บทที่ 3

การวิเคราะห์แบบพลศาสตร์

3.1 ความนำ

ปัญหาในการวิเคราะห์แบบพลศาสตร์ของโครงสร้างโดยทั่ว ๆ ไปเป็นการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equation) ลำดับขั้นที่ 2 ดังสมการ (3.1)

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R} \qquad (3.1)$$

ซึ่ง $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{C}$ และ $\underset{\sim}{K}$ เป็นเมตริกซ์ของมวล ความหน่วง และสติฟเนสของโครงสร้างตามลำดับ

$\underset{\sim}{R}$ เป็นเวคเตอร์ของแรงกระทำภายนอก

$\underset{\sim}{U}$, $\dot{\underset{\sim}{U}}$ และ $\ddot{\underset{\sim}{U}}$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ ความเร็ว และอัตราเร่ง ตามลำดับ

ในการแก้ปัญหาของสมการ (3.1) สามารถทำได้ 2 วิธีคือ

1. วิธีอินทิเกรตโดยตรง (Direct Integration Method)
2. วิธีรวมโหมด (Modal Superpositon Method)

3.2 วิธีอินทิเกรตโดยตรง

การอินทิเกรตโดยตรงของสมการ (3.1) เป็นการอินทิเกรตทีละขั้น (Step - by - Step) โดยไม่มีการเปลี่ยนรูปสมการ (3.1) ไปจากรูปแบบเดิม สิ่งจำเป็นในวิธีอินทิเกรตโดยตรงมีพื้นฐานอยู่ 2 แนวทาง

แนวทางแรก พิจารณาสมการ (3.1) ที่เวลา t ใด ๆ ที่ช่วงเวลา Δt ที่เวลานั้น ซึ่งเหมือนกับการวิเคราะห์สถิตยศาสตร์โดยมีผลของแรงเฉลี่ยและแรงหน่วงรวมอยู่ด้วยจึงได้ผลเฉลยในทุก ๆ ช่วงเวลา

แนวทางที่ 2 พิจารณาถึงการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ ความเร็ว และอัตราเร่ง ในช่วงเวลา Δt ซึ่งความเปลี่ยนแปลงของการเคลื่อนที่ ความเร็ว และอัตราเร่ง ในแต่ละช่วงเวลาจะเก็บสะสมไว้ซึ่งจะได้ผลเฉลยในที่สุด โดยสมมุติการเคลื่อนที่ ความเร็ว และอัตราเร่ง ที่เวลา $t = 0$ เป็น $\underset{\sim}{U}_o$, $\dot{\underset{\sim}{U}}_o$ และ $\ddot{\underset{\sim}{U}}_o$ ตามลำดับ และเป็นผลเฉลยของสมการ (3.1) จะอยู่ในช่วงเวลา $t = 0 \rightarrow T$ โดยแบ่งช่วงเวลาออกเป็น S ช่วงเท่า ๆ กัน ($\Delta t = T/S$) และทำการอินทิเกรตที่เวลา $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, t, t + \Delta t, \ldots, T$ ก็จะได้ผลเฉลยในแต่ละช่วงเวลาตามต้องการ

วิธีอินทิเกรตโดยตรงนี้ ถ้าเมตริกซ์ของมวลมีค่าเฉพาะบนแนวทะแยงมุม และไม่มีการสูญเสียพลังงาน จำนวนครั้งในการคำนวณสำหรับหนึ่งช่วงเวลาจะมากกว่า $2nm_K$ ซึ่ง n และ m_K คือ ขนาด (Order) และความกว้างของแถบสมมาตร (Half-band Width) ตามลำดับ ของเมตริกซ์ของสติฟเนส ถ้าเมตริกซ์ของมวลเป็นลักษณะแบบมวลกระจาย (Consistent Mass) และมีการสูญเสียพลังงาน จำนวนครั้งในการคำนวณสำหรับหนึ่งช่วงเวลาจะเป็นอัตราส่วนกับ nm_K ดังนั้นถ้าไม่คิดการคำนวณสำหรับค่าเริ่มต้นจะต้องทำการคำนวณทั้งหมดประมาณ xnm_KS โดยที่ x ขึ้นอยู่กับค่าลักษณะเฉพาะของเมตริกซ์ $x \geqslant 2$ และ S เป็นจำนวนช่วงของเวลา

