon^a_{xy})^2 dv + \int_V G\varepsilon^0_{xy}\,\varepsilon^a_{xy}\,dv \quad (2.22)$$

เมื่อ G เป็นโมดูลัสเฉือน(Shear modulus) ของชิ้นส่วนย่อย

แทนค่าสมการ (2.18) และ(2.19) ลงในสมการ (2.22) และจากสมการ (2.20) และ (2.21) ซึ่งได้ว่า $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ สมการ (2.22) จะกลายเป็น

$$U = \frac{E}{2}\int_V \{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + \tfrac{1}{4}(\frac{\partial v}{\partial x})^4\}dv + \int_V E\,\varepsilon^0_{xx}\{\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2\}dv + \frac{G}{2}\int_V (\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})^2 dv + G\int_V \varepsilon^0_{xy}(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})dv \quad (2.23)$$

ตัดเทอมที่มีอันดับ (Order) เกิน 2 จะได้

$$U = \frac{E}{2}\int(\frac{\partial u}{\partial x})^2 dv + E\varepsilon^0_{xx}\int_V\{\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2\}dv + G\,\varepsilon^0_{xy}\int_V(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})dv \quad (2.24)$$

แทนค่าสมการ (2.20) และ (2.21) ลงในสมการ (2.24) และจัดให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ จะได้

$$U = \frac{E}{2}[a_1\ b_2\ b_3]\begin{bmatrix} AL & \text{Symmetric} & \\ 0 & 4LI & \\ 0 & 6L^2I & 12L^3I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$-\frac{F_1}{2}[b_1\ b_2\ b_3]\begin{bmatrix} L & \text{Symmetric} & \\ L^2 & \frac{4L^3}{3} & \\ L^3 & \frac{3L^4}{2} & \frac{9L^5}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$-\frac{F_2}{2}[a_1\ b_1 b_2 b_3]\begin{bmatrix} L & \text{Symmetric} & & \\ L & 0 & & \\ L^2 & 0 & 0 & \\ L^3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} \quad (2.25)$$

เมื่อ F_1, F_2 เป็นแรงตามแนวแกนและแรงเฉือนที่กระทำตามลำดับ (รูปที่ 2.6)

$$F_1 = P_4 - P_1 \quad (a)$$

$$F_2 = \frac{P_6 - P_3}{L} \quad (b)$$

จากสมการ (2.21) $a_o = u_1$ และ $a_1 = (u_4 - u_1)/L$

จากสมการ (2.20)

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \vartheta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & -2L^2 & 3L^2 & -L^3 \\ 2L & L^2 & -2L & L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสามารถเขียนการเปลี่ยนตำแหน่งในรูปของการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} a_o &= u_1 \\ a_1 &= (u_4-u_1)/L \\ b_o &= u_2 \\ b_1 &= u_3 \\ b_2 &= 3(u_5- u_2)/L^2 - (2u_3 + u_6)/L \\ b_3 &= -2(u_5 - u_2)/L^3 + (u_3+ u_6)/L^2 \end{aligned} \qquad (2.26)$$

แทนค่าสมการ (2.26) ลงไปใน (2.25) และทำการประยุกต์ทฤษฎีของ Castigliano เข้ากับพลังงานความเครียด U $(\frac{\partial U}{\partial u_i} = P_i)$ จะทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยเป็นดังนี้ คือ

$$
\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & & & & & \\
0 & \frac{12EI}{L^3} & & \text{Symmetric} & & \\
0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L} & & & \\
\frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & \\
0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \\
0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}
$$

$$
\frac{-F_1}{30L}
\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
0 & 36 & \text{Symmetric} & & & \\
0 & 3L & 4L^2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & -36 & -3L & 0 & 36 & \\
0 & 3L & -L^2 & 0 & -3L & 4L^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}
+\frac{F_2}{L}
\begin{bmatrix}
0 & & & & & \\
-1 & 0 & & \text{Symmetric} & & \\
0 & 0 & 0 & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}
\qquad (2.27)
$$

หรือ $[P] = [K][u]$ (2.28)

