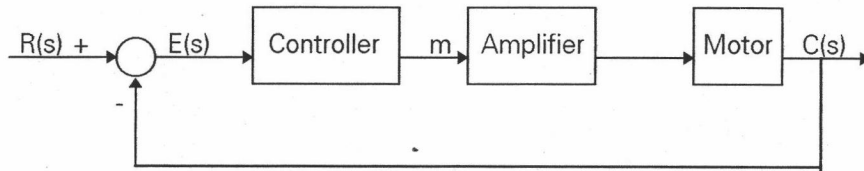




บทที่ 2

ทฤษฎีการควบคุมและโมเดลทางคณิตศาสตร์ของหุ่นยนต์เดินด้วยกลไกสี่ลิงค์ (Control theory and mathematical model of a four bar linkage walking robot)

ระบบการควบคุมระยะทางในการเคลื่อนที่สัมพันธ์กับมุมหรือตำแหน่งของขาในการเคลื่อนที่ซึ่งการควบคุมตำแหน่งโดยทั่วไปเป็นลักษณะแบบลูปปิดดังรูป



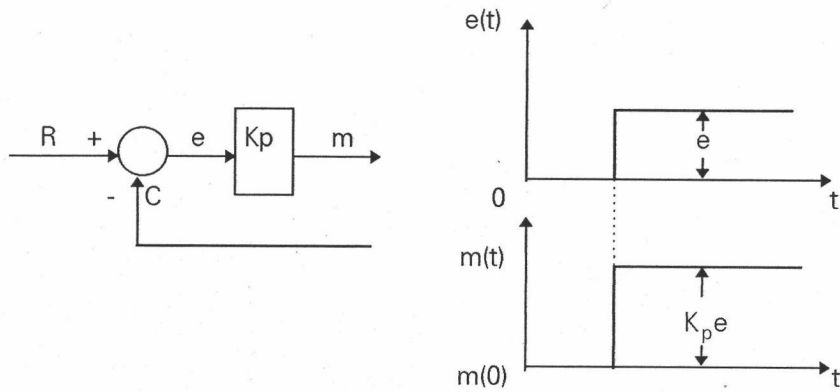
รูปที่ 2.1 แผนภาพของลูปการควบคุมมอเตอร์

ในระบบการควบคุมมอเตอร์ จุดมุ่งหมายของตัวควบคุมก็คือเพื่อที่จะปรับตัวแปรเอาต์พุต(C) ของระบบให้เข้าสู่ค่าที่กำหนดไว้ (ตัวแปรอ้างอิง R) และจะต้องรักษาค่าตัวแปรดังกล่าวให้อยู่ที่ค่าที่กำหนดนั้น เพื่อให้เป็นไปตามเป้าหมายนี้ตัวคอนโทรลเลอร์จะต้องแก้ไขผลกระทบของสัญญาณรบกวนจากภายนอกในวิธีทางที่เหมาะสม

ระบบการควบคุมมอเตอร์แบบพื้นฐานแสดงได้ในรูปที่ 2.1 ตัวคอนโทรลเลอร์จะปรับตัวแปรเอาต์พุต(C) โดยใช้สัญญาณควบคุม(m) เพื่อไปทำให้ค่าความผิดพลาด (R-C) มีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ จุดประสงค์ของวิศวกรรมการควบคุมก็เพื่อควบคุมให้ค่าความผิดพลาดมีค่าน้อยที่สุดและมีคุณสมบัติการตอบสนองของระบบที่ดี ด้วยเหตุนี้เราจึงต้องออกแบบตัวควบคุมให้มีส่วนของอินทิเกรเตอร์หรือการควบคุมแบบไอ.รวมเข้าด้วยกันกับการควบคุมแบบปรีอพออร์ชันแนลคอนโทรลเลอร์หรือการควบคุมแบบ พี. ดังนั้นการควบคุมแบบพีจะต้องถูกเปลี่ยนให้เป็น พี.ไอ. หรือแม้กระทั่งเป็น พี.ไอ.ดี ซึ่งเป็นคอนโทรลเลอร์จัดอยู่ในส่วนของการควบคุมแบบคลาสสิกโดยในที่นี้เราจะกล่าวถึงหลักทฤษฎีของการควบคุมแบบพี.ไอ.ควบคุมที่ใช้กับการควบคุมจริง

คุณสมบัติของตัวคอนโทรลเลอร์แบบพี (Proportional controller)

ปรีอพอพอร์ชันแนลควบคุมสัญญาณตัวแปรเพื่อการแก้ไขของตัวคอนโทรลเลอร์จะเป็นสัดส่วนกับค่าความผิดพลาดดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงตัวคอนโทรลเลอร์แบบพี

$$m = K_p e + m(0) \quad (2-1)$$

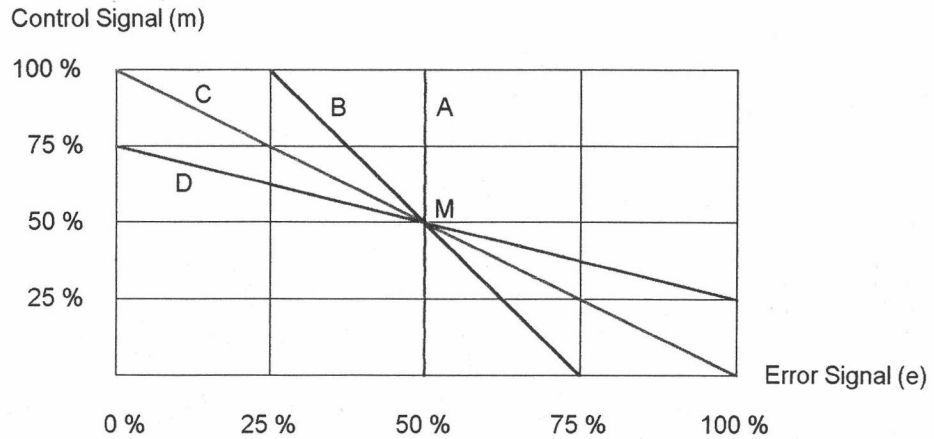
เมื่อ K_p คือกำลังขยายของตัวคอนโทรลเลอร์แบบพี

$m(0)$ คือเอาต์พุตของตัวคอนโทรลเลอร์เมื่อค่าความผิดพลาดเป็นศูนย์

การควบคุมแบบนี้มักจะแสดงอยู่ในรูปของปรีอพอพอร์ชันแนลแบนด์ (PB) มีหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์ค่า PB คือ ค่าความผิดพลาดที่ทำให้สัญญาณควบคุมเปลี่ยนไป 100% เมื่อ PB เท่ากับ 50% สัญญาณควบคุมจะเปลี่ยนไป 100% ดังแสดงในรูปที่ 2.3

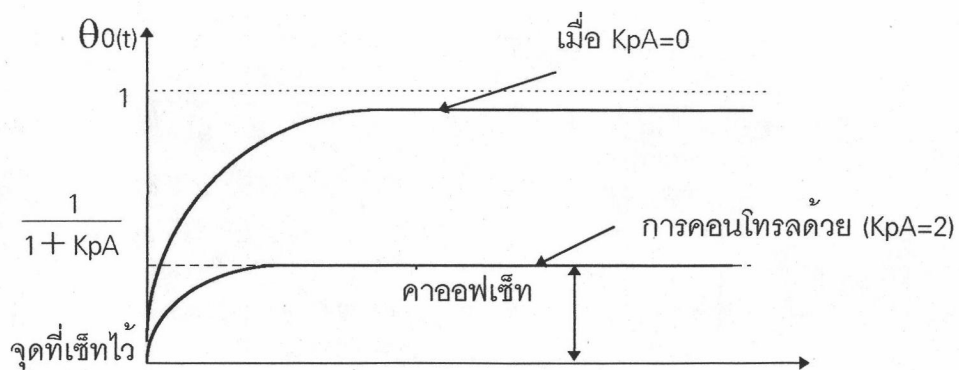
$$PB = \frac{1}{K_p} \times 100 \quad [\%] \quad (2-2)$$