3.3 วิธีการรวมโหมด

จำนวนการคำนวณเมื่อใช้วิธีอินทิเกรตโดยตรง จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนช่วงของเวลาของการวิเคราะห์ ดังนั้นการใช้วิธีอินทิเกรตโดยตรงให้มีประสิทธิภาพในการหาการตอบสนองของโครงสร้างจะต้องอยู่ในช่วงเวลาสั้น ๆ อย่างไรก็ตามการอินทิเกรตในช่วงเวลาใด ๆ อาจจะทำให้มีประสิทธิภาพกว่า เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงสมการ (3.1) ในรูปแบบที่ทำให้การหาผลเฉลยใช้ขั้นตอนน้อยที่สุด โดยเฉพาะจำนวนการคำนวณจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับความกว้างของแถบสมมาตรของเมตริกซ์ของสติฟเนส

3.3.1 <u>การเปลี่ยนฐานในรูปแบบการเคลื่อนที่ทั่วไป</u>

(Change of Basis to Modal Generalized Displacements)

กำหนดให้ การเคลื่อนที่ U เป็นดังสมการ (3.2)

$$\underset{\sim}{U}(t) = \underset{\sim}{\Phi}\underset{\sim}{X}(t) \tag{3.2}$$

ซึ่ง $\underset{\sim}{\Phi}$ เป็นเมตริกซ์ของการแปลง (Transformation Matrix) ซึ่งมีขนาด n x n และสามารถหาค่าได้

$\underset{\sim}{X}(t)$ เป็นเวคเตอร์ของการเคลื่อนที่ทั่วไป (Generalized Displacement) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา t มีขนาดเป็น n

แทนสมการ (3.2) ลงในสมการ (3.1) และคูณ $\underset{\sim}{\Phi}^T$ เข้าข้างหน้าทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\bar{\underset{\sim}{M}}\ddot{\underset{\sim}{X}}(t) + \bar{\underset{\sim}{C}}\dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \bar{\underset{\sim}{K}}\underset{\sim}{X}(t) = \bar{\underset{\sim}{R}}(t) \tag{3.3}$$

ซึ่ง

$$\begin{aligned} \bar{\underset{\sim}{M}} &= \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi} \\ \bar{\underset{\sim}{C}} &= \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{\Phi} \\ \bar{\underset{\sim}{K}} &= \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi} \\ \bar{\underset{\sim}{R}} &= \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{R} \end{aligned} \tag{3.4}$$

เมตริกซ์ $\underset{\sim}{\Phi}$ สามารถหาได้จากสมการของการสั่นไหวโดยอิสระและไม่มีการสูญเสียพลังงานเนื่องจากการหน่วง ดังนั้น สมการ (3.1) จะเปลี่ยนเป็น

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{0} \tag{3.5}$$

ซึ่งมีผลเฉลยอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{\phi} \, \mathrm{Sin}\, \omega(t - t_o) \qquad (3.6)$$

ซึ่ง $\underset{\sim}{\phi}$ เป็นเวคเตอร์ที่มีขนาด n

t เป็นเวลาที่เปลี่ยนไป

t_o เป็นเวลาที่เริ่มต้น

ω เป็นค่าความถี่ของการสั่นไหวแบบอิสระ (Frequency of Free Vibration)

แทนสมการ (3.6) ลงในสมการ (3.5) จะได้

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\phi} = \omega^2 \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\phi} \qquad (3.7)$$

สมการ (3.7) เป็นการแก้ปัญหาเจาะจง (Eigenproblem) ซึ่งจะได้ผลเฉลย n ชุด $(\omega_1^2, \underset{\sim}{\phi}_1)$, $(\omega_2^2, \underset{\sim}{\phi}_2)$, ..., $(\omega_n^2, \underset{\sim}{\phi}_n)$ โดยที่เวคเตอร์เจาะจง (Eigenvector) จะมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของเมตริกซ์ของมวล (M-orthonormalized) คือ

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\phi}_j &= 1 \quad , \quad i = j \\ &= 0 \quad , \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\text{และ} \quad 0 \leqslant \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \omega_3^2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n^2 \qquad (3.9)$$

เวคเตอร์ $\underset{\sim}{\phi}_i$ เรียกว่า เวคเตอร์ของรูปแบบของโหมด (Mode Shape) ลำดับที่ i ซึ่งจะมีความถี่ของการสั่นไหวแบบอิสระเป็น ω_i ดังนั้นสมการ (3.5) จะได้คำตอบ n คำตอบ คือ

$$\underset{\sim}{\phi}_i \sin \omega_i (t - t_o) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (3.10)$$