เมื่อ $[K]$ = เมตริกซ์สติฟเนสของชิ้นส่วนย่อย = $[K_E]+[K_G^1]+[K_G^2]$

$[K_E]$ = เมตริกซ์สติฟเนสเชิงอีลาสติก (Elastic Stiffness Matrix)

$[K_G^1],[K_G^2]$ = เมตริกซ์สติฟเนสเชิงเรขาคณิต (Geometrical Stiffness Matrix)

$[P]$ = เมตริกซ์ของแรงในชิ้นส่วนย่อย (Element Force Matrix)

$[u]$ = เมตริกซ์การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อของชิ้นส่วนย่อย (Element Nodal Displacement Matrix)

2.4.4 การแปลงสมการความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งชิ้นส่วนย่อยไปสู่พิกัดระบบ (System Coordinates)

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งในพิกัดเฉพาะที่ ซึ่งหาไว้ในหัวข้อที่แล้ว จะถูกแปลงให้อยู่ในพิกัดระบบ $\bar{x}$, $\bar{y}$ จากรูปที่ 2.8 จะเห็นได้ว่า

ที่จุดต่อ "i"

$$u_1 = \bar{u}_1 \cos\alpha + \bar{u}_2 \sin\alpha$$

$$u_2 = \bar{u}_1 \cos\alpha - \bar{u}_1 \sin\alpha$$

$$u_3 = \bar{u}_3$$

เมื่อ $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ และ $\bar{u}_3$ เป็นการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อ "i" ในพิกัดระบบ ที่จุดต่อ"i+1" ก็สามารถเขียนได้ในทำนองเดียวกัน และถ้ากำหนดให้

$$C_1 = \cos\alpha \quad \text{และ} \quad S_1 = \sin\alpha$$

เซ็ตของสมการทั้ง 6 ข้างต้น สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

หรือ $[u] = [T][\bar{u}]$ (2.30)

เมื่อ $[T]$ = เมตริกซ์ของการแปลง (Transformation Matrix)

$[\bar{u}]$ = เมตริ็กซ์การเปลี่ยนตำแหน่งของชิ้นส่วนย่อยในพิกัดระบบ

ในทำนองเดียวกัน การแปลงแรงในชิ้นส่วนย่อยจากพิกัดระบบ $[\bar{P}]$ ไปเป็นแรงในชิ้นส่วนย่อยในพิกัดเฉพาะที่ $[P]$ กระทำได้โดย

$$[P] = [T][\bar{P}] \qquad (2.31)$$

เนื่องจาก [T] เป็นเมตริกซ์ชนิดออร์โธโกนัล (Orthogonal Matrix) อินเวอร์ส ของ [T] จึงมีค่าเท่ากับ ทรานโพสของมันคือ $[T]^T$ ดังนั้น