A : PB = 0%	'	$K_p = \infty$ (100/0)
B : PB = 50%	'	$K_p = 2$ (100/50)
C : PB = 100%	'	$K_p = 1$ (100/100)
D : PB = 200%	'	$K_p = 0.5$ (100/200)
M : เป็นค่าคงที่		



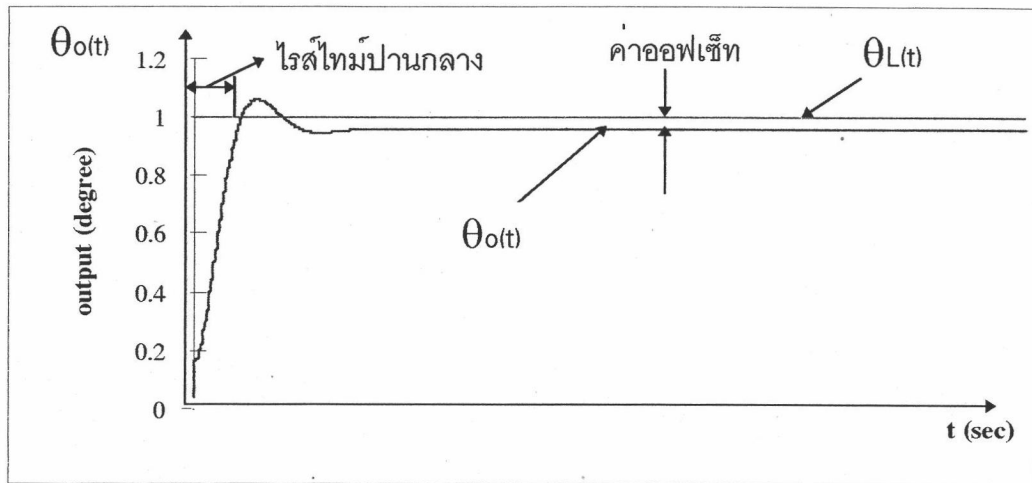
รูปที่ 2.3 ปรีออปพอร์ชันนัลแบนด์

จากรูปที่ 2.3 แสดงว่าค่า PB เป็นตัวบอกความไวของการแก้ความผิดพลาดจึงอาจเรียกค่า K_p ว่าความไวของปรีออปพอร์ชันแนลควบคุมได้อีกชื่อหนึ่ง ข้อเสียของการควบคุมแบบปรีออปพอร์ชันแนลคือกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงภาระจะเกิดค่าออฟเซ็ท (ค่าผิดพลาด) ของสัญญาณกระบวนการ (C) ที่สถานะคงที่ โดยเฉพาะกับกระบวนการที่มีไทม์แล็กมากๆ การแก้ไขด้วยการลดค่า PB แต่ก็ไม่สามารถกำจัดค่าได้หมด เพราะถ้าค่า K_p สูงเกินไปการควบคุมจะเกิดการแกว่ง



รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองของระบบควบคุมแบบพีต่อการเปลี่ยนแปลงภาระแบบหนึ่งหน่วยขั้น

ออฟเซ็ทความผิดพลาดจะเป็นตัวจำกัดการใช้งานของระบบการควบคุมแบบพี หรือเรียกอีกอย่างว่า ปรีออปพอร์ชันแนลและการควบคุมแบบนี้จะใช้งานได้ในบางกรณีเท่านั้น



รูปที่ 2.5 ผลตอบสนองของระบบที่ควบคุมต่อการเปลี่ยนแปลงของอินพุตแบบหนึ่งหน่วยขั้น

ปริอบพอร์ชันแนลควบคุมจะใช้งานได้เฉพาะในระบบที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงภาระมากนักหรือระบบที่มีกระบวนการที่มีไทม์แล็กน้อยหมายถึงระบบจะต้องมีปริอบพอร์ชันแนลแบนด์นอย (K_p มีค่ามาก) ซึ่งจะทำให้ค่าออฟเซ็ทความผิดพลาดลดลง

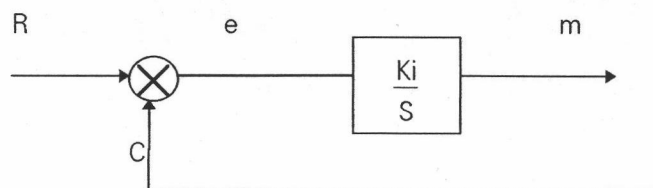
อินติกรัลคอนโทรล

การควบคุมแบบอินติกรัล ค่าสัญญาณควบคุม (m) จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับค่าอินทิกรัลของสัญญาณความผิดพลาด (e) จึงสามารถแก้ค่าออฟเซ็ทได้ การควบคุมแบบนี้บางที่เรียกว่า รีเซ็ทเอคชั่น

$$\frac{dm}{dt} = K_i e \quad (2-3)$$

เมื่อ K_i = ค่าคงที่ของเกนไอ.

$T_i = 1/K_i$: อินติกรัลไทม์ มีหน่วยเป็น (วินาที)

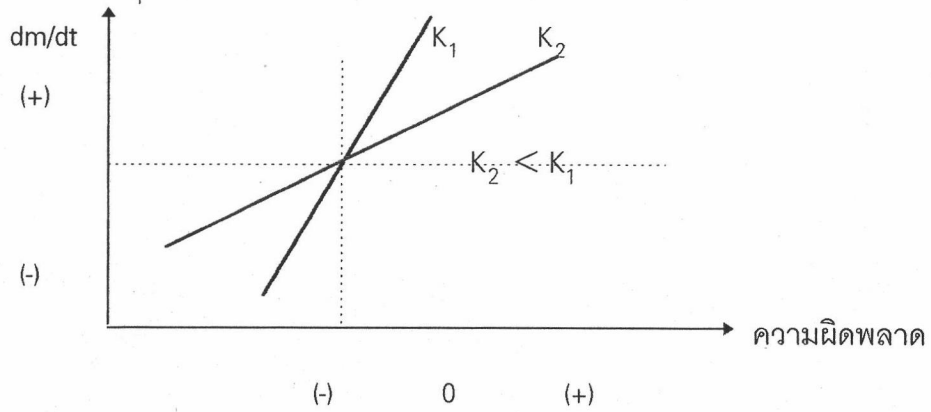


รูปที่ 2.6 แสดงคอนโทรลเลอร์แบบไอ.