ให้ $$\underset{\sim}{\Phi} = \{ \underset{\sim}{\phi}_1 , \underset{\sim}{\phi}_2 , \ldots , \underset{\sim}{\phi}_n \}$$

$$\underset{\sim}{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

ซึ่งสามารถเขียนสมการ (3.7) สำหรับผลเฉลย n ชุดได้ดังนี้ คือ

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi}\underset{\sim}{\Omega}^2 \tag{3.12}$$

โดย $\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{\Omega}^2 \quad , \quad \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{I}$ (3.13)

จะได้ สมการสมดุลย์ซึ่งสอดคล้องกับการเคลื่อนที่ทั่วไปในโหมดต่าง ๆ (Modal Generalized Displacement) ดังนี้

$$\ddot{\underset{\sim}{X}}(t) + \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{C}\underset{\sim}{\Phi}\dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \underset{\sim}{\Omega}^2\underset{\sim}{X}(t) = \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{R}(t) \tag{3.14}$$

ถ้าที่เวลา $t = 0$ กำหนดให้ $\underset{\sim}{U}(0) = \underset{\sim}{U}_o$ และ $\dot{\underset{\sim}{U}}(0) = \dot{\underset{\sim}{U}}_o$ เราจะเขียนได้ว่า

$$\underset{\sim}{X}_o = \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{U}_o \quad , \quad \dot{\underset{\sim}{X}}_o = \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{U}}_o \tag{3.15}$$

3.3.2 <u>วิเคราะห์ผลเมื่อไม่มีการสูญเสียพลังงาน</u>

สมการ (3.14) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\ddot{\underset{\sim}{X}}(t) + \underset{\sim}{\Omega}^2\underset{\sim}{X}(t) = \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{R}(t) \tag{3.16}$$

ซึ่งสามารถเขียนแยกเป็น n สมการได้ดังนี้

$$\ddot{X}_i(t) + \omega_i^2 X_i(t) = r_i(t)$$

ซึ่ง $r_i(t) = \underset{\sim}{\phi}_i^T\underset{\sim}{R}(t) \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n$ (3.17)

เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับสมการ (3.17) ลำดับที่ i จะได้จากสมการ (3.15)

$$X_i\big|_{t=0} = \underset{\sim}{\phi}_i^T\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{U}_o$$
$$\dot{X}_i\big|_{t=0} = \underset{\sim}{\phi}_i^T\underset{\sim}{M}\dot{\underset{\sim}{U}}_o \tag{3.18}$$

สมการ (3.17) ใช้วิธีอินทิเกรตของดูแฮมเมล (Duhamel Integral) จะได้

014159

$$X_i(t) = 1/\omega_i \int_o^t r_i(\tau) \text{ Sin } \omega_i(t - \tau)d\tau + \alpha_i \text{ Sin } \omega_i t + \beta_i \text{ Cos } \omega_i t \quad (3.19)$$

ซึ่ง α_i และ β_i เป็นเงื่อนไขเริ่มต้นที่ได้จากสมการ (3.18)

เนื่องจากทุกสมการในสมการ (3.17) ก็สามารถคำนวณผลเฉลยแต่ละชุดโดยอิสระ ดังนี้

$$\underset{\sim}{U}(t) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\phi}_i X_i(t) \quad (3.20)$$

3.3.3 <u>วิเคราะห์ผลเมื่อมีการสูญเสียพลังงาน</u>

สมการสมดุลย์ก็จะเป็นไปตามสมการ (3.14) ในการวิเคราะห์นี้จะเปลี่ยนรูปของเมตริกซ์ $\underset{\sim}{C}$ เป็นดังสมการ

$$\underset{\sim}{\phi}_i^T \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\phi}_j = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (3.21)$$

ซึ่ง ξ_i เป็นอัตราการสูญเสียพลังงาน และ

δ_{ij} = 1 เมื่อ $i = j$

= 0 เมื่อ $i \neq j$

ดังนั้นสมการ (3.14) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\ddot{X}_i(t) + 2\omega_i \xi_i \dot{X}_i(t) + \omega_i^2 X_i = r_i(t) \quad (3.22)$$

ซึ่ง $r_i(t)$ และเงื่อนไขเริ่มแรกของ $X_i(t)$ ได้ดังสมการ (3.17) และสมการ (3.18) ในทำนองเดียวกันสมการ (3.22) ใช้วิธีอินทิเกรตของดูแฮมเมล (Duhamel Integral) จะได้

$$X_i(t) = 1/\bar{\omega}_i \int_o^t r_i(\tau) e^{-\omega_i \xi_i (t - \tau)} \text{Sin } \bar{\omega}_i(t - \tau)d\tau + e^{-\omega_i \xi_i t}(\alpha_i \text{ Sin } \bar{\omega}_i t + \beta_i \text{ Cos } \bar{\omega}_i t) \quad (3.23)$$

ซึ่ง $\bar{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ (3.24)

โดยที่ $\bar{\omega}_i$ คือความถี่ของการสั่นไหวเมื่อมีการหน่วง และค่าของการเคลื่อนที่ $\underset{\sim}{U}(t)$ จะหาได้จากสมการ (3.20)

3.4 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์โครงสร้างข้อแข็ง 2 มิติ โดยใช้ทฤษฎีทางพลศาสตร์จะเกิดปัญหาทางคณิตศาสตร์ขึ้นในทุก ๆ ขั้นตอน ซึ่งจะต้องหาวิธีในการแก้ปัญหานั้น ๆ ให้เหมาะสมกับการประยุกต์กับเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งมีหน่วยความจำหลักขนาดเล็ก ดังนั้นในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ จึงต้องใช้หน่วยความจำหลักให้มีประโยชน์มากที่สุด และจะต้องใช้หน่วยความจำสำรองในการเก็บข้อมูลที่ไม่จำเป็นในการคำนวณขณะนั้น เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณขั้นต่อไป

3.1.4 วิธีแอ็คทิฟว์ คอลัมน์

วิธีแอ็คทิฟว์ คอลัมน์ เป็นวิธีการเปลี่ยนรูป (Decompose) เมตริกซ์ให้อยู่ในลักษณะ $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{L}^T$ โดยมีหลักการดังนี้

ให้ $\underset{\sim}{L}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีสัมประสิทธิ์เหนือแนวทะแยงมุมเป็นศูนย์ และในแนวทะแยงมุมมีค่าเป็นหนึ่ง

$\underset{\sim}{D}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์หมด ยกเว้นในแนวทะแยงมุม

สมมุติ $\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{R}$ (3.25)

ซึ่ง $\underset{\sim}{K}$ เป็นเมตริกซ์ที่เราต้องการทำให้เป็น $\underset{\sim}{L}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{L}^T$ ซึ่งเก็บข้อมูลแบบแถบสมมาตรที่แปรเปลี่ยนได้ (Sky - line) ดังลักษณะของตัวอย่าง

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & k_{33} & k_{34} & 0 & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix}$$

การเก็บสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์ $\underset{\sim}{K}$ แบบ 2 มิติ

$$[A] = \begin{bmatrix} a(1) & a(3) & & a(9) & & \\ & a(2) & a(5) & a(8) & & \\ & & a(4) & a(7) & & a(15) \\ & & & a(6) & a(11) & a(14) \\ & & & & a(10) & a(13) \\ & & & & & a(12) \end{bmatrix} : [MAXA] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

การเก็บสัมประสิทธิ์ของเมตริกซ์ $\underset{\sim}{K}$ แบบเวคเตอร์

$\underset{\sim}{U}$ เป็นเวคเตอร์ของตัวที่ไม่ทราบค่า

$\underset{\sim}{R}$ เป็นเวคเตอร์ของค่าคงที่

จะได้ $$d_{11} = k_{11} \qquad (3.26)$$

หา l_{ij} และ d_{jj} ที่แนวตั้ง j ซึ่ง $j = 2,3,\ldots,n$ ดังสมการต่อไปนี้

$$g_{m_j,j} = k_{m_j,j} \qquad (3.27)$$

$$g_{ij} = k_{ij} - \sum_{r=m_m}^{i-1} l_{ri} g_{rj} \quad , \quad i = m_j+1,\ldots,j-1 \qquad (3.28)$$

ซึ่ง m_i, m_j เป็นตำแหน่งแนวนอน (row) ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์เป็นตัวแรกในตำแหน่งแนวตั้ง (column) ที่ i และ j ตามลำดับ

m_m เป็นค่าที่มากที่สุดระหว่าง m_i กับ m_j

$$l_{ij} = g_{ij} / d_{ii} \quad , \quad i = m_j,\ldots,j-1 \qquad (3.29)$$

$$d_{jj} = k_{jj} - \sum_{r=m_j}^{j-1} l_{rj} g_{rj} \qquad (3.30)$$

สมการ (3.26) - (3.30) เป็นวิธีการทำเมตริกซ์ $\underset{\sim}{K}$ ให้เป็น $\underset{\sim}{LDL}^T$ ตามต้องการ

3.4.2 วิธีการทำซ้ำในสเปซย่อย

วิธีการทำซ้ำในสเปซย่อย เป็นวิธีหนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่ใช้แก้ปัญหาของสมการ (3.12) เพื่อหาค่า $\underset{\sim}{\phi}$ และ ω ซึ่งวิธีนี้ Bathe (7,8) อ้างว่าเป็นวิธีที่ดีที่สุดสำหรับการแก้ปัญหาเจาะจงโดยการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์แบบเก็บข้อมูลโดยใช้หน่วยความจำสำรองเป็นหลัก วิธีนี้มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $\underset{\sim}{X}$ เป็นค่าสมมุติของ $\underset{\sim}{\Phi}$ จะได้

$$\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Lambda} \qquad (3.31)$$

คูณ $\underset{\sim}{\Lambda}^{-1}$ เข้าข้างหลังของทั้ง 2 ข้าง และให้

$$\underset{\sim}{\bar{X}} = \underset{\sim}{X}\underset{\sim}{\Lambda}^{-1} \qquad (3.32)$$

$$\underset{\sim}{Y} = \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X} \qquad (3.33)$$

จากสมการ (3.31) จะได้ $K\bar{X} = Y$ (3.34)

สำหรับเมตริกซ์ $\underset{\sim}{\bar{X}}$ จะเก็บเวคเตอร์ไว้เท่ากับจำนวนโหมดที่ต้องการ และในการทำซ้ำครั้งที่ k จะได้เมตริกซ์ของโหมด (Modal Matrix) $\underset{\sim}{X}^{(k)}$ ตามสมการ

$$\underset{\sim}{X}^{(k)} = \underset{\sim}{\bar{X}}^{(k)}\underset{\sim}{Q}^{(k)} \qquad (3.35)$$

เมื่อพิจารณาที่ $\bar{\underset{\sim}{X}}^{(k+1)}$ จากสมการ (3.34) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\underset{\sim}{K}\bar{\underset{\sim}{X}}^{(k+1)} = \underset{\sim}{Y}^{(k)} \tag{3.36}$$

เมตริกซ์ของสติฟเนสและมวลจะถูกแปลงรูปแบบตามหลักการของ Ritz คือ

$$\underset{\sim}{K}^{*(k+1)} = \bar{\underset{\sim}{X}}^{T(k+1)}\underset{\sim}{Y}^{(k)} \tag{3.37}$$

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}^{(k+1)} = \underset{\sim}{M}\bar{\underset{\sim}{X}}^{(k+1)} \tag{3.38}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*(k+1)} = \bar{\underset{\sim}{X}}^{T(k+1)}\bar{\underset{\sim}{Y}}^{(k+1)} \tag{3.39}$$

แทนสมการ (3.35) ลงในสมการ (3.31) และคูณ $\bar{\underset{\sim}{X}}^{T(k+1)}$ เข้าข้างหน้าทั้ง 2 ข้าง จะได้

$$\underset{\sim}{K}^{*(k+1)}\underset{\sim}{Q}^{(k+1)} = \underset{\sim}{M}^{*(k+1)}\underset{\sim}{Q}^{(k+1)}\underset{\sim}{\Lambda}^{(k+1)} \tag{3.40}$$

ค่า $\underset{\sim}{Q}^{(k+1)}$ ที่ได้จะนำไปคำนวณหา $\underset{\sim}{Y}^{(k+1)}$ ซึ่งไว้ใช้ในการคำนวณรอบต่อไป

$$\underset{\sim}{Y}^{(k+1)} = \bar{\underset{\sim}{Y}}^{(k+1)}\underset{\sim}{Q}^{(k+1)} \tag{3.41}$$

เราจะหาเวคเตอร์เจาะจงจาก

$$\underset{\sim}{X}^{(k+1)} = \bar{\underset{\sim}{X}}^{(k+1)}\underset{\sim}{Q}^{(k+1)} \tag{3.42}$$

ซึ่ง $\underset{\sim}{\Lambda}^{(k+1)} \rightarrow \underset{\sim}{\Lambda}$ และ $\underset{\sim}{X}^{(k+1)} \rightarrow \underset{\sim}{\Phi}$ เมื่อ $k \rightarrow \infty$