$$[\bar{P}] = [T]^T[P] \qquad (2.32)$$

$$[\bar{u}] = [T]^T[u] \qquad (2.33)$$

จากสมการ (2.28) , $[P] = [K][u]$

แทนที่สมการ (2.30) และ (2.31) ลงไปจะได้

$$[T][\bar{P}] = [K][T][\bar{u}]$$

เอา $[T]^T$ คูณเข้าข้างหน้าทั้งสองข้างได้

$$[\bar{P}] = [T]^T[K][T][\bar{u}]$$

หรือ

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{u}] \qquad (2.34)$$

เมื่อ $[\bar{K}]$ คือ เมตริกซ์สติฟเนสในพิกัดระบบ $= [T]^T[K][T]$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งในพิกัดระบบจะเป็นดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L}C_1^2+\frac{12EI}{L^3}S_1^2 & \frac{EA}{L}C_1S_1-\frac{12EI}{L^3}C_1S_1 & \frac{-6EI}{L^2}S_1 & \frac{-EA}{L}C_1^2-\frac{12EI}{L^3}S_1^2 & -\frac{EA}{L}C_1S_1+\frac{12EI}{L^3}C_1S_1 & -\frac{6EI}{L^2}S_1 \\ & \frac{EA}{L}S_1^2+\frac{12EI}{L^3}C_1^2 & \frac{6EI}{L^2}C_1 & -\frac{EA}{L}C_1S_1+\frac{12EI}{L^3}C_1S_1 & -\frac{EA}{L}S_1^2-\frac{12EI}{L^3}C_1^2 & \frac{6EI}{L^2}C_1 \\ & & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}S_1 & \frac{-6EI}{L^2}C_1 & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L}C_1^2+\frac{12EI}{L^3}S_1^2 & \frac{EA}{L}C_1S_1-\frac{12EI}{L^3}C_1S_1 & \frac{6EI}{L^2}S_1 \\ & \text{Symmetric} & & & \frac{EA}{L}S_1^2+\frac{12EI}{L^3}C_1^2 & \frac{-6EI}{L^2}C_1 \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix}$$

$$
-\frac{F_1}{30L}\begin{bmatrix} 36S_1^2 & -36C_1S_1 & -3LS_1 & -36S_1^2 & 36C_1S_1 & -3LS_1 \\ & 36C_1^2 & 3LC_1 & 36C_1S_1 & -36C_1^2 & 3LC_1 \\ & & 4L^2 & 3LS_1 & -3LC_1 & -L^2 \\ \text{Symmetric} & & & 36S_1^2 & -36C_1S_1 & 3LS_1 \\ & & & & 36C_1^2 & -3LC_1 \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{F_2}{L}\begin{bmatrix} S_2 & -C_2 & 0 & -S_2 & C_2 & 0 \\ & -S_2 & 0 & C_2 & S_2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symmetric} & & & S_2 & -C_2 & 0 \\ & & & & -S_2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} \qquad (2.35)
$$

เมื่อ $C_2 = \text{Cos } 2\alpha$ และ $S_2 = \text{Sin } 2\alpha$

2.4.5 <u>เมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้าง</u> (Structural Stiffness Matrix)

จากสมการ (2.34) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่งสำหรับชิ้นส่วนย่อยที่ i คือ

$$[\bar{P}]_i = [\bar{K}]_i[\bar{u}]_i$$

สำหรับโครงสร้างที่มีชิ้นส่วนย่อย n ชิ้น ความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยน-ตำแหน่งสำหรับโครงสร้างทั้งระบบ(Complete Structure) อาจจะแทนได้ดังต่อไปนี้คือ

$$\underset{6n\text{x}1}{\begin{bmatrix}[\bar{P}]_1\\ [\bar{P}]_2\\ \vdots \\ [\bar{P}]_{n-1}\\ [\bar{P}]_n\end{bmatrix}} = \underset{6n\text{x}6n}{\begin{bmatrix} [\bar{K}]_1 & & & \text{ZEROS} \\ & [\bar{K}]_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\bar{K}]_{n-1} & \\ \text{ZEROS} & & & & [\bar{K}]_n\end{bmatrix}} \cdot \underset{6n\text{x}1}{\begin{bmatrix}[\bar{u}]_1\\ [\bar{u}]_2\\ \vdots \\ [\bar{u}]_{n-1}\\ [\bar{u}]_n\end{bmatrix}}$$

หรือ $$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{u}] \qquad (2.36)$$

การเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อ ซึ่งเกิดขึ้นจากการกระทำของแรงภายนอก จะต้องทำให้การกระจายของแรงภายในกับ แรงลัพธ์ที่จุดต่ออยู่ในสภาพสมดุลย์กับแรงที่กระทำ ดังนั้น ดีกรีแห่งความอิสระของทุกจุดต่อจึงต้องสมนัยกับสภาพสมดุลย์ด้วย ในชิ้นส่วนย่อยชนิดคาน-เสา มีแรงภายนอกในรูปทั่วไป (Generalized Forces) 3 แรง $[F]_i$ กระทำที่แต่ละจุดต่อ ซึ่งจะเกิดการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อ 3 อัน $[D]_i$ ที่สมนัยกันที่แต่ละจุดต่อ สำหรับโครงสร้างทั้งระบบ แรงกระทำภายนอกในรูปทั่วไป[F] และการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อ[D] สัมพันธ์กันดังนี้ คือ