จากสมการที่(2-3) เราหาเอาท์พุทของคอนโทรลเลอร์

$$m = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t)dt + m(0)$$

$$m = \frac{1}{T_i} \frac{e}{s} + m(0) = K_i \frac{e}{s} + m(0) \tag{2-4}$$



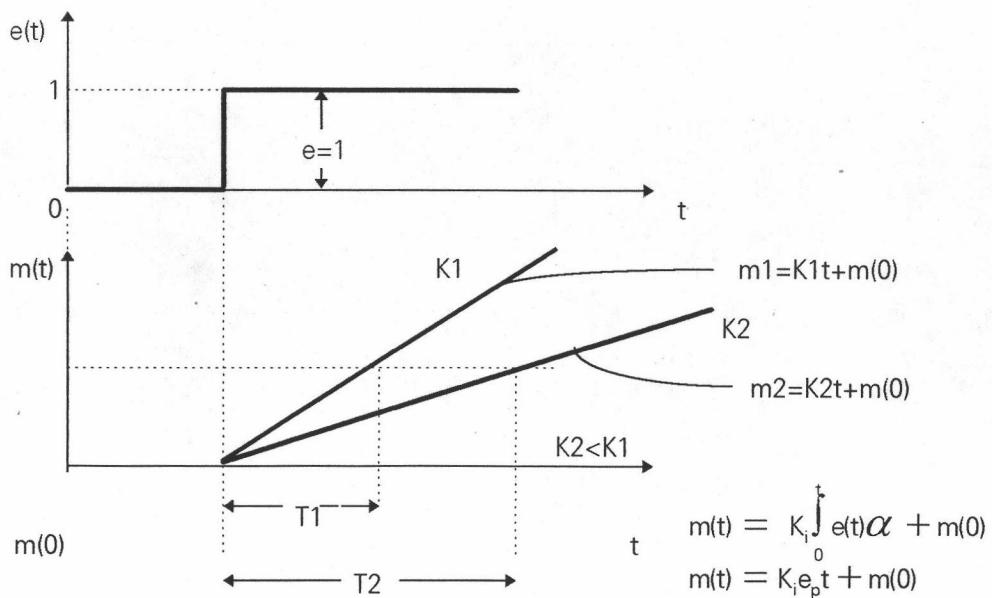
รูปที่ 2.7 แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของเอาท์พุทขึ้นอยู่กับกำลังขยายและค่าความผิดพลาด

เมื่อ $m(0) =$ เอาท์พุทของคอนโทรลเลอร์ที่เวลา $t = 0$

เมื่อความผิดพลาดคงที่ m เอาท์พุทของคอนโทรลเลอร์จะเป็นฟังก์ชันกับเวลา

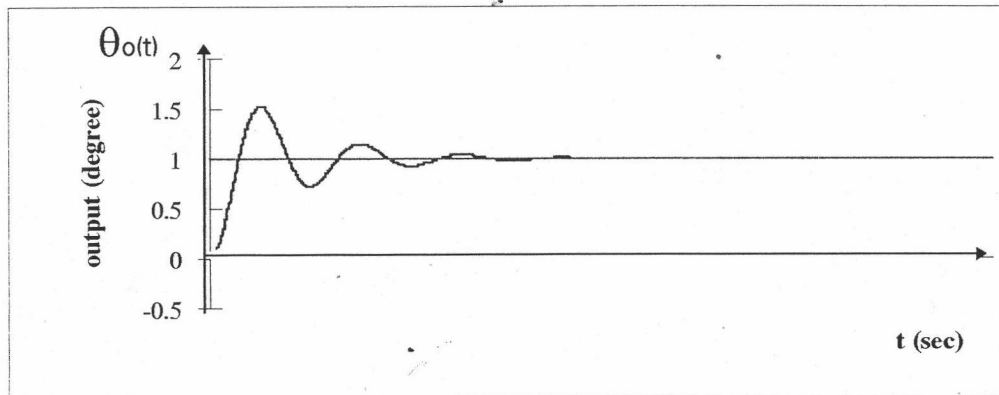
ถ้าระบบมี $K_i = K_1$ จะมีอินทิกรัลไทม์ $= T_1$

ถ้าระบบมี $K_i = K_2$ จะมีอินทิกรัลไทม์ $= T_2$



รูปที่ 2.8 ผลตอบสนองของระบบอินทิกรัลคอนโทรลต่อการเปลี่ยนแปลงของอินพุทในลักษณะหนึ่งหน่วยขั้น

T_i (อินทิกรัลไทม์) คือเวลาที่ใช้ในการเพิ่มค่าของสัญญาณควบคุม (m) จนกว่าสัญญาณผลต่างจะหมดไป ดังนั้นถ้าค่า T_i น้อยการเกิดจะเกิดเร็ว ทำให้สัญญาณ $e = 0$ เร็วแต่มีข้อเสียที่ว่า ถ้าค่า T_i น้อยเกินไปจะทำให้ค่า ζ ของกระบวนการมีค่าต่ำ อาจทำให้ระบบขาดเสถียรภาพ (Unstable) ได้ แต่ถ้าให้ T_i มากเกินไป ค่า Stabilizing time ของกระบวนการจะยาวนานเกินไป



รูปที่ 2.9 ผลตอบสนองของระบบไอควบคุมต่อการเปลี่ยนแปลงของอินพุท (θ_i) ในลักษณะหนึ่งหน่วยขั้น

ถ้ากระบวนการที่มีไทม์แล็กมีค่ามากจะทำให้ผลตอบสนองของระบบเกิดแกว่งได้ ดังนั้นอินทิกรัลควบคุมจะไม่ถูกนำไปใช้โดดเดี่ยวแต่ถ้าจะนำไปใช้ก็จะใช้กับกระบวนการที่มีไทม์แล็กน้อย

ปรีอพออร์ชันแนล - อินทิกรัลควบคุม

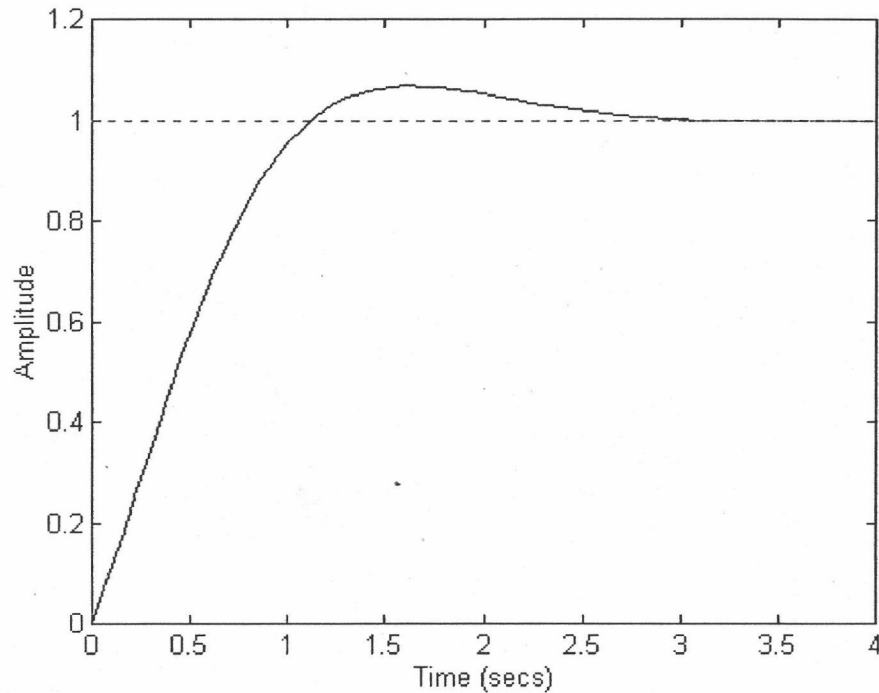
การควบคุมแบบนี้เราจะหาสัญญาณควบคุม (m) ได้ตามสมการที่ (2-5)

$$m = K_p K_i \int_0^t e \, dt + m(0) \quad (2-5)$$

ข้อดีของพี.ไอ ควบคุม คือการควบคุมแบบนี้จะทำให้คุณสมบัติของทั้งสองแบบคือปรีอพออร์ชันแนลและแบบอินทิกรัลซึ่งสามารถทำให้ค่าออฟเซตในแบบปรีอพออร์ชันแนลหมดไป และ K_i กำลังขยายของการอินทิกรัลสามารถจะปรับค่าได้อย่างอิสระ

ข้อเสียของพี.ไอ ควบคุม คือระบบอาจจะไม่เสถียรภาพ กรณีค่า T_i น้อย และไม่เหมาะสมกับกระบวนการที่มีไทม์แล็กมากๆ เพราะการตอบสนองของตัวแปรกระบวนการ (C) ช้ามากไม่สามารถแก้ข้อผิดพลาดได้ทันเวลา

ระบบพี.ไอ. ควบคุมจะใช้ได้กับระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงภาระมากๆ ได้ แต่ภาระควรจะต้องเปลี่ยนแปลงช้าๆ เมื่อเทียบกับ T_i เพื่อป้องกันไม่ให้เกิดการแกว่งเนื่องจากโอเวอร์ชูทของการอินทิเกรต และระบบมักจะทำให้โอเวอร์ชูทสูงก่อนที่จะเข้าสู่เซตติงไทม์



รูปที่ 2.10 ผลการตอบสนองของระบบพี.ไอ. ควบคุมต่อการเปลี่ยนแปลงอินพุทแบบหนึ่งหน่วยขั้น

การควบคุมแบบประมาณ (Approximate Control)

แม้ว่าในกระบวนการต่างๆ โดยทั่วไป จะเป็นแบบต่อเนื่องของเวลา (continuous in time) แต่กระบวนการต่างๆ ในคอมพิวเตอร์จะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องของช่วงเวลา เนื่องจากการประมวลผลและการแสดงค่าผลลัพธ์ต่างๆ นั้น ต้องอาศัยการสุ่มข้อมูล (sampling) ตามค่าสัญญาณความถี่นาฬิกาของเครื่องคอมพิวเตอร์นั้นๆ นั่นก็เป็นเหตุผลหลักที่จะใช้ในการออกแบบโปรแกรมชุดควบคุมให้มีลักษณะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องของเวลา ซึ่งการควบคุมแบบต่างๆ นั้นมีดังนี้คือ

1. การควบคุมแบบ พี. (Proportional Control) ซึ่งเมื่อเขียนสมการที่ (2-1) ให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง (discontinuous form) จะได้เป็น

$$m_n = K_p e_n \quad (2-6)$$

ถ้าคิดสมการถอยไป 1 คาบการสุ่ม (sampling period) จะได้

$$m_{n-1} = K_p e_{n-1} \quad (2-7)$$

การเปลี่ยนค่าการควบคุมเกิดจากการนำสมการที่ (2-9) มาลบกับสมการที่ (2-10) จะได้

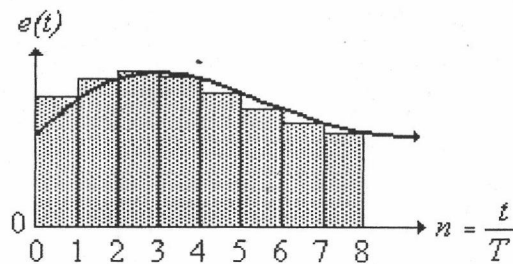
$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = K_p (e_n - e_{n-1}) \quad (2-8)$$

2. การควบคุมแบบ ไอ. (Integral Control) การควบคุมแบบไอ. นั้น ค่าการควบคุมจะเป็นสัดส่วนกับค่าผลรวมของความคลาดเคลื่อนเทียบกับเวลา ตามสมการ

$$m(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

ซึ่ง K_i คือค่าเกนควบคุมแบบไอ. (the integral controller gain)

$$\int_0^{t=nT} e(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^n e_j T$$



รูปที่ 2.11 การอินทิเกรตแบบไม่ต่อเนื่องโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากรูปที่ 2.11 พื้นที่ของความคลาดเคลื่อนใต้กราฟเทียบกับเวลานั้นสามารถประมาณค่าได้ โดยนับผลรวมพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าใต้เส้นโค้ง (rectangular area under the continuous error curve) ซึ่งเป็นค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความคลาดเคลื่อนจุดหนึ่งๆกับช่วงเวลาในการสุ่มค่า ซึ่งผลที่ได้จะเป็นไปตามสมการ

$$m_n = K_i \sum_{j=1}^n T e_j \quad (2-9)$$

เขียนสมการใหม่จะได้

$$m_n = K_i \sum_{j=1}^{n-1} T e_j + K_i T e_n \quad (2-10)$$

และจากสมการที่ (2-10) จะได้ว่า

$$m_{n-1} = K_i \sum_{j=1}^{n-1} T e_j \quad (2-11)$$

นำสมการที่ (2-10) มาลบกับสมการที่ (2-11) จะได้

$$\Delta m_n = m_n - m_{n-1} = K_i T e_n \quad (2-12)$$

ซึ่งสมการที่ได้ก็คือค่าประมาณค่าการเพิ่มขึ้นของค่าควบคุมแบบไม่ต่อเนื่องของการควบคุมแบบอินทิกรัล (the incremental discrete approximation of integral control action)

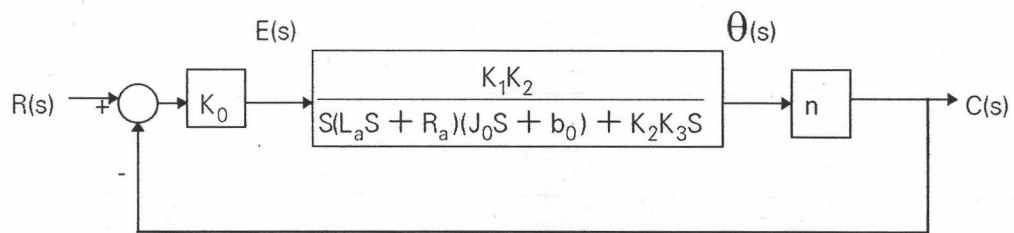
3. การควบคุมแบบไม่ต่อเนื่องของการควบคุมแบบพี.ไอ.

$$\Delta m_n = (\Delta m_n)_p + (\Delta m_n)_i = K_p(e_n - e_{n-1}) + K_i T e_n \quad (2-13)$$

การหาสมการทางคณิตศาสตร์ของระบบโดยการประมาณค่าพารามิเตอร์จากผลการตอบสนอง

ภายใต้ระบบที่เราไม่รู้สมการทางคณิตศาสตร์หรือค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เราอาศัยวิธีการประมาณค่าจากผลการตอบสนองซึ่งระบบในที่นี่เป็นดีซีเซอร์โวควบคุมตำแหน่งด้วยขบวนการแบบลูปปิด ซึ่งมีรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไปคือกำลังสอง ดังนั้นจากลูปการควบคุมตำแหน่งของดีซีมอเตอร์ของระบบรวมเราสามารถเขียนรวมได้เป็นแผนภาพได้ ดังรูปที่

2.12



รูปที่ 2.12 แผนภาพของลูปการควบคุมดีซีเซอร์โวมอเตอร์

โดยที่

r = คำสั่งอ้างอิงในการป้อนเข้าระบบ

e = ค่าสัญญาณเออร์เรอร์

K_0 = ค่าคงที่แปรตาม (Proportional constant)

K_1 = เกนของแอมพลิฟาย

เมื่อกระแสในขดลวดมอเตอร์คงที่ ทอร์กที่เกิดจากมอเตอร์คือ

$$T = K_2 i_a$$

เมื่อ K_2 เป็นค่าคงที่ของทอร์กของมอเตอร์ และ i_a เป็นกระแสในอาร์มาเจอร์ สำหรับวงจรอาร์มาเจอร์

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt} = K_1 e \quad (2-14)$$

เมื่อ K_3 เป็นค่าคงที่ของแบคอีเอ็มเอฟของมอเตอร์ และ θ เป็นระยะทางเชิงมุมของเพลามอเตอร์ สมการสำหรับสมดุลย์ทอร์คคือ

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (2-15)$$

เมื่อ J_0 เป็นความเฉื่อยรวมของมอเตอร์ ภาระ และขบวนเกียร์ไปยังเพลามอเตอร์

เมื่อ b_0 เป็นวิคอสฟริคชันรวมของมอเตอร์ ภาระ และขบวนเกียร์ไปยังเพลามอเตอร์ พังก์ชันถ่ายโอนระหว่างระยะการขจัดเชิงมุมของเพลามอเตอร์และสัญญาณความผิดพลาดได้จากสมการที่ (2-14) และ (2-15) ดังนี้

$$\frac{\Theta(s)}{E(s)} = \frac{K_1 K_2}{S(L_a S + R_a)(J_0 S + b_0) + K_2 K_3 S} \quad (2-16)$$

และเอาท์พุทของการควบคุมผ่านชุดเฟืองทดคือ

$$C(s) = n\Theta(s) \quad (2-17)$$

และจากแผนภาพความสัมพันธ์ระหว่าง $E(s), R(s)$ และ $C(s)$ คือ

$$E(s) = K_0 [R(s) - C(s)] \quad (2-18)$$

และจากรูปแผนภาพ 2.11 สมการถ่ายโอนแบบป้อนไปข้างหน้าของระบบคือ

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{S(L_a S + R_a)(J_0 S + b_0) + K_2 K_3}$$

จากสมการโดยทั่วไป L_a จะมีค่าน้อยๆ ซึ่งสามารถที่จะไม่นำมาคิด ดังนั้นจะได้สมการถ่ายโอนแบบป้อนไปข้างหน้ากลายเป็น

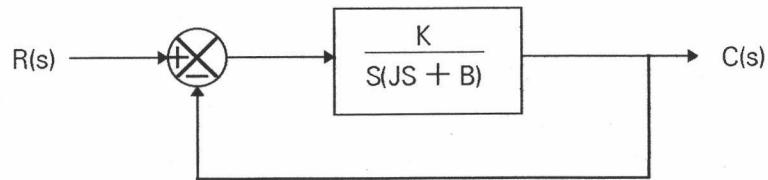
$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{S[R_a (J_0 S + b_0) + K_2 K_3]} \quad (2-19)$$

$$G(s) = \frac{K_0 K_1 K_2 n / R_a}{J_0 S^2 + (b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}) S}$$

จากสมการฟังก์ชันถ่ายโอน $G(s)$ ในสมการที่ (2-19) เราสามารถเขียนให้ง่ายได้เป็น

$$G(s) = \frac{K}{J S^2 + B S + K}$$

และจากแผนภาพรูปที่ 2.12 เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่ง่ายได้เป็นรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดงรูปแบบแผนภาพดีซีเซอร์ไวกับการควบคุมตำแหน่งในรูปแบบง่าย

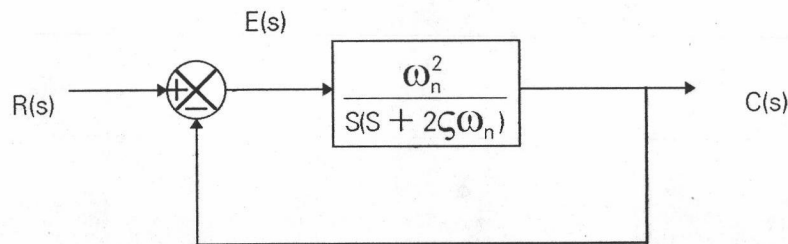
จากรูปแผนภาพ พิจารณาการตอบสนองของระบบภายใต้จำกัดอินพุตสำหรับระบบกำลังสอง ซึ่งจากรูปที่ 2.13 เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{JS^2 + BS + K} \\ &= \frac{K/J}{\left[S + \frac{B}{2J} + \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[S + \frac{B}{2J} - \sqrt{\left(\frac{B}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \end{aligned} \quad (2-20)$$

โพลที่อยู่ภายใต้รูปปิดเป็นจำนวนเชิงซ้อนถ้า $B^2 - 4JK < 0$, และเป็นจำนวนจริงเมื่อ $B^2 - 4JK \geq 0$ พิจารณาผลตอบสนองในช่วงทรานเซียนท์ เพื่อความสะดวกเขียนว่า

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \frac{B}{J} = 2\zeta\omega_n = 2\sigma \text{ และ } \zeta = \frac{B}{B_c} = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

ดังนั้นในเทอมของรูปที่ 2.13 สามารถเขียนใหม่ในเทอมของ ζ และ ω_n ได้ดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 แสดงรูปแบบแผนภาพดีซีเซอร์ไวในระบบกำลังสอง

จากรูปดังกล่าวเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนได้เป็น

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-21)$$

จากรูปสมการเราสามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบในทางไดนามิกส์ด้วย ζ และ ω_n นั่นคือถ้า $0 < \zeta < 1$ โพลภายใต้รูปปิดจะอยู่ทางด้านซ้ายมือของระนาบเอส(S-Plane) ระบบเรียกว่าอันเดอร์แดมป์ การตอบสนองในช่วงทรานเซียนท์มีการกระเพื่อมขึ้นลง และถ้าอัตราส่วนแดมป์ปิงมี

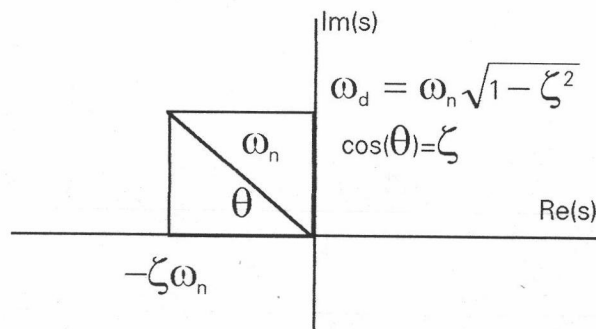
ค่า $\zeta = 1$ ระบบเรียกว่าแดมป์วิกฤต และที่เหนือกว่านั้นระบบเรียกว่าอแดมป์ ซึ่งในการหาพารามิเตอร์ของระบบจริงเราอาศัยการประมาณจากผลการตอบสนองตามความสัมพันธ์ของสมการดังกล่าวนี้

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (2-22)$$

โดยสมการดังกล่าวข้างต้นมีค่าโพลดังนี้

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2-23)$$

และกำหนดให้ $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ เราสามารถกำหนดความสัมพันธ์ของตำแหน่งโพล s_1 และ s_2 กับค่าอัตราส่วนการหน่วง ζ ค่าความถี่ธรรมชาติ ω_n และค่าความถี่แดมป์ ω_d ได้จากรูปที่ 2.15

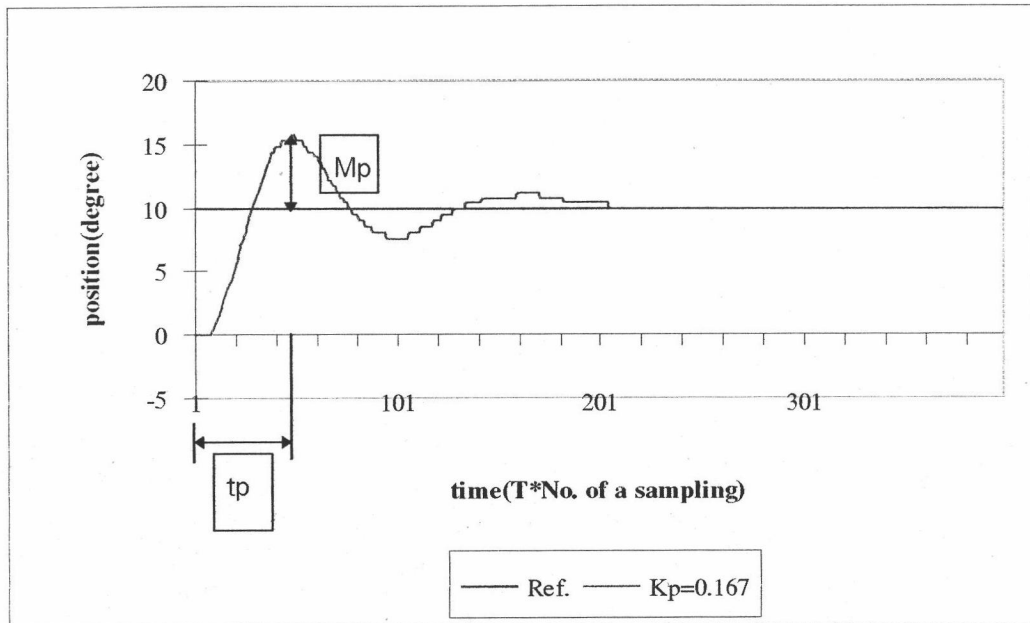


รูปที่ 2.15 แสดงตำแหน่งของโพลหรือซีโร และความสัมพันธ์ระหว่าง ζ และ ω_n หรือ ω_d

เมื่ออินพุตเป็นแบบหนึ่งหน่วยขั้น ทำการอินเวอร์สลาปลาซทรานฟอร์มได้ว่า

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$C(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad (t \geq 0) \quad (2-24)$$



รูปที่ 2.16 แสดงผลการตอบสนองของระบบกำลังสองที่อินพุทแบบขั้น

จากรูปผลการตอบสนองที่อินพุทแบบขั้นได้สมการความสัมพันธ์ของค่าตัวแปรต่างๆดังนี้
 ช่วงเวลาขึ้น(Rise time, t_r) ใช้เวลาที่ผลตอบสนองของระบบจาก 0% ถึง 100% ของค่าผลตอบสนองในสถานะอยู่ตัว(steady state response) เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $C(t_r) = 1$ ดังนั้นเราจะสามารถหาค่า t_r ได้ดังนี้

$$C(t_r) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left(\cos(\omega_d t_r) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_r) \right) \quad (t \geq 0) \quad (2-25)$$

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left(\frac{\omega_d}{-\zeta\omega_n} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (\text{กรณี } 0-100\%) \quad (2-26)$$

เวลาของค่าพิก(Peak time, t_p) สามารถหาได้โดยการหาอนุพันธ์(derivative) ของสมการ $C(t)$ แล้วหาเวลาที่ทำให้อนุพันธ์ของสมการ $C(t)$ นี้มีค่าเป็นศูนย์ เวลาแรกที่ทำให้อนุพันธ์นี้เป็นศูนย์คือ t_p

$$\left. \frac{dC(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = (\sin(\omega_d t_p)) \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0 \quad (2-27)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sin(\omega_d t_p) = 0 \quad (2-28)$$

ดังนั้นค่า t_p คือเวลาแรกที่ไม่ใช่ศูนย์หรือ $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

โอเวอร์ชูทสูงสุด(Maximum overshoot M_p) การหา M_p เราจะใช้ค่า t_p ที่หาได้แล้วแทนค่าลงในสมการผลตอบสนอง $C(t)$ นำค่าดังกล่าวนี้ไปลบด้วยค่า 1 หรือสัญญาณคำสั่งซึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นก็จะได้ค่า M_p

$$\begin{aligned} M_p &= C(t_p) - 1 \\ &= -e^{-\zeta\omega_n\left(\frac{\pi}{\omega_d}\right)} \left(\cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right) \end{aligned} \quad (2-29)$$

ถ้าคิดเป็นเปอร์เซ็นต์จะได้ว่า

$$\%M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi} \times 100\% \quad (2-30)$$

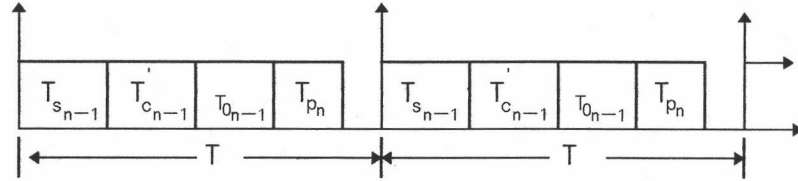
สำหรับกรณีที่ $0 < \zeta < 0.6$ เราสามารถประมาณได้ว่า

$$M_p \cong 1 - \frac{\zeta}{0.6} \quad (2-31)$$

หลักการเขียนโปรแกรมในการควบคุมให้อยู่ในค่าเวลาของการสุ่ม

จากสมการพื้นฐานของการควบคุมแบบคลาสสิกซึ่งอยู่ในรูปของสมการต่อเนื่อง ซึ่งเมื่อนำมาใช้จริงในการควบคุมการควบคุมในลักษณะดังกล่าวไม่สามารถแสดงผลการควบคุมในลักษณะของข้อความหรือรูปได้ตามความต้องการซึ่งระบบการควบคุมในลักษณะดังกล่าวต้องใช้ฮาร์ดแวร์ที่มีการตอบสนองในทันทีทันใดซึ่งเป็นฮาร์ดแวร์ที่มีราคาสูง ดังนั้นในการพิจารณาถึงสิ่งดังกล่าวเราต้องพิจารณาถึงความเหมาะสมเป็นระบบๆไป ซึ่งสำหรับระบบนี้เราสามารถที่จะกำหนดรูปแบบของการควบคุมจากการควบคุมแบบต่อเนื่องเป็นการควบคุมโดยประมาณซึ่งให้ผลลัพธ์ที่ได้เช่นเดียวกัน สำหรับระบบซึ่งไม่ต้องการการตอบสนองที่ไวและให้เสถียรภาพที่ดีและในทางตรงข้ามกัน บางระบบที่ทำการควบคุมแบบต่อเนื่องอาจจะทำให้ระบบขาดเสถียรภาพอันเนื่องจากการตอบสนองของระบบต่อสัญญาณการควบคุมไม่สามารถกระทำทัน ซึ่งในที่นี้เราจะกล่าวถึงหลักการในการควบคุมระบบแบบสุ่มปิดด้วยคอนโทรลเลอร์แบบประมาณ สิ่งสำคัญในการควบคุมแบบประมาณก็คือการกำหนดคาบหรือเวลาในการสุ่ม(Sampling time) ต้องพิจารณาถึงอัตราเร็วในการตอบสนองต่ออินพุทและคอมพิวเตอร์ไทม์ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วต้องเท่ากับหรือน้อย

กว่าเวลาซึ่งต้องการให้ระบบตอบสนองต่ออินพุทหรือเวลาในการสุ่ม ดังรูปอัลกอริทึมของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในแต่ละรูปหรือคาบการสุ่มของการควบคุม



รูปที่ 2.17 ไดอะแกรมเวลาสำหรับอัลกอริทึมในรูปการควบคุม

T_s = เวลาที่ใช้ในการป้อนกลับของเซ็นเซอร์ที่ใช้ในการควบคุม

T_c = เวลาที่คอมพิวเตอร์ใช้ในการประมวลผลสัญญาณควบคุมจากการนำค่าสัญญาณควบคุมที่ได้คำนวณไว้ก่อนในส่วนของ T_p

T_o = เวลาที่ระบบได้รับสัญญาณการควบคุม

T_p = เวลาที่ใช้ในการคำนวณสัญญาณควบคุมล่วงหน้าเพื่อลดค่าคอมพิวเตอร์ใหม่

จากลอการิทึมนี้เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ในรูปของเวลาที่ใช้ในการสุ่มดังนี้

$$T_s + T_c + T_o < T$$

ซึ่งการกำหนดเวลาการสุ่มนี้มีผลต่อเสถียรภาพของระบบ โดยผลกระทบดังกล่าวเราสามารถกำหนดด้วยค่าตามนี้คือ

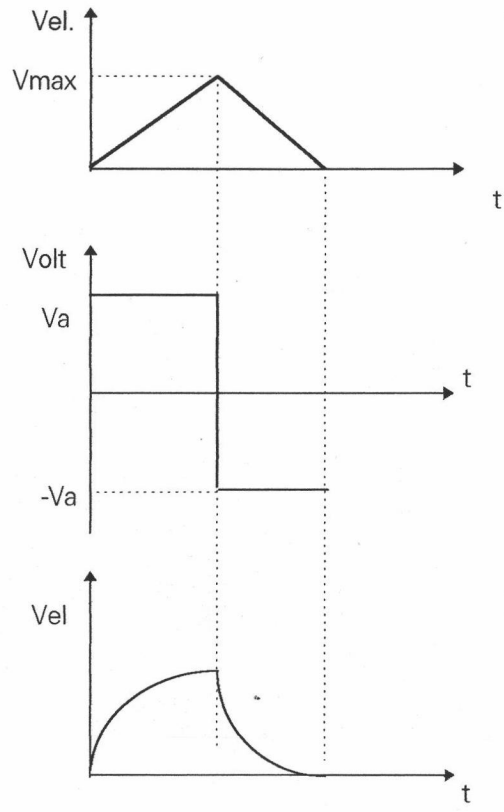
$$T_s + T_c + T_o < \frac{T}{10}$$

แต่ในบางระบบมีความจำเป็นที่จะต้องใช้การสุ่มที่สูงที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ ให้ได้ประสิทธิภาพสูงสุดในกรณีนี้จำเป็นต้องจำกัดเวลาการสุ่มคือ

$$T_s + T_c + T_o \approx T$$

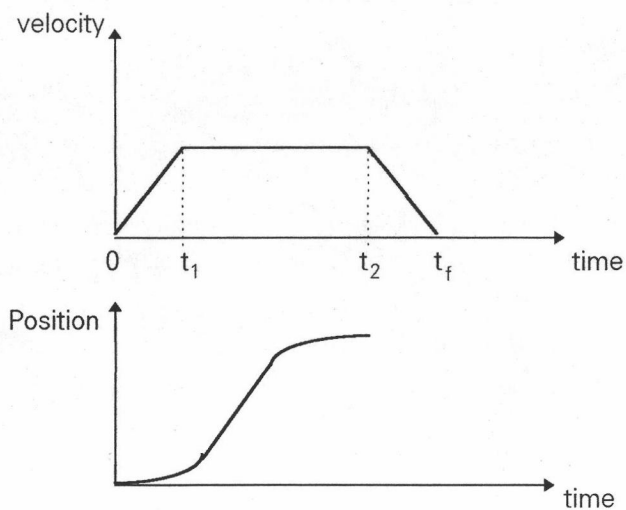
การสร้างทางเดินของคำสั่ง

ในการควบคุมทางเดินของระบบเราสามารถแบ่งคำสั่งเป็นสเต็ปเล็กๆ แทนการสั่งเพียงครั้งเดียวซึ่งเป็นการสร้างคำสั่งโดยที่เราสามารถควบคุมความเร็วและความเร่งโดยอ้อมจากการแบ่งสเต็ปของคำสั่งในแต่ละคาบการสุ่มซึ่งเป็นไปตามรูปที่ 2.17 แสดงโปรไฟล์ของตำแหน่งและความเร็วของระบบควบคุมแบบจุดต่อจุด (Point to point control) ที่ต้องการให้ใช้เวลาในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งน้อยที่สุด และมีลักษณะแบบแบ่ง-แบ่ง (Bang-Bang control) ดังรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 โปรไฟล์ความเร็วแบบแวง-แวงสำหรับการควบคุมแบบจุดต่อจุด

โปรไฟล์นี้อาจจะถูกดัดแปลงให้มีช่วงความเร็วคงที่ระหว่างกลางหรือระหว่างช่วงความเร่งและช่วงความหน่วง (Dwell period) ก็ได้ดังแสดงในรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.19 โปรไฟล์ความเร็วที่ประกอบด้วยช่วงความเร็วและความเร่งคงที่ของโวลตเตจแอมพลิไฟ

โดยสมมติว่าความเร็วในการหมุนของมอเตอร์ในช่วงความเร่งคงที่จะไม่เกินค่าความเร็วสูงสุดของมอเตอร์ โปรไฟล์ความเร็วนี้จะใช้เป็นคำสั่งอ้างอิง (Command reference) ของระบบควบคุม ซึ่งโปรไฟล์ต่างๆ เป็นไปตามสมการดังต่อไปนี้

ช่วงแรกของวิถีทางการเคลื่อนที่ (ช่วงความเร่งคงที่) สามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\theta(t) = \frac{\alpha_m t^2}{2} \quad (2-32)$$

ระยะทางในการเคลื่อนที่ในช่วงนี้ก็คือ

$$\theta_1 = \frac{\alpha_m t_1^2}{2} \quad (2-33)$$

ความเร็วที่ปลายของช่วงคือ

$$\omega_m = \alpha_m t_1 \quad (2-33)$$

ช่วงที่สอง (ช่วงความเร็วคงที่) จะได้ว่า

$$\theta(t) = \theta_1 + \omega_m(t - t_1) \quad (2-34)$$

ตำแหน่งของปลายช่วงที่สองนี้จะอยู่ที่

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) + \omega_m(t_2 - t_1) \quad (2-35)$$

ช่วงที่สามหรือช่วงความหน่วง ตำแหน่งการหมุนของแกนมอเตอร์คือ

$$\theta(t) = \theta_2(t) + \omega_m(t - t_2) - \frac{\alpha_m(t_1 - t_2)^2}{2} \quad (2-36)$$

ตำแหน่งที่ปลายสุดของการเคลื่อนที่ที่สามารถหาได้โดยการแทนค่า $t = t_f$ คือ

$$\theta_f = \theta_2 + \omega_m(t - t_2) - \frac{\alpha_m t_2^2}{2} = \omega_m t_2 \quad (2-37)$$

$$t_1 = \frac{\omega_m}{\alpha_m} \quad \text{และ} \quad t_2 = \frac{\theta_f}{\omega_m}$$

และเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งหมดก็คือ

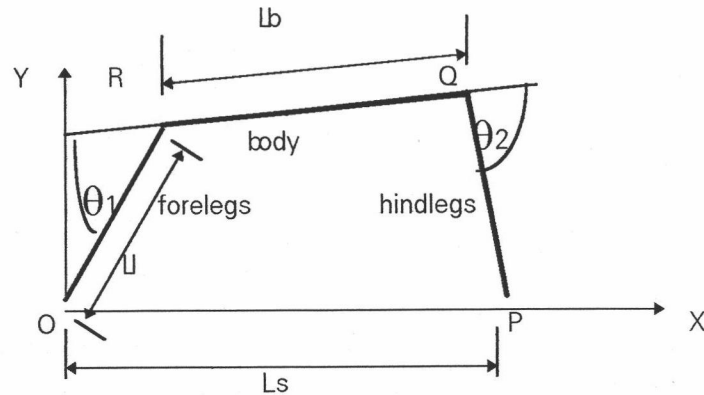
$$t_f = \frac{\omega_m}{\alpha_m} + \frac{\theta_f}{\omega_m} \quad (2-38)$$

สมการทางคณิตศาสตร์และระบบพารามิเตอร์ของหุ่นยนต์

จากกฎของCosine เมื่อพิจารณาสามเหลี่ยม ΔORQ

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{RQ}^2 - 2(\overline{OR})(\overline{OQ})\cos(180 - \theta_1) \quad (2-39)$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{L_1^2 + L_b^2 + 2L_1 L_b \cos \theta_1}$$



รูปที่ 2.20 แสดงแบบจำลองด้วยลิ่งค์ของหุ่นยนต์เดินด้วยกลไกสี่ลิ่งค์

จากกฎของ Cosine เมื่อพิจารณาสมาเหลี่ยม ΔRQO

$$L_l^2 = \overline{OQ}^2 + L_b^2 - 2\overline{OQ}L_b \cos \angle RQO \quad (2-40)$$

$$\angle RQO = \cos^{-1} \left[\frac{(L_b^2 + \overline{OQ}^2 - L_l^2)}{2L_b \overline{OQ}} \right]$$

หามุม $\angle OQP$ โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของ ΔOQP กับ ΔRQO จาก ΔRQP

$$\begin{aligned} \angle OQP &= \pi - \angle RQO - \theta_2 \\ L_s &= \sqrt{L_l^2 + \overline{OQ}^2 - 2L_l \overline{OQ} \cos \angle OQP} \end{aligned} \quad (2-41)$$

หามุม $\angle OPQ$ โดยพิจารณาสมาเหลี่ยม ΔOPQ จากกฎของ Cosine

$$\begin{aligned} \overline{OQ}^2 &= L_l^2 + L_s^2 - 2L_l L_s \cos \angle OPQ \\ \angle OPQ &= \cos^{-1} \left[\frac{(L_l^2 + L_s^2 - \overline{OQ}^2)}{2L_l L_s} \right] \end{aligned} \quad (2-42)$$

หามุม $\angle ROP$ โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของผลรวมมุมภายในสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360 องศา

$$\begin{aligned} \angle ROP &= 360 - (180 - \theta_1) - (180 - \theta_2) - \angle OPQ \\ \angle ROP &= \theta_1 + \theta_2 - \angle OPQ \end{aligned} \quad (2-43)$$

พิกัดของมุมของสี่เหลี่ยมคางหมู OPQR แสดงดังรูปที่ 2.20 คือ

$$(X_o, Y_o) = (0, 0) \quad (2-44)$$

$$(X_p, Y_p) = (L_s, 0) \quad (2-45)$$

$$(X_q, Y_q) = (L_s - L_l \cdot \cos \angle OPQ, L_l \cdot \sin \angle OPQ) \quad (2-44)$$

$$(X_r, Y_r) = (L_l \cdot \cos \angle ROP, L_l \cdot \sin \angle ROP) \quad (2-45)$$

พิกัดศูนย์กลางความโน้มถ่วง (X_g, Y_g) กำหนดได้โดยสมการตามนี้

$$C_g \text{ ของขาหน้า: } (X_{lfg}, Y_{lfg}) = (X_l / 2, Y_l / 2) \quad (2-46)$$

$$C_g \text{ ของขาหลัง: } (X_{lbg}, Y_{lbg}) = ((L_s - X_q) / 2, Y_q / 2) \quad (2-47)$$

$$C_g \text{ ของตัวหุ่น: } (X_{bg}, Y_{bg}) = (X + X_q - X_l) / 2, (Y - Y_q) / 2 \quad (2-48)$$

หาจุด CG รวมของทั้งเฟรมจากความสัมพันธ์ดังนี้

$$X_g \sum M_i = \sum X_i M_i \text{ และ } Y_g \sum M_i = \sum Y_i M_i$$

$$X_g(2M_l + M_b) = M_l X_{lfg} / 2 + M_l (L_s - X_q) / 2 + M_b (X_r + (X_q - X_l) / 2)$$

$$X_g = 1 / (2M_l + M_b) * (M_l X_{lfg} + M_l X_{lbg} + M_b X_{bg}) \quad (2-49)$$

$$Y_g(2M_l + M_b) = M_l Y_{lfg} / 2 + M_l Y_{lbg} / 2 + M_b (Y_r - Y_q) / 2$$

$$Y_g = 1 / (2M_l + M_b) * (M_l Y_{lfg} + M_l Y_{lbg} + M_b Y_{bg}) \quad (2-50)$$

จากสมการที่ (2-49) และ (2-50) นำมาเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังสมการที่ (2-51)

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \end{bmatrix} = \frac{1}{2M_l + M_b} \begin{bmatrix} M_l X_{lfg} + M_l X_{lbg} + M_b X_{bg} \\ M_l Y_{lfg} + M_l Y_{lbg} + M_b Y_{bg} \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

จากสมการที่ (2-51) เราได้สมการที่จะหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางที่จะใช้ในการสร้างความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสมการที่จะใช้ในการควบคุมเสถียรภาพของตัวหุ่นยนต์คือสมการที่ (2-52) และส่วนที่ใช้ในการควบคุมระยะทางที่จะใช้ในการก้าวเดินคือสมการที่ (2.53) ซึ่งมีรูปแบบความสัมพันธ์ดังนี้

$G_x =$ ค่าซึ่งบอกการเคลื่อนที่ของศูนย์กลางความโน้มถ่วงตามแนวแกน X ซึ่งกำหนดดังนี้

$$G_x = X_g - (X_p / 2) \quad (2-52)$$

จากสมการที่ (2-52) ค่าดังกล่าวเท่ากับศูนย์แสดงว่าเป็นสถานะเริ่มแรก คืออยู่ในท่ายืนเหยียดตรงและที่ค่าดังกล่าวมีค่าเป็นบวก แสดงว่าหุ่นยนต์มีการโน้มตัวไปทางด้านหลังซึ่งเราจะกำหนดให้เคลื่อนตัวได้สูงสุดที่ $X_g = X_p$ นั่นคือที่ $G_x = X_p / 2$ หรือในทางกลับกันเมื่อค่าดังกล่าวเป็นลบแสดงว่ามีการเคลื่อนที่โดยการเดินถอยหลัง โดยเราจะกำหนดให้การโน้มตัวเพื่อถอยเท้านั้นก่อนการเดิน ซึ่งมีขีดจำกัดที่จุดศูนย์กลางความโน้มถ่วงจะสามารถเคลื่อนตัวไปได้ระยะทางสูงสุดโดยไม่ทำให้เกิดการพลิกคว่ำ ที่พิกัดซึ่ง $X_g = 0$ นั่นคือที่ค่า $G_x = -X_p / 2$ ตามสมการทาง

คณิตศาสตร์โดยกำหนดให้ภาระที่กระทำฯ ที่ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้นตลอดการเคลื่อนที่ของเรา เราจะควบคุมตำแหน่งของศูนย์กลางโน้มถ่วง เพื่อที่จะทำให้การก้าวเดินของหุ่นยนต์ใช้กำลังขับเคลื่อนข้างน้อยก็สามารถที่จะเคลื่อนตัวไปได้

การควบคุมระยะทางในการก้าวของแต่ละการสุม คือระยะ $Td1$ สามารถควบคุมระยะการก้าวเดินด้วยสมการความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$Td1 = Ls - lb \quad (2-53)$$

สมการที่ (2-53) นี้เป็นการควบคุมการก้าวเดินแบบไกลหรือ Rub gait

ความหมายของพารามิเตอร์ที่ใช้ในการกำหนดส่วนต่างๆ ของตัวหุ่นมีดังนี้

Ll = ความยาวของขา ; Lb = ความยาวของตัว

Ml = มวลของขา ; Mb = มวลของลำตัว

θ_1 = มุมที่แนวขาหน้ากระทำกับแนวลำตัว ; θ_2 = มุมที่แนวขาหลังกระทำกับแนวลำตัว

$Td1$ = ระยะทางที่ก้าวเดินได้ในแต่ละรูปของการเดิน

Ls = ระยะห่างระหว่างขาหน้าและขาหลังตามแนวระดับของพื้นภายหลังจากการก้าวเดิน