$$[F] = [S][D] \qquad (2.37)$$

เมื่อ[S] เป็นเมตริกซ์สติฟเนสของโครงสร้างทั้งระบบ

เซ็ตของการเปลี่ยนตำแหน่ง 2 เซ็ต คือ$[\bar{u}]$ และ [D] สัมพันธ์กันโดยสมการ

$$[\bar{u}] = [A][D] \qquad (2.38)$$

เมื่อ [A] เป็นเมตริกซ์ของการแปลงการเปลี่ยนตำแหน่งที่จุดต่อของชิ้นส่วนย่อยไปเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งของโครงสร้างทั้งระบบ $[\bar{u}]$ ที่สมนัยกัน

โดยการใช้หลักของงานเสมือน(Priniciple of Virtual Work) ความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอก [F] กับแรงภายใน $[\bar{P}]$ คือ

$$[F] = [A]^T[\bar{P}] \qquad (2.39)$$

จากนี้สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอก ที่เขียนในรูปทั่วไปกับการเปลี่ยนตำแหน่งได้ดังนี้

แทนค่าสมการ (2.36) ลงใน (2.39) จะได้

$$[F] \quad = \quad [A]^T[\bar{K}][\bar{u}]$$

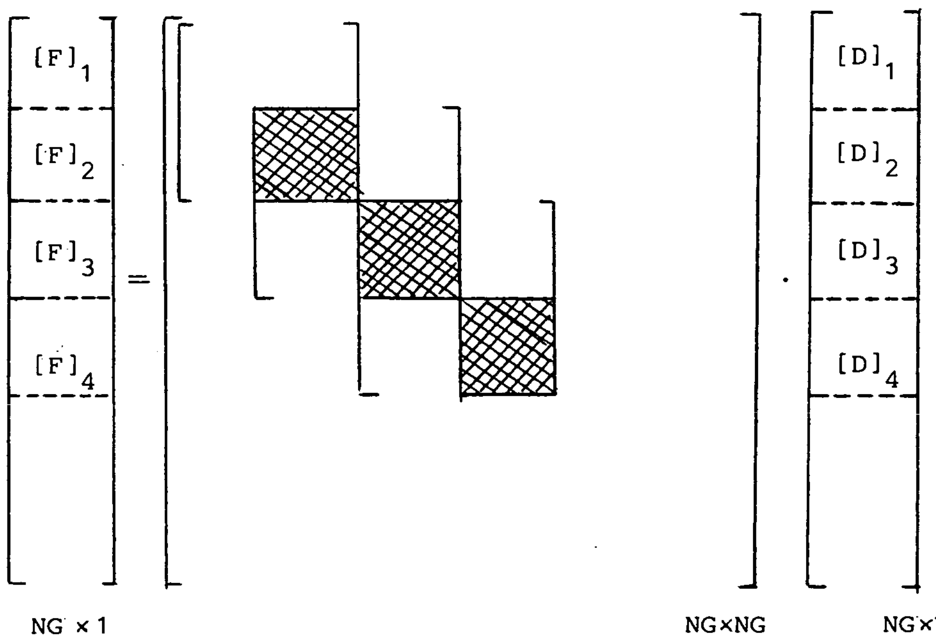
แทนค่าจากสมการ (2.38) ลงไปจะได้

$$[F] \quad = \quad [A]^T[\bar{k}][A][D] \tag{2.40}$$

จากสมการ (2.37) ที่ว่า

$$[S] \quad = \quad [A]^T[\bar{K}][A] \tag{2.41}$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับการเปลี่ยนตำแหน่ง สำหรับโครงสร้างทั้งระบบจะแทนในรูปของเมตริกซ์ได้ดังนี้คือ



เมื่อ $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ = $[\bar{K}]$ สำหรับแต่ละชิ้นส่วนย่อย

NG = 3 × (จำนวนชิ้นส่วนย่อย + 